ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 13, nº 1-4 (1948), p. 19-49

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_13_1-4_19_0>

SOPRA I PROBLEMI VARIAZIONALI IN FORMA PARAMETRICA DIPENDENTI DALLE DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

Il presente lavoro si propone di arrecare qualche nuovo contributo alla teoria degli integrali del Calcolo delle Variazioni, in forma parametrica, dipendenti dalle derivate di ordine superiore

$$\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t), x''(t), y''(t))\, dt.$$

A tale argomento, alcuni anni fa, N. BOGOLIOUBOFF ha dedicato un'ampia Memoria (¹) contenente numerosi e notevoli risultati: per quanto riguarda il problema dell'esistenza dell'estremo, tale A. ha considerato un caso in cui l'integrale $\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}}$ non è semicontinuo e, ispirandosi ad un procedimento seguito dal TONELLI per gli integrali $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ incompletamente regolari, ha stabilito una condizione necessaria e sufficiente, perchè, nel caso considerato, esista l'estremo.

La nostra ricerca, invece, si attiene al metodo delle successioni minimizzanti, che è basato sul concetto di semicontinuità e che il TONELLI ha sviluppato nella sua opera fondamentale (²) e in successivi lavori, e si propone di indicare in qual modo si possa costruire, per i problemi in questione, una teoria, che, pur essendo organica quanto quelle sviluppate per altri tipi di problemi variazionali, presenta alcune proprie originalità che la Memoria del BOGOLIOUBOFF non lasciava prevedere, e che meritano di essere poste in rilievo.

È ben noto che la teoria dei problemi del primo ordine (³) in forma parametrica ha come punto di partenza il fatto che, al variare della rappresentazione

(¹) N. BOGOLIOUBOFF: *Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations*. Annali di Matematica pura e applicata, S. IV, T. IX (1931), pp. 195-241.

(²) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Due volumi. N. Zanichelli, Bologna, 1921-1923.

(³) Come è noto, si intende per problema di ordine r quello in cui la funzione integranda dipende, in modo effettivo, dalle derivate di ordine non superiore all'r-simo.

parametrica della curva $\mathcal{C}$, il valore del relativo integrale $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ non vari, e quindi lo studio dei problemi di ordine superiore in forma parametrica va impostato in modo che sussista un'analoga invarianza: a tal fine preferiamo modificare lievemente l'impostazione del BOGOLIOUBOFF. Limitandoci a considerare, per semplicità e come fa il BOGOLIOUBOFF, i problemi del secondo ordine, noi supporremo (vedi n. 2) che la funzione F che compare sotto il segno di integrale dipenda soltanto dalle coordinate x, y del punto corrente sulla curva, dalle loro derivate del primo ordine x', y' rispetto al parametro e dalla curvatura, e che inoltre sia positivamente omogenea di grado uno rispetto alle variabili x' e y'.

Ciò premesso, scelto come parametro s la lunghezza dell'arco rettificato, noi consideriamo (vedi n. 3) le curve

$$\mathcal{C}^{(2)}: \qquad x=x(s), \qquad y=y(s), \qquad (0\leqslant s\leqslant L),$$

per le quali le funzioni $x(s)$, $y(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine ed esiste finito l'integrale (nel senso del LEBESGUE)

$$\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = \int_{\mathcal{C}^{(2)}} F\left(x(s), y(s), \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds}, \frac{d\theta(s)}{ds}\right) ds,$$

ove $\theta(s)$ è l'angolo di direzione della curva, e quindi $\frac{d\theta(s)}{ds}$ rappresenta la curvatura. La classe di curve così fissata coincide con quella considerata dal BOGOLIOUBOFF e, come tale A. ha rilevato, non è praticamente ampliabile, perchè se si supponesse che le derivate $x'(s)$, $y'(s)$ (od anche $\theta(s)$) fossero soltanto a variazione limitata, l'esistenza dell'estremo verrebbe in generale esclusa « a priori ».

Sempre per quanto riguarda le generalità (che nelle questioni esistenziali hanno la massima importanza e a cui è dedicato il § 1) va fatto presente che la nostra trattazione tiene conto anche delle curve di lunghezza nulla, che il BOGOLIOUBOFF non aveva considerate: è stato quindi necessario precisare che cosa si deve intendere come intorno del secondo ordine di una curva costituita da un solo punto.

Il § 2 è dedicato alla teoria della semicontinuità degli integrali $\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$, la quale, almeno per quanto riguarda le condizioni sufficienti, presenta una certa analogia con quella degli integrali in forma ordinaria.

Nel § 3 vengono stabiliti alcuni teoremi di esistenza dell'estremo in campi limitati. Lo sviluppo della materia offre particolare interesse, perchè si devono superare talvolta sia difficoltà proprie della forma parametrica, sia difficoltà che si trovano nella forma ordinaria, e quindi occorre far appello a procedimenti svariati. Viene dato un primo teorema esistenziale valevole soltanto per classi di curve di lunghezza inferiore ad un numero fisso, ma da esso e da una sua estensione si deducono alcuni espressivi teoremi per gli integrali quasi-regolari seminormali. Un secondo teorema esistenziale, dedicato agli integrali soltanto quasi-regolari, presenta maggiore originalità, e la sua dimostrazione appare particolarmente delicata e laboriosa.

Il lavoro termina con il § 4 nel quale vengono indicati alcuni criteri che per mettono di estendere i teoremi esistenziali del § 3 al caso di campi illimitati: il primo fornisce, anche per i problemi del primo ordine, un'estensione di un criterio già noto, mentre il terzo si presenta del tutto nuovo.

§ 1. - Generalità.

1. - Il campo A.

Ricordiamo ([4]) che dicesi *campo A* un insieme di punti del piano (x, y) contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito.

2. - La funzione $F(x, y, x', y', \theta')$.

a) È noto ([5]) che, quando si abbia una curva

$$\mathcal{C}: \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \qquad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

affinchè l'integrale

$$\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}^{(2)} = \int_{\mathcal{C}} \Phi(x(t), y(t), x'(t), y'(t), x''(t), y''(t))\, dt$$

sia indipendente dal parametro t, occorre e basta che $\Phi(x, y, x', y', x'', y'')$ sia una funzione positivamente omogenea di grado uno nel complesso delle quantità $x', y', \sqrt[3]{x'y'' - x''y'}$, vale a dire, per ogni $k > 0$, valga l'uguaglianza

$$\text{(a)} \qquad \Phi(x, y, kx', ky', k\sqrt[3]{x'y'' - x''y'}) = k\Phi(x, y, x', y', \sqrt[3]{x'y'' - x''y'}).$$

A questa condizione possiamo sostituire quella che la funzione $F(x, y, x', y', \theta')$, ove si è posto $\theta' = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, sia positivamente omogenea di grado uno rispetto alle variabili x', y', cioè, per ogni $k > 0$, sia

$$\text{(b)} \qquad F(x, y, kx', ky', \theta') = kF(x, y, x', y', \theta').$$

([4]) Vedi L. Tonelli, opera cit. in ([2]), Vol. I, Cap. V, n. 72, p. 201.

([5]) Vedi, p. es. G. Vivanti: *Elementi del Calcolo delle Variazioni*. Principato, Messina, 1923, Cap. VI, p. 110 e segg., e in particolare, n. 40, pp. 115-117.

Ciò è evidente: infatti, posto

$$\Phi(x, y, x', y', \sqrt[3]{x'y''-x''y'}) = F\left(x, y, x', y', \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{c}$$

è ovviamente, per ogni $k>0$,

$$\Phi(x, y, kx', ky', k\sqrt[3]{x'y''-x''y'}) = F\left(x, y, kx', ky', \frac{k^3(x'y''-x''y')}{[(kx')^2+(ky')^2]^{\frac{3}{2}}}\right) = \tag{d}$$

$$= F\left(x, y, kx', ky', \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Se è verificata la (a), sostituendo nei suoi due membri le espressioni fornite dalle (d) e (c), risulta

$$F\left(x, y, kx', ky', \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = kF\left(x, y, x', y', \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

cioè a dire la (b); e in modo analogo dalla (b) segue la (a).

b) Ciò premesso, supporremo sempre, salvo avviso contrario, che $F(x, y, x', y', \theta')$ sia una funzione: 1°) definita e continua insieme con la sua derivata parziale $F_{\theta'}$ in ogni punto (x, y) del campo A, per ogni coppia di numeri x', y' non entrambi nulli e per ogni valore finito di θ'; 2°) positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili x', y', tale cioè che, per ogni $k>0$, valga l'uguaglianza

$$F(x, y, kx', ky', \theta') = kF(x, y, x', y', \theta').$$

Poniamo poi $F(x, y, 0, 0, \theta')=0$, in modo che la funzione F risulta continua anche in ogni punto $(x, y, 0, 0, \theta')$ con (x, y) appartenente ad A [6].

Diremo coppia normalizzata ogni coppia x', y', per la quale è $x'^2+y'^2=1$.

3. - Le curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$. - L'integrale $\mathcal{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$.

a) Sia $\mathcal{C}$ una curva rettificabile, e sia

$$\mathcal{C}: \qquad x=x(s), \quad y=y(s), \qquad (0 \leq s \leq L)$$

una sua rappresentazione parametrica prendendo come parametro l'arco rettificato.

---

(6) Il BOGOLIOUBOFF (luogo cit. in (1), § 1 p. 197), assunto come parametro l'arco s, indicato con θ l'angolo di direzione e posto $\theta' = \frac{d\theta}{ds}$, considera la funzione $f(x, y, \theta, \theta')$ e suppone che sia periodica di periodo 2π rispetto a θ: in tal caso l'integrale risulta indipendente dal parametro scelto, se si assume come funzione integranda il prodotto $f(x, y, \theta, \theta')\sqrt{x'^2+y'^2}$.

Diremo *angolo di direzione* θ della curva $\mathcal{C}$, in un suo punto in cui esista la tangente, l'angolo, determinato a meno di multipli di 2π, di cui deve ruotare, nel senso delle rotazioni positive, l'asse delle x per divenire parallelo a tale tangente e avere lo stesso verso. Intenderemo inoltre che, quando la curva considerata sia dotata in ogni punto di tangente la cui direzione e il cui verso varino in modo continuo al variare di s, l'arbitrarietà di θ sia subordinata al fatto che $\theta(s)$ risulti funzione continua di s lungo tutta la curva, se questa è aperta, o possa al più presentare una sola discontinuità nel punto che si assume come punto iniziale e punto terminale della curva se questa è chiusa.

b) Osserviamo ora che se le funzioni $x(s)$ e $y(s)$ di cui al capoverso *a*) sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x'(s)$, $y'(s)$, anche l'angolo di direzione $\theta(s)$ risulta funzione assolutamente continua.

Infatti, per quanto si è detto in *a*), possiamo determinare un $\delta_0 > 0$ in modo che, per ogni coppia s_1, s_2 di valori di s soddisfacenti alla disuguaglianza $|s_2 - s_1| \leqslant \delta_0$, risulti

$$|\theta(s_2) - \theta(s_1)| < \frac{\pi}{4}.$$

Ma, se φ_1 e φ_2 sono due numeri reali tali che $|\varphi_2 - \varphi_1| \leqslant \frac{\pi}{4}$, abbiamo [7]

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \leqslant \sqrt{2}\,\{|\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1| + |\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1|\}.$$

Ora, essendo per ogni s di $(0, L)$ $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \operatorname{sen}\theta(s)$, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, in virtù dell'assoluta continuità delle $x'(s)$, $y'(s)$ possiamo determinare un $\delta > 0$ in modo che se (a_i, b_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$ è un gruppo di intervalli di $(0, L)$, a due a due distinti e di lunghezza complessiva minore di δ risulti

$$\sum_{i=1}^{n} |\operatorname{sen}\theta(b_i) - \operatorname{sen}\theta(a_i)| < \varepsilon, \qquad \sum_{i=1}^{n} |\cos\theta(b_i) - \cos\theta(a_i)| < \varepsilon,$$

e quindi ne segue, se è anche $\delta \leqslant \delta_0$,

$$\sum_{i=1}^{n} |\theta(b_i) - \theta(a_i)| < 2\sqrt{2}\cdot\varepsilon.$$

Il nostro asserto è così provato.

Viceversa, se $\theta(s)$ è assolutamente continua, ne segue immediatamente l'as-

---

(7) Basta rilevare che è

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\right| + \left|\frac{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\right| \geqslant |\cos\varphi'| + |\operatorname{sen}\varphi''| \geqslant \Phi_0' + \Phi_0'',$$

ove Φ_0' e Φ_0'' sono rispettivamente il minimo valore assoluto del coseno e del seno, quando l'argomento varia nell'intervallo (φ_1, φ_2).

Quindi se $|\varphi_2 - \varphi_1| \leqslant \frac{\pi}{4}$, è $\Phi_0' + \Phi_0'' \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

soluta continuità delle $x'(s)$, $y'(s)$, in virtù del fatto che le funzioni seno e coseno sono a rapporto incrementale limitato.

c) Ciò premesso, diremo *curva ordinaria* $\mathcal{C}^{(2)}$ ogni curva rettificabile

$$\mathcal{C}^{(2)}: \qquad x=x(s), \quad y=y(s), \qquad (0\leqslant s\leqslant L)$$

essendo s la lunghezza dell'arco rettificato, per la quale le funzioni $x(s)$, $y(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x'(s)$, $y'(s)$, ogni punto $(x(s), y(s))$ appartiene al campo A ed esiste finito l'integrale (del LEBESGUE)

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = \int_{\mathcal{C}^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, ds,$$

ove $\theta'(s)$ è la curvatura della curva $\mathcal{C}^{(2)}$ e quindi $\theta'(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} = x'(s)\,y''(s) - - x''(s)\,y'(s)$.

Converremo inoltre che ogni curva costituita di un solo punto sia una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ per la quale risulta $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}=0$.

OSSERVAZIONE. - Per quanto abbiamo detto in *b*) la classe delle curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ coincide con quella considerata dal BOGOLIOUBOFF, quando, naturalmente, si scelga la stessa funzione F.

4. - Varie speci di integrali $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$.

Diremo che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è *quasi-regolare positivo*, se per tutti i punti (x, y) del campo A, per tutte le coppie x', y' di numeri reali non ambedue nulli e per tutti i valori reali di θ' la derivata parziale $F_{\theta'}(x, y, x', y', \theta')$ è, come funzione della sola θ', sempre non decrescente.

Se inoltre, per nessuna delle quaterne (x, y, x', y') sopra indicate, la $F_{\theta'}$ è costante per tutti i valori di θ', diremo che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è *quasi-regolare positivo seminormale*. Se per ogni quaterna sopra indicata, la $F_{\theta'}$ è funzione sempre crescente della θ' diremo che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è *quasi-regolare positivo normale*.

Se poi, oltre alle ipotesi fatte al n. 2, *b*), supponiamo che la funzione F ammetta, finita e continua, anche la derivata parziale $F_{\theta'\theta'}$, diremo che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è *regolare positivo*, se per tutte le quaterne (x, y, x', y') sopra indicate e per ogni valore di θ' è verificata la disuguaglianza $F_{\theta'\theta'} > 0$.

Diremo infine che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è *definito positivo* [*semi-definito positivo*] se in tutti i punti (x, y) del campo A, per tutte le coppie x', y' di numeri reali non ambedue nulli e per tutti i valori di θ' è $F>0$ $[F\geqslant 0]$.

OSSERVAZIONE. - Come è noto le definizioni di integrale quasi-regolare, quasi-regolare semi-normale e quasi-regolare normale si possono dare in modo indipendente dall'esistenza e continuità della derivata parziale $F_{\theta'}$.

5. - **Intorno $(\varrho)^2$ di una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$.**

a) Data una curva ordinaria $\mathcal{C}_0^{(2)}$ di lunghezza $L_0>0$, diremo che un'altra curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ di lunghezza L *appartiene all'intorno* $(\varrho)^2$, con $0<\varrho<1$, *della* $\mathcal{C}_0^{(2)}$, quando, indicate con s e σ le lunghezze degli archi delle $\mathcal{C}_0^{(2)}$ e $\mathcal{C}^{(2)}$ contate a partire dai loro primi estremi, se le curve sono aperte o da punti convenientemente scelti, se le curve sono chiuse, è possibile determinare una funzione $\sigma(s)$, $(0\leqslant s\leqslant L_0)$, con $\sigma(0)=0$, $\sigma(L_0)=L$, la quale sia continua insieme con la propria derivata del primo ordine $\sigma'(s)$, e per la quale valga la doppia disuguaglianza

$$1-\varrho\leqslant \sigma'(s)\leqslant 1+\varrho\,, \tag{1}$$

in modo che, essendo $\mathcal{C}_0^{(2)}: x=x_0(s),\ y=y_0(s),\ (0\leqslant s\leqslant L_0)$; $\mathcal{C}^{(2)}: x=x(\sigma),\ y=y(\sigma)$, $(0\leqslant\sigma\leqslant L)$, si abbia per ogni s di $(0, L_0)$

$$\begin{gathered} |\, x_0(s)-x(\sigma(s))\,|\leqslant \varrho\,, \qquad |\, y_0(s)-y(\sigma(s))\,|\leqslant \varrho\,, \\ \left|\frac{dx_0(s)}{ds}-\left[\frac{dx(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right|\leqslant\varrho, \qquad \left|\frac{dy_0(s)}{ds}-\left[\frac{dy(\sigma)}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma(s)}\right|\leqslant\varrho \end{gathered} \tag{2}$$ [8].

b) Se la curva ordinaria $\mathcal{C}_0^{(2)}$ è costituita da un solo punto (x_0, y_0), diremo che una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ di lunghezza $L>0$

$$\mathcal{C}^{(2)}: \qquad x=x(\sigma),\quad y=y(\sigma), \qquad (0\leqslant\sigma\leqslant L)$$

appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}_0^{(2)}$, se è per ogni σ di $(0, L)$

$$|\, x_0-x(\sigma)\,|\leqslant\varrho\,, \qquad |\, y_0-y(\sigma)\,|\leqslant\varrho\,,$$

e se per ogni coppia di valori distinti σ_1 e σ_2 di $(0, L)$ sono verificate le disuguaglianze

$$|\, x'(\sigma_1)-x'(\sigma_2)\,|\leqslant\varrho\,, \qquad |\, y'(\sigma_1)-y'(\sigma_2)\,|\leqslant\varrho\,. \tag{3}$$

Inoltre ogni curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$, costituita di un solo punto (x, y), appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}_0^{(2)}$, quando sono verificate le disuguaglianze

$$|\, x_0-x\,|\leqslant\varrho\,, \qquad |\, y_0-y\,|\leqslant\varrho\,.$$

c) Osservazione I. - È bene rilevare, per il seguito, che, se il numero ϱ è $<\frac{1}{\sqrt{2}}$, dalle (2) segue che è possibile usufruire dell'arbitrarietà degli angoli

---

[8] Questa definizione non differisce da quella data dal Tonelli al n. 54, p. 171, del Vol. II dell'opera cit. in [2].

di direzione $\theta_0(s)$ e $\theta(\sigma)$ delle curve $\mathcal{C}_0^{(2)}$ e $\mathcal{C}^{(2)}$ in modo che in tutto $(0, L_0)$ sia verificata la disuguaglianza

$$(4) \qquad |\theta_0(s) - \theta(\sigma(s))| \leqslant \frac{\pi}{3}\sqrt{2}\,\varrho\,.$$

A tal uopo basta osservare che dalle (2), cioè a dire dalle

$$|\cos\theta_0(s) - \cos\theta(\sigma(s))| \leqslant \varrho, \qquad |\operatorname{sen}\theta_0(s) - \operatorname{sen}\theta(\sigma(s))| \leqslant \varrho,$$

segue immediatamente, per $\varrho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$(4') \qquad -\frac{\pi}{3}\sqrt{2}\,\varrho + 2k\pi \leqslant \theta_0(s) - \theta(\sigma(s)) \leqslant \frac{\pi}{3}\sqrt{2}\,\varrho + 2k\pi,$$

ove k è un intero positivo, nullo o negativo che non cambia al variare di s in $(0, L_0)$. Infatti, siccome la differenza $\Delta(s) = \theta_0(s) - \theta(\sigma(s))$ è funzione continua di s, non è possibile che per $s = s_1$ valga la (4') con $k = k_1$, e per $s = s_2 \neq s_1$ valga la (4') con $k = k_2 \neq k_1$, perchè la differenza $\Delta(s)$ passerebbe dal valore $\Delta(s_1)$ al valore $\Delta(s_2)$ senza assumere tutti i valori intermedi. Quindi, giovandosi dell'arbitrarietà di $\theta_0(s)$ e $\theta(\sigma)$, dalla (4') segue la (4).

Viceversa, se è $|\theta_0(s) - \theta(\sigma(s))| \leqslant \varrho$, ne seguono immediatamente le (2).

Inoltre, dalla (1) segue che ogni curva che appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}_0^{(2)}$ ha lunghezza non superiore a $(1+\varrho)\,L_0$.

OSSERVAZIONE II. - Se per ogni coppia σ_1, σ_2 di $(0, L)$ sono verificate le (3), e se è $\varrho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, è sempre verificata anche la disuguaglianza

$$(5) \qquad |\theta(\sigma_1) - \theta(\sigma_2)| \leqslant \frac{\pi}{3}\sqrt{2}\,\varrho.$$

Ne segue, tenendo conto di un caso particolare di un risultato del TONELLI [9], che, sempre per $\varrho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, ogni curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ di cui al capoverso *b*) del presente num. ha lunghezza non superiore a $4\sqrt{\frac{2}{3}}\,\varrho$.

6. - Semicontinuità e continuità dell' integrale $\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$.

Si dice che l' integrale $\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è una funzione *semicontinua inferiormente*, se, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\varrho > 0$, in modo che, se $\mathcal{C}_0^{(2)}$ è una qualunque curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$, sia verificata la disuguaglianza

$$(6) \qquad \mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} > \mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}_0^{(2)}} - \varepsilon$$

per tutte le curve $\mathcal{C}^{(2)}$ che appartengono all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}_0^{(2)}$.

---

[9] Vedi L. TONELLI, opera cit. in [2], Vol. II, n. 9, pp 17-18.

Dalla definizione precedente si deducono rispettivamente quelle di *semicontinuità superiore* e di *continuità* sostituendo alla disuguaglianza (6) rispettivamente le seguenti

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} < \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0} + \varepsilon, \qquad \left| \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} - \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0} \right| < \varepsilon.$$

7. - Classe completa di curve di ordine 2.

Considerato un insieme J di infinite curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$, diremo che la curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ è una sua *curva di accumulazione di ordine 2*, se ad ogni intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}_0^{(2)}$ appartengono sempre infinite curve dell' insieme.

Ciò premesso diremo che un insieme J di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ costituisce una *classe completa di ordine 2*, quando ogni sua curva di accumulazione di ordine 2, se è una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$, appartiene all' insieme J.

§ 2. - La semicontinuità.

8. - Un lemma del Tonelli.

Se $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, per ogni punto (x_0, y_0) di A e per ogni terna x_0', y_0', θ_0' con $x_0'^2 + y_0'^2 = 1$ è possibile determinare almeno una terna di numeri p, q, ϱ, con $\varrho > 0$, in modo che, in tutti i punti (x, y) di A con

$$|x - x_0| \leqslant \varrho, \qquad |y - y_0| \leqslant \varrho,$$

e per tutte le coppie x', y' normalizzate e tali che sia

$$(x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 \leqslant \varrho^2,$$

risulti

$$F(x, y, x', y', \theta') > p + q\theta'$$

per tutti i θ', e

$$F(x, y, x', y', \theta') < p + q\theta' + \varepsilon,$$

per tutti i θ' tali che $|\theta' - \theta_0'| \leqslant \varrho$.

Questa lieve estensione del lemma del TONELLI si dimostra in modo perfettamente identico all' originale ([10]).

([10]) Vedi L. TONELLI : *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. III (1934), pp. 401-450 ; n. 2, p. 405.

9. - **Teorema di semicontinuità** (*integrali quasi-regolari seminormali*).

Se $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, esso è semicontinuo inferiormente.

Considerata una qualsiasi curva ordinaria $\mathcal{C}_0^{(2)}$, si tratta di dimostrare che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è semicontinuo inferiormente su tale curva.

Cominciamo a considerare il caso in cui la curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ è costituita da un solo punto (x_0, y_0). Se la funzione F è non negativa il nostro asserto è evidente. In caso contrario in virtù del lemma del n. 8 e con note considerazioni possiamo decomporre la circonferenza $x'^2+y'^2=1$ in un numero finito di archi $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$, e determinare m terne di numeri p_r, q_r, ϱ_r, $(r=1, 2, ..., m)$ con $\varrho_r>0$ in modo che risulti

$$F(x, y, x', y', \theta') > p_r + q_r\,\theta'$$

per tutti i valori di θ', per ogni (x, y) con $|x-x_0| \leqslant \varrho_r$, $|y-y_0| \leqslant \varrho_r$, e per ogni coppia normalizzata x', y', la quale disti di non più di ϱ_r da un punto di Γ_r.

Indicati con p_0, q_0, ϱ_0 rispettivamente i minori dei numeri p_r, $(r=1, 2, ..., m)$, q_r, $(r=1, 2, ..., m)$, ϱ_r, $(r=1, 2, ..., m)$, consideriamo una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$: $x=x(s)$, $y=y(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$ appartenente all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}_0^{(2)}$, con $\varrho\sqrt{2}$ minore di ϱ_0 e dell'unità. Allora se è $L=0$, risulta $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}=0$; altrimenti lungo tutta la curva $\mathcal{C}^{(2)}$ risulta $F>p_j+q_j\,\theta'$, ove j è uno dei valori $1, 2, ..., m$, e quindi, tenuto conto dell'osservazione II fatta al capoverso *c*) del n. 5, abbiamo

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} > \int_{\mathcal{C}^{(2)}} (p_j + q_j\,\theta'(s))\,ds \geqslant -|p_0|\,4\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\varrho - |q_0|\,\tfrac{\pi}{3}\sqrt{2}\,\varrho\,;$$

e ciò basta per concludere che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è semicontinuo inferiormente su ogni curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ costituita da un solo punto.

Sia ora $L_0>0$ la lunghezza della curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$: per provare, anche in questa ipotesi, la semicontinuità inferiore dell'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ sulla curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ basta ripetere con qualche complemento una dimostrazione del TONELLI ([11]) tenendo conto della seguente osservazione:

La curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ sia suddivisa in m archi $\mathcal{C}_{0,r}^{(2)} \equiv [s_{r-1} \leqslant s \leqslant s_r]$, $(r=1, 2, ..., m;$ $s_0 \equiv 0)$, e siano fissate m coppie di numeri p_r, q_r, $(r=1, 2, ..., m)$; allora, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon>0$, è possibile determinare un $\varrho>0$, in modo che, considerata una qualunque curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$, appartenente all'intorno $(\varrho)^2$

([11]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([10]), n. 3, p. 407 e segg.

della $\mathcal{C}_0^{(2)}$; indicato con $\mathcal{C}_r^{(2)} \equiv [\sigma(s_{r-1}) \leqslant \sigma \leqslant \sigma(s_r)]$ l'arco di $\mathcal{C}^{(2)}$ corrispondente a $\mathcal{C}_{0,r}^{(2)}$ (ove $\sigma(s)$ è la funzione che figura nella definizione nel n. 5, a)) e posto

$$D = \sum_{r=1}^{m} \left\{ \int_{\mathcal{C}_r^{(2)}} (p_r + q_r \theta'(\sigma))\, d\sigma - \int_{\mathcal{C}_{0,r}^{(2)}} (p_r + q_r \theta_0'(s))\, ds \right\},$$

risulti

$$| D | < \varepsilon.$$

Infatti è evidentemente

$$\begin{aligned} D = \sum_{r=1}^{m} [\, & p_r \{ \sigma(s_r) - \sigma(s_{r-1}) \} + q_r \{ \theta(\sigma(s_r)) - \theta(\sigma(s_{r-1})) \} - \\ & - p_r \{ s_r - s_{r-1} \} - q_r \{ \theta_0(s_r) - \theta_0(s_{r-1}) \}] \\ = \sum_{r=1}^{m} [\, & p_r \{ (\sigma(s_r) - \sigma(s_{r-1})) - (s_r - s_{r-1}) \} + \\ & + q_r \{ \theta(\sigma(s_r)) - \theta_0(s_r)) - (\theta(\sigma(s_{r-1})) - \theta_0(s_{r-1})) \}]. \end{aligned}$$

Osserviamo che integrando tutti i membri della (1) del n. 5 fra s_{r-1} e s_r risulta

$$(1 - \varrho)\ (s_r - s_{r-1}) \leqslant \sigma(s_r) - \sigma(s_{r-1}) \leqslant (1 + \varrho)(s_r - s_{r-1})$$

cioè

$$| \sigma(s_r) - \sigma(s_{r-1}) - (s_r - s_{r-1}) | \leqslant \varrho(s_r - s_{r-1}).$$

Pertanto, indicato con P il maggiore dei moduli dei numeri p_r e q_r ($r = 1, 2, \ldots, m$) e tenendo conto della (4) risulta per $\varrho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$| D | \leqslant P \left\{ L_0 + 2m \frac{\pi}{3} \sqrt{2} \right\} \varrho,$$

da cui immediatamente il nostro asserto se è anche $\varrho < \dfrac{\varepsilon}{P \left\{ L_0 + 2m \frac{\pi}{3} \sqrt{2} \right\}}$.

10. - Corollario.

Ogni integrale quasi-regolare positivo è semicontinuo inferiormente in ogni classe $K^{(2)}$ di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$, per le quali le curve $\{x' = x'(s),\ y' = y'(s),\ (0 \leqslant s \leqslant L)$ abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso Λ.

Infatti, fissata una curva qualunque $\mathcal{C}_0^{(2)}$ di $K^{(2)}$ di lunghezza L_0, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, e posto $\tau = \frac{\varepsilon}{2(2L_0 + \Lambda)}$, se è $L_0 > 0$, e $\tau = \frac{\varepsilon}{2(3 + \Lambda)}$, se è $L_0 = 0$, consideriamo l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}^{(2)}} \left(F(x, y, x', y', \theta') + \tau \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \sqrt{1 + \theta'^2} \right) ds,$$

il quale risulta regolare. Si proceda poi in modo analogo al TONELLI ([12]) tenendo conto del teorema del n. 9 e rilevando che, in virtù delle osservazioni fatte al n. 5, *c*) e per $\varrho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, risulta secondochè è $L_0 > 0$, o $L_0 = 0$, rispettivamente

$$\int_{\mathcal{C}^{(2)}} \sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{1+\theta'^2}ds \leqslant \int_{\mathcal{C}^{(2)}} ds + \int_{\mathcal{C}^{(2)}} |\theta'| ds \leqslant L_0(1+\varrho) + \int_{\mathcal{C}^{(2)}} \sqrt{x''^2+y''^2} ds \leqslant 2L_0 + A = \frac{\varepsilon}{2\tau}$$

$$\int_{\mathcal{C}^{(2)}} \sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{1+\theta'^2}\, ds \leqslant \int_{\mathcal{C}^{(2)}} ds + \int_{\mathcal{C}^{(2)}} |\theta'|\, ds \leqslant 4\sqrt{\frac{2}{3}}\varrho + A \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}} + A < \frac{\varepsilon}{2\tau}.$$

11. - Teorema di continuità.

Se $P(x, y, x', y')$, $Q(x, y, x', y')$ *sono due funzioni*: 1°) *definite e continue insieme con le derivate parziali* Q_x, Q_y *in ogni punto* (x, y) *del campo* A *e per ogni coppia di numeri* x', y' *non ambedue nulli*; 2°) *positivamente omogenee di grado* 1 *rispetto alle variabili* x' *e* y'; 3°) *tali che sia* $P(x, y, 0, 0) = Q(x, y, 0, 0) = 0$; *allora l'integrale*

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = \int_{\mathcal{C}^{(2)}} (P(x, y, x', y') + \theta' \, Q(x, y, x', y'))\, ds$$

è una funzione continua.

Infatti, considerata una curva ordinaria

$$\mathcal{C}_0^{(2)}: \qquad x = x_0(s), \ y = y_0(s), \quad (0 \leqslant s \leqslant L_0),$$

sia

$$\mathcal{C}^{(2)}: \qquad x = x(\sigma), \ y = y(\sigma), \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant L)$$

una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ appartenente all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}_0^{(2)}$.

Supponiamo, dapprima, $L_0 > 0$. Allora basta ripetere, in forma semplificata, un procedimento di dimostrazione del TONELLI che noi già abbiamo esteso agli integrali in forma ordinaria dipendenti dalle derivate di ordine superiore ([13]) tenendo presenti le seguenti avvertenze:

([12]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([10]), n. 4, pp. 410-411.

([13]) Vedi S. CINQUINI: *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n.* Annali di Matematica pura e applicata, S. IV, T. XV (1936-37), n. 2, *a*). — A differenza da quanto avviene per la forma ordinaria, nel caso in questione non c'è bisogno di supporre che le funzioni P e Q siano definite in un campo contenente A nel suo interno.

Nella differenza

$$\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} - \mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0} = \int_0^L \left\{ P(x(\sigma), y(\sigma), \cos\theta(\sigma), \operatorname{sen}\theta(\sigma)) + \frac{d\theta(\sigma)}{d\sigma} Q(\,.....\,) \right\} d\sigma -$$

$$- \int_0^{L_0} \left\{ P(x_0(s), y_0(s), \cos\theta_0(s), \operatorname{sen}\theta_0(s)) + \frac{d\theta_0(s)}{ds} Q(\,.....\,) \right\} ds,$$

all'espressione di $\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ può sostituirsi, in virtù del teorema di integrazione per sostituzione, la seguente

$$\int_0^{L_0} \left\{ \sigma'(s) P(x(\sigma(s)), y(\sigma(s)), \cos\theta(\sigma(s)), \operatorname{sen}\theta(\sigma(s))) + \frac{d\theta(\sigma(s))}{ds} Q(\,.....\,) \right\} ds,$$

ove $\sigma(s)$ è la funzione che figura nella definizione del n. 5, a).

Lo sviluppo della dimostrazione è basato sulla considerazione della funzione

$$\Phi(s) = \int_{\theta_0(s)}^{\theta(\sigma(s))} Q(x(\sigma(s)), y(\sigma(s)), \cos u, \operatorname{sen} u)\, du,$$

la cui assoluta continuità si stabilisce osservando che, essendo $\sigma(s)$ funzione non decrescente, le funzioni $x(\sigma(s))$, $y(\sigma(s))$, $\theta(\sigma(s))$ (oltrechè la $\theta_0(s)$) sono assolutamente continue.

Infine si terrà conto della (4) del n. 5, c).

Se poi è $L_0 = 0$, onde $\mathfrak{I}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0} = 0$, basta ripetere una parte del ragionamento che si sviluppa per $L_0 > 0$, considerando la funzione

$$\Phi(\sigma) = \int_{\theta(0)}^{\theta(\sigma)} Q(x(\sigma), y(\sigma), \cos u, \operatorname{sen} u)\, du,$$

e usufruendo della (5) del n. 5, c).

OSSERVAZIONE. - Si può ora porre in rilievo l'importanza che ha la definizione di intorno $(\varrho)^2$ che abbiamo data al n. 5, a) e b).

Consideriamo la curva

$\mathcal{C}^{(2)}_0$: $\qquad x = 0,\ y = 0,$

e la classe $K^{(2)}$ di curve ordinarie

$\mathcal{C}^{(2)}_n$: $\qquad x = \frac{1}{n}\cos ns,\ y = \frac{1}{n}\operatorname{sen} ns, \qquad \left(0 \leqslant s \leqslant \frac{2\pi}{n}\right), \qquad n = 1, 2, ...$

e l'integrale

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = \int_{\mathcal{C}^{(2)}} \sqrt{x'^2(s)+y'^2(s)}\,\theta'(s)\,ds.$$

Risulta

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_0}=0, \qquad \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n}=\int_0^{\frac{2\pi}{n}} n\,ds=2\pi.$$

L'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ non risulta funzione continua sulla curva $\mathcal{C}^{(2)}_0$, ma le curve $\mathcal{C}^{(2)}_n$ considerate non appartengono all'intorno $(\varrho)^2$ della $\mathcal{C}^{(2)}_0$.

12. - **Teorema di semicontinuità** (*integrali soltanto quasi-regolari*).

Supponiamo, nel presente num., oltre alle ipotesi fatte al n. 2, *b*), che la funzione F ammetta, per tutte le quintuple indicate al luogo citato, finite e continue anche le derivate parziali $F_{\theta'x}$, $F_{\theta'y}$.

Sotto queste ipotesi ogni integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ *quasi-regolare positivo è semicontinuo inferiormente.*

Infatti, si consideri la funzione

$$\overline{F}(x, y, x', y', \theta') \equiv F(x, y, x', y', \theta') - \{F(x, y, x', y', 0)+\theta' F_{\theta'}(x, y, x', y', 0)\},$$

la quale è non negativa.

Allora, se $\mathcal{C}^{(2)}_0$ è una qualunque curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ di lunghezza $L_0>0$, basta ripetere una dimostrazione del TONELLI ([14]) tenendo presente le varianti già da noi introdotte ([15]) e usufruendo dei risultati dei nn. 9 e 11 del presente lavoro.

Se poi è $L_0=0$, la semicontinuità inferiore dell'integrale $\int_{\mathcal{C}^{(2)}} \overline{F} ds$ sulla curva $\mathcal{C}^{(2)}_0$ è evidente, e l'asserto scende immediatamente dal risultato del n. 11.

13. - **Estensione della semicontinuità.**

a) *Sia la curva rettificabile* Γ_0: $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$, $(0\leq s\leq L_0)$, *con* $L_0>0$, *appartenente al campo* A *e tale che le funzioni* $x_0(s)$, $y_0(s)$ *siano assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine. Allora se l'integrale* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ *è quasi-regolare positivo seminormale, se la funzione* $F(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), \theta_0'(s))$ *non è integrabile sull'intervallo* $(0, L_0)$, *preso ad arbitrio un numero* $H>0$, *si può determinare un*

([14]) Vedi L. TONELLI, opera cit. in ([2]), Vol. I, n. 98, pp. 272-274.

([15]) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in ([13]), n. 4.

numero $\varrho > 0$, in modo che, per ogni curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$ appartenente all'intorno $(\varrho)^2$ della Γ_0, sia verificata la disuguaglianza

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} > H.$$

Basta ripetere una dimostrazione del TONELLI [16], tenendo presente quanto abbiamo osservato al n. 9.

b) Il teorema dato in a) è valido anche nel caso in cui l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ non sia seminormale, purchè si consideri una classe di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$: $x=x(s)$, $y=y(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$, per le quali le corrispondenti curve $x'=x'(s)$, $y'=y'(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$ abbiano tutte lunghezza inferiore ad un numero fisso.

c) Sotto le ipotesi fatte all'inizio del n. 12, il teorema dato nell'a) del presente n. si estende a tutti gli integrali quasi-regolari positivi.

§ 3. - Esistenza dell' estremo in campi limitati.

14. - Il campo A_0.

In tutto il presente paragrafo supporremo che il campo A di cui al n. 1 sia limitato, e lo indicheremo con A_0. Rileviamo che il campo A_0 risulta chiuso.

15. - Primo teorema di esistenza.

Si supponga che: 1°) l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ sia quasi-regolare positivo, 2°) esista una funzione $\Phi(u)$, $(0 \leqslant u < +\infty)$ inferiormente limitata, tale che per $u \to +\infty$, sia $\Phi(u): u \to +\infty$, in modo che in tutto il campo A_0 e per ogni coppia normalizzata x', y' sia

$$F(x, y, x', y', \theta') \geqslant \Phi(|\theta'|).$$

Allora in ogni classe $K^{(2)}$, completa di ordine 2, di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$, di lunghezza inferiore ad un numero fisso L', esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$.

Infatti, tenuto presente che il limite inferiore i di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe $K^{(2)}$ è finito, consideriamo una successione minimizzante, estratta da $K^{(2)}$, di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$

$$\mathcal{C}^{(2)}_n: \qquad x=x_n(s),\ y=y_n(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_n), \qquad n=1, 2, \ldots$$

[16] Vedi L. TONELLI, luogo cit. in [10], n. 6, p. 412.

tali cioè che sia $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_n^{(2)}} \leqslant i + \frac{1}{n}$, intendendosi che, qualora sia $i < 0$, si considerino soltanto le curve $\mathcal{C}_n^{(2)}$ con $n > \overline{n}$, ove $\overline{n}$ è il minimo numero intero per cui è $\overline{n} > -\frac{2}{i}$.

Osserviamo, innanzi tutto, che se è $i = 0$ e se fra le curve della successione minimizzante ce n'è almeno una di lunghezza nulla, essa fornisce, evidentemente, il minimo di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe $K^{(2)}$.

Altrimenti possiamo ritenere che per ogni n sia sempre $L_n > 0$, perchè, se è $i \neq 0$, le curve di lunghezza nulla non interessano. Tenuto conto che è $|x_n'(s)| \leqslant 1$, $|y_n'(s)| \leqslant 1$, le funzioni $\{x_n(s)\}$, $\{y_n(s)\}$ risultano equiassolutamente continue, ed anche ugualmente limitate, perchè il campo A_0 è limitato ed è $L_n \leqslant L'$. Inoltre, in modo perfettamente identico al TONELLI ([17]) ed essendo $L_n \leqslant L'$, si prova che le funzioni $\{\theta_n(s)\}$, e quindi anche le $\{x_n'(s)\}$, $\{y_n'(s)\}$, sono in $(0, L_n)$ equiassolutamente continue.

Ciò premesso distinguiamo due casi.

Se il limite inferiore delle lunghezze L_n è zero, dalla successione $\mathcal{C}_n^{(2)}$ possiamo estrarre una successione parziale

$$\mathcal{C}_{\mu_n}^{(2)}: \qquad x = x_{\mu_n}(s),\ y = y_{\mu_n}(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_{\mu_n}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

con $\lim_{n \to \infty} L_{\mu_n} = 0$, convergente uniformemente verso una curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ costituita da un solo punto, la quale risulta una curva di accumulazione di ordine 2 della classe $K^{(2)}$. Infatti per l'equiassoluta continuità delle $\{x_{\mu_n}'(s)\}$, $\{y_{\mu_n}'(s)\}$, preso ad arbitrio un $\varrho' > 0$, possiamo determinare un $\delta' > 0$ in modo che, per ogni coppia s_1, s_2 di valori di $(0, L_{\mu_n})$ con $|s_2 - s_1| < \delta'$, risulti

$$(7) \qquad |x_{\mu_n}'(s_1) - x_{\mu_n}'(s_2)| \leqslant \varrho', \quad |y_{\mu_n}'(s_1) - y_{\mu_n}'(s_2)| \leqslant \varrho'.$$

Quindi, determinato n' in modo che, per ogni $n > n'$, sia $L_{\mu_n} < \delta'$, le (7) risultano verificate per ogni coppia s_1, s_2 di $(0, L_{\mu_n})$ con $n > n'$. Perciò, siccome la classe $K^{(2)}$ è completa di ordine 2, la curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$ appartiene a tale classe, e fornisce il minimo di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ se è $i = 0$. Se poi è $i \neq 0$, il limite inferiore delle L_n non può essere lo zero. Infatti o è $i > 0$, e allora saremmo giunti ad un assurdo, perchè alla classe $K^{(2)}$ apparterrebbe la curva $\mathcal{C}_0^{(2)}$, per la quale risulterebbe $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_0^{(2)}} = 0$. Se poi è $i < 0$, onde, per quanto abbiamo sopra convenuto, $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_n^{(2)}} \leqslant i + \frac{1}{n} < \frac{i}{2}$, indicato con Φ_0 (< 0) il limite inferiore di $\Phi(u)$, esisterebbe qualche n, per cui risulterebbe $\Phi_0 L_n > \frac{i}{2}$, e quindi, essendo $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_n^{(2)}} \geqslant \Phi_0 L_n$, si arriverebbe all'assurdo $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_n^{(2)}} > \mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_n^{(2)}}$.

([17]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([10]), n. 9, pp. 414-415.

Ci rimane quindi da esaminare soltanto il caso in cui sia, per ogni n, $L_n \geqslant L^* > 0$. In tale ipotesi possiamo estrarre ([18]) dalla successione $\mathcal{C}_n^{(2)}$ una successione parziale

$$\mathcal{C}_{\nu_n}^{(2)}: \qquad x = x_{\nu_n}(s), \qquad y = y_{\nu_n}(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_{\nu_n}), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

in modo che le successioni $\{x_{\nu_n}(s)\}$, $\{y_{\nu_n}(s)\}$, $\{x'_{\nu_n}(s)\}$, $\{y'_{\nu_n}(s)\}$ convergano uniformemente verso quattro funzioni $x_\infty(s)$, $y_\infty(s)$, $x'_\infty(s)$, $y'_\infty(s)$, definite in $(0, L_\infty)$ con $L^* \leqslant L_\infty \leqslant L'$, assolutamente continue, e tali che sia $x'_\infty(s) = \frac{dx_\infty(s)}{ds}$, $y'_\infty(s) = \frac{dy_\infty(s)}{ds}$, $x'^2_\infty(s) + y'^2_\infty(s) = 1$ per ogni s di $(0, L_\infty)$. Quindi, siccome, in virtù dell'ipotesi 2) del nostro enunciato, l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ risulta seminormale, tenuto conto dei n. 13, *a*) e 9, la curva $\mathcal{C}^{(2)}_\infty$: $x = x_\infty(s)$, $y = y_\infty(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L_\infty)$ appartiene alla classe $K^{(2)}$ e fornisce il minimo di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe stessa.

16. - Corollario I.

Se l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è definito positivo, nel teorema del n. 15 l'ipotesi che le curve della classe $K^{(2)}$ abbiano lunghezza inferiore ad un numero fisso può essere soppressa.

Infatti, premesso che è certamente $i \geqslant 0$ e considerata una successione minimizzante di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ estratta dalla classe $K^{(2)}$, dimostriamo che le loro lunghezze sono ugualmente limitate. Determinato $u_1 > 0$ in modo che, per $u \geqslant u_1$, sia $\Phi(u) \geqslant u$, per ogni $|\theta'| \geqslant u_1$ e per ogni coppia normalizzata x', y' risulta «a fortiori» in tutto il campo A_0

$$F(x, y, x', y', \theta') \geqslant u_1$$

D'altra parte il minimo di F per ogni (x, y) di A_0, per ogni coppia normalizzata x', y' e per ogni θ' con $|\theta'| \leqslant u_1$ risulta un numero $\mu > 0$. Pertanto indicato con μ_1 il minore dei due numeri u_1 e μ, per ogni curva $\mathcal{C}_n^{(2)}$ appartenente alla successione minimizzante considerata e avente lunghezza $L_n > 0$, abbiamo

$$\int_{\mathcal{C}_n^{(2)}} F ds \geqslant \mu L_n$$

e quindi

$$L_n < \frac{i+1}{\mu}.$$

([18]) Cfr. il procedimento seguito dal TONELLI nell'opera cit. in ([2]), Vol. I, n. 25, pp. 87-89, che va completato secondo le presenti esigenze.

17. - Corollario II.

Se esiste una costante $\lambda > 0$, *in modo che per ogni* $u \geqslant 0$ *risulti*

$$\Phi(u) \geqslant \lambda u,$$

allora, ferme restando le altre ipotesi del teorema del n. 15, la condizione che le curve della classe $K^{(2)}$ *abbiano lunghezza inferiore ad un numero fisso può essere soppressa.*

Infatti, premesso che risulta certamente $i \geqslant 0$ ed estratta dalla classe $K^{(2)}$ una successione minimizzante di curve ordinarie $\mathcal{C}_n^{(2)}$: $x = x_n(s)$, $y = y_n(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L_n)$, se è $L_n > 0$ risulta

$$\int_0^{L_n} \left| \frac{d\theta_n(s)}{ds} \right| ds \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_0^{L_n} \Phi(\,|\theta_n'(s)|\,)\, ds \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_0^{L_n} F(x_n(s), y_n(s), x_n'(s), y_n'(s), \theta_n'(s))ds \leqslant \frac{i+1}{\lambda};$$

cioè a dire le variazioni totali delle funzioni $\theta_n(s)$ relative alle curve della successione minimizzante considerata risultano ugualmente limitate.

Sia Ω il lato di un quadrato del piano (x, y) a lati paralleli agli assi coordinati nel quale è contenuto il campo A_0, e si indichi con ξ il minimo numero intero positivo tale che sia $\xi \frac{\pi}{2} \geqslant \frac{i+1}{\lambda}$. In base ad un risultato del TONELLI ([19]), quando l'angolo di direzione di una curva, soddisfacente alle condizioni del n. 3, *c*) e contenuta in un quadrato di lato Ω, varia in un intervallo di ampiezza non superiore a $\frac{\pi}{2}$, la lunghezza del corrispondente arco di curva non può essere superiore a $\Omega\sqrt{2} : \cos\frac{\pi}{4} = 2\,\Omega$. Ne segue evidentemente $L_n \leqslant 2\Omega\xi$, $(n = 1, 2, ...)$; vale a dire le lunghezze delle curve della successione minimizzante considerata risultano ugualmente limitate.

18. - Osservazione.

È importante mettere in rilievo che, quando si considera una classe di curve le cui lunghezze non sono ugualmente limitate, il teorema del n. 15 può cadere in difetto. Ciò risulta dal seguente esempio nel quale si considera un integrale regolare semidefinito positivo.

Sia

$$A_0 \equiv [-2 \leqslant x \leqslant 2,\ -2 \leqslant y \leqslant 2]$$

$$F(x, y, x', y', \theta') \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2}\ (\theta' - 1)^2,$$

([19]) Vedi L. TONELLI, opera cit. in ([2]), Vol. II, n. 9, pp. 17-18.

si consideri la classe di curve

$$\mathcal{C}_n^{(2)}: \qquad x=\frac{n+1}{n}\cos\frac{n}{n+1}s, \quad y=\frac{n+1}{n}\operatorname{sen}\frac{n}{n+1}s, \qquad (0\leqslant s\leqslant 2\pi(n+1)), \quad n=1, 2, \ldots$$

Sono verificate le ipotesi 1) e 2) del n. 15, ma non la condizione $\Phi(u)\geqslant \lambda u$ di cui al corollario del n. 17, e la classe considerata è completa di ordine 2. Essendo

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}_n^{(2)}}=\int_0^{2\pi(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}-1\right)^2 ds=\frac{2\pi}{n+1},$$

il limite inferiore di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe considerata è zero, ma nella classe non esiste alcuna curva che fornisca il minimo.

19. - Un' estensione del teorema del n. 15.

Il teorema del n. 15 continua ad essere valido anche quando le lunghezze delle curve della classe considerata non siano ugualmente limitate, purchè tutte le curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ per le quali è $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}\leqslant 0$ abbiano lunghezza inferiore ad un numero fisso $\overline{L}$ [20].

Infatti, indicato con u_0 il limite inferiore di $\Phi(u)$, risulta sempre $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}\geqslant -\overline{L}\,|\,u_0\,|$. Pertanto il limite inferiore i di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe $K^{(2)}$ considerata è finito, e per provare il nostro asserto basta dimostrare che, estratta da $K^{(2)}$ una successione minimizzante, tutte le curve di tale successione hanno lunghezza inferiore a un numero fisso. A tal uopo, posto $i+1=M$, riprendiamo con opportuni complementi un procedimento del TONELLI [21].

Se il nostro asserto non fosse vero, potremmo estrarre dalla successione minimizzante considerata una successione parziale di archi di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ che indicheremo con

$$(8) \qquad \mathcal{C}_n^{(2)}:\quad x=x_n(s),\ y=y_n(s), \qquad (0\leqslant s\leqslant L_n), \qquad n=1, 2, \ldots,$$

per i quali siano verificate entrambe le disuguaglianze

$$(9) \qquad \int_0^{L_n} F(x_n, y_n, x_n', y_n', \theta_n')ds\leqslant\frac{M}{n}, \qquad L_n>n.$$

---

[20] È ovvio (cfr. l'esempio dato al n. 18), che non basta supporre che abbiano lunghezza inferiore ad un numero fisso le curve della classe considerata per le quali è $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}\leqslant 0$.

[21] Vedi L. TONELLI: *Sull'esistenza del minimo in problemi di Calcolo delle Variazioni.* Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. I (1932), pp. 89-99, n. 6, p. 95.

Fissato un numero positivo $l \leqslant 1$, procedendo in modo analogo al TONELLI e tenendo presente che, in virtù della prima delle (9), possiamo ripetere in forma opportuna alcune delle considerazioni fatte al n. 15, possiamo estrarre dalla (8) una successione di curve

$$\mathcal{C}^{(2)}_{1,m},\ \mathcal{C}^{(2)}_{2,m},\ldots,\ \mathcal{C}^{(2)}_{n,m},\ldots,$$

in modo che sia

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_{n,m}} \leqslant \frac{M}{n+m}, \qquad L_{n,m} > n+m,$$

che i successivi archi di $\mathcal{C}^{(2)}_{n,m}$ di lunghezza l: $a^{[1]}_{n,m}$, $a^{[2]}_{n,m},\ldots$, $a^{[m]}_{n,m}$ convergano uniformemente, per $n \to \infty$, ai rispettivi archi limiti $a^{[1]}$, $a^{[2]},\ldots$, $a^{[m]}$, e che posto

$$a^{[j]}_{n,m}: \qquad x = x_{n,m,j}(s),\ y = y_{n,m,j}(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant l),$$

$$a^{[j]}: \qquad x = x_{\infty,m,j}(s),\ y = y_{\infty,m,j}(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant l^{[j]}),$$

per $n \to \infty$ non solo le funzioni $x_{n,m,j}(s)$, $y_{n,m,j}(s)$ convergano uniformemente alle $x_{\infty,m,j}(s)$, $y_{\infty,m,j}(s)$, ma anche le loro derivate $x'_{n,m,j}(s)$, $y'_{n,m,j}(s)$ convergano uniformemente verso le funzioni $x'_{\infty,m,j}(s)$, $y'_{\infty,m,j}(s)$, le quali risultano pure assolutamente continue e tali che $x'_{\infty,m,j}(s) = \frac{dx_{\infty,m,j}(s)}{ds}$, $y'_{\infty,m,j}(s) = \frac{dy_{\infty,m,j}(s)}{ds}$; inoltre ognuno degli archi $a^{[j]}$, $(j = 1, 2,\ldots, m)$ ha lunghezza $l^{[j]} = l$, il secondo estremo di ciascuno di essi (per $j \leqslant m-1$) coincide con il primo estremo del successivo e in tale punto comune i due archi hanno la medesima tangente.

Chiamata Γ_m la curva avente per archi successivi $a^{[1]}$, $a^{[2]},\ldots$, $a^{[m]}$, osserviamo innanzi tutto che, siccome per le ipotesi 1) e 2) del n. 15 l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ risulta quasi regolare seminormale, in virtù del n. 13, *a*) l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_m}$ esiste finito e quindi Γ_m è una curva ordinaria $\mathcal{C}^{(2)}$. Dico che per ogni m, è $\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_m} \leqslant 0$. Infatti se fosse, per un certo m, $\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_m} > 0$, ragionando in modo identico al TONELLI si troverebbero delle curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ di lunghezza arbitrariamente grande e che renderebbero negativo l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$, contrariamente alla ipotesi fatta. È dunque, per ogni m, $\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_m} \leqslant 0$, ma anche ciò è assurdo, perchè la lunghezza di Γ_m è ml, e per m sufficientemente grande può rendersi grande ad arbitrio.

Il nostro asserto è così provato e siamo ricondotti al teorema del n. 15.

20. - Casi particolari del teorema del n. 19.

a). *Se ferme restando le ipotesi* 1) *e* 2) *dell'enunciato del n.* 15, *la funzione* $\Phi(u)$ *è non negativa e si annulla soltanto per* $u = 0$, *è verificata la condizione del n. 19.*

Ciò è evidente: infatti essendo

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} \geqslant \int_{\mathcal{C}^{(2)}} \Phi(|\theta'|)\, ds,$$

l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ è semidefinito positivo, e le curve sulle quali esso può annullarsi sono soltanto i segmenti rettilinei $\theta =$ costante, i quali non possono avere lunghezza superiore alla massima distanza dei punti del campo limitato A_0.

b). OSSERVAZIONE. - L'esempio dato al n. 18 mette in evidenza che, pur essendo $\Phi(u) \geqslant 0$ con $\Phi(u) = 0$ soltanto per $u = r > 0$, non solo la condizione del n. 19 può non essere verificata, ma può mancare il minimo.

Si potrebbe esaminare il caso in cui il campo A_0 è tutto contenuto in un cerchio di raggio R e $\Phi(u)$ è non negativa e si annulla soltanto per $u \leqslant r$, con $r < \frac{1}{R}$.

21. - Secondo teorema di esistenza.

Si supponga che: 1°) *l'integrale* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ *sia quasi-regolare positivo;* 2°) *esistano t punti distinti del campo* A_0 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_t, y_t)$, *e* $t+2$ *numeri positivi* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t, \omega, h_0$, *con* ω *maggiore di tutti i* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$, *in modo che in tutto il campo* A_0, *per ogni coppia* x', y' *normalizzata e per ogni* θ' *sia verificata la disuguaglianza*

$$(10) \quad F(x, y, x', y', \theta') \geqslant h_0 \left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\right)^{\mu_1} \ldots \left(\sqrt{(x-x_t)^2 + (y-y_t)^2}\right)^{\mu_t} |\theta'|^{1+\omega}.$$

Sotto queste ipotesi in ogni classe $K^{(2)}$, *completa di ordine 2, di curve ordinarie* $\mathcal{C}^{(2)}$ *esiste il minimo assoluto di* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$.

a). Per stabilire il teorema ora enunciato basta che ci limitiamo a considerare il caso in cui i punti (x_j, y_j), $(j = 1, 2, \ldots, t)$ si riducano ad uno solo che, per semplicità, potremo supporre coincidente con l'origine delle coordinate: fatta tale convenzione, la disuguaglianza (10) assumerà la forma seguente

$$(10') \qquad F(x, y, x', y', \theta') \geqslant h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\mu} |\theta'|^{1+\omega},$$

con h, μ, ω positivi e $\omega > \mu$.

β). Ciò premesso, tenuto presente che il limite inferiore dell'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe $K^{(2)}$ è un numero $i \geqslant 0$, consideriamo una successione minimizzante estratta dalla classe $K^{(2)}$

$$\mathcal{C}^{(2)}_n: \qquad x = x_n(s),\ y = y_n(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

tale che sia $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} \leqslant i + \frac{1}{n}$.

Occorre distinguere tre casi:

I). Si può determinare un cerchio $(O;\ r')$ [22], in modo che dalla successione minimizzante si può estrarre una successione parziale, tale che ogni curva di questa sottosuccessione non ha alcun punto interno a tale cerchio $(O;\ r')$.

II). Si può estrarre dalla successione minimizzante una successione parziale, che per semplicità di scrittura indicheremo ancora con $\mathcal{C}_n^{(2)}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, in modo che comunque piccolo si prenda $r' > 0$, esiste in corrispondenza ad esso un intero $\bar{n}$ in modo che ogni curva di questa sottosuccessione di indice $n > \bar{n}$ è tutta contenuta nel cerchio $(O;\ r')$.

III). È possibile estrarre dalla successione minimizzante una successione parziale che, per semplicità di scrittura, indicheremo ancora con $\mathcal{C}_n^{(2)}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, in modo che, comunque piccolo si prenda $r' > 0$, esiste in corrispondenza ad esso un numero $\bar{n}$ tale che ogni curva di tale sottosuccessione di indice $n > \bar{n}$ ha sia punti interni sia punti esterni al cerchio $(O;\ r')$.

Se ci troviamo nel I) caso possiamo limitarci a considerare quella parte A_0' del campo A_0, che non contiene punti interni al cerchio $\left(O;\ \frac{r'}{2}\right)$, osservando che, in virtù della (10'), in tutto il campo A_0' è verificata la disuguaglianza

$$F(x, y, x', y', \theta') \geqslant h\left(\frac{r'}{2}\right)^{\mu} |\ \theta'\ |^{1+\omega}, \tag{10''}$$

e quindi possiamo senz'altro ritenere dimostrato il nostro teorema, perchè siamo nelle condizioni del n. 20, *a*).

γ). Per passare all'esame dei casi II) e III) incominciamo a dimostrare che, fissato comunque un numero positivo $\xi < \pi$, è possibile determinare un numero $r > 0$, in modo che su ciascun arco continuo di ogni curva $\mathcal{C}_n^{(2)}$ tutto contenuto nel cerchio $(O;\ r)$ l'angolo di direzione $\theta_n(s)$ vari in un intervallo di ampiezza minore di ξ. Dico che, posto $\frac{i+1}{h} = H$, basta prendere

$$r < \left(1 - \frac{\mu}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{\omega-\mu}} \cdot \frac{\xi^{\frac{1+\omega}{\omega-\mu}} \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{\omega}{\omega-\mu}}}{2^{1+\frac{2\omega}{\omega-\mu}}\ H^{\frac{1}{\omega-\mu}}} \tag{11}$$

Infatti, supposto che il nostro asserto non sia vero, esisterà almeno un arco continuo $G^{(n)} \equiv (s_1^{(n)} \leqslant s \leqslant s_2^{(n)})$ di $\mathcal{C}_n^{(2)}$ con $|\ \theta_n(s_2^{(n)}) - \theta_n(s_1^{(n)})\ | = \xi$, tutto costituito di punti appartenenti al cerchio $(O;\ r)$. In virtù della nota disugua-

---

[22] Qui e nel seguito viene indicato con $(O;\ \varrho)$ il cerchio che ha centro nell'origine e raggio ϱ.

glianza di SCHWARZ-HÖLDER, tenendo conto della (10′) e del fatto che la sottosuccessione considerata è estratta da una successione minimizzante, abbiamo

$$\xi \leqslant \int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \left|\frac{d\theta_n}{ds}\right| ds = \int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{1+\omega}} \left|\frac{d\theta_n}{ds}\right| \frac{1}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{1+\omega}}} ds \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant \left[\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\mu} \left|\frac{d\theta_n}{ds}\right|^{1+\omega} ds\right]^{\frac{1}{1+\omega}} \left[\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}}\right]^{\frac{\omega}{1+\omega}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{h}\int_{\mathcal{C}_n^{(2)}} F\, ds\right]^{\frac{1}{1+\omega}} \left[\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}}\right]^{\frac{\omega}{1+\omega}} \leqslant H^{\frac{1}{1+\omega}} \left[\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}}\right]^{\frac{\omega}{1+\omega}}.$$

Sia δ_n $(\geqslant 0)$ la minima distanza dei punti dell' arco $G^{(n)}$ dall' origine delle coordinate, e sia $s_0^{(n)}$ il minimo valore di s corrispondente a punti di $G^{(n)}$, aventi dall' origine distanza uguale a δ_n. Posto $\tau = \cos\frac{\xi}{2}$, supponiamo, per porci nelle condizioni più generali,

$$\tau(s_0^{(n)} - s_1^{(n)}) > \delta_n, \quad \tau(s_2^{(n)} - s_0^{(n)}) > \delta_n, \tag{13}$$

e siano $s_{1,0}^{(n)}$ e $s_{2,0}^{(n)}$ quei valori di s per cui risulta

$$\tau(s_0^{(n)} - s_{1,0}^{(n)}) = \delta_n, \quad \tau(s_{2,0}^{(n)} - s_0^{(n)}) = \delta_n, \tag{14}$$

intendendosi che, nei casi in cui o nella prima o nella seconda delle (13) valga anzichè il segno $>$, quello $\leqslant$, si convenga che sia rispettivamente $s_{1,0}^{(n)} = s_1^{(n)}$, $s_{2,0}^{(n)} = s_2^{(n)}$.

Considerato l' integrale

$$\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} = \int_{s_1^{(n)}}^{s_{1,0}^{(n)}} + \int_{s_{1,0}^{(n)}}^{s_0^{(n)}} + \int_{s_0^{(n)}}^{s_{2,0}^{(n)}} + \int_{s_{2,0}^{(n)}}^{s_2^{(n)}}, \tag{15}$$

teniamo conto per quanto riguarda il primo e l' ultimo integrale che figurano al secondo membro della (15) sia del fatto che un lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due sia di una disuguaglianza del TONELLI [23]

[23] Vedi L. TONELLI, luogo cit. in [19].

che abbiamo già usufruito, e rileviamo che, per ogni s di $(s_{1,0}^{(n)}, s_{2,0}^{(n)})$, è $\sqrt{x_n^2+y_n^2} \geqslant$ $\geqslant \delta_n \geqslant |s_0^{(n)}-s|\tau$; risulta

$$\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} \leqslant \int_{s_1^{(n)}}^{s_{1,0}^{(n)}} \frac{ds}{\left[(s_0^{(n)}-s)\tau-\delta_n\right]^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{s_{1,0}^{(n)}}^{s_0^{(n)}} \frac{ds}{\left[(s_0^{(n)}-s)\tau\right]^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{s_0^{(n)}}^{s_{2,0}^{(n)}} \frac{ds}{\left[(s-s_0^{(n)})\tau\right]^{\frac{\mu}{\omega}}} +$$

$$+ \int_{s_{2,0}^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left[(s-s_0^{(n)})\tau-\delta_n\right]^{\frac{\mu}{\omega}}},$$

ed anche tenendo conto delle (14)

$$\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} \leqslant \frac{1}{\tau^{\frac{\mu}{\omega}}} \left\{ \int_{s_1^{(n)}}^{s_{1,0}^{(n)}} \frac{ds}{\left(s_{1,0}^{(n)}-s\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{s_{1,0}^{(n)}}^{s_0^{(n)}} \frac{ds}{\left(s_0^{(n)}-s\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{s_0^{(n)}}^{s_{2,0}^{(n)}} \frac{ds}{\left(s-s_0^{(n)}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{s_{2,0}^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(s-s_{2,0}^{(n)}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\tau^{\frac{\mu}{\omega}}} \frac{\omega}{\omega-\mu} \left\{ (s_{1,0}^{(n)}-s_1^{(n)})^{\frac{\omega-\mu}{\omega}} + (s_0^{(n)}-s_{1,0}^{(n)})^{\frac{\omega-\mu}{\omega}} + (s_{2,0}^{(n)}-s_0^{(n)})^{\frac{\omega-\mu}{\omega}} + (s_2^{(n)}-s_{2,0}^{(n)})^{\frac{\omega-\mu}{\omega}} \right\}.$$

Infine, siccome l'arco $G^{(n)}$ è tutto contenuto nel cerchio $(O; r)$, e quindi, in base al risultato del TONELLI ora citato, è $s_2^{(n)}-s_1^{(n)} \leqslant \frac{2r}{\tau}$, risulta

$$\int_{s_1^{(n)}}^{s_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} \leqslant \frac{4}{\tau} \frac{\omega}{\omega-\mu} (2r)^{\frac{\omega-\mu}{\omega}}.$$

Dalla (12) in virtù di quest'ultima abbiamo

$$\xi \leqslant 2^{\frac{3\omega-\mu}{1+\omega}} H^{\frac{1}{1+\omega}} \left(\frac{\omega}{\omega-\mu}\right)^{\frac{\omega}{1+\omega}} r^{\frac{\omega-\mu}{1+\omega}} \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{-\omega}{1+\omega}},$$

contrariamente alla (11).

Resta così provato quanto avevamo asserito all'inizio del presente capoverso γ).

Inoltre possiamo intanto concludere che, se è verificato il caso II) di cui al capoverso β), è provata l'esistenza del minimo il quale è fornito dalla curva costituita dall'origine delle coordinate.

δ). Rimane da considerare il III) caso. A tal uopo supponiamo in tutto il presente capoverso che le curve della sottosuccessione minimizzante considerata abbiano lunghezza inferiore ad un numero fisso L'. Poi scegliamo per ξ il valore $\frac{\pi}{2}$, e subordiniamo ad esso un $\bar{r}>0$ in modo che, in base a quanto si è provato nel capoverso γ), su ciascun arco continuo $G_*^{(n)}$ di ogni curva $\mathcal{C}_n^{(2)}$ tutto contenuto nel cerchio $(O;\ \bar{r})$ l'angolo di direzione vari in un intervallo di ampiezza minore di $\frac{\pi}{2}$.

Prendiamo ora su una curva $\mathcal{C}_n^{(2)}$ un gruppo di archi $\gamma_i^{(n)} \equiv [a_i^{(n)} \leqslant s \leqslant b_i^{(n)}]$, $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ a due a due distinti ([24]) i cui punti siano contenuti nel cerchio $\left(O;\ \frac{\bar{r}}{2}\right)$ e al tempo stesso appartengano ad uno stesso arco continuo $G_*^{(n)} \equiv$ $\equiv [s_1^{(n)} \leqslant s \leqslant s_2^{(n)}]$ di $\mathcal{C}_n^{(2)}$ il quale sia tutto contenuto nel cerchio $(O;\ \bar{r})$. Pertanto, mentre s varia negli intervalli $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$, $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ i valori del corrispondente angolo di direzione $\theta_n(s)$ sono tutti contenuti in un intervallo di ampiezza inferiore a $\frac{\pi}{2}$. Sia ancora $\delta_n(\geqslant 0)$ la minima distanza dei punti di $G_*^{(n)}$ dall'origine e siano $s_0^{(n)}, s_{1,0}^{(n)}, s_{2.0}^{(n)}$ gli analoghi dei valori indicati al capoverso γ). Indichiamo con $E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, E_3^{(n)}, E_4^{(n)}$ gli insiemi di quei valori di s contenuti negli intervalli $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$, $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ che appartengono rispettivamente agli intervalli $(s_1^{(n)}, s_{1,0}^{(n)})$, $(s_{1.0}^{(n)}, s_0^{(n)})$, $(s_0^{(n)}, s_{2,0}^{(n)})$, $(s_{2.0}^{(n)}, s_2^{(n)})$.

Procedendo in modo identico al capoverso γ) [cfr. (12)] abbiamo

$$(16)\qquad \sum_{i=1}^{\nu} \int_{a_i^{(n)}}^{b_i^{(n)}} \left|\frac{d\theta_n}{ds}\right| ds \leqslant H^{\frac{1}{1+\omega}} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \int_{a_i^{(n)}}^{b_i^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}}\right]^{\frac{\omega}{1+\omega}},$$

e risulta

$$\sum_{i=1}^{\nu} \int_{a_i^{(n)}}^{b_i^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} \leqslant \int_{E_1^{(n)}} \frac{ds}{\left[\frac{s_0^{(n)}-s}{\sqrt{2}}-\delta_n\right]^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{E_2^{(n)}} \frac{ds}{\left[\frac{s_0^{(n)}-s}{\sqrt{2}}\right]^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{E_3^{(n)}} \frac{ds}{\left[\frac{s-s_0^{(n)}}{\sqrt{2}}\right]^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{E_4^{(n)}} \frac{ds}{\left[\frac{s-s_0^{(n)}}{\sqrt{2}}-\delta_n\right]^{\frac{\mu}{\omega}}},$$

ed anche tenendo conto delle (14)

$$(17)\qquad \sum_{i=1}^{\nu} \int_{a_i^{(n)}}^{b_i^{(n)}} \frac{ds}{\left(\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} \leqslant 2^{\frac{\mu}{2\omega}} \left[\int_{E_1^{(n)}} \frac{ds}{\left(s_{1,0}^{(n)}-s\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{E_2^{(n)}} \frac{ds}{\left(s_0^{(n)}-s\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{E_3^{(n)}} \frac{ds}{\left(s-s_0^{(n)}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}} + \int_{E_4^{(n)}} \frac{ds}{\left(s-s_{2.0}^{(n)}\right)^{\frac{\mu}{\omega}}}\right].$$

([24]) Qui e nel seguito si intende che due archi di una curva sono distinti quando essi corrispondono a due intervalli dell'asse s i quali non hanno punti interni a comune.

Ma, preso $\eta > 0$ ad arbitrio, possiamo determinare un $\delta' > 0$ in modo che, se ciascuno degli insiemi $E_1^{(n)}$, $E_2^{(n)}$, $E_3^{(n)}$, $E_4^{(n)}$ ha misura non superiore a δ', ognuno degli integrali che figurano al secondo membro della (17) risulti minore di η. Quindi se è

$$\sum_{i=1}^{\nu} | b_i^{(n)} - a_i^{(n)} | \leqslant \delta'$$

dalla (16) segue

$$\sum_{i=1}^{\nu} \int_{a_i^{(n)}}^{b_i^{(n)}} \left| \frac{d\theta_n}{ds} \right| ds \leqslant 2^{\frac{4\omega + \mu}{2(1+\omega)}} H^{\frac{1}{1+\omega}} \eta^{\frac{\omega}{1+\omega}} . \tag{18}$$

Teniamo ora presente che per quanto abbiamo convenuto all'inizio del presente capoverso le curve della successione minimizzante hanno lunghezza non superiore ad un numero fisso L'. Quindi, se prendiamo su una curva qualunque $\mathcal{C}_n^{(2)}$ della sottosuccessione considerata un pluriarco $\Pi^{(n)}$ costituito di un numero finito di archi a due a due distinti e tutti contenuti nel cerchio $\left(O\,;\,\frac{\bar{r}}{2}\right)$, i punti del pluriarco $\Pi^{(n)}$ appartengono ad uno o più degli archi $G_*^{(n)}$, ma in ogni caso il numero degli archi distinti $G_*^{(n)}$ non può superare $\zeta + 1$, ove ζ è il massimo intero contenuto in $\frac{L'}{\bar{r}}$: infatti due archi di $\Pi^{(n)}$ i quali non appartengono ad uno stesso arco $G_*^{(n)}$ fanno parte di un arco di $\mathcal{C}_n^{(2)}$, il quale deve avere almeno un punto esterno al cerchio $(O\,;\,\bar{r})$ ed ha quindi lunghezza maggiore di $\bar{r}$.

Pertanto, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, posto $\eta = \dfrac{\varepsilon^{1+\frac{1}{\omega}}}{2^{2+\frac{\mu}{2\omega}} H^{\frac{1}{\omega}} (\zeta+1)^{1+\frac{1}{\omega}}}$, e subordinato ad η il δ' di cui sopra, se consideriamo su una qualunque curva $\mathcal{C}_n^{(2)}$ della sottosuccesione considerata un qualsiasi pluriarco $\Pi^{(n)}$ di lunghezzza minore di δ' e tutto contenuto nel cerchio $\left(O\,;\,\frac{\bar{r}}{2}\right)$, in virtù della (18) risulta

$$\int_{\Pi^{(n)}} \left| \frac{d\theta_n}{ds} \right| ds \leqslant \varepsilon .$$

Quindi le funzioni $\theta_n(s)$, relative alle curve della sottosuccessione considerata, risultano equiassolutamente continue su quelle parti delle curve stesse che appartengono al cerchio $\left(O;\,\frac{\bar{r}}{2}\right)$, e anche in tutto il loro campo di esistenza, perchè in quella parte del campo A_0 che è esterna al cerchio $\left(O\,;\,\frac{\bar{r}}{2}\right)$ tale equiassoluta continuità è una nota conseguenza della disuguaglianza (10''), in cui si faccia $r' = \bar{r}$.

Per provare il nostro teorema basta procedere in modo analogo al n. 15, tenendo presente che, in base all'ipotesi supplementare fatta all'inizio del capoverso δ), possiamo utilizzare i risultati dei n. 13, b) e 10: infatti siccome le curve della sottosuccessione considerata hanno lunghezza non superiore ad un numero fisso, in virtù dell'equiassoluta continuità degli integrali $\int_0^s \left| \frac{d\theta_n}{ds} \right| ds$ anche le lunghezze delle curve $x' = x_n'(s)$, $y' = y_n'(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L_n)$ risultano ugualmente limitate essendo

$$\int_0^{L_n} \sqrt{x_n''^2 + y_n''^2}\, ds = \int_0^{L_n} \left| \frac{d\theta_n}{ds} \right| ds .$$

ε). Rimane da eliminare l'ipotesi supplementare, fatta all' inizio del capoverso δ), che le curve della sottosuccessione minimizzante considerata abbiano lunghezza inferiore a un numero fisso L'. A tal uopo, siccome in virtù della (10') le curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$ che possono annullare l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ sono costituite da segmenti rettilinei e quindi hanno lunghezza non superiore alla massima distanza dei punti del campo A_0, basta ripetere con qualche avvertenza il ragionamento fatto al n. 19 per concludere che tutte le curve della sottosuccessione considerata hanno necessariamente lunghezza inferiore ad un numero fisso. Fissato un numero positivo $l \leqslant 1$ si ripeteranno in forma opportuna alcune considerazioni svolte nel capoverso δ) del presente n., anzichè quelle del n. 15. Infine, per concludere che l'integrale $\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_m}$ esiste finito e che non può essere $\mathfrak{J}^{(2)}_{\Gamma_m} > 0$, basta tener presente che si possono applicare i risultati dei n. 13, b), e 10, e ciò per il fatto che, siccome si considerano curve aventi tutte lunghezza ml, si può ripetere l'osservazione fatta alla fine del capoverso δ) del presente n..

Il teorema enunciato è così completamente provato.

22. - Osservazione.

Vogliamo rilevare che, se uno dei numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ è maggiore o anche uguale a ω, il teorema del n. 21 può non essere valido.

Ciò si vede subito dai seguenti esempi:

1°) Sia

$$A_0 \equiv [-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1]$$

$$F(x, y, x', y', \theta') \equiv (\sqrt{x^2 + y^2})^\mu \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \theta'^2 , \qquad \text{con } \mu > 1,$$

e si consideri la classe completa di ordine 2 di curve ordinarie

$$\mathcal{C}^{(2)}_n : \qquad x = \frac{1}{n} \cos ns , \quad y = \frac{1}{n} \operatorname{sen} ns , \quad \left(0 \leqslant s \leqslant \frac{2\pi}{n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Risulta

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{n^\mu} n^2 \, ds = 2\pi \, n^{1-\mu},$$

e per $n \to \infty$ è $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} \to 0$.

Il limite inferiore di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n}$ è nullo, ma nella classe considerata non esiste alcuna curva per la quale sia $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = 0$.

2°) Sia

$$F(x, y, x', y', \theta') \equiv (\sqrt{x^2 + y^2}\, \theta'^2 + 1) \sqrt{x'^2 + y'^2} \,;$$

A_0 sia il campo indicato nell'esempio 1°) e si consideri la classe di curve considerata nell'esempio stesso.

Risulta

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{1}{n} n^2 + 1\right) ds = 2\pi \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Per $n \to \infty$ è $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} \to 2\pi$, ma anche qui non esiste alcuna curva della classe considerata che fornisca il minimo.

§ 4. - Esistenza dell'estremo in campi illimitati.

23. - Primo criterio.

Se esistono un numero $R > 0$ e una funzione $\psi(u)$ definita e continua per $u \geqslant R$, sempre positiva non decrescente e tale che sia

$$\int_R^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} = +\infty,$$

in modo che in ogni punto del campo A esterno al cerchio $(O; R)$, per ogni coppia x', y' normalizzata e per ogni valore di θ' sia

$$F(x, y, x', y', \theta') \geqslant \frac{1}{\psi(\sqrt{x^2 + y^2})}, \tag{19}$$

e se in ogni parte limitata del campo A sono verificate le condizioni di uno qualunque dei nn. 16, 17, 20, *a) e* 21; *allora esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ in ogni classe, completa di ordine* 2, *di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$*

ognuna delle quali debba passare per almeno un punto di un dato insieme limitato e chiuso ([25]).

Basta ripetere la dimostrazione del TONELLI avendo l'avvertenza di determinare il numero R_2 in modo che sia

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{du}{\psi(u)} > N,$$

R_1 ed N essendo i numeri indicati al luogo citato, ed osservando che è

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} \geqslant \int_{C(PQ)} \frac{ds}{\psi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} \geqslant \int_0^{R_2-R_1} \frac{ds}{\psi(R_1+s)} \geqslant \int_{R_1}^{R_2} \frac{du}{\psi(u)} > N.$$

OSSERVAZIONE. - Se non è verificata la (19) il minimo può mancare come si vede subito.

Sia

$$F(x, y, x', y', \theta') \equiv \theta'^2 \sqrt{x'^2+y'^2},$$

e si consideri la classe, completa di ordine 2, di curve ordinarie

$$\mathcal{C}^{(2)}_n: \qquad x = n + n\cos\frac{s}{n}, \quad y = -n \operatorname{sen}\frac{s}{n}, \quad \left(\pi n \leqslant s \leqslant \pi n + n \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$n = 2, 3, \ldots,$$

ove $0 < \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{\pi}{3}$.

Risulta

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} = \int_{\pi n}^{\pi n + n\arccos\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{1}{n^2}\, ds = \frac{1}{n} \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

e quindi è sempre $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} > 0$, con $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} \to 0$, per $n \to +\infty$, ma nella classe considerata non esiste il minimo, pur essendo verificate le condizioni del n. 20 *a*).

ESEMPI. - 1°) Se è $\psi(u) \equiv \frac{u}{\mu}$, con μ costante positiva, otteniamo il criterio dato dal TONELLI per il problema del primo ordine;

2°) $\psi(u) \equiv u \lg u$;

3°) $\psi(u) \equiv u \lg \lg u$.

([25]) Questo criterio si può enunciare anche per il problema del primo ordine e fornisce, anche in tal caso, una lieve estensione di un teorema del TONELLI. Vedi opera cit. in ([2]), Vol. II, n. 28 *a*), p. 68.

24. - Secondo criterio.

Se per ogni coppia normalizzata x', y', e per ogni θ' è, per $\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$,

$$\sqrt{x^2+y^2}\,F(x, y, x', y', \theta')\to+\infty,$$

e se, in ogni parte limitata del campo A, sono verificate le condizioni di uno qualunque dei nn. 16, 17, 20, *a*) *e* 21; *allora esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ in ogni classe, completa di ordine* 2, *di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}$, chiuse, ognuna delle quali debba contenere o circondare almeno un punto di un dato insieme limitato e chiuso* ([26]).

OSSERVAZIONE. - Vogliamo rilevare che, nelle condizioni del presente num. il criterio dato al n. 23 può non essere valido, come risulta dal seguente esempio.

Sia:

$$A\equiv[-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty]$$

$$F(x, y, x', y', \theta')\equiv\sqrt{x'^2+y'^2}\left[\theta'^2+\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right],$$

e si consideri la classe completa di ordine 2 di curve ordinarie

$$\mathcal{C}^{(2)}_n:\qquad x=n\cos\frac{s}{n},\quad y=n\ \mathrm{sen}\,\frac{s}{n},\quad (0\leqslant s\leqslant 2\pi n),\qquad n=1, 2, \ldots$$

che circondano l'origine.

In ogni campo limitato sono verificate le condizioni del n. 20, *a*); e, per $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 1$, è $F\geqslant\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, vale a dire è soddisfatta la condizione del n. 23 per $R=1$, $\psi(u)=2u$.

Essendo

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}=\int_0^{2\pi n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{1+n}\right)ds=2\pi\left(1+\frac{1}{n+n^2}\right),$$

il limite inferiore di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe considerata è 2π, ma in tale classe non esiste alcuna curva per la quale sia $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}=2\pi$.

25. - Terzo criterio.

Se esistono un numero $R>0$ e una funzione $\varphi(u)$ definita e continua per $u\geqslant R$, non negativa e tale che, per $u\to\infty$, sia $\varphi(u)\to\infty$, in modo che in ogni punto (x, y) del campo A esterno al cerchio $(O; R)$, per ogni coppia x', y' normalizzata, e per ogni valore di θ' sia

$$F(x, y, x', y', \theta')\geqslant\varphi(\sqrt{x^2+y^2}),\tag{19'}$$

([26]) Questo criterio è dato dal TONELLI per il problema del primo ordine. Vedi opera cit. in ([2]), n. 23 *b*), p. 70.

***e se in ogni parte limitata del campo A sono verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi dei nn.* 16, 17, 20, *a*) *e* 21, *allora esiste il minimo assoluto di* $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ *in ogni classe* $K^{(2)}$, *completa di ordine* 2, *di curve ordinarie* $\mathcal{C}^{(2)}$ *di lunghezza non inferiore ad un numero fisso* $l' > 0$ [27].**

Infatti, siccome il limite inferiore i di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}}$ nella classe $K^{(2)}$ è finito, considerata una successione minimizzante di curve ordinarie $\mathcal{C}^{(2)}_n$, estratta dalla classe $K^{(2)}$, tale cioè che sia

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} \leqslant i + \frac{1}{n} \tag{20}$$

determiniamo un numero $R^* \geqslant R$, in modo che, per $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant R^*$, risulti $\varphi(\sqrt{x^2+y^2}) > \frac{i+1}{l'}$. Allora necessariamente su ogni curva della successione minimizzante considerata ci deve essere almeno un punto non esterno al cerchio $(O;\, R^*)$, perchè, in caso contrario, in virtù della (19') risulterebbe

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} \geqslant \int_{\mathcal{C}^{(2)}_n} \varphi(\sqrt{x_n^2+y_n^2})\, ds > i+1,$$

contrariamente alla (20).

Siamo così ricondotti alle condizioni del criterio del n. 24.

OSSERVAZIONE. - Se il limite inferiore delle lunghezze delle curve della classe considerata non è positivo, il teorema del presente num. può non essere valido, come si vede immediatamente dal seguente esempio.

Sia

$$A \equiv [-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty]$$
$$F(x, y, x', y', \theta') \equiv \sqrt{x'^2+y'^2}\ (\theta'^2+x^2+y^2),$$

e si consideri la classe completa di ordine 2 di curve ordinarie

$$\mathcal{C}^{(2)}_n: \qquad x=s,\ y=n,\ \left(0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{n^3}\right), \qquad n=1, 2, \ldots .$$

Sono soddisfatte le condizioni del n. 20, a), è verificata la (19') per $\varphi(u) \equiv u^2$, e risulta

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n} = \int_0^{\frac{1}{n^3}} (s^2+n^2)\, ds = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3n^8}\right).$$

Quindi il limite inferiore di $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}_n}$ è zero, ma nella classe considerata non esiste alcuna curva, per la quale sia $\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathcal{C}^{(2)}} = 0$.

---

[27] Da questo criterio si può dedurre una nuova proposizione per il problema del primo ordine.