Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Pietro Matildi

Sulla rappresentazione conforme di domini appartenenti a superficie di Riemann su domini di un tipo canonico assegnato

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 14, nº 1-4 (1948), p. 81-90

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_14_1-4_81_0>

SULLA RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI DOMINI APPARTENENTI A SUPERFICIE DI RIEMANN SU DOMINI DI UN TIPO CANONICO ASSEGNATO

di PIETRO MATILDI (Bari).

Premessa.

In base ai risultati esposti dal CECIONI in una nota del 1928 [1] sappiamo che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un dominio (connesso) A appartenente ad una superficie di RIEMANN Σ (che si suppone costituita da un numero finito di fogli piani sovrapposti) sia rappresentabile biunivocamente e conformemente sopra un altro dominio B, appartenente ad una superficie di RIEMANN Σ_1 (eventualmente diversa da Σ), oppure sopra un dominio simmetrico di B, è che i due domini abbiano le stesse equazioni caratteristiche, cioè che ad esse corrisponda la stessa classe reale di curve algebriche che, ricordiamo, appartengono al tipo ortosimmetrico.

Tale teorema estende un analogo teorema, per domini piani, dovuto allo SCHOTTKY [2].

Ricordando, a questo punto, che nel caso piano si cercò successivamente di determinare la possibilità ed il grado di indeterminazione del problema medesimo senza utilizzare la teoria delle curve algebriche, tentando anzi, in base ai risultati già ottenuti, di giungere a risultati di geometria birazionale delle curve algebriche reali attraverso proprietà della rappresentazione conforme, viene naturale di porsi un problema analogo nel caso di domini appartenenti a superficie di RIEMANN.

Si tratterà di trasformare, per rappresentazione conforme, un dominio arbitrario A, pluriconnesso, appartenente ad una superficie di RIEMANN, in un altro, di un tipo canonico assegnato e questo, se possibile, estendendo i risultati del piano.

---

(1) F. CECIONI: *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann* (Annali delle Università Toscane, volume 12, nuova serie (1928), pp. 27-88).

(2) SCHOTTKY: *Ueber die conforme Abbildung mehrfach Zusammenhängender ebener Flächen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXIII (1887), pp. 300-351).

La Sig.na LI CHIAVI in una nota del 1932 (3) risolve il problema estensione di quello del CECIONI (4) (piano su cui siano eseguiti tagli paralleli) fissando le condizioni indispensabili alla trasformazione medesima. Non è stato dato sinora, però, alcun teorema di trasformazione in cui i contorni del dominio canonico su cui deve appunto trasformarsi il dominio dato, siano costituiti o da circonferenze o da archi di circonferenza e, c'è da aspettarsi che, anche per domini appartenenti a superficie di RIEMANN, come già per il piano, siano proprio questi i teoremi di trasformazione più interessanti.

Mi propongo appunto, in questo lavoro, di trattare intanto un caso particolare e precisamente di dare l'estensione del teorema di trasformazione di RIEMANN, di trasformare cioè, per rappresentazione conforme, un dominio qualunque di una Riemanniana, dotata di un sol contorno, in un dominio il cui unico contorno sia circolare, ottenendo il risultato:

« *Ogni dominio, appartenente ad una Riemanniana pluriconnessa dotata di un sol contorno, di ordine di connessione* $N=2\sigma+1$, (5) *è rappresentabile conformemente e biunivocamente su un cerchio multiplo svolgentesi su un numero* λ (intero, sufficientemente grande come successivamente (n. 7) preciseremo) *di fogli piani, connessi l'uno all'altro mediante opportune sezioni di diramazione* (6) ».

1. – Domini appartenenti a superficie di Riemann.

Sia Σ una superficie di RIEMANN di genere p costituita come sopra abbiamo detto Supponiamo dato su Σ un dominio A non pseudosemplice (7) il cui contorno totale sia costituito da $\varrho+1$ contorni parziali C_0, C_1, ..., C_ϱ ciascuno dei

(3) M. S. LI CHIAVI: *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann su un' opportuna superficie di Riemann su cui siano eseguiti dei tagli paralleli* (Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Anno III (1932), pp. 95-127).

(4) Il JULIA (*Leçons sur la réprésentation conforme des aires multiplement connexes,* Fascicule XIV des Cahiers Scientifiques, 1934, Gauthier-Villars, Paris, p. 4) chiama tale problema: problema di Hilbert: quest'ultimo, nel 1909 (Nachrichten ....., Göttingen), dimostra ciò che già il CECIONI aveva dimostrato precedentemente nella nota: *Sulla rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse su un piano su cui siano eseguiti tagli paralleli* (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XXV, 1908). Per questo ritengo opportuno dare tale denominazione al problema suddetto.

(5) La definizione di ordine di connessione ed i simboli qui usati sono quegli stessi che il CECIONI usa nel lavoro citato in (4), pag. 33.

(6) Questo lavoro era già pronto da tempo, circostanze varie ne hanno ritardato la pubblicazione.

(7) Vedi: CECIONI, loc. cit. in (1), pag. 32.

quali supporremo costituito da una linea nel senso di JORDAN, continua, chiusa, priva di nodi ([8]).

Siano σ precisamente i tagli rientranti interni ad A, non aventi punti a comune, che non rompono la connessione di A, mentre $\sigma+1$ tagli rientranti qualsiasi (ancora interni ad A e non aventi punti a comune) sempre rompono la connessione di A.

Le considerazioni svolte dal CECIONI nella nota citata in ([1]) portano ad affermare che esistono σ retrosezioni (a_h, b_h) $(h=1, 2, \ldots, \sigma)$ della Riemanniana Σ interne al dominio A e non ne esistano più di σ distinte.

Di qui segue che l'ordine di connessione di A è $2\sigma+\varrho+1$.

Ricordando a questo punto come una superficie di RIEMANN di genere p possa trasformarsi ad esempio in una superficie del tipo « sfera con p manici » tale che la corrispondenza intercedente tra i punti dell'una e dell'altra sia biunivoca e continua, possiamo senz'altro trasformare intanto la superficie Σ in una sfera con p manici: S.

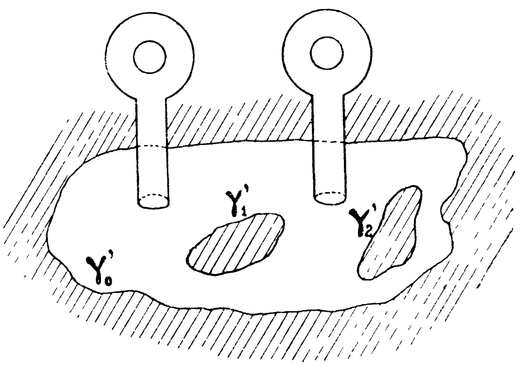

Fig. 1.

In virtù della corrispondenza intercedente tra i punti di Σ e quelli di S, ad A, appartenente a Σ, viene a corrispondere su S un dominio $\bar{A}$ dotato di certi contorni $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\varrho$ corrispondenti ai $C_0, C_1, \ldots, C_\varrho$ di A.

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\varrho$ risultano ovviamente contorni di regioni di S non appartenenti ad $\bar{A}$, regioni che possono anche mancare, in parte o totalmente, bastando per questo che qualcuno dei contorni γ_i $(i=1, 2, \ldots, \varrho)$, nel caso limite tutti, si riduca ad una linea doppia (o taglio) su S. Potrà darsi benissimo che qualcuna di tali regioni contenga nell'interno un manico di S e questo capiterà certamente per almeno una di esse quando $\sigma<p$.

Ciò premesso, possiamo senz'altro dare un modello topologico semplicissimo di A. Basta, allo scopo, considerare uno qualunque dei contorni γ_i di S, ad esempio γ_0 (il fatto che γ_0 possa essere un taglio non porta alcuna difficoltà) e supporre di dilatarlo operando contemporaneamente sulla porzione di S appartenente ad $\bar{A}$, lasciando inalterati i manici, sino a che quest'ultima superficie (manici esclusi) risulti distesa su un piano ed il trasformato di γ_0 ne risulti contorno esterno.

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\varrho$ si trasformeranno in certi $\gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_\varrho'$ contorni del nuovo campo $\bar{\bar{A}}$ cui competeranno tanti manici quanti ne competevano ad $\bar{A}$ (fig. 1).

([8]) Questa ipotesi è sufficiente per ora, in seguito però, vedremo, andrà ristretta.

I punti del campo $\overline{\overline{A}}$, per il modo in cui sono stati ottenuti, sono in corrispondenza biunivoca e continua con quelli di $\overline{A}$ e quindi di A ed $\overline{\overline{A}}$ offre un modello topologico semplicissimo del dominio A di partenza.

Le retrosezioni (a_h, b_h) $(h=1, 2, \ldots, \sigma)$ hanno ancora, per $\overline{\overline{A}}$, il significato che avevano per la superficie di RIEMANN di partenza.

2. – Introduzione, su A, di un sistema completo di funzioni Φ.

Formuliamo, a questo punto, l'ipotesi che ciascuno dei contorni di A, del tipo descritto al n. 1, sia costituito da un numero finito di archi di linee regolari analitiche.

In tale ipotesi che, vedremo, sarà essenziale per tutto ciò che segue, la Sig.na LI CHIAVI, nel suo lavoro citato in (3) introduce su A certe $\varrho+1$ funzioni

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_\varrho,$$

la Φ_h $(h=0, 1, \ldots, \varrho)$ essendo così definita:

1) sul contorno C_h ha parte immaginaria i; sugli altri contorni ha parte immaginaria zero,

2) è regolare in ogni punto interno e del contorno di A rispetto alla variabile principale nell'area considerata (9),

3) ha nell'area periodi tutti reali.

Vengono date successivamente le proprietà di tali funzioni: la loro somma è (evidentemente) costante, ma ϱ qualunque di esse, ad es.

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\varrho \tag{1}$$

sono linearmente indipendenti. Inoltre, tali funzioni, interpretate su una Riemanniana R (di genere $2\sigma+\varrho$) che, secondo la teoria di SCHOTTKY-CECIONI sopra ricordata (1) corrisponde all'area A, danno altrettanti integrali Abeliani di prima specie; e quelli corrispondenti a ϱ di esse, ad es. alle (1), sono dunque linearmente indipendenti.

Ciò posto, definiamo, su A, altre 2σ funzioni

$$\Phi_{\varrho+1}, \ldots, \Phi_{\varrho+\sigma}, \Phi_{\varrho+\sigma+1}, \ldots, \Phi_{\varrho+2\sigma}, \tag{2}$$

nel modo seguente:

la $\Phi_{\varrho+r}$ $(r=1, 2, \ldots, \sigma)$

1) sia reale sui contorni $C_0, C_1, \ldots, C_\varrho$,

2) abbia periodi tutti reali tranne che per giri lungo a_r dove ha periodo con parte immaginaria $2\pi i$,

---

(9) Vedi: CECIONI, loc. cit. in (1), pag. 43.

3) sia regolare in tutti i punti interni e del contorno di A;

la $\Phi_{\varrho-\sigma+r}$ $(r=1, 2,..., \sigma)$

1) sia reale sui contorni $C_0, C_1, ..., C_\varrho$,

2) abbia periodi tutti reali tranne che per giri lungo b_r dove ha periodi con parte immaginaria $2\pi i$,

3) sia regolare in tutti i punti interni e del contorno di A.

Con ragionamenti analoghi a quelli seguiti nei lavori sopra citati si prova facilmente *l'esistenza delle funzioni* (2) ed analogamente pure si prova che *il sistema completo delle funzioni* (1) *e* (2)

$$\Phi_0, ..., \Phi_{r-1}, \Phi_{r+1}, ..., \Phi_\varrho, \Phi_{\varrho+1}, ..., \Phi_{\varrho+\sigma}, \Phi_{\varrho+\sigma+1}, ..., \Phi_{\varrho+2\sigma} \quad (r=0, 1, 2, ..., \varrho)$$

interpretato sulla Riemanniana R corrispondente ad A secondo le teorie sopra citate ([1]) *dà un sistema completo di integrali Abeliani di prima specie linearmente indipendenti, i quali godono della proprietà di avere la parte immaginaria costante su ciascuna linea reale di R.*

3. – Risoluzione del problema.

Siamo ora in grado di affrontare il problema posto inizialmente. Il dominio A, dotato di σ retrosezioni interne, abbia un sol contorno (costituito, ricordiamo, da un numero finito di archi regolari di linee analitiche); è quindi $\varrho=0$. Il dominio B su cui vogliamo trasformare A, (che potremo sempre supporre non pseudosemplice dato che, se così non fosse, la risoluzione di RIEMANN nel caso piano di un sol contorno basterebbe anche in questo caso, dopo avere operato una trasformazione preliminare sul campo A) per ovvie ragioni di " Analysis situs ", dovrà svolgersi su un numero $\lambda \geqslant 2$ di fogli piani; se quindi noi vogliamo che al dominio A venga a corrispondere la porzione di superficie di RIEMANN interna ad un contorno circolare, potremo caratterizzare il dominio B nel modo seguente: " *Porzione di una superficie di Riemann svolgentesi tutta a distanza finita, su un numero $\lambda \geqslant 2$ di fogli piani opportunamente collegati tra loro mediante sezioni di diramazione ed aventi per contorno una circonferenza multipla* (col centro nell' origine) ".

È questa la più naturale estensione del caso piano trattato da RIEMANN.

Supponiamo che A sia effettivamente rappresentabile su di una superficie B del tipo sopra descritto: questo porta come conseguenza l' esistenza, su A, di una funzione trasformatrice:

$$w=w(z)$$

la quale

1) ha, su C_0, modulo costante che supporremo $=1$,

2) regolare ovunque all' interno e sul contorno di A, ammette ivi λ (intero, per ora indeterminato, $\geqslant 2$) punti distinti $a_1, a_2, ..., a_\lambda$ quali zeri che potremo

sempre supporre del primo ordine; il suo argomento aumenta quindi di $2\pi\lambda$ per un giro attorno a C_0 nel verso positivo ([10]),

3) è monodroma in A.

Se, quindi, consideriamo la funzione log $w(z)$ e poniamo:

$$\log w(z) = i\varphi(z),$$

cioè

$$\varphi(z) = -i \log w(z),$$

la $\varphi(z)$ così definita

1) è reale al contorno,

2) diviene logaritmicamente infinita in λ punti $a_1, a_2, \dots, a_\lambda$ di A come $-i \log (z - a_r)$ $(r = 1, 2, \dots, \lambda)$ ed è regolare in tutti gli altri punti di A, contorno compreso,

3) la sua parte reale aumenta di $2\pi\lambda$ per un giro nel verso positivo attorno a C_0; per questo basta che aumenti ad es. di 2π per un giro, nel verso positivo, attorno ad a_r $(r = 1, 2, \dots, \lambda)$.

Alle retrosezioni, se aumenta, non può che aumentare di multipli di 2π.

La funzione $\varphi(z)$ non ammette alcun' altra periodicità, in A, indipendente da queste. Il nostro problema è così ricondotto alla costruzione di tale funzione $\varphi(z)$.

4. – Per questo, fissati λ (intero $\geqslant 2$, per ora indeterminato) punti distinti generici interni ad A, poniamo

$$-i \log (z - a_r) = u_r + iv_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, \lambda),$$

v_r è monodroma in A, ma non finita, i valori di $-v_r$ al contorno determinano una funzione V_r armonica, monodroma e finita in A, la cui coniugata U_r (determinata a meno di una costante reale additiva) è polidroma, in generale, in A.

Posto

$$U_r + i V_r = f_r(z), \qquad (r = 1, 2, \dots, \lambda),$$

$f_r(z)$ risulta avere in A periodi reali.

Poniamo

$$f_r(z) - i \log (z - a_r) = \chi_r(z).$$

Questa funzione gode in A delle seguenti proprietà:

1) è reale al contorno,

2) ha il comportamento di $-i \log (z - a_r)$ in a_r ed è regolare in tutti gli altri punti di A, contorno compreso,

3) ha in A periodi reali alle retrosezioni oltre alle periodicità di 2π per giri intorno ad a_r e pertanto di 2π per giri intorno a C_0.

([10]) Fissiamo come di consueto, quale verso di rotazione positivo il verso che conduce dall' asse reale positivo all' asse immaginario positivo attraverso l' angolo retto.

Se quindi consideriamo la funzione

$$\chi = \chi_1(z) + \chi_2(z) + \ldots + \chi_\lambda(z),$$

essa

1) è reale al contorno,

2) ha il comportamento di $-\log(z-a_r)$ in a_r $(r=1, 2, \ldots, \lambda)$ ed è regolare in tutti gli altri punti di A contorno compreso,

3) ha in A periodi di 2π relativamente agli a_r e reali alle retrosezioni (a_h, b_h) $(h=1, 2, \ldots, \sigma)$ (e quindi periodicità di $2\pi\lambda$ relativamente a C_0); non ammette alcuna altra periodicità in A.

Essa gode pertanto di tutte le proprietà che si richiedevano per la funzione incognita $\varphi(z)$ con una sola eccezione: la χ ammette periodicità (reali) alle retrosezioni.

Nostro problema sarà, pertanto, a questo punto, il seguente: Vedere se è possibile, prendendo i punti $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ in modo opportuno, rendere tali periodicità multiple, secondo numeri interi, di 2π.

5. – Indichiamo come segue

	$a_1\ a_2 \ldots a_\sigma\ b_1\ b_2 \ldots b_\sigma$
χ	$A_1\ A_2 \ldots A_\sigma\ B_1\ B_2 \ldots B_\sigma$

le periodicità suddette ai cicli indicati.

Queste periodicità si possono calcolare ripetendo un procedimento ben noto nella teoria degli integrali abeliani.

Indichiamo con Δ il percorso segnato in fig. 2 su $\overline{\overline{A}}$, corrispondente ad A secondo quanto è stato detto al n. 1.

Avremo:

$$\int_\Delta \Phi_r \frac{d\chi}{dz}\, dz = 0, \qquad (3)$$
$$(r=1, 2, \ldots, 2\sigma),$$

essendo Φ_r una qualunque tra le 2σ funzioni Φ introdotte al n. 2 e χ la funzione introdotta al n. 4.

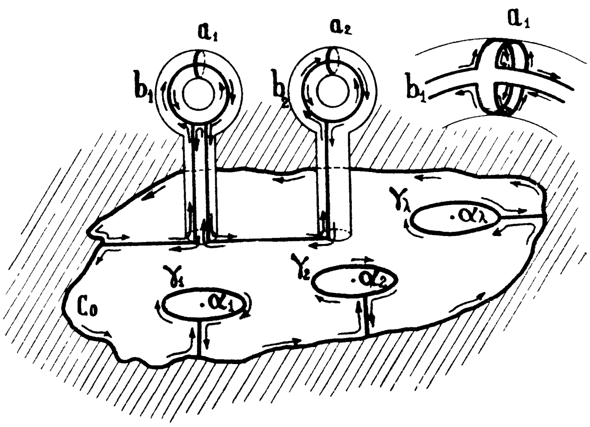

Fig. 2.

D' altra parte questo integrale, calcolato direttamente trascurando gli addendi reali risulta,

$$\int_{\dot{A}} \Phi_r \frac{d\chi}{dz} dz = \text{reale } -2\pi i B_r + 2\pi \sum_{s=1}^{\lambda} \Phi_r(a_s), \qquad (r=1, 2, ..., \sigma),$$

$$\int_{\dot{A}} \Phi_r \frac{d\chi}{dz} dz = \text{reale } +2\pi i A_{r-\sigma} + 2\pi \sum_{s=1}^{\lambda} \Phi_r(a_s), \qquad (r=\sigma+1, ..., 2\sigma).$$

Per le (3), posto

$$\Phi_r(a) = \varphi_r(a) + i\psi_r(a), \qquad (r=1, 2, ..., 2\sigma),$$

risulta:

$$B_r = \sum_{s=1}^{\lambda} \psi_r(a_s), \qquad (r=1, 2, ..., \sigma),$$

$$A_{r-\sigma} = -\sum_{s=1}^{\lambda} \psi_r(a_s), \qquad (r=\sigma+1, ..., 2\sigma),$$

Resta da far vedere che può determinarsi λ in modo che si abbia

$$\sum_{s=1}^{\lambda} \psi_r(a_s) = 2\pi m_r$$

per $r=1, 2, ..., 2\sigma$, essendo gli m_r numeri interi.

6. – Consideriamo, allo scopo, una curva algebrica C di grado n corrispondente, secondo la teoria del CECIONI [1], all'area A.

Essa, sappiamo, è reale ed una Riemanniana qualunque R (di ordine n) ad essa corrispondente ha genere $p=2\sigma$, è dotata di un circuito reale γ in corrispondenza dell' unico contorno di A e presenta il caso ortosimmetrico.

Il sistema completo di funzioni Φ_r $(r=1, 2, ..., 2\sigma)$ che nel nostro caso compete ad A, dà, interpretato su R, un sistema di integrali abeliani di prima specie $J_1, J_2, ..., J_{2\sigma}$ (linearmente indipendenti) aventi parte immaginaria nulla sull' unico circuito reale γ di R.

Se, a questo punto, consideriamo una qualunque curva algebrica di grado g (intero $\geqslant 1$, per ora indeterminato) la cui equazione sia a coefficienti reali, essa incontrerà la C in gn punti,

$$\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_{gn},$$

reali o immaginari coniugati, punti quindi che, su R, risulteranno o appartenenti a γ o a coppie simmetrici rispetto ad essa.

Ricordato ora che la R, superficie di RIEMANN corrispondente ad A, è simmetrica (tale simmetria non è altro che il coniugio $x' = \bar{x}$; $y' = \bar{y}$ (11) e presenta il caso ortosimmetrico, cioè è spezzata da γ in due parti, l' una simmetrica dell' altra delle quali l' una è rappresentabile conformemente e biunivocamente su A, l'altra, sulla simmetrica di A; diciamo R_1 la parte di R che corrisponde ad A.

Fissiamo, su questa, un numero gn di punti generici $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{gn}$ prendendo g in modo che sia

$$gn \leqslant \frac{g(g+3)}{2},$$

cioè

$$g \geqslant 2n-3. \tag{4}$$

Per questi punti passa almeno una curva D_2 di grado g (12).

I punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{gn}$ sono i punti in cui tale curva D_2 incontra la C.

Per il teorema di ABEL avremo, per ogni J_r $(r=1, 2, \ldots, 2\sigma)$,

$$\sum_{k=1}^{gn} J_r(\beta_k) = \sum_{k=1}^{gn} J_r(\zeta_k) + \text{ reale } + 2\pi m_r i \tag{5}$$

Fissiamo ora un' origine di integrazione per gli J_r in un punto qualunque di γ e ricordiamo che, su γ, gli J_r sono reali.

Se allora con ζ^* indichiamo il generico tra i punti ζ_k $(k=1, 2, \ldots, gn)$ che stanno su γ e con ζ^{**}, $\bar{\zeta}^{**}$ la generica tra le coppie di punti ζ_k simmetrici rispetto a γ avremo:

$$J_r(\zeta^*) = \text{ reale}, \qquad (r=1, 2, \ldots, 2\sigma),$$

ed inoltre $J_r(\zeta^{**})$ e $J_r(\bar{\zeta}^{**})$, $(r=1, 2, \ldots, 2\sigma)$, complessi coniugati e perciò:

$$J_r(\zeta^{**}) + J_r(\bar{\zeta}^{**}) = \text{ reale.}$$

Ne segue

$$\sum_{k=1}^{gn} J_r(\zeta_k) = \text{ reale}, \qquad (r=1, 2, \ldots, 2\sigma),$$

per cui la (5) diviene:

$$\sum_{k=1}^{gn} J_r(\beta_k) = \text{ reale} + 2\pi m_r i.$$

---

(11) Dove $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ rappresentano, rispettivamente, i complessi coniugati di x ed y.

(12) Ricordiamo che una curva algebrica di grado g è pienamente determinata dal passaggio per $\frac{g(g+3)}{2}$ punti generici.

Ritornando all'area A diciamo

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_{gn},$$

con $g \geqslant 2n-3$, i punti di A corrispondenti a

$$\beta_1, \ \beta_2, \ldots, \ \beta_{gn}.$$

Per essi avremo

$$\sum_{k=1}^{gn} \Phi_r(a_k) = \text{reale} + 2\pi m_r i, \qquad (r=1, 2, \ldots, 2\sigma),$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{gn} \psi_r(a_k) = 2\pi m_r, \qquad (r=1, 2, \ldots, 2\sigma),$$

come appunto volevamo.

7. - Il numero λ, sino a questo punto indeterminato, assuma ora il valore $\lambda = gn$ con $g \geqslant 2n-3$. Si ha per esso la limitazione

$$\lambda \geqslant n(2n-3), \tag{6}$$

essendo n un numero che sia grado di una curva caratteristica di A (ad es. il minimo).

La funzione trasformatrice che il nostro problema richiedeva è data quindi da

$$w = w(z) = e^{i\chi},$$

la quale soddisfa a tutte le proprietà che per essa erano richieste. È poi facile verificare che tale funzione esegue la trasformazione conforme richiesta. Per le proprietà della funzione $\chi(z)$ (n. 4), ossia della $\varphi(z)$ (n. 3), si vede subito, infatti, che $w(z)$ è monodroma in A, regolare ovunque in A e sul contorno (nei punti a_k ha degli infinitesimi) ed ha modulo uno sul contorno C_0. Per il teorema dell'indicatore logaritmico essa non prende in A alcun valore di modulo maggiore di uno e prende λ volte ogni valore di modulo minore di uno (contando le molteplicità). Ragionamenti noti ([13]) provano allora che essa effettua la trasformazione voluta.

([13]) Cfr. ad es. G. JULIA: « *Sur la répresentation conforme des aires multiplement connexes* ». Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. II, Vol. I (1932), pp. 113-138