ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

IACOPO BARSOTTI

Elementi algebrici di algebre divisorie non algebriche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 14, nº 1-4 (1948), p. 31-45

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_14_1-4_31_0>

ELEMENTI ALGEBRICI
DI ALGEBRE DIVISORIE NON ALGEBRICHE

di IACOPO BARSOTTI (Pisa).

1. – Notazioni e risultati preparatori.

La struttura delle algebre che contengono elementi trascendenti sul loro centro è fino ad ora quasi completamente ignota, se si eccettuano gli esempi effettivamente costruiti di campi polinomiali non commutativi; tali campi sorsero dallo studio formale delle equazioni differenziali lineari, e furono studiati in [13] [14] [16] (¹); un compendio della teoria di tali algebre è esposto nel capitolo 3 di [8], ed una loro interessante applicazione è data in [7]. Benchè la costruzione di tali algebre sia possibile « effettivamente », tuttavia non è molto ciò che è noto sulla loro struttura algebrica (mentre le proprietà aritmetiche sono studiate a fondo in [8]); non è neppure noto, in generale, quale ne sia il centro, se si eccettuano due casi-limite studiati in [5]. La semplicità e completezza della trattazione di STEINITZ [15] dei prolungamenti trascendenti di corpi, è dovuta, per buona parte, al fatto che in ogni prolungamento trascendente del corpo $\mathfrak{F}$ è contenuto un ben determinato « sottocorpo algebrico (su $\mathfrak{F}$) massimo ». Allo studio del problema analogo per le algebre di polinomi non commutativi è dedicato il presente lavoro; incidentalmente si troveranno altre proprietà del centro delle algebre considerate, la cui dimostrazione col metodo diretto usato in [5] sarebbe stata eccessivamente laboriosa.

Se $\mathfrak{D}$ è un'algebra con modulo sopra il corpo $\mathfrak{F}$, mentre σ è un subisomorfismo (cfr. [5]) di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, e x è un'indeterminata, si indicherà con $\mathfrak{D}[x, \sigma]$ l'anello dei polinomi nell'indeterminata x, con coefficienti a sinistra in $\mathfrak{D}$, e col prodotto definito per mezzo della $xa = a^\sigma x$ se $a \varepsilon \mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}[x, \sigma]$ può essere considerato come un'algebra trascendente su $\mathfrak{F}$. Sia invece x non una indeterminata, ma un elemento di un'algebra $\mathfrak{A} > \mathfrak{D}$, e sia tale che $xa = a^\sigma x$ se $a \varepsilon \mathfrak{D}$, e che inoltre esistano degli elementi non tutti nulli $a_0, \dots, a_n$ di $\mathfrak{D}$ tali che $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots$

(¹) I numeri in parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della nota.

$+a_n=0$; in tal caso la minima sub-algebra di $\mathfrak{A}$ che contiene $\mathfrak{D}$ ed x si indicherà ancora con $\mathfrak{D}[x, \sigma]$. Infine, se x è un'indeterminata, si indicherà con $\mathfrak{D}(x, \sigma)$ l'anello quoziente, quando esiste (cfr. pagg. 118, 119 di [8]), di $\mathfrak{D}[x, \sigma]$. Se $\mathfrak{D}$ è divisoria, è noto da [14] che $\mathfrak{D}(x, \sigma)$ esiste.

Nel seguito si dovranno considerare tipi speciali di algebre di tipo 2, per la cui designazione è opportuno introdurre una locuzione: un'algebra $\mathfrak{D}$ sul corpo $\mathfrak{F}$ si dirà di *tipo* 2′ se ogni insieme di un numero finito di suoi elementi è contenuto in una sub-algebra $\mathfrak{B}$ di $\mathfrak{D}$, a base finita su $\mathfrak{F}$, e tale che il suo centro sia un prolungamento normale di $\mathfrak{F}$. Si dirà invece di *tipo* 2 quando soddisfa alle stesse proprietà di un'algebra di tipo 2′, eccettuata al più l'ultima condizione relativa al centro. Si tenga inoltre presente che, in base alla uguaglianza (35) di [5], si ha il

LEMMA 1. - *Sia $\mathfrak{D}$ un' algebra divisoria sul corpo $\mathfrak{F}$, x un' indeterminata, σ un subisomorfismo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$; esistono allora una sub-algebra $\mathfrak{H}$ di $\mathfrak{D}(x, \sigma)$ su $\mathfrak{F}$, ed un suo autoisomorfismo τ su $\mathfrak{F}$, tali che $\mathfrak{D} \leqslant \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}(x, \sigma)=\mathfrak{H}(x, \tau)$, mentre τ induce σ su $\mathfrak{D}$; se $\mathfrak{D}$ è algebrica su $\mathfrak{F}$, tale è $\mathfrak{H}$; se $\mathfrak{D}$ è di tipo* 1, *o* 2, *o* 2′, *tale è $\mathfrak{H}$; se $\mathfrak{D}$ è di tipo* 1 *speciale* (cfr. [6]), *tale è $\mathfrak{H}$, e $\mathfrak{D}$ ed $\mathfrak{H}$ hanno la stessa sub-algebra caratteristica*; *in ogni caso, ogni sub-algebra a base finita di $\mathfrak{H}$ è isomorfa, secondo una potenza di τ, ad una sub-algebra di $\mathfrak{D}$.*

Questo lemma permette di limitare le ricerche al caso in cui σ è un autoisomorfismo il che dà, in qualche caso, una sensibile semplificazione degli enunciati e delle dimostrazioni.

LEMMA 2 (²). - *Sia $\mathfrak{B}$ un' algebra divisoria a base finita sul corpo $\mathfrak{F}$, tale che il suo centro $\mathcal{C}$ sia normale su $\mathfrak{F}$; sia $\mathfrak{K}$ un prolungamento normale separabile di grado finito g su $\mathfrak{F}$; allora* (³) $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}=\mathfrak{D}_1\times\mathfrak{M}_1\dotplus\ldots\dotplus\mathfrak{D}_r\times\mathfrak{M}_r$, *ove le $\mathfrak{D}_i$ sono divisorie, a due a due isomorfe su $\mathfrak{K}$, e le $\mathfrak{M}_i$ sono regolari di uno stesso grado s su $\mathfrak{K}$; inoltre rs è un divisore di g, ed è $=g$ se, e solo se $\mathfrak{K}$ è isomorfo ad un sottocorpo di $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{F}$.*

Dimostrazione. - Sia $\mathfrak{K}_0 \cong \mathfrak{K}$ un corpo contenuto in un prolungamento algebricamente chiuso di $\mathfrak{F}$ che contenga anche $\mathcal{C}$, e sia $\Phi_0=\mathcal{C} \wedge \mathfrak{K}_0$; sia inoltre $\Phi \cong \Phi_0$ sottocorpo di $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$; allora Φ è normale separabile su $\mathfrak{F}$, e quindi, per il teorema 33, pag. 35, di [1], è $\mathfrak{B}_{\Phi}=\mathfrak{B}_1\dotplus\ldots\dotplus\mathfrak{B}_r$, ove $\mathfrak{B}_i$ è un'algebra su Φ che è equivalente a $\mathfrak{B}$ se considerata su Φ_0; inoltre $r=[\Phi:\mathfrak{F}]$. Sia Φ_i il sottocorpo di $\mathfrak{B}_i$ che corrisponde a Φ_0 in tale isomorfismo, e sia $\mathcal{C}_i$ il centro

(²) Questo lemma non è che una riunione di risultati noti. Non pare però che sia mai stato enunciato esplicitamente sotto questa forma.

(³) Qui, come sempre nel seguito, si intende che i moduli di algebre che compaiono come fattori in un prodotto diretto siano coincidenti.

di $\mathfrak{B}_i$, onde $\mathcal{C}_i \simeq \mathcal{C}$. Inoltre:

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B}_{1\mathfrak{K}} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{B}_{r\mathfrak{K}} ;$$

sia $c_1, \ldots, c_n$ una base di $\mathcal{C}_1$ su Φ ; $1, k, \ldots, k^{\frac{g}{r}-1}$ una base di $\mathfrak{K}$ su Φ ; $u_1, \ldots, u_m$ una base di $\mathfrak{B}_1$ su $\mathcal{C}_1$; allora una base di $\mathfrak{B}_{1\mathfrak{K}}$ su Φ è data dagli elementi $c_i k^j u_l$ $(i=1,\ldots, n\ ;\ j=0,\ldots, (g/r)-1\ ;\ l=1,\ldots, m)$; ma l'insieme dei $c_i k^j$ è base di un'algebra su Φ che è isomorfa al corpo $\mathcal{C} \times \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{H}$ (questo è un corpo perchè $\mathcal{C} \wedge \mathfrak{K}_0 = \Phi_0$) ; perciò $\mathfrak{B}_{1\mathfrak{K}}$ è, considerata su $\mathcal{C}_1$, isomorfa a $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{H} = \mathfrak{B}_{1\mathfrak{H}}$ considerata su $\mathcal{C}_1$; ma $\mathfrak{B}_1$ è normale divisoria su $\mathcal{C}_1$, onde $\mathfrak{B}_{1\mathfrak{H}}$ è semplice normale su $\mathfrak{H}$, ed è data, su $\mathfrak{H}$, da $\mathfrak{D}_1' \times \mathfrak{M}'$, ove $\mathfrak{D}_1'$ è normale divisoria su $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}'$ è regolare su $\mathfrak{H}$, di un grado s che è divisore di $[\mathfrak{H} : \mathcal{C}_1] = [\mathfrak{K} : \Phi] = g/r$ (cfr. il teorema di riduzione dell'indice in [1]) ; quindi è anche $\mathfrak{B}_{1\mathfrak{K}} = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{M}_1$, e analogamente $\mathfrak{B}_{i\mathfrak{K}} = \mathfrak{D}_i \times \mathfrak{M}_i$, con le $\mathfrak{D}_i$, $\mathfrak{M}_i$ soddisfacenti alle condizioni richieste. Si ha poi $rs=g$, ossia $s=g/r$, se, e solo se $\mathfrak{H}$ è isomorfo ad un sottocorpo di $\mathfrak{B}_1$ su $\mathcal{C}_1$ (cfr. il teorema 24, pag. 61, di [1]), ossia di $\mathfrak{B}$ su $\mathcal{C}$; e ciò accade se, e solo se $\mathfrak{K}$ è isomorfo ad un sottocorpo di $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{F}$, c. v. d..

Il lemma 2 si può anche esprimere nel modo seguente:

LEMMA 3. - *Sia $\mathfrak{B}$ un'algebra divisoria a base finita sul corpo $\mathfrak{F}$, tale che il suo centro sia normale su $\mathfrak{F}$; sia $\mathfrak{K}$ un prolungamento normale separabile di grado finito g su $\mathfrak{F}$; allora ogni decomposizione del modulo di $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$ come somma di automoduli primitivi a 2 a 2 nullifici contiene lo stesso numero p di termini*; *p divide g, ed è eguale a g se, e solo se $\mathfrak{K}$ è isomorfo ad un sottocorpo di $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{F}$.*

LEMMA 4. - *Sia $\mathfrak{D}$ un'algebra divisoria sul corpo $\mathfrak{F}$, e sia $\mathfrak{K}$ un'algebra a base finita di ordine g su $\mathfrak{F}$ e dotata di modulo*; *allora in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}$ sono soddisfatte le condizioni della catena ascendente e discendente per gli ideali sinistri (destri)* ; *$\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}$ possiede automoduli primitivi, e ve ne possono essere al massimo g a 2 a 2 nullifici.*

Dimostrazione. - L'anello $\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}$ è un $\mathfrak{D}$-modulo sinistro; se $k_1, \ldots, k_g$ è una base di $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$, è $\mathfrak{D} \times \mathfrak{K} = k_1 \mathfrak{D} \boxplus \ldots \boxplus k_g \mathfrak{D}$, onde $\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}$ è completamente riducibile e abeliano, e perciò [12] soddisfa alle condizioni della catena per i sub-moduli; ma ogni ideale sinistro è un sub-modulo, onde $\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}$ soddisfa alle condizioni della catena anche per gli ideali sinistri. Inoltre la lunghezza di una catena di ideali sinistri non può essere maggiore della lunghezza di una catena di sub-moduli; essa è perciò sempre $\leqslant g$; perciò, per quanto esposto nel n. 9 di [12], il modulo di $\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}$ è somma di al massimo g automoduli a 2 a 2 nullifici, il che prova che $\mathfrak{D} \times \mathfrak{K}$ possiede automoduli primitivi, c. v. d..

LEMMA 5. - *Sia*: *$\mathfrak{D}$ un'algebra divisoria di tipo 2' sul corpo $\mathfrak{F}$* ; *$\mathfrak{K}$ un prolungamento normale separabile di grado finito g su $\mathfrak{F}$* ; *allora $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ è somma diretta di un numero finito di algebre semplici, ciascuna delle* *quali è prodotto diretto di un' algebra divisoria per una regolare a base finita. Il modulo di* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ *è somma di* g *automoduli primitivi a* 2 *a* 2 *nullifici se, e solo se* $\mathfrak{K}$ *è sottocorpo di* $\mathfrak{D}$ *su* $\mathfrak{F}$.

Dimostrazione. - Intanto $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ è di tipo 2, e si vede facilmente che un numero finito di elementi di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ è sempre contenuto in una sub-algebra $\mathfrak{B}$ a base finita di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ che è estensione in $\mathfrak{K}$ di una sub-algebra a base finita di $\mathfrak{D}$ il cui centro è normale su $\mathfrak{F}$; ed allora per il lemma 2 $\mathfrak{B}$ è semisemplice. Sia $\mathfrak{R} > 0$ il radicale di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$, e $\mathfrak{B}$ sia una sub-algebra semisemplice di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ che contenga elementi non nulli sia di $\mathfrak{R}$, che di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ ma non di $\mathfrak{R}$; allora $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{B}$ è una sub-algebra invariante propria non nulla di $\mathfrak{B}$; poichè in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ è soddisfatta la condizione della catena discendente per gli ideali sinistri (lemma 4), dal teorema 9 di [10] si deduce che $\mathfrak{R}$, e quindi $\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{B}$, è pseudonullo, il che è assurdo perchè $\mathfrak{B}$ è semisemplice. Quindi $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ è semisemplice. Ed allora, per il teorema 27 di [10], essa è somma diretta di un numero finito di algebre semplici $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_t$; poichè, per il lemma 4, il modulo di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ è somma di un numero finito di automoduli primitivi, lo stesso accade in ogni $\mathfrak{A}_i$; inoltre ogni $\mathfrak{A}_i$ è algebrica su $\mathfrak{F}$: quindi, per un teorema di [4], ogni $\mathfrak{A}_i$ è prodotto diretto di un' algebra divisoria per una regolare a base finita. Se $\mathfrak{K}$ è sottocorpo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{K}$ è sottocorpo anche di qualche sub-algebra $\mathfrak{B}$ a base finita di $\mathfrak{D}$, il cui centro è normale su $\mathfrak{F}$; quindi il modulo è già somma di g automoduli a 2 a 2 nullifici in $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$, e perciò lo è anche in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$. Viceversa, se in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ il modulo è somma di g automoduli a 2 a 2 nullifici $v_1,\ldots, v_g$, sia $v_i = \Sigma_j k_{ij} d_j$, ove $\{d_j\}$ è una base di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, e $k_{ij} \varepsilon \mathfrak{K}$; sia poi $\mathfrak{B}$ una sub-algebra a base finita di $\mathfrak{D}$, contenente tutti gli elementi k_{ij}, ed il cui centro sia normale su $\mathfrak{F}$. In $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$ il modulo è somma dei $v_1,\ldots, v_g$, e quindi, per il lemma 3, $\mathfrak{K}$ è sottocorpo di $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{F}$, c. v. d..

LEMMA 6. - *Sia*: $\mathfrak{D}$ *un'algebra divisoria di tipo* 1 *sul corpo* $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{K}$ *un prolungamento algebrico di ordine finito* g *su* $\mathfrak{F}$. *Allora* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{M}$, *dove* $\mathfrak{C}$ *è divisoria di tipo* 1 *su* $\mathfrak{K}$, *ed* $\mathfrak{M}$ *è regolare a base finita su* $\mathfrak{K}$; *il grado* s *di* $\mathfrak{M}$ *divide* g, *ed è* $= g$ *se, e solo se* $\mathfrak{K}$ *è isomorfo ad un sottocorpo di* $\mathfrak{D}$ *su* $\mathfrak{F}$.

Dimostrazione. - Se $\mathfrak{B}$ è una qualsiasi sub-algebra a base finita di $\mathfrak{D}$, normale su $\mathfrak{F}$, essa ha, rispetto a $\mathfrak{K}$, un certo fattore di riduzione dell'indice ; sia questo $s(\mathfrak{B})$; esso è sempre un divisore di g, onde raggiunge un massimo s ; sia $\mathfrak{B}$ tale che $s(\mathfrak{B}) = s$; se $\mathfrak{A}$ è sub-algebra normale a base finita di $\mathfrak{B}' = \mathfrak{D}^{\mathfrak{B}}$, allora $s(\mathfrak{A}) = 1$, perchè altrimenti si avrebbe $s(\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}) > s$; e per lo stesso motivo, se $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}} = \overline{\mathfrak{C}} \times \mathfrak{M}$, con $\overline{\mathfrak{C}}$ divisoria ed $\mathfrak{M}$ regolare di grado s, anche $\overline{\mathfrak{C}} \times \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ è divisoria. Quindi $\overline{\mathfrak{C}} \times \mathfrak{B}'_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{C}$ è divisoria, e $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}} = (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}')_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}} \times \mathfrak{B}'_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{M}$, come richiesto. Il resto è conseguenza immediata del teorema 24, pag. 61, di [1], c. v. d.. Il numero s che compare nel lemma 6 si dirà il *fattore di riduzione dell'indice* di $\mathfrak{D}$ rispetto a $\mathfrak{K}$.

LEMMA 7. - *Sia*: $\mathfrak{D}$ *un' algebra normale divisoria sul corpo* $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{B}$ *una sub-algebra di* $\mathfrak{D}$, *a base finita su* $\mathfrak{F}$; *allora* $\mathfrak{B}^{-1}\times\mathfrak{D}$ *è semplice*; *se in particolare* $\mathfrak{K}$ *è sottocorpo di* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ *è semplice.*

Dimostrazione. - La dimostrazione è contenuta in quella del n. 5 di [11].

LEMMA 8. - *Sia*: $\mathfrak{D}$ *un' algebra normale divisoria sul corpo* $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{K}$ *un prolungamento di ordine finito* r *su* $\mathfrak{F}$, *isomorfo ad un sottocorpo di* $\mathfrak{D}$; *allora* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{M}$, *dove* $\mathfrak{C}$ *è un' algebra divisoria su* $\mathfrak{K}$, *ed* $\mathfrak{M}$ *è regolare a base finita di grado* r *su* $\mathfrak{K}$.

Dimostrazione. - Sia $\mathfrak{R}$ un' algebra regolare di grado r su $\mathfrak{F}$, e pongasi $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}\times\mathfrak{D}$; $\mathfrak{R}$ contiene un sottocorpo isomorfo a $\mathfrak{K}$, che si identificherà con $\mathfrak{K}$. Sia $\mathfrak{K}_0$ il sottocorpo di $\mathfrak{D}$ che è isomorfo a $\mathfrak{K}$: per il teorema 12 di [2] esiste un autoisomorfismo interno σ di $\mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{K}^{\sigma}=\mathfrak{K}_0$, ed allora anche $(\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}})^{\sigma}=\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}_0}$; ma $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}}=\mathfrak{D}\times\mathfrak{K}$, mentre $\mathfrak{A}^{\mathfrak{K}_0}=\mathfrak{R}\times\mathfrak{D}^{\mathfrak{K}_0}$; $\mathfrak{D}^{\mathfrak{K}_0}$ è divisoria, e $\mathfrak{K}_0$ appartiene al suo centro; posto $\mathfrak{D}^{\mathfrak{K}_0}=\mathfrak{C}$, è perciò $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}\cong\mathfrak{R}\times\mathfrak{C}$ su $\mathfrak{F}$, e quindi $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}\cong\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}$ su $\mathfrak{K}$, ove $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}_{\mathfrak{K}}$, c. v. d..

LEMMA 9. - *Sia* $\mathfrak{D}$ *un'algebra divisoria di tipo* 1, *ed il suo centro sia un prolungamento normale* (*eventualmente senza base finita*) *del corpo* $\mathfrak{F}$. *Allora* $\mathfrak{D}$ *è di tipo* 2′ *su* $\mathfrak{F}$.

Dimostrazione. - Ogni insieme di un numero finito di elementi di $\mathfrak{D}$ è contenuto in una sub-algebra normale $\mathfrak{B}$ di $\mathfrak{D}$, a base finita sul centro $\mathcal{C}$ di $\mathfrak{D}$. Se $\mathcal{C}$ ha grado finito su $\mathfrak{F}$, la dimostrazione è già raggiunta; altrimenti ci si può ridurre allo stesso caso con le seguenti considerazioni: sia $u_1,\dots, u_r$ una base di $\mathfrak{B}$ su $\mathcal{C}$; siano γ_{ijk} $(i, j, k=1,\dots, r)$ le costanti di moltiplicazione per detta base; se gli elementi dati erano $a_1,\dots, a_t$, sia $a_i=\sum_{1}^{r}{}_j\, a_{ij}\, u_j$, ove $a_{ij}\,\varepsilon\,\mathcal{C}$; detto $\mathfrak{P}$ il minimo sottocorpo di $\mathcal{C}$ che è normale di grado finito su $\mathfrak{F}$ e che contiene le γ_{ijk}, a_{ij}, si ha che $\mathfrak{B}$ è estensione su $\mathcal{C}$ dell' algebra $\mathfrak{B}'$ su $\mathfrak{P}$ che ha la base $u_1,\dots, u_r$; inoltre $\mathfrak{B}'$ è a base finita su $\mathfrak{F}$, contiene gli a_i, ed il suo centro $\mathfrak{P}$ è normale su $\mathfrak{F}$, c. v. d..

LEMMA 10. - *Sia*: $\mathfrak{D}$ *un' algebra divisoria di tipo* 2 *sul corpo* $\mathfrak{F}$; σ *un autoisomorfismo di* $\mathfrak{D}$ *su* $\mathfrak{F}$, *tale che* σ^r *sia interno* $(r>0)$, *e precisamente* $b^{\sigma^r}=aba^{-1}$ *se* $b\,\varepsilon\,\mathfrak{D}$. *Dato un insieme* $a_1,\dots, a_t$ *di un numero finito di elementi di* $\mathfrak{D}$, *esiste una sub-algebra* $\mathfrak{B}$ *di* $\mathfrak{D}$, *a base finita su* $\mathfrak{F}$, *contenente* $a, a_1,\dots, a_t$, *e tale che* σ *trasforma* $\mathfrak{B}$ *in sè.*

Dimostrazione. - Sia $\mathfrak{C}_0$ una sub-algebra di $\mathfrak{D}$, a base finita su $\mathfrak{F}$, che contiene $a, a_1,\dots, a_t$; sia $\mathfrak{C}_i=\mathfrak{C}_0^{\sigma^i}$ $(i=0, 1,\dots)$; si ha $\mathfrak{C}_r=a\mathfrak{C}_0 a^{-1}=\mathfrak{C}_0$, onde fra le $\mathfrak{C}_i$ ve ne sono in realtà soltanto r a 2 a 2 distinte, e precisamente le $\mathfrak{C}_0,\dots, \mathfrak{C}_{r-1}$. Sia $\mathfrak{B}$ la minima sub-algebra (certo a base finita su $\mathfrak{F}$) di $\mathfrak{D}$ che contiene le $\mathfrak{C}_0,\dots, \mathfrak{C}_{r-1}$: è chiaro che $\mathfrak{B}^{\sigma}$ è la minima sub-algebra di $\mathfrak{D}$ che contiene le $\mathfrak{C}_1,\dots, \mathfrak{C}_r$, ed è quindi eguale a $\mathfrak{B}$, c. v. d..

2. – Distribuzione degli elementi algebrici in $\mathfrak{D}(x, \sigma)$.

In tutti gli enunciati di questo paragrafo, eccetto che nel teorema 5 e nel lemma 15, si terranno costanti le seguenti notazioni : $\mathfrak{D}$ è un'algebra divisoria sul corpo $\mathfrak{F}$; σ un autoisomorfismo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$; x un'indeterminata ; $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}(x, \sigma)$; $\mathfrak{K}$ un prolungamento di ordine finito su $\mathfrak{F}$.

LEMMA 11. - *Se* $\mathfrak{D}$ *è di tipo* $2'$ *su* $\mathfrak{F}$, e $\mathfrak{K}$ *è normale separabile su* $\mathfrak{F}$, *e se il modulo di* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ *è somma di* p *automoduli primitivi a* 2 *a* 2 *nullifici, allora anche il modulo di* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ *è somma di* p *automoduli primitivi a* 2 *a* 2 *nullifici.*

Dimostrazione. - Dico che un automodulo primitivo v di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ è primitivo anche in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$. Si osservi intanto che ogni elemento di $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ ha la forma $U = \Sigma_i A_i k_i$, ove $A_i \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$, $k_i \,\varepsilon\, \mathfrak{K}$; si può inoltre trovare un $G \,\varepsilon\, \mathfrak{D}[x, \sigma]$ tale che $A_i = G^{-1} F_i$, con $F_i \,\varepsilon\, \mathfrak{D}[x, \sigma]$; allora $U = G^{-1} \Sigma_i F_i k_i$. Se, per esempio, $F_1 = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_j \,\varepsilon\, \mathfrak{D})$, è $F_1 k_1 = a_0 k_1 x^n + \ldots + a_n k_1$; se poi si considera che σ genera un autoisomorfismo (che si indicherà ancora con σ) di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ su $\mathfrak{K}$, dato da $(\Sigma_i b_i k_i)^\sigma = \Sigma_i b_i^\sigma k_i$ $(b_i \,\varepsilon\, \mathfrak{D})$, si vede che $\Sigma_i F_i k_i \,\varepsilon\, \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}[x, \sigma]$; quindi ogni elemento di $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ si può porre sotto la forma $G^{-1}F$, con $G \,\varepsilon\, \mathfrak{D}[x, \sigma]$, $F \,\varepsilon\, \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}[x, \sigma]$, oppure anche sotto la forma $F_1 G_1^{-1}$.

Siano allora $G^{-1}F$, $F_1 G_1^{-1}$ elementi del primo sistema di PEIRCE di v in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$: si ha $Fv = F$, $vF_1 = F_1$; se $F = x^m a_0 + \ldots + a_m$ ed $F_1 = b_0 x^n + \ldots + b_n$ $(a_i, b_j \,\varepsilon\, \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}})$, si deduce $a_i v = a_i$, $v b_j = b_j$; quindi gli elementi a_i, b_j stanno nella stessa componente semplice (lemma 5) di $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ in cui si trova v ; se tale componente è $\mathfrak{D}' \times \mathfrak{M}$, con $\mathfrak{D}'$ divisoria ed $\mathfrak{M}$ regolare a base finita, e se $\{c_{ij}\}$ è una base normale di $\mathfrak{M}$, si può supporre, senza perdita di generalità ([4]), che sia $v = c_{11}$; quindi deve essere $a_i = \Sigma_j c_{j1} d_{ij}$, $b_i = \Sigma_j c_{1j} e_{ij}$, con d_{ij}, $e_{ij} \,\varepsilon\, \mathfrak{D}'$. Se nel primo sistema di PEIRCE di c_{11} in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ vi fossero automoduli diversi da c_{11}, vi sarebbero anche divisori dello zero : sia dunque $UV = 0$, con $U, V \neq 0$, $U = G^{-1}F$, $V = F_1 G_1^{-1}$; allora $FF_1 = 0$, e perciò $a_0 b_0 = 0$, ossia $\Sigma_{ij} c_{ij} d_{0i} e_{0j} = 0$, $d_{0i} = e_{0j} = 0$, e infine $a_0 = b_0 = 0$, assurdo. Quindi $c_{11} = v$ è primitivo anche in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$, c. v. d..

Il lemma 11, se $\mathfrak{D}$ è di tipo 1, può essere precisato :

LEMMA 12. - *Se* $\mathfrak{D}$ *è di tipo* 1 *su* $\mathfrak{F}$, *e* s *è il fattore di riduzione dell'indice di* $\mathfrak{D}$ *rispetto a* $\mathfrak{K}$, *allora* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{M}$, *ove* $\mathfrak{B}$ *è divisoria su* $\mathfrak{K}$, *ed* $\mathfrak{M}$ *è regolare di grado* s *su* $\mathfrak{K}$.

Dimostrazione. - Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del lemma 11 si prova che ogni elemento di $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ si può porre sotto ciascuna delle forme

---

([4]) In questo caso è ancora valido il teorema secondo cui due automoduli primitivi di un'algebra semplice sono equivalenti in un autoisomorfismo interno dell'algebra.

([5]) Per la definizione di « algebra di tipo 1 speciale », cfr. [6].

$G_1^{-1}F_1$, FG^{-1}, con $F, F_1 \varepsilon \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}[x, \sigma]$, $G, G_1 \varepsilon \mathfrak{D}[x, \sigma]$. Sia (lemma 6) $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{M}$, con $\mathfrak{C}$ divisoria su $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ regolare di grado s su $\mathfrak{K}$; allora $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$, e per un teorema di [4] è $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{B}$. Dico che $\mathfrak{B}$ è divisoria. Provo dapprima che $\mathfrak{B}$ è primitiva (ossia non contiene divisori dello zero). Sia $B = FG^{-1} \varepsilon \mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$, ove $F = \Sigma_{ij}\, c_{ij}\, (a_{0ij}\, x^m + ... + a_{mij})$, essendo $\{c_{ij}\}$ una base normale di $\mathfrak{M}$, ed $a_{lij} \varepsilon \mathfrak{C}$; si ha $B \varepsilon \mathfrak{B}$ se, e solo se $Bc_{pq} = c_{pq}B$ per $p, q = 1,..., s$; questa dà:

(1) $$\Sigma_{ij}\, c_{ij}(a_{0ij}\, x^m + ... + a_{mij})G^{-1}\, c_{pq} = \Sigma_j\, c_{pj}(a_{0qj}\, x^m + ... + a_{mqj})G^{-1};$$

sia $K^{-1}H$ un nullifico sinistro di B, con $K \varepsilon \mathfrak{D}[x, \sigma]$, $H \varepsilon \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}[x, \sigma]$; allora $HFG^{-1} = 0$, ed anche

(2) $$HFG^{-1}\, c_{pq} = 0 \quad \text{per} \quad p, q = 1,..., s.$$

Sia $H = \Sigma_{ij}\, c_{ij}(h_{0ij}\, x^l + ... + h_{lij})$, $h_{kij} \varepsilon \mathfrak{C}$: si può supporre che $\Sigma_{ij}\, c_{ij}\, h_{lij} \neq 0$, perchè se così non fosse si avrebbe $H = H'x^r$, dove H' avrebbe termine noto non nullo, e quindi $H'x^rFG^{-1} = 0$, $(x^{-r}H'x^r)FG^{-1} = 0$, ed $x^{-r}H'x^r$ sarebbe ancora in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}[x, \sigma]$, sarebbe non nullo se tale è H, ed avrebbe termine noto non nullo. La (2) diviene, per (1):

$$\Sigma_{ijk}\, c_{ij}(h_{0ij}\, x^l + ... + h_{lij})\, c_{pk}(a_{0qk}\, x^m + ... + a_{mqk}) = 0.$$

Sia n il massimo intero tale che per almeno un valore di q, k, per esempio $\bar{q}, \bar{k}$, sia $a_{nqk} \neq 0$. Allora

$$\Sigma_{ijk}\, c_{ij}\, h_{lij}\, c_{pk}\, a_{nqk} = 0, \quad \text{ossia} \quad \Sigma_{ik}\, c_{ik}\, h_{lip}\, a_{nqk} = 0,$$

e per $q = \bar{q}$: $h_{lip}\, a_{n\bar{q}k} = 0$, e per $k = \bar{k}$: $h_{lip} = 0$ per $i, p = 1,..., s$, contro l'ipotesi. Ciò prova che $\mathfrak{B}$ è primitiva.

Poichè, per il lemma 4, in $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ è soddisfatta la condizione della catena discendente per gli ideali sinistri, si ha dal teorema 9 di [10] che il suo radicale $\mathfrak{R}$ è nullo o pseudonullo; se $\mathfrak{S}$ è il radicale di $\mathfrak{B}$, per il teorema 12 di [10] è $\mathfrak{R} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{S}$; ma essendo $\mathfrak{B}$ primitiva, per il teorema 13 di [10] ogni elemento di $\mathfrak{S}$ è nullo o trascendente su $\mathfrak{K}$, non potendo essere pseudonullo. Quindi $\mathfrak{R}$ deve contenere elementi trascendenti, se non è nullo; perciò $\mathfrak{R} = 0$, ossia $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ è semisemplice, e tale è anche $\mathfrak{B}$. Poichè evidentemente anche in $\mathfrak{B}$ è soddisfatta la condizione della catena discendente per gli ideali sinistri, si ha dal teorema 27 di [10] che $\mathfrak{B}$ è somma diretta di un numero finito di algebre semplici; quindi $\mathfrak{B}$, essendo primitiva, è semplice, e quindi, per il teorema 10 di [9], è divisoria c. v. d..

TEOREMA 1. - *Se $\mathfrak{D}$ è di tipo 2' su $\mathfrak{F}$, e $\mathfrak{K}$ è normale separabile su $\mathfrak{F}$, condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathfrak{A}$ contenga un sottocorpo isomorfo a $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$ è che $\mathfrak{D}$ contenga un sottocorpo isomorfo a $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$.*

Dimostrazione. - La sufficienza della condizione è evidente. Per dimostrarne la necessità, si supponga che $\mathfrak{K}_0 \cong \mathfrak{K}$ sia un sottocorpo di $\mathfrak{A}$ su $\mathfrak{F}$; allora $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ contiene $\mathfrak{K}_{0\mathfrak{K}}$, che, per il teorema 26, pag. 31, di [1], contiene $g = [\mathfrak{K} : \mathfrak{F}]$ automoduli a 2 a 2 nullifici. Quindi (lemma 4) il modulo di $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ è somma di g automoduli primitivi a 2 a 2 nullifici, e perciò ogni decomposizione del modulo di $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ in somma di automoduli primitivi a 2 a 2 nullifici consta di g termini. Se ne deduce per il lemma 11 che $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ ha la stessa proprietà ; per il lemma 5 $\mathfrak{K}$ è quindi isomorfo ad un sottocorpo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, c. v. d..

Il teorema ora dimostrato forma l'oggetto principale della presente nota. La eliminazione da esso della ipotesi circa la struttura di $\mathfrak{D}$ appare laboriosa, e non riveste neppure grande interesse, perchè non si conosce ancora nessuna algebra divisoria algebrica che non sia di tipo 2′ sopra un corpo opportuno. In particolare, se $\mathfrak{D}$ è di tipo 1 sul proprio centro $\mathcal{C}$, e se si sceglie come corpo $\mathfrak{F}$ il sottocorpo di $\mathcal{C}$ ogni cui elemento resta invariato nell' autoisomorfismo σ, si ha che $\mathcal{C}$ è ciclico su $\mathfrak{F}$, e quindi, per il lemma 9, $\mathfrak{D}$ è di tipo 2′ su $\mathfrak{F}$. Se si aboliscono dal teorema 1 tutte le ipotesi su $\mathfrak{D}$, si può ancora dire qualcosa che risulta utile nella ricerca delle proprietà del centro di $\mathfrak{A}$; si ha precisamente il

TEOREMA 2. - *Se $\mathfrak{D}$ è algebrica su $\mathfrak{F}$, ed A è un elemento di $\mathfrak{A}$, algebrico su $\mathfrak{F}$, e $\mathfrak{K} \cong \mathfrak{F}(A)$, allora $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ non è primitiva.*

Dimostrazione. - L'equazione minima di A su $\mathfrak{F}$ non è irriducibile in $\mathfrak{K}$, e quindi $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ non è primitiva ; essendo $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}}$ semplice (lemma 7), per il lemma 4 essa deve possedere automoduli diversi dal modulo. Se $\mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}$ fosse primitiva, per un teorema di [4], essendo algebrica, sarebbe divisoria, onde $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}} \leqslant \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}(x, \sigma)$ sarebbe primitiva, e non potrebbe avere automoduli diversi dal modulo. Si è così giunti ad un assurdo, c. v. d..

Un caso particolare in cui il teorema 1 è applicabile si ha quando $\mathfrak{D}$ è un corpo normale su $\mathfrak{F}$. È importante, per lo scopo di questa nota, poter eliminare dal teorema 1 le ipotesi riguardanti $\mathfrak{K}$. Ciò si ottiene a prezzo di una maggiore restrizione di $\mathfrak{D}$, restrizione che, nel caso in cui $\mathfrak{D}$ sia normale su $\mathfrak{F}$, può darsi, in base a quanto sopra osservato, che sia solamente apparente. Essa è però certamente effettiva se $\mathfrak{D}$ non è normale su $\mathfrak{F}$:

TEOREMA 3. - *Sia $\mathfrak{D}$ di tipo 1 su $\mathfrak{F}$, ed $\mathfrak{A}$ sia normale su $\mathfrak{F}$; condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathfrak{A}$ contenga un sottocorpo isomorfo a $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$, è che $\mathfrak{D}$ contenga un sottocorpo isomorfo a $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$.*

Dimostrazione. - La sufficienza è evidente. Per la necessità, si supponga che $\mathfrak{A}$ contenga un sottocorpo isomorfo a $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$, e sia r l'ordine di $\mathfrak{K}$ su $\mathfrak{F}$; allora, per il lemma 8, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{E} \times \mathfrak{M}$, con $\mathfrak{E}$ divisoria, $\mathfrak{M}$ regolare di grado r su $\mathfrak{K}$. Per il lemma 12 si ha che il fattore di riduzione dell'indice di $\mathfrak{D}$ rispetto a $\mathfrak{K}$ è r, ed allora, per il lemma 6, $\mathfrak{K}$ è isomorfo ad un sottocorpo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, c. v. d..

COROLLARIO 3·1. - *Se $\mathfrak{D}$ è di tipo 1 su $\mathfrak{F}$, e σ è tale che σ^r non sia mai autoisomorfismo interno di $\mathfrak{D}$ se $r \neq 0$, allora gli elementi di $\mathfrak{A}$ che sono algebrici su $\mathfrak{F}$ sono tutti e soli quelli della forma AdA^{-1}, con $A \varepsilon \mathfrak{A}$, $d \varepsilon \mathfrak{D}$.*

Dimostrazione. - Sia $B \varepsilon \mathfrak{A}$ algebrico su $\mathfrak{F}$; allora, per il teorema 3, $\mathfrak{F}(B)$ è isomorfo ad un sottocorpo $\mathfrak{K}$ di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, in un isomorfismo τ che fa corrispondere a B un elemento $d \varepsilon \mathfrak{D}$; per la ipotesi fatta su σ, e per il teorema (53) di [5], $\mathfrak{A}$ è normale su $\mathfrak{F}$, onde, per il n. 5 di [11], esiste un autoisomorfismo interno di $\mathfrak{A}$ che induce τ fra $\mathfrak{F}(B)$ e $\mathfrak{K}$, c. v. d..

Se σ non soddisfa alla condizione posta nel corollario 3·1, allora, come si vede dal teorema 8, $\mathfrak{A}$ è algebrica sul proprio centro, e quindi la distribuzione dei suoi elementi algebrici su $\mathfrak{F}$ non ha particolare interesse.

Cercheremo ora di vedere in che modo si raggruppano fra loro gli elementi algebrici di $\mathfrak{D}(x, \sigma)$, solo nel caso in cui $\mathfrak{D}$ è di tipo 1. Occorre premettere due lemmi che sostituiscano i lemmi 6, 12:

LEMMA 13. - *Se $\mathfrak{D}$ è di tipo 1 su $\mathfrak{F}$, e $\mathfrak{B}$ è un'algebra normale divisoria a base finita di ordine g su $\mathfrak{F}$, allora è $\mathfrak{D}\times\mathfrak{B}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{M}$, ove $\mathfrak{C}$ è divisoria, $\mathfrak{M}$ regolare di grado finito $s \leqslant g$; condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $s=g$, è che $\mathfrak{B}^{-1}$ sia isomorfa ad una sub-algebra di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$. Il modulo di $\mathfrak{D}\times\mathfrak{B}$ è somma di s automoduli primitivi a 2 a 2 nullifici.*

Dimostrazione. - La dimostrazione è analoga a quella del lemma 6, e si fonda su note proprietà delle algebre semplici normali (v. per es. [1]).

LEMMA 14. - *Se $\mathfrak{D}$ è di tipo 1 su $\mathfrak{F}$, e $\mathfrak{B}$ è un'algebra normale divisoria a base finita su $\mathfrak{F}$, tale che sia $\mathfrak{D}\times\mathfrak{B}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{M}$, con $\mathfrak{C}$ divisoria ed $\mathfrak{M}$ regolare di grado s, allora $\mathfrak{A}=\mathfrak{E}\times\mathfrak{M}$, con $\mathfrak{E}$ divisoria; il modulo di $\mathfrak{A}$ è somma di s automoduli primitivi a 2 a 2 nullifici.*

Dimostrazione. - La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del lemma 12.

TEOREMA 4. - *Se $\mathfrak{D}$ è di tipo 1 su $\mathfrak{F}$, e $\mathfrak{B}$ è un'algebra normale divisoria a base finita su $\mathfrak{F}$, allora condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una sub-algebra di $\mathfrak{A}$ isomorfa a $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{F}$ è che $\mathfrak{B}$ sia isomorfa su $\mathfrak{F}$ ad una sub-algebra di $\mathfrak{D}$.*

Dimostrazione. - La sufficienza è palese. Per dimostrare la necessità, si supponga che $\mathfrak{B}_0 \cong \mathfrak{B}$ sia sub-algebra di $\mathfrak{A}$, e si consideri $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}^{-1}$; questa contiene $\mathfrak{B}_0\times\mathfrak{B}^{-1}$, che è regolare di grado s, se s è l'ordine di $\mathfrak{B}$ su $\mathfrak{F}$. Quindi $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}^{-1}$ contiene s automoduli a 2 a 2 nullifici, e perciò (lemma 4) il suo modulo è somma di s automoduli primitivi a 2 a 2 nullifici. Quindi (lemma 14) è $\mathfrak{D}\times\mathfrak{B}^{-1}=\mathfrak{C}\times\mathfrak{M}$, con $\mathfrak{C}$ divisoria, $\mathfrak{M}$ regolare di grado s; ma allora, per il lemma 13, $\mathfrak{B}$ è isomorfa ad una sub-algebra di $\mathfrak{D}$, c. v. d..

COROLLARIO 4·1. - *Se $\mathfrak{D}$ è di tipo 1 su $\mathfrak{F}$, e σ è tale che σ^r non sia mai autoisomorfismo interno di $\mathfrak{D}$ se $r \neq 0$, allora le sub-algebre di $\mathfrak{A}$ che sono normali a base finita su $\mathfrak{F}$ sono tutte e sole quelle della forma $A\mathfrak{B}A^{-1}$, con $A \varepsilon \mathfrak{A}$, dove $\mathfrak{B}$ varia fra tutte le sub-algebre normali a base finita di $\mathfrak{D}$.*

Dimostrazione. - La dimostrazione, basata sul teorema 4, è perfettamente analoga a quella del corollario 3·1.

Con semplicissima dimostrazione si ha il

COROLLARIO 4·2. - *Se $\mathfrak{D}$ è di tipo* 1 *speciale* (5) *su $\mathfrak{F}$, allora ogni sub-algebra $\mathfrak{B}$ di tipo* 1 *su $\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{A}$ è speciale, ed ha un'algebra caratteristica che è isomorfa ad una sub-algebra dell'algebra caratteristica di $\mathfrak{D}$.*

TEOREMA 5. - *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra divisoria non algebrica sul corpo $\mathfrak{F}$; condizione necessaria e sufficiente affinchè l'insieme $\mathfrak{D}$ degli elementi di $\mathfrak{A}$ che sono algebrici su $\mathfrak{F}$ sia un anello, è che $\mathfrak{D}$ sia un sottocorpo del centro di $\mathfrak{A}$.*

Dimostrazione. - La condizione è evidentemente sufficiente. Per dimostrarne la necessità, sia x un elemento di $\mathfrak{A}$ trascendente su $\mathfrak{F}$; intanto $\mathfrak{D}$, essendo primitiva e algebrica, è divisoria, per un teorema di [4]. L'autoisomorfismo interno di $\mathfrak{A}$ generato da x induce un autoisomorfismo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$: $xa=a^\sigma x$ se $a \varepsilon \mathfrak{D}$; anche l'elemento $x+1 \neq 0$ genera un autoisomorfismo τ in $\mathfrak{D}$: $(x+1)a=a^\tau(x+1)$ se $a \varepsilon \mathfrak{D}$; combinando: $xa+a=a^\tau x+a^\tau$, ossia $(a^\sigma-a^\tau)x=$ $=a^\tau-a$. Se fosse $a^\sigma-a^\tau \neq 0$, si avrebbe $x=(a^\sigma-a^\tau)^{-1}$ $(a^\tau-a) \varepsilon \mathfrak{D}$, assurdo; perciò $a^\sigma=a^\tau$, e quindi anche $a^\tau=a$, e infine $a^\sigma=a$, ossia x commuta con ogni elemento di $\mathfrak{D}$. Se inoltre $a \varepsilon \mathfrak{D}$, anche l'elemento $x+a \neq 0$ genera un autoisomorfismo $\tau(a)$ in $\mathfrak{D}$: $(x+a)b=b^{\tau(a)}(x+a)$ se $b \varepsilon \mathfrak{D}$, ossia: $bx+ab=b^{\tau(a)}x+b^{\tau(a)}a$, $(b-b^{\tau(a)})x=b^{\tau(a)}a-ab$. Se fosse $b=b^{\tau(a)}$, x sarebbe in $\mathfrak{D}$, assurdo. Quindi $b=b^{\tau(a)}$, e perciò anche $ba=ab$, ossia $\mathfrak{D}$ è un corpo, c. v. d.

Quando le condizioni del teorema 5 non sono soddisfatte, allora gli elementi algebrici di $\mathfrak{A}$ si distribuiscono in varie sub-algebre massime; ci proponiamo di avere una indicazione sulla struttura dell'insieme di tali algebre. Si ricordi a tale scopo la definizione di gruppoide (nel senso di BRANDT) (cfr. [8]): un insieme G dicesi un gruppoide se per certe coppie di suoi elementi si può definire l'operazione di prodotto, che dà luogo ad un elemento di G, e che soddisfa alle seguenti proprietà:

I. - Se $g_{ij} \varepsilon G$, esistono degli elementi e_i, e_j, unici, di G, tali che $e_i g_{ij}=$ $=g_{ij}e_j=g_{ij}$. Gli e_i, e_j diconsi rispettivamente l'unità sinistra e destra di g_{ij}.

II. - Se e è unità, sinistra o destra, di qualche elemento di G, essa è anche unità sinistra e destra di sè stessa.

III. - Se g, $f \varepsilon G$, il prodotto gf è definito se, e solo se l'unità destra di g coincide con la sinistra di f.

IV. - Se g, f, $h \varepsilon G$ e gf ed fh sono definiti, allora sono definiti, ed eguali fra loro, anche $(gf)h$ e $g(fh)$.

V. - Se g_{ij} ha l'unità sinistra e_i e l'unità destra e_j, esiste (almeno) un elemento f_{ji}, con e_j per unità sinistra, e_i per unità destra, tale che $f_{ji}g_{ij}=e_j$, $g_{ij}f_{ji}=e_i$. f_{ji} dicesi l'inverso di g_{ij}, ed indicasi con g_{ij}^{-1}. Esso è unico.

---

(5) Per la definizione di «algebra di tipo 1 speciale» cfr.

VI. - Se e_i, e_j sono unità, esiste un elemento g_{ij} che ha e_i per unità sinistra ed e_j per unità destra.

Ciò premesso, si ha il

LEMMA 15. - *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra divisoria sul corpo $\mathfrak{F}$, e G sia un gruppoide che soddisfi alle seguenti condizioni*:

1. - *Ogni elemento di G è un sub-anello di $\mathfrak{A}$.*

2. - *Il prodotto di due elementi g, f di G, quando è definito, coincide col prodotto gf, qualora g, f vengano considerati come sub-anelli di $\mathfrak{A}$.*

3. - *Le unità di G sono sub-algebre divisorie di $\mathfrak{A}$.*

4. - *Ogni elemento di $\mathfrak{A}$ è contenuto in uno di G, avente prefissata unità sinistra (rispett. destra).*

Allora:

5. - *L'insieme delle unità e_i di G consiste di tutte e sole le sub-algebre divisorie di $\mathfrak{A}$ isomorfe, in autoisomorfismi interni di $\mathfrak{A}$, ad una stessa algebra e_0.*

6. - *e_0 è tale che non esiste nessun elemento a di $\mathfrak{A}$ per cui $ae_0a^{-1} < e_0$.*

7. - *Gli elementi di G sono tutti e soli i sub-anelli di $\mathfrak{A}$ della forma ae_i (rispett. $e_i a$), dove e_i varia fra tutte le unità di G.*

Viceversa, se si fissa una sub-algebra divisoria e_0 di $\mathfrak{A}$ che soddisfi alla 6, *e se si considera l'insieme degli elementi e_i che soddisfano alla* 5, *e poi l'insieme G definito dalla* 7, *e se si definisce il prodotto* (ae_i) $(e_j b)$ *di due elementi di G quando, e solo quando $e_i = e_j$, allora G costituisce un gruppoide che soddisfa alle* 1, 2, 3, 4.

Dimostrazione. - Da $e_i g_{ij} = g_{ij} e_j$, e da 1, 2, 3 si ha intanto che g_{ij} è un sub-sistema di $\mathfrak{A}$. Dalla proprietà V dei gruppoidi, ossia da $g_{ij} g_{ij}^{-1} = e_i$, si ha che se $a \varepsilon g_{ij}$ e $b \varepsilon g_{ij}^{-1}$, è $ab = a \varepsilon e_i$, $b = a^{-1}a$; al variare di a in tutto e_i, se a^{-1} resta fisso, b percorre tutto g_{ij}^{-1}; quindi: $g_{ij}^{-1} = a^{-1} e_i$; da 3 si deduce che a^{-1} può essere un elemento qualsiasi di g_{ij}^{-1}, e per V g_{ij}^{-1} può essere un qualsiasi f_{ji}; perciò

$$f_{ji} = ae_i \quad \text{se} \quad a \varepsilon f_{ji}, \tag{3}$$

e questa prova una parte di 7. L'altra parte si ottiene analogamente, e si esprime:

$$g_{ji} = e_j b \quad \text{se} \quad b \varepsilon g_{ji}. \tag{4}$$

Da (3) (4), facendo $f_{ji} = g_{ji}$, $a = b$, segue: $e_j = ae_i a^{-1}$, che prova una parte della 5. Data una unità qualsiasi e_0 di G, da (3) (4), 7, 4 si ha che $ae_0 \varepsilon G$, e quindi ae_0 possiede una unità sinistra e_i, onde $e_i a = ae_0$, e quindi $ae_0 a^{-1}$ è una unità di G; questo prova l'altra parte di 5.

Inoltre, se fosse $ae_0 a^{-1} < e_0$, allora $ae_0 a^{-1} = e_i$ sarebbe, per 5, una unità di G, e si avrebbe: $(be_0)e_i = b(e_0 e_i) = be_0$ per ogni $b \varepsilon \mathfrak{A}$, contro la unicità asserita in I; ciò prova la 6.

Reciprocamente, se si definisce G come indicato nel lemma 15 a partire da un e_0, è chiaro che le 1, 2, 3, 4 sono soddisfatte; restano da provare le I, II, III, IV, V, VI.

Intanto, dato ae_i, esso ha l'unità destra e_i e la sinistra $e_j = ae_i a^{-1}$; l'unità destra e_i è unica, perchè se e_h fosse un'altra, si avrebbe $ae_i = ae_i e_h$; quindi per ogni $a_i \varepsilon e_i$ ed ogni $a_h \varepsilon e_h$ esisterebbe un $\beta \varepsilon e_i$ tale che $a\beta = aa_i a_h$, donde $a_h = a_i^{-1}\beta \varepsilon e_i$, e quindi $e_h \leqslant e_i$; per 5, 6 se ne deduce $e_h = e_i$; questa, e l'analoga per le unità sinistre, prova la I. Per provare la II, si supponga che $(ae_i)(e_j b) = e_j b$; allora per ogni $a \varepsilon e_j$ esiste un $\beta \varepsilon e_j$ tale che $aab = \beta b$, e quindi $a = \beta a^{-1} \varepsilon e_j$; se poi $\gamma \varepsilon e_i$, esiste un $\delta \varepsilon e_j$ tale che $a\gamma b = \delta b$, donde $\gamma = a^{-1}\delta \varepsilon e_j$, e perciò $e_i = e_j$, $ae_i = e_j$, e quindi ae_i è propria unità destra e sinistra, il che prova la II. Le III e IV sono evidentemente soddisfatte. Per provare la V basta porre $(ae_i)^{-1} = e_i a^{-1}$; si ha infatti: $(e_i a^{-1})(ae_i) = e_i$, e $(ae_i)(e_i a^{-1}) = ae_i a^{-1}$, che è appunto l'unità sinistra di ae_i. Se infine sono date e_i ed e_j, poichè, per ipotesi, esiste un $a \varepsilon \mathfrak{A}$ tale che $e_j = ae_i a^{-1}$, si ha che $ae_i = e_j a$ ha e_i come unità destra ed e_j come sinistra, il che prova la VI, c. v. d..

Per poter applicare il lemma 15 alle sub-algebre algebriche di $\mathfrak{D}(x, \sigma)$, occorre premettere il

LEMMA 16. - *Gli unici subisomorfismi di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$ generati da autoisomorfismi interni di $\mathfrak{A}$ sono le potenze di σ moltiplicate per tutti gli autoisomorfismi interni di $\mathfrak{D}$.*

Dimostrazione. - Sia τ un subisomorfismo di $\mathfrak{D}$, tale che $a^\tau = AaA^{-1}$ $(A \varepsilon \mathfrak{A})$ se $a \varepsilon \mathfrak{D}$. Sia

$$A = G^{-1}F = F_1 G_1^{-1}, \quad \text{ove}: \quad F = a_0 x^n + \dots + a_n,$$
$$G = b_0 x^m + \dots + b_m, \quad F_1 = c_0 x^p + \dots + c_p, \quad G_1 = d_0 x^q + \dots + d_q.$$

Allora $G^{-1}Fa = a^\tau F_1 G_1^{-1}$, $FaG_1 = Ga^\tau F_1$ se $a \varepsilon \mathfrak{A}$. Questa prova intanto che $n+q = m+p$; dal confronto dei coefficienti di x^{n+q} si ha inoltre: $a_0(ad_0)^{\sigma^n} = b_0(a^\tau c_0)^{\sigma^m}$, donde:

$$a^\tau = (b_0^{-1} a_0 \, a^{\sigma^n} d_0^{\sigma^n} c_0^{-\sigma^m})^{\sigma^{-m}};$$

per $a = 1$ questa dà $b_0^{-1} a_0 = (d_0^{\sigma^n} c_0^{-\sigma^m})^{-1} = k$, donde $a^\tau = k^{\sigma^{-m}} a^{\sigma^n} k^{-\sigma^{-m}}$, c. v. d.,

Il lemma 16 assicura che la condizione 6 del lemma 15 è soddisfatta per $e_0 = \mathfrak{D}$; quindi il corollario 3·1 e il teorema 5 danno:

TEOREMA 6. - *Sia: $\mathfrak{D}$ di tipo 1 su $\mathfrak{F}$; σ tale che σ^r non è mai autoisomorfismo interno di $\mathfrak{D}$ se $r \neq 0$; G il gruppoide ottenuto col metodo indicato nel lemma 15 ponendo $e_0 = \mathfrak{D}$. Allora G non è un gruppo. Condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento di $\mathfrak{A}$ sia algebrico su $\mathfrak{F}$, è che appartenga a qualche unità di G. Se $\mathfrak{D}$ è un corpo normale* *separabile di grado finito su $\mathfrak{F}$, ogni sottocorpo normale separabile massimo di $\mathfrak{A}$ (ossia non propriamente contenuto in altro sottocorpo normale separabile di $\mathfrak{A}$) è una unità di G, e viceversa.*

3. - Il centro di $\mathfrak{D}(x, \sigma)$.

TEOREMA 7. - *Sia: $\mathfrak{D}$ un'algebra divisoria algebrica sul corpo $\mathfrak{F}$; σ un autoisomorfismo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$; x un'indeterminata; $\mathfrak{A}=\mathfrak{D}(x, \sigma)$. Allora il centro di $\mathfrak{A}$ non contiene nessun elemento che non appartenga ad $\mathfrak{F}$ e che sia algebrico su $\mathfrak{F}$.*

Dimostrazione. - Se A fosse un tale elemento, allora, per un lemma di [3], sarebbe $\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{F}(A)=\mathfrak{D}\times\mathfrak{F}(A)$; ma per il teorema 2, $\mathfrak{D}\times\mathfrak{F}(A)$ non è primitiva, assurdo, c. v. d..

LEMMA 17. - *Sia: $\mathfrak{D}$ un'algebra divisoria di tipo 2 sul corpo $\mathfrak{F}$; σ un autoisomorfismo di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, tale che σ^h sia autoisomorfismo interno di $\mathfrak{D}$ per un valore positivo di h; $\mathfrak{B}$ un'algebra divisoria su $\mathfrak{F}$, contenente $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{A}=\mathfrak{D}[x, \sigma]$, ove x è un elemento di $\mathfrak{B}$ tale che $a_0x^n+...+a_n=0$, con $a_i \varepsilon \mathfrak{D}$, $a_0 \neq 0$, mentre ogni polinomio nella x con coefficienti (non tutti nulli) a sinistra in $\mathfrak{D}$, di grado $<n$, è non nullo. Allora $\mathfrak{A}$ è divisoria di tipo 2 su $\mathfrak{F}$; se inoltre $\mathfrak{D}$ ha base finita ed ordine m su $\mathfrak{F}$, allora $\mathfrak{A}$ ha base finita ed ordine nm su $\mathfrak{F}$.*

Dimostrazione. - Caso 1: $\mathfrak{D}$ ha base finita su $\mathfrak{F}$. È allora evidente che se $\{u_i\}$ è una base di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$ $(i=1,..., m)$, gli mn elementi $u_i x^j$ $(i=1,..., m$; $j=0,..., n-1$; $x^0=1)$ sono fra loro linearmente indipendenti su $\mathfrak{F}$, e formano una base di $\mathfrak{A}$ su $\mathfrak{F}$; poichè $\mathfrak{A}\leqslant\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ è primitiva, ed avendo base finita è anche divisoria.

Caso 2: $\mathfrak{D}$ non ha base finita su $\mathfrak{F}$. Siano $A_1,..., A_r$ elementi di $\mathfrak{A}$, e sia $A_i=b_0^{(i)}x^{n-1}+...+b_{n-1}^{(i)}$, $b_j^{(i)} \varepsilon \mathfrak{D}$. Sia inoltre $b^{\sigma^h}=aba^{-1}$ se $b \varepsilon \mathfrak{D}$. Per il lemma 10 esiste una sub-algebra $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{D}$, a base finita su $\mathfrak{F}$, che contiene a e tutte le $b_j^{(i)}$, e che viene trasformata in sè da σ. Allora, per il caso 1, $\mathfrak{C}[x, \sigma]$ è divisoria a base finita su $\mathfrak{F}$, e contiene gli elementi $A_1,..., A_r$, onde $\mathfrak{A}$ è divisoria di tipo 2 su $\mathfrak{F}$, c. v. d..

TEOREMA 8. - *Sia: $\mathfrak{D}$ un'algebra divisoria di tipo 2 sul proprio centro; σ un autoisomorfismo di $\mathfrak{D}$; x un'indeterminata; $\mathfrak{A}=\mathfrak{D}(x, \sigma)$; $\mathfrak{F}$ il sottocorpo del centro di $\mathfrak{D}$ ogni cui elemento è invariato in σ. Se $\mathfrak{A}$ non è normale su $\mathfrak{F}$, allora essa è di tipo 2, e quindi algebrica, se considerata sopra qualsiasi sottocorpo $>\mathfrak{F}$ del proprio centro.*

Dimostrazione. - Sia $\mathcal{C}$ il centro di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}>\mathfrak{F}$ un sottocorpo di $\mathcal{C}$, e sia z un elemento di $\mathfrak{Z}$ ma non di $\mathfrak{F}$. Per il teorema 7 z è trascendente su $\mathfrak{F}$;

sia y un elemento di $\mathfrak{F}(z)$ ma non di $\mathfrak{F}$, e tale che $\mathfrak{Y}=\mathfrak{F}(y)<\mathfrak{F}(z)$: allora $\mathfrak{A}$ contiene $\mathfrak{D}'=\mathfrak{D}\mathfrak{Y}=\mathfrak{D}\times\mathfrak{Y}$, che è di tipo 2 su $\mathfrak{Y}$. L'autoisomorfismo interno di $\mathfrak{A}$ generato da x induce in $\mathfrak{D}'$ un autoisomorfismo su $\mathfrak{Y}$, che si indicherà ancora con σ. Suppongasi che x sia trascendente anche su $\mathfrak{D}'$, ossia che non esista nessun polinomio in x, a grado >0, con coefficienti a sinistra in $\mathfrak{D}'$, che sia nullo. Allora $\mathfrak{D}'(x, \sigma)$ esiste ed è $=\mathfrak{A}$, qualora $\mathfrak{A}$ venga considerata come un'algebra su $\mathfrak{Y}$. L'elemento z di $\mathfrak{A}$ è allora algebrico su $\mathfrak{Y}$, e non appartiene ad $\mathfrak{Y}$, il che è in contraddizione col teorema 7. Quindi esiste un polinomio nella x, di grado >0, con coefficienti a sinistra in $\mathfrak{D}'$, che è nullo. Poichè $\mathfrak{A}$ non è normale su $\mathfrak{F}$, per il teorema (53) di [5] esiste un intero $h>0$ tale che σ^h sia autoisomorfismo interno di $\mathfrak{D}$ su $\mathfrak{F}$, e quindi di $\mathfrak{D}'$ su $\mathfrak{Y}$; le ipotesi per l'applicabilità del lemma 17 sono così verificate, ed esso assicura che $\mathfrak{D}'[x, \sigma]$ è divisoria di tipo 2 su $\mathfrak{Y}$; quindi $\mathfrak{D}'[x, \sigma]=\mathfrak{A}$, ed $\mathfrak{A}$ è di tipo 2 su $\mathfrak{Y}$, e perciò anche su $\mathfrak{Z}$, c. v. d..

COROLLARIO 8·1. - *Nelle ipotesi del teorema* 8 *su* $\mathfrak{D}$, σ, x, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$, *se il centro di* $\mathfrak{A}$ *non è* $\mathfrak{F}$, *esso ha grado di trascendenza* 1 *su* $\mathfrak{F}$.

TEOREMA 9. - *Sia* $\mathfrak{Z}$ *un prolungamento ciclico di grado finito sul corpo perfetto* $\mathfrak{F}$, x *un'indeterminata*; *i sottocorpi dell'algebra ciclica* $(\mathfrak{Z}(x), \sigma, x)$ *su* $\mathfrak{F}(x)$ *che sono corpi di funzioni algebriche di genere zero sul corpo* $\mathfrak{F}$, *e normali su* $\mathfrak{F}$, *sono tutti e soli quelli isomorfi a sottocorpi di* $\mathfrak{Z}(x)$ *su* $\mathfrak{F}(x)$.

Dimostrazione. - Si ricordi anzitutto che i corpi di funzioni algebriche di genere zero sul corpo $\mathfrak{F}$ sono tutti e soli quelli del tipo $\mathfrak{K}(y)$, ove $\mathfrak{K}$ è un prolungamento algebrico di grado finito di $\mathfrak{F}$, ed y è un'indeterminata. Si ha dal teorema (65) di [5] che $(\mathfrak{Z}(x), \sigma, x)\cong\mathfrak{Z}(z, \sigma)$, ed in tale isomorfismo ad x corrisponde z^n, essendo n il grado di $\mathfrak{Z}$ su $\mathfrak{F}$. Ogni sottocorpo di $(\mathfrak{Z}(x), \sigma, x)$ di genere zero su $\mathfrak{F}$ è isomorfo ad un corpo $\mathfrak{K}(z^n)$, ove $\mathfrak{K}=\mathfrak{F}(a)$, essendo a un elemento di $\mathfrak{Z}(z, \sigma)$ algebrico su $\mathfrak{F}$. Se inoltre $\mathfrak{K}(z^n)$ è normale su $\mathfrak{F}$, tale è $\mathfrak{K}$; ed allora, per il teorema 1, $\mathfrak{K}$ è isomorfo su $\mathfrak{F}$ ad un sottocorpo $\mathfrak{K}_0$ di $\mathfrak{Z}$, onde $\mathfrak{K}(z^n)\cong\mathfrak{K}_0(x)\geqslant\mathfrak{F}(x)$. Viceversa, un sottocorpo $\mathfrak{K}'$ di $\mathfrak{Z}(x)$, che contenga $\mathfrak{F}(x)$, contiene x, e l'insieme $\mathfrak{K}$ dei suoi elementi algebrici su $\mathfrak{F}$ è un corpo algebrico di grado finito su $\mathfrak{F}$, tale che $\mathfrak{K}'\geqslant\mathfrak{K}(x)$; è certo $\mathfrak{F}\leqslant\mathfrak{K}\leqslant\mathfrak{Z}$. Tanto $\mathfrak{K}'$, quanto $\mathfrak{K}(x)$, considerati come algebre su $\mathfrak{K}$, danno $\mathfrak{Z}(x)$ quando vengono estesi su $\mathfrak{Z}$; poichè il genere di un corpo non varia per prolungamenti del corpo delle costanti, segue che $\mathfrak{K}'$ è di genere zero. Inoltre $\mathfrak{K}$ è sottocorpo su $\mathfrak{F}$ del corpo ciclico $\mathfrak{Z}$, e quindi è normale su $\mathfrak{F}$, c. v. d.

COROLLARIO 9·1. - *Nelle ipotesi del teorema* 9 *su* $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{F}$ *ed* x, *se l'algebra ciclica* $(\mathfrak{Z}(x), \sigma, x)$ *è isomorfa, su* $\mathfrak{F}(x)$, *al prodotto incrociato* $(\mathfrak{N}, \mathfrak{g})$, *e se* $\mathfrak{N}$ *è un corpo di funzioni algebriche di genere zero sul corpo* $\mathfrak{F}$, *allora* $\mathfrak{N}\cong\mathfrak{Z}(x)$ *su* $\mathfrak{F}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERT : *Structure of algebras.* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1939).

[2] ARTIN e WHAPLES : *The theory of simple rings.* (Amer. Journ. of Math., 65, 1943, p. 87).

[3] BARSOTTI : *Algebre senza base finita III.* In corso di pubblicazione.

[4] — *Contributo allo studio delle algebre senza base finita.* In corso di pubblicazione.

[5] — *Ricerche sopra le algebre divisorie di tipo* 1, *e sopra le algebre divisorie non algebriche.* (Rend. di Mat. e delle sue applic., 7, 1948, p. 1).

[6] — *Il gruppo di* BRAUER *delle algebre semplici di tipo* 1. (Rend. Accad. Lincei, 3, 1947, p. 188).

[7] JACOBSON : *Non commutative polynomials and cyclic algebras.* (Ann. of Math., 35, 1934, p. 197).

[8] — *The theory of rings.* (Math. Surveys, 1943).

[9] — *Structure theory of simple rings without finiteness assumptions.* (Trans. Amer. Math. Soc., 57, 1945, p. 228).

10] — *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings.* (Amer. Journ. of Math., 67, 1945, p. 300).

[11] KÖTHE : *Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum.* (Math. Ann., 105, 1931, p. 15).

[12] E. NOETHER : *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie.* (Math. Zeit., 30, 1929, p. 641).

[13] E. NOETHER e SCHMEIDLER : *Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken.* (Math. Zeit., 8, 1920, p. 1).

[14] ORE : *Theory of non-commutative polynomials.* (Ann. of Math., 34, 1933, p. 480).

[15] STEINITZ : *Algebraische Theorie der Körper.* (Berlin, 1930).

[16] WEDDERBURN : *Non commutative domains of integrity.* (Journ. für die reine und ang Math., 167, 1932, p. 129).