ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Ulteriori contributi alla teoria del metodo variazionale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 12, nº 1-2 (1943), p. 99-116

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1943_2_12_1-2_99_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ULTERIORI CONTRIBUTI
ALLA TEORIA DEL METODO VARIAZIONALE

di SANDRO FAEDO (Roma).

Il metodo variazionale, ideato da M. PICONE [1] per poter affrontare con più rapidi e migliori risultati il problema della integrazione numerica dei sistemi di equazioni a derivate parziali traducenti i problemi di propagazione, non ha ancora avuto una completa sistemazione teorica.

Se si deve ad esempio integrare una equazione lineare a derivate parziali del secondo ordine, in cui la funzione incognita $u(x, y, z, t)$ dipende dal tempo t e da un punto (x, y, z) variabile in un dominio a tre dimensioni, il metodo variazionale permette di costruire una successione di approssimazioni

$$u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_\nu, \ldots \tag{1}$$

che verificano le condizioni al tempo iniziale e ognuna delle quali si determina risolvendo un problema di minimo del Calcolo delle Variazioni.

B. MANIÀ [2] ed io [3] abbiamo risolto affermativamente il problema dell'esistenza della successione (1), quando si seguano opportuni criteri nella scelta di un sistema di funzioni e di pesi che si introducono nei calcoli. Successivamente ho potuto dimostrare [4] che la successione (1) è univocamente determinata, la qual cosa era essenziale per l'accettabilità del procedimento.

La legittimazione del metodo è stata finora affidata, oltre che ai brillanti risultati numerici conseguiti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo [5], ad una importante proposizione di M. PICONE [6], il quale ha dimo-

---

[1] M. PICONE: *Nuovi contributi all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione.* Rend. R. Accad. Scienze Fisiche e Matematiche della Soc. Reale di Napoli, S. IV, Vol. VI, 1936; *Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione.* Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, 1937.

[2] B. MANIÀ: *Sopra una questione di compatibilità nel metodo variazionale.* Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. IX, 1940, pp. 79-95.

[3] S. FAEDO: *Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale.* Ann. R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. X, 1941, pp. 138-155; *Sul metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione.* Pont. Acad. Scientiarum, Commentationes, 1942, Vol. VI, N. 16, pp. 657-685.

[4] S. FAEDO: *L'unicità delle successive approssimazioni nel metodo variazionale.* Memorie R. Accad. d'Italia, Vol. XIII, 1942, pp. 679-707.

[5] Si vedano i lavori da me citati nelle mie precedenti memorie.

[6] Primo lavoro cit. in [1], § 5.

strato, sotto due ipotesi che discuterò appresso, che la u_ν verifica l'equazione e le condizioni al contorno con un errore quadratico medio che tende a zero per $\nu \rightarrow +\infty$.

Le ipotesi fatte da M. PICONE sono le seguenti :

I^a : Esiste una soluzione dell'equazione proposta, $u(x, y, z, t)$, che verifica le condizioni iniziali e al contorno ;

II^a : Tale funzione possiede continua in tutto il campo in cui variano x, y, z, t, la

$$\frac{\partial^8 u(x, y, z, t)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2 \partial t^2}.$$

Mentre l'ipotesi I^a è perfettamente legittima in un metodo che non ha — almeno per ora — scopi di natura esistenziale, la II^a si può invece accettare soltanto in un primo stadio della teoria ed a scopo puramente euristico.

Procedendo quindi alla costruzione della teoria del metodo variazionale è essenziale accertarsi se la ipotesi II^a sia, oppure no, necessaria per poter affermare che l'errore quadratico medio tende allo zero. Qualora tale condizione non si potesse levare ne seguirebbe una lacuna gravissima, d'ordine sia teorico che pratico, per la applicabilità del metodo.

Nel presente lavoro dimostro invece la tendenza a zero dell'errore quadratico medio facendo la sola ipotesi I^a.

Questo risultato permette di vedere già la generalità e la vastità delle possibili applicazioni di questo procedimento d'integrazione.

Finora il metodo variazionale è stato applicato all'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali. Non si deve però credere che la non linearità delle equazioni costituisca un impedimento alla applicabilità del metodo.

Servendomi di un mio recente risultato [7] di Calcolo delle Variazioni, che estende un noto teorema di esistenza di MC SHANE - CINQUINI, mostro nel presente lavoro che *la successione* (1) *si può costruire anche quando l'equazione allo studio non è lineare.*

Vengono così nuovamente illustrati la potenza e il larghissimo raggio d'azione del metodo variazionale, il quale, mano a mano che se ne sviluppa la teoria, si rivela un sempre più potente strumento di calcolo per i problemi ai quali l'alta tecnica chiede una pronta [8] e sicura risposta.

---

(7) S. FAEDO : *Su un teorema di esistenza dell'estremo assoluto in campi illimitati.* Questo fascicolo degli Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, pag 1.

(8) Si veda il confronto fatto da M. PICONE fra i risultati conseguiti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo coi vari metodi di integrazione [1° lavoro cit. in (1), pag. 2, 12-13 dell'estratto, 2° pag. 114, 120]. A proposito di un problema di propagazione del calore, M. PICONE dichiara testualmente (1°, pag. 2) che *il metodo variazionale ha permesso di conseguire in una sola settimana*, confermandoli pienamente, *i risultati precedentemente ottenuti con la trasformata di Laplace, calcoli che avevano richiesto qualche mese di lavoro*!

§ 1. - Posizione di un problema generale di propagazione.

Per dimostrare la tendenza a zero dell'errore quadratico medio prendiamo in esame lo stesso problema generale di propagazione trattato da M. PICONE.

Un corpo elastico a tre dimensioni sia tale da potersi rappresentare biunivocamente e con continuità sul cubo C,

$$C(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1),$$

dello spazio (x, y, z). Se ad un istante t_0 il corpo entra in vibrazione, indicate con $u_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t)$, $u_3(x, y, z, t)$ le componenti dello spostamento al tempo t del generico punto (x, y, z) di C, esse saranno legate da equazioni del tipo seguente:

Tre equazioni nell'interno di C

$$\begin{aligned}(2)\qquad \sum_{k=1}^{3}\Big(&p_{hk}^{11}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}+p_{hk}^{22}\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}+p_{hk}^{33}\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}+p_{hk}^{44}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}+\\ &+p_{hk}^{23}\frac{\partial^2 u_k}{\partial y\partial z}+p_{hk}^{31}\frac{\partial^2 u_k}{\partial z\partial x}+p_{hk}^{12}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\partial y}+\\ &+p_{hk}^{1}\frac{\partial u_k}{\partial x}+p_{hk}^{2}\frac{\partial u_k}{\partial y}+p_{hk}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial z}+p_{hk}^{4}\frac{\partial u_k}{\partial t}+p_{hk}u_k\Big)-p_h(x, y, z, t)=0,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (h=1, 2, 3),\end{aligned}$$

diciotto equazioni sulle facce di C:

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{3}\left[a_{hk}^{01}\frac{\partial u_k}{\partial x}+a_{hk}^{02}\frac{\partial u_k}{\partial y}+a_{hk}^{03}\frac{\partial u_k}{\partial z}+a_{hk}^{04}\frac{\partial u_k}{\partial t}+a_{hk}^{0}u_k\right]_{x=0}-a_h^0(y, z, t)=0,\\ &\sum_{k=1}^{3}\left[a_{hk}^{11}\frac{\partial u_k}{\partial x}+a_{hk}^{12}\frac{\partial u_k}{\partial y}+a_{hk}^{13}\frac{\partial u_k}{\partial z}+a_{hk}^{14}\frac{\partial u_k}{\partial t}+a_{hk}^{1}u_k\right]_{x=1}-a_h^1(y, z, t)=0,\\ &\sum_{k=1}^{3}\left[b_{hk}^{01}\frac{\partial u_k}{\partial x}+b_{hk}^{02}\frac{\partial u_k}{\partial y}+b_{hk}^{03}\frac{\partial u_k}{\partial z}+b_{hk}^{04}\frac{\partial u_k}{\partial t}+b_{hk}^{0}u_k\right]_{y=0}-b_h^0(z, x, t)=0,\\ &\sum_{k=1}^{3}\left[b_{hk}^{11}\frac{\partial u_k}{\partial x}+b_{hk}^{12}\frac{\partial u_k}{\partial y}+b_{hk}^{13}\frac{\partial u_k}{\partial z}+b_{hk}^{14}\frac{\partial u_k}{\partial t}+b_{hk}^{1}u_k\right]_{y=1}-b_h^1(z, x, t)=0,\\ &\sum_{k=1}^{3}\left[c_{hk}^{01}\frac{\partial u_k}{\partial x}+c_{hk}^{02}\frac{\partial u_k}{\partial y}+c_{hk}^{03}\frac{\partial u_k}{\partial z}+c_{hk}^{04}\frac{\partial u_k}{\partial t}+c_{hk}^{0}u_k\right]_{z=0}-c_h^0(x, y, t)=0,\\ &\sum_{k=1}^{3}\left[c_{hk}^{11}\frac{\partial u_k}{\partial x}+c_{hk}^{12}\frac{\partial u_k}{\partial y}+c_{hk}^{13}\frac{\partial u_k}{\partial z}+c_{hk}^{14}\frac{\partial u_k}{\partial t}+c_{hk}^{1}u_k\right]_{z=1}-c_h^1(x, y, t)=0,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (h=1, 2, 3).\end{aligned}\right.$$

In tali equazioni i coefficienti e i termini noti sono funzioni continue che dipendono (in generale) dal posto e dal tempo.

Si hanno inoltre le condizioni iniziali $[t_0 \equiv 0]$

$$\left\{\begin{aligned} & u_k(x, y, z, 0) = u_k^{(0)}(x, y, z), \\ & \left[\frac{\partial}{\partial t} u_k(x, y, z, t)\right]_{t=0} = u_k^{(1)}(x, y, z), \end{aligned}\right. \qquad (k=1, 2, 3), \tag{4}$$

e supponiamo che le funzioni assegnate $u_k^{(0)}$ e $u_k^{(1)}$ siano finite e continue con le loro derivate prime e seconde.

§ 2. - Applicazione del metodo variazionale.

Facciamo uso delle seguenti notazioni di M. PICONE :

Con

$$E^h[u_1, u_2, u_3]$$

si indica il primo membro della (2), mentre i primi membri delle (3) verranno indicati coi simboli

$$E_x^{0h}[u_1, u_2, u_3], \quad E_x^{1h}[u_1, u_2, u_3], \ldots, \quad E_z^{1h}[u_1, u_2, u_3].$$

Si dirà derivata totale d'ordine p della funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ la

$$\frac{\partial^{pr} f(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_1^p \, \partial x_2^p \ldots \partial x_r^p}.$$

Data infine la funzione $f(x, y, z)$ definita in C si indicheranno con

$$f^{000}, \; f^{010}, \; f^{001}, \; f^{011}, \; f^{100}, \; f^{110}, \; f^{101}, \; f^{111},$$

i valori che essa assume nei vertici di C;

$$f_{yz}^{00}(x), \quad f_{yz}^{01}(x), \quad f_{yz}^{10}(x), \quad f_{yz}^{11}(x),$$

le derivate seconde delle quattro funzioni di x alle quali si riduce la $f(x, y, z)$ sui quattro spigoli di C di equazioni

$$y=0, \; z=0\,; \quad y=0, \; z=1\,; \quad y=1, \; z=0\,; \quad y=1, \; z=1,$$

e analogamente si definiscono i simboli

$$\begin{aligned} & f_{zx}^{00}(y), \quad f_{zx}^{01}(y), \quad f_{zx}^{10}(y), \quad f_{zx}^{11}(y), \\ & f_{xy}^{00}(z), \quad f_{xy}^{01}(z), \quad f_{xy}^{10}(z), \quad f_{xy}^{11}(z)\,; \end{aligned}$$

con

$$f_x^0(y, z), \quad f_x^1(y, z),$$

si indicheranno le derivate seconde totali delle funzioni di y e z a cui si riduce la $f(x, y, z)$ sulle facce di C di equazione

$$x=0, \quad x=1,$$

e analogamente si definiscono

$$f_y^0(z, x), \quad f_y^1(z, x),$$
$$f_z^0(x, y), \quad f_z^1(x, y).$$

Infine con
$$f''(x, y, z),$$
si definirà la derivata seconda totale di $f(x, y, z)$, rispetto a x, y, z.

Si ponga
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = U(x, y, z, t),$$

denotando u una qualunque delle funzioni u_1, u_2, u_3 e per la quale abbiano significato i primi membri delle (2) e (3) ; tenuto conto delle precedenti notazioni è allora

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} U = & (1-x)(1-y)(1-z)\, U^{000}(t) + (1-x)\, y(1-z)\, U^{010}(t) + \\ & + (1-x)(1-y)\, z U^{001}(t) + (1-x)\, yz U^{011}(t) + x(1-y)(1-z)\, U^{100}(t) + \\ & + xy(1-x)\, U^{110}(t) + x(1-y)\, z U^{101}(t) + xyz U^{111}(t) + \\ & + \sum_{(x,y,z)} \Big\{ (1-y)(1-z) \int_0^1 G(x, \xi)\, U_{yz}^{00}(\xi, t)\, d\xi + y(1-z) \int_0^1 G(x, \xi)\, U_{yz}^{10}(\xi, t)\, d\xi + \\ & + (1-y)\, z \int_0^1 G(x, \xi)\, U_{yz}^{01}(\xi, t)\, d\xi + yz \int_0^1 G(x, \xi)\, U_{yz}^{11}(\xi, t)\, d\xi \Big\} + \\ & + \sum_{(x,y,z)} \Big\{ (1-x) \int_0^1\!\!\int_0^1 G(y, \eta)\, G(z, \zeta)\, U_x^0(\eta, \zeta, t)\, d\eta d\zeta + \\ & + x \int_0^1\!\!\int_0^1 G(y, \eta)\, G(z, \zeta)\, U_x^1(\eta, \zeta, t)\, d\eta d\zeta \Big\} + \\ & + \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 G(x, \xi)\, G(y, \eta)\, G(z, \zeta)\, U''(\xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \right.$$

dove $G(x, \xi)$ designa la funzione di BURKHARDT,

$$G(x, \xi) \left\{ \begin{aligned} & = \xi(x-1), \quad \text{per} \quad \xi \leqslant x, \\ & = x(\xi-1), \quad \text{per} \quad \xi \geqslant x, \end{aligned} \right.$$

e i termini delle sommatorie si ottengono da quello scritto permutando circolarmente (x, y, z), (ξ, η, ζ).

Per applicare il metodo variazionale si procede nel modo seguente :

Dai dati iniziali segue :

$$u = u^{(0)}(x, y, z) + t u^{(1)}(x, y, z) + \int_0^t (t-\tau)\, U(x, y, z, \tau)\, d\tau,$$

e per la (5) :

$$
(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&u=u^{(0)}(x,y,z)+tu^{(1)}(x,y,z)+\\
&+(1-x)(1-y)(1-z)\int_0^t(t-\tau)\,U^{000}(\tau)\,d\tau+\ldots+xyz\int_0^t(t-\tau)\,U^{111}(\tau)\,d\tau+\\
&+\sum_{(x,y,z)}\Big\{(1-y)(1-z)\int_0^t\!\!\int_0^1(t-\tau)\,G(x,\xi)\,U_{yz}^{00}(\xi,\tau)\,d\tau d\xi+\ldots\\
&+yz\int_0^t\!\!\int_0^1(t-\tau)\,G(x,\xi)\,U_{yz}^{11}(\xi,\tau)\,d\tau d\xi\Big\}+\\
&+\sum_{(x,y,z)}\Big\{\int_0^t\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1(t-\tau)\,G(y,\eta)\,G(z,\zeta)\,U_x^{0}(\eta,\zeta,\tau)\,d\tau d\eta d\zeta+\ldots\Big\}+\\
&+\int_0^t\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1(t-\tau)\,G(x,\xi)\,G(y,\eta)\,G(z,\zeta)\,U''(\xi,\eta,\zeta,\tau)\,d\tau d\xi d\eta d\zeta\,.
\end{aligned}\right.
$$

In tale espressione intervengono le funzioni incognite

$$\omega_1(t)=\int_0^t(t-\tau)\,U^{000}(\tau)\,d\tau,\ldots,\ \omega_8(t)=\int_0^t(t-\tau)\,U^{111}(\tau)\,d\tau,$$

con

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\omega_1(0)=\omega_2(0)=\ldots=\omega_8(0)=0,\\
&\omega_1'(0)=\omega_2'(0)=\ldots=\omega_8'(0)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Si hanno ancora le funzioni incognite

$$U_{yz}^{00}(x,t),\ldots,\ U_x^{0}(y,z,t),\ U''(x,y,z,t),$$

che dipendono dal tempo t e da una, due, tre variabili locali.

Indichiamo con $F(x_1,\ldots,x_r,t)$ una qualsiasi di tali funzioni, in cui $x_1,\ldots,x_r$ designano le variabili locali. Con C_r indichiamo il dominio $0\leqslant x_i\leqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,r)$, e con

$$(8)\qquad \{X_k(x_1,x_2,\ldots,x_r)\},\qquad (k=1,2,\ldots),$$

un sistema di funzioni reali e continue che sia in C_r completo, ortogonale e normale. Si ponga nella (6)

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_r,t)=\sum_{k=1}^{n(F)}X_k(x_1,x_2,\ldots,x_r)\,\psi_k(t),$$

dove $n(F)$ è un numero a nostro arbitrio; sostituendo tali espressioni nelle (6) si ottengono termini come

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_r,t)=\sum_{k=1}^{n(F)}Y_k(x_1,x_2,\ldots,x_r)\,\varphi_k(t),$$

con

$$Y_k = \int_{C_r} G(x_1, \xi_1) \dots G(x_r, \xi_r) X_k(\xi_1, \dots, \xi_r) d\xi_1 \dots d\xi_r,$$

$$\varphi_k(t) = \int_0^t (t-\tau) \psi_k(\tau) d\tau .$$

Indichiamo le $\varphi_k(t)$ con

$$\omega_9(t), \ \omega_{10}(t), \dots, \ \omega_\nu(t),$$

l'indice ν dipendendo dagli $n(F)$ prescelti.

Si ha ancora

$$(9) \qquad \begin{cases} \omega_9(0) = \omega_{10}(0) = \dots \omega_\nu(0) = 0, \\ \omega_9'(0) = \omega_{10}'(0) = \dots \omega_\nu'(0) = 0. \end{cases}$$

Si otterrà così per le u_k una espressione approssimata $\bar{u}_k$ del tipo di

$$(10) \qquad \bar{u}_k = u_k^{(0)} + t u_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{\nu_k} A_{ki}(x, y, z) \, \omega_{ki}(t),$$

dove le $A_{ki}(x, y, z)$ sono note e le $\omega_{ki}(t)$ sono funzioni incognite che si annullano per $t=0$ insieme alla derivata prima.

Per ottenere l'approssimazione del metodo variazionale, dell'ordine dato dai prescelti valori di $n(F)$, si determinano nella (10) le $\omega_{ki}(t)$ nel modo seguente.

Scelte delle funzioni peso continue e positive $q^h(x, y, z, t)$, $q_x^{0h}(y, z, t)$, $q_x^{1h}(y, z, t), \dots,$ si consideri il funzionale

$$(11) \qquad I_T(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \int_0^T \sum_{h=1}^{3} \left\{ \int_C q^h (E^h[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3])^2 dx dy dz + \right.$$

$$\left. + \sum_{(x, y, z)} \int_0^1 \int_0^1 \left[q_x^{0h} (E_x^{0h}[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3])^2 + q_x^{1h} (E_x^{1h}[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3])^2 \right] dy dz \right\} dt.$$

Se le funzioni peso scelte e i sistemi $\{ X_k \}$ soddisfano a opportune condizioni (9) I_T ammette uno e un solo sistema di funzioni

$$\bar{\omega}_{1,1}(t), \dots, \bar{\omega}_{1,\nu_1}(t), \ \bar{\omega}_{2,1}(t), \dots, \bar{\omega}_{2,\nu_2}(t), \ \bar{\omega}_{3,1}(t), \dots, \bar{\omega}_{3,\nu_3}(t),$$

che lo rende minimo nella classe di tutte le

$$\omega_{1,1}(t), \dots, \ \omega_{3,\nu_3}(t),$$

assolutamente continue in $(0, T)$ con le derivate prime e verificanti le (7) e (9).

L'approssimazione del metodo variazionale è allora data dalle funzioni

$$u_k^* = u^{(0)} + t u^{(1)} + \sum_{i=1}^{\nu_k} A_{ki}(x, y, z) \, \bar{\omega}_{k,i}(t), \qquad (k = 1, 2, 3),$$

e il valore di $I_T(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ ne misura l'errore quadratico medio.

---

(9) S. Faedo, II° lavoro cit. in (3).

§ 3. - Una osservazione di M. Picone.

M. PICONE [10] ha dimostrato che l'errore quadratico medio tende a zero, per $n(F) \to +\infty$, nelle ipotesi seguenti :

I^a : Esiste una soluzione del sistema (2), (3), (4)

$$u_1(x, y, z, t), \quad u_2(x, y, z, t), \quad u_3(x, y, z, t),$$

tali funzioni essendo continue con le derivate prime e seconde ;

II^a : Esistono finite e continue su tutto $C+(0, T)$ le

$$\frac{\partial^8 u_k}{\partial t^2 \partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}, \qquad (k=1, 2, 3).$$

Per ottenere il suo risultato, M. PICONE ha premesso la seguente osservazione:

Sia $f(x_1, \ldots, x_r, t)$ una funzione reale, identicamente nulla per ogni t sulla frontiera del cubo C_r $(0 \leqslant x_i \leqslant 1, i=1, 2, \ldots, r)$, che possieda derivate parziali prime e seconde finite e continue per t in $(0, T)$ e $x_1, \ldots, x_r$ in C_r ; inoltre la $f(x_1, \ldots, x_r, t)$ possieda la derivata seconda totale rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_r, t$ di quadrato integrabile su $C_r+(0, T)$. Posto

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \ldots \partial x_r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) = F(x_1, x_2, \ldots, x_r, t),$$

è, come si è fatto per la (6),

$$f = f(x_1, \ldots, x_r, 0) + t f_t(x_1, \ldots, x_r, 0) +$$
$$+ \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \int_0^t G(x_1, \xi_1) \ldots G(x_r, \xi_r)(t-\tau) F(\xi_1, \ldots, \xi_r, \tau)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_r\, d\tau.$$

Procedendo ora come nel precedente paragrafo si consideri il sistema (8) $[X_k(x_1, x_2, \ldots, x_r)]$, e si ponga

$$\chi_k(t) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 F(\xi_1, \ldots, \xi_r, t)\, X_k(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r,$$
$$a_k(t) = \int_0^t (t-\tau)\, \chi_k(\tau)\, d\tau.$$

Si ha allora, con convergenza in media,

$$F(x_1, \ldots, x_r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x_1, x_2, \ldots, x_r)\, \chi_k(t),$$

[10] V. Nota [6].

e infine (definendo le Y_k come nel precedente paragrafo),

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = f(x_1, \dots, x_r, 0) + t f_t(x_1, \dots, x_r, 0) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\, Y_k(x_1, x_2, \dots, x_r). \tag{12}$$

M. PICONE ha dimostrato:

Le serie che si deducono da quella al secondo membro della (12) *derivandola termine a termine rispetto al tempo una o due volte o rispetto alle variabili x_i una volta od infine due volte rispetto a due diverse variabili x_i, riescono uniformemente convergenti al variare di t in* $(0, T)$ *e del punto* $(x_1, \dots, x_r)$ *in C_r. Invece le serie che si deducono dalla stessa derivandola termine a termine due volte rispetto ad una stessa variabile x_i convergono, per ogni t di* $(0, T)$, *in media in C_r verso la derivata omonima della f, uniformemente al variare di t.*

§ 4. - Tendenza a zero dell'errore quadratico medio.

Supponiamo che si cerchi la soluzione delle equazioni (2), (3), (4) per t variabile in un intervallo finito di tempo e sia esso $(0, T)$.

Il caso in cui t varia in un intervallo infinito non presenta, per quanto riguarda la presente questione, nessuna ulteriore difficoltà e si tratta nello stesso modo di quello qui considerato.

Facciamo la seguente ipotesi:

Esista una soluzione

$$u_1(x, y, z, t), \quad u_2(x, y, z, t), \quad u_3(x, y, z, t)$$

del sistema (2), (3), (4), *tale che le derivate seconde delle* $u_1(x,y,z,t)$, $u_2(x,y,z,t)$, $u_3(x, y, z, t)$, *che entrano nelle equazioni* (2), *siano di quadrato integrabile sui seguenti campi di integrazione*:

$0 \leq t \leq T$, (x, y, z) *coincida con uno qualunque dei vertici di C*;
$0 \leq t \leq T$, (x, y, z) *variabile su uno qualunque spigolo di C*;
$0 \leq t \leq T$, (x, y, z) *variabile su una qualunque faccia di C*;
$0 \leq t \leq T$, (x, y, z) *variabile su tutto C.*

Consideriamo una qualunque delle funzioni u_1, u_2, u_3 e indichiamola con $u(x, y, z, t)$ e con $u^{(0)}$ e $u^{(1)}$ indichiamo le corrispondenti

$$u_k^{(0)}, \quad u_k^{(1)}, \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Si ponga

$$
\begin{aligned}
(13)\quad u(x,y,z,t)={}&u^{(0)}(x,y,z)+tu^{(1)}(x,y,z)+(1-x)(1-y)(1-z)\,u_{1,1}(t)+\\
&+(1-x)\,y(1-z)\,u_{1,2}(t)+(1-x)(1-y)\,zu_{1,3}(t)+(1-x)\,yzu_{1,4}(t)+\\
&+x(1-y)(1-z)\,u_{1,5}(t)+xy(1-z)\,u_{1,6}(t)+x(1-y)\,zu_{1,7}(t)+xyzu_{1,8}(t)+\\
&+(1-y)(1-z)\,u_{2,1}(x,t)+y(1-z)\,u_{2,2}(x,t)+(1-y)\,zu_{2,3}(x,t)+\\
&+yzu_{2,4}(x,t)+(1-z)(1-x)\,u_{2,5}(y,t)+z(1-x)\,u_{2,6}(y,t)+\\
&+(1-z)\,xu_{2,7}(y,t)+zxu_{2,8}(y,t)+(1-x)(1-y)\,u_{2,9}(z,t)+\\
&+x(1-z)\,u_{2,10}(z,t)+(1-x)\,yu_{2,11}(z,t)+xyu_{2,12}(z,t)+\\
&+(1-x)\,u_{3,1}(y,z,t)+xu_{3,2}(y,z,t)+(1-y)\,u_{3,3}(x,z,t)+\\
&+yu_{3,4}(x,z,t)+(1-z)\,u_{3,5}(x,y,t)+zu_{3,6}(x,y,t)+u_4(x,y,z,t).
\end{aligned}
$$

Se si impone alle funzioni

$$u_{2,1}(x,t),\dots,\ u_{2,12}(z,t),\quad u_{3,1}(y,z,t),\dots,\ u_{3,6}(x,y,t),\quad u_4(x,y,z,t),$$

la condizione di annullarsi identicamente per ogni valore di t in $(0, T)$ quando almeno una delle variabili locali assume i valori 0,1, tali funzioni sono univocamente determinate dalla (13).

Infatti se nella (13) si pone $x=0$, $y=0$, $z=0$, si ottiene:

$$(14)\qquad u(0,0,0,t)=u^{(0)}(0,0,0)+tu^{(1)}(0,0,0)+u_{1,1}(t),$$

che definisce $u_{1,1}(t)$; calcolando la (13) negli altri vertici di C si ottengono le $u_{1,2}(t),\dots, u_{1,8}(t)$.

Consideriamo ora un qualunque spigolo di C, ad esempio $y=0$, $z=0$. Dalla (13) si ottiene

$$(15)\quad u(x,0,0,t)=u^{(0)}(x,0,0)+tu^{(1)}(x,0,0)+(1-x)\,u_{1,1}(t)+xu_{1,5}(t)+u_{2,1}(x,t),$$

che definisce la $u_{2,1}(x,t)$; in modo analogo variando lo spigolo di C si ottengono le

$$u_{2,2}(x,t),\dots,\ u_{2,12}(z,t).$$

Se si calcola la (13) su una faccia di C si ottiene una delle $u_{3,i}$ $(i=1,\dots,6)$ espressa mediante le funzioni note

$$u(x,y,z,t),\ u^{(0)}(x,y,z),\ u^{(1)}(x,y,z),\ u_{1,1}(t),\dots,u_{1,8}(t),\ u_{2,1}(x,t),\dots,u_{2,12}(z,t).$$

Note così tutte le $u_{j,i}$ $(j=1,2,3)$, la (13) definisce univocamente la $u_4(x,y,z,t)$.

Dalla (14) segue inoltre che è

$$u_{1,1}(0)=0,\qquad \left[\frac{du_{1,1}(t)}{dt}\right]_{t=0}=0,$$

e dalla (15)

$$u_{2,1}(x,0)=0,\qquad \left[\frac{\partial u_{2,1}(t)}{\partial t}\right]_{t=0}=0.$$

In modo analogo si prova che tutte le funzioni $u_{j,i}$ che compaiono nella (13) si annullano identicamente insieme alla loro derivata prima rispetto a t, per $t=0$.

Dalla (14) si ha che la $u_{1,1}(t)$ possiede derivata seconda di quadrato integrabile su $(0, T)$; poichè le $u^{(0)}$ e $u^{(1)}$ possiedono continue le derivate seconde, segue dalla (15) che la $u_{2,1}(x, t)$ ha le derivate seconde che entrano nelle (2) di quadrato integrabile per $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

In modo analogo si vede che tutte le $u_{j,i}$ hanno di quadrato integrabile, nel rispettivo campo di definizione, le derivate seconde che compaiono nelle (2).

Ciò premesso, consideriamo una qualunque delle $u_{i,j}$ della (13), ad esempio la $u_4(x, y, z, t)$. Quanto si dirà per essa vale a maggior ragione per le altre. Tale funzione si annulla sul contorno di C per ogni t di $(0, T)$; è inoltre

$$u_4(x, y, z, 0)=0, \qquad \left[\frac{\partial u_4}{\partial t}\right]_{t=0}=0,$$

e le derivate parziali seconde di $u_4(x, y, z, t)$, che compaiono nelle (2), sono di quadrato integrabile su $C+(0, T)$. Si definisca la funzione $u_4(x, y, z, t)$, per

$$-1 \leqslant x < 0, \quad -1 \leqslant y < 0, \quad -1 \leqslant z < 0,$$

nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u_4(x, y, z, t) &= -u_4(-x, y, z, t), \\ u_4(x, y, z, t) &= -u_4(x, -y, z, t), \\ u_4(x, y, z, t) &= -u_4(x, y, -z, t). \end{aligned}$$

La funzione $u_4(x, y, z, t)$ così definita è continua su tutto il campo

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \quad -1 \leqslant z \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

ed è dispari rispetto a x, y, z. Pertanto il suo sviluppo in serie di FOURIER rispetto a x, y, z, si riduce a

$$u_4(x, y, z, t)=\sum_{m,n,r=1}^{\infty} \lambda_{m,n,r}(t) \text{ sen } m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z, \tag{16}$$

con

$$\lambda_{m,n,r}(t)=8\int_C u_4(x, y, z, t) \text{ sen } m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z\, dxdydz.$$

La serie (16) converge per ogni valore di x, y, z in C, poichè la $u_4(x, y, z, t)$ ammette derivate prime continue ed è, sul contorno di C, $u_4(x, y, z, t)=0$.

Si derivi la (16) termine a termine due volte rispetto a t; si ottiene

$$\sum_{m,n,r=1}^{\infty} \lambda''_{m,n,r}(t) \text{ sen } m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z, \tag{17}$$

con

$$\lambda''_{m,n,r}(t)=8\int_C \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} \text{ sen } m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z\, dxdydz.$$

Ma la (17) è lo sviluppo in serie di FOURIER della funzione di x, y, z, $\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}$, di quadrato integrabile su C per quasi tutti i t di $(0, T)$. Si ha così, con convergenza in media su C per quasi tutti i t di $(0, T)$,

$$\frac{\partial^2 u_4(x, y, z, t)}{\partial t^2} \sim \sum_{m=n=r=1}^{\infty} \lambda''_{m, n, r}(t) \text{ sen } m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z.$$

Inoltre, sul campo $C+(0, T)$, la (17) converge in media alla $\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}$. Infatti è, per quasi tutti i t di $(0, T)$,

$$\sum_{m=n=r=1}^{\infty} \lambda''^2_{m, n, r}(t) = 8 \int_C \left[\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}\right]^2 dxdydz.$$

Essendo la serie al primo membro a termini positivi e la funzione al secondo membro integrabile rispetto a t su $(0, T)$, si può integrare per serie ottenendo

$$\sum_{m, n, r=1}^{\infty} \int_C^T \lambda''^2_{m, n, r}(t)\, dt = 8 \int_0^T \int_C \left[\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}\right]^2 dxdydzdt,$$

da cui segue immediatamente la convergenza in media della serie (17) sul campo $C+(0, T)$ alla funzione $\frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}$.

Derivando la serie (16) termine a termine rispetto a x si ha:

$$\pi \sum_{m, n, r=1}^{\infty} m\lambda_{m, n, r}(t) \cos m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z. \tag{18}$$

Consideriamo la funzione $\frac{\partial u_4}{\partial x}$, che è dispari rispetto a y e z e pari rispetto a x. Si ha, con convergenza almeno in media per quasi tutti i valori di t in $(0, T)$,

$$\frac{\partial u_4}{dx} \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n, r=1}^{\infty} \mu_{m, n, r}(t) \cos m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z, \tag{19}$$

con

$$\mu_{0, n, r}(t) = 4 \int_C \frac{\partial u_4}{\partial x} \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z\, dxdydz,$$

$$\mu_{m, n, r}(t) = 8 \int_C \frac{\partial u_4}{\partial x} \cos m\pi x \text{ sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z\, dxdydz, \qquad [m \geq 1].$$

Ma è

$$\mu_{0, n, r}(t) = 4 \int_0^1 \int_0^1 \text{sen } n\pi y \text{ sen } r\pi z\, dydz \int_0^1 \frac{\partial u_4}{\partial x}\, dx = 0,$$

essendo

$$\int_0^1 \frac{\partial u_4}{\partial x}\, dx = u_4[1, y, z, t] - u_4(0, y, z, t) = 0.$$

Per $m \geqslant 1$, si ha

$$\int_0^1 \frac{\partial u_4}{\partial x} \cos m\pi x dx = m\pi \int_0^1 u_4 \operatorname{sen} m\pi x\, dx,$$

$$\mu_{m,n,r}(t) = 8\, m\pi \int_C u_4 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z\, dxdydz = m\pi\lambda_{m,n,r}(t).$$

Sostituendo nella (19) si ottiene, con convergenza almeno in media su C,

$$\frac{\partial^2 u_4}{\partial x} \sim \pi \sum_{m,n,r=1}^{\infty} m\lambda_{m,n,r}(t) \cos m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z,$$

dove la serie al secondo membro coincide con la (18). È così dimostrato che derivando termine a termine rispetto a x la serie (16) si ottiene una serie che converge in media su C a $\frac{\partial u_4}{\partial x}$, per quasi tutti i valori di t in $(0, T)$; tale serie è la serie di Fourier di $\frac{\partial u_4}{\partial x}$. Analogamente a come si è fatto per la (17) si prova che essa converge in media su $C+(0, T)$ alla funzione $\frac{\partial u_4}{\partial x}$.

Derivando la (18) termine a termine rispetto x si ottiene la serie

$$(20) \qquad -\pi^2 \sum_{m,n,r=1}^{\infty} m^2 \lambda_{m,n,r}(t) \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z.$$

La funzione $\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}$ è, per quasi tutti i t di $(0, T)$, di quadrato integrabile su C; per questi valori di t è allora, con convergenza in media su C,

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} \sim \sum_{m,n,r=1}^{\infty} \nu_{m,n,r}(t) \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z,$$

essendo $\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}$ dispari rispetto a x, y, z, con

$$\nu_{m,n,r}(t) = 8 \int_C \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z\, dxdydz.$$

È

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} \operatorname{sen} m\pi x = -m\pi \int_0^1 \frac{\partial u_4}{\partial x} \cos m\pi x dx = -m^2\pi^2 \int_0^1 u_4 \operatorname{sen} m\pi x dx,$$

$$\nu_{m,u,r}(t) = -8\, m^2\pi^2 \int_C u_4 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z dxdydz = -m^2\pi^2\lambda_{m,n,r}(t).$$

Sostituendo nella (21) si ottiene

$$\frac{\partial^2 u_4'}{\partial x^2} \sim -\pi^2 \sum_{m,n,r=1}^{\infty} m^2\lambda_{m,n,r}(t) \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z,$$

e la serie al secondo membro è ancora la (20).

Ne segue subito che la (20) converge in media su $C+(0, T)$ a $\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}$.

In modo del tutto analogo si dimostra che la serie (16) si può derivare termine a termine in modo da ottenere una qualunque delle derivate seconde che compaiono nelle (2), la convergenza delle serie derivate essendo intesa in media sul campo $C+(0, T)$.

Ciò premesso, fissiamo $\varepsilon>0$ ad arbitrio.

Si sostituisca nella (13) al posto di $u_4(x, y, z, t)$ lo sviluppo in serie di FOURIER (16) arrestato a un certo termine

$$\sum_{m, n, r=1}^{N} \lambda_{m,n,r}(t) \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} r\pi z.$$

Analogamente al posto delle

$$u_{2,1}(x, t)...., u_{3,6}(x, y, t),$$

si sostituisca il corrispondente sviluppo in serie di seni, arrestato pure al termine di posto N. Tali sviluppi, anche se derivati due volte termine a termine, convergono in media sul rispettivo campo di definizione.

Il primo membro della (13), sarà allora una funzione

$$u_N(x, y, z, t).$$

Da ognuna delle u_1, u_2, u_3, otterremo così una funzione

$$u_{1,N},\ u_{2,N},\ u_{3,N}. \tag{22}$$

Si consideri l'integrale

$$I_T[u_{1,N}, u_{2,N}, u_{3,N}]=\int_0^T \sum_{h=1}^{3} \left\{ \int_0 q^h(E^h[u_{1,N}, u_{2,N}, u_{3,N}])^2 dxdydz + ... \right\} dt.$$

[v. (11)].

Per quanto si è premesso, è

$$\lim_{N\to+\infty} I_T[u_{1,N}, u_{2,N}, u_{3,N}]=I_T[u_1, u_2, u_3]=0.$$

Si determini il numero N_0 in modo che il corrispondente integrale soddisfi la disuguaglianza

$$0\leqslant I_T[u_{1,N_0}, u_{2,N_0}, u_{3,N_0}] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{23}$$

Si considerino le funzioni

$$u_{1,N_0}(x, y, z, t), \quad u_{2,N_0}(x, y, z, t), \quad u_{3,N_0}(x, y, z, t),$$

che si ottengono dalle (22) quando si arrestino gli sviluppi in serie di FOURIER ai termini di posto N_0.

Le funzioni u_{1,N_0}, u_{2,N_0}, u_{3,N_0} possiedono di quadrato integrabile su $C+(0, T)$ la $\frac{\partial^8}{\partial t^2 \partial x^2 \partial y^2 \partial z_z}$; infatti, esse si ottengono dalla (13) sostituendo alle

$$u_{2,1}(x, t), \ldots, u_4(x, y, z, t),$$

un conveniente polinomio trigonometrico.

Analogamente le derivate seconde totali di u_{1,N_0}, u_{2,N_0}, u_{3,N_0} per t in $(0, T)$ e (x, y, z) variabile sugli spigoli e sulle facce di C sono di quadrato integrabile. Si può pertanto applicare a ciascuno dei polinomi trigonometrici che costituiscono le u_{1,N_0}, u_{2,N_0}, u_{3,N_0}, l'osservazione di M. PICONE già rammentata. Sviluppando così ognuno di tali polinomi in serie come la (12), si ottiene in definitiva per le u_{1,N_0}, u_{2,N_0}, u_{3,N_0} uno sviluppo in serie del tipo di

$$u_{k,N_0} = u_k^{(0)} + t u_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki}(x, y, z)\, \omega_{ki}^*(t), \qquad (k=1, 2, 3),$$

dove le $A_{ki}(x, y, z)$ per $1 \leqslant i \leqslant \nu_k$ coincidono con quelle della (10) e le ω_{ki}^* sono ora funzioni note di t, per cui è $\omega_{k.i}^*(0) = \omega_{k.i}^{*\prime}(0) = 0$. Tali serie si possono derivare termine a termine con convergenza in media, in modo da ottenere tutte le derivate che compaiono nelle (2).

Si consideri lo sviluppo accorciato

$$u_{k,N_0}^{(\nu_k)} = u_k^{(0)} + tu + \sum_{i=1}^{\nu_k} A_{ik}(x, y, z)\, \omega_{ki}^*(t),$$

e l'integrale

$$(24) \qquad I_T\left[u_{1,N_0}^{(\nu_1)}, u_{2,N_0}^{(\nu_2)}, u_{3,N_0}^{(\nu_3)}\right] =$$
$$= \int_0^T \sum_{h=1}^{3} \left\{ \int_C q^h \left(E^h\left[u_{1,N_0}^{(\nu_1)}, u_{2,N_0}^{(\nu_2)}, u_{3,N_0}^{(\nu_3)}\right]\right)^2 dx dy dz + \ldots \right\} dt.$$

Ma è per la (23)

$$0 \leqslant \lim_{\substack{\nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3}\Big\} \to +\infty} I_T\left[u_{1,N_0}^{(\nu_1)}, u_{2,N_0}^{(\nu_2)}, u_{3,N_0}^{(\nu_3)}\right] = I_T[u_{1,N_0}, u_{2,N_0}, u_{3,N_0}] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si può quindi determinare un ν_0 tale che per $\nu_1 \geqslant \nu_0$, $\nu_2 \geqslant \nu_0$, $\nu_3 \geqslant \nu_0$ sia

$$0 \leqslant I_T\left[u_{1,N_0}^{(\nu_0)}, u_{2,N_0}^{(\nu_0)}, u_{3,N_0}^{(\nu_0)}\right] \leqslant \varepsilon.$$

Per calcolare le approssimazioni del metodo variazionale si cerca il minimo dell'integrale (11) in una classe di funzioni a cui appartengono pure le $\omega_{ki}^*(t)$.

Poichè l'integrale (11) coincide con quello (24) quando si faccia $\omega_{i,k} = \omega_{ik}^*$, indicato con μ il minimo di tale integrale (che misura l'errore quadratico medio per l'approssimazione di quell'ordine) si ha

$$0 \leqslant \mu \leqslant I_T\left[u_{1,N_0}^{(\nu_0)}, u_{2,N_0}^{(\nu_0)}, u_{3,N_0}^{(\nu_0)}\right] \leqslant \varepsilon .$$

Per l'arbitrarietà di ε è così dimostrata la tendenza a zero dell'errore quadratico medio, indipendentemente dall'ipotesi che la soluzione del problema sia costituita da funzioni che possiedono la

$$\frac{\partial^8}{\partial t^2 \partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} .$$

OSSERVAZIONE: L'espressione (6) delle u_1, u_2, u_3 e lo sviluppo delle $U_{yz}^{00}(x, t), \ldots, U''(x, y, z, t)$ secondo i sistemi di funzioni (8), invece che il semplice diretto sviluppo delle u_1, u_2, u_3 secondo $\{X_k(x, y, z)\}$, è stato ideato da M. PICONE per ottenere delle serie che si potessero derivare due volte termine a termine con convergenza in media.

Il ragionamento ora svolto mostra che *si giunge allo stesso risultato sostituendo alla* (6) *la* (13) *e sviluppando le funzioni al secondo membro direttamente in serie di Fourier.*

§ 5. - Applicazione del metodo variazionale alla integrazione di equazioni a derivate parziali non lineari.

1. - Quando si integra, col metodo variazionale, un'equazione o un sistema di equazioni lineari del secondo ordine, si deve cercare il minimo di un integrale [come l'(11)]

$$\int_0^T f[t, \omega_1(t), \ldots, \omega_n(t), \omega_1'(t), \ldots, \omega_n'(t), \omega_1''(t), \ldots, \omega_n''(t)]\, dt,$$

nella classe (K) delle funzioni $\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)$ assolutamente continue con le derivate prime e per cui è

$$\omega_1(0) = \ldots = \omega_n(0) = 0,$$
$$\omega_1'(0) = \ldots = \omega_n'(0) = 0.$$

La funzione $f(t, \omega_1, \ldots, \omega_n'')$ nel nostro caso è sempre $\geqslant 0$ e si riduce a un polinomio di secondo grado in $\omega_1, \ldots, \omega_n''$; si può sempre fare in modo, scegliendo opportunamente i sistemi di funzioni (8) e i pesi, che i termini quadratici in $\omega_1'', \ldots, \omega_n''$ si riducano a $\omega_1''^2 + \ldots + \omega_n''^2$.

Tale problema di Calcolo delle Variazioni rientra pertanto nel seguente teorema di esistenza di B. MANIÀ (loc. cit. in [2]):

Sia

$$f \equiv \sum_{i,j}^{1\dots n} p_{ij}(t)\, \omega_i'' \omega_j'' + \sum_{i=1}^{n} \omega_i'' A_i + G,$$

con $A_i(t, \omega_1, \dots, \omega_n')$ *funzione lineare in* $\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_1', \dots, \omega_n'$ *a coefficienti funzioni continue di* t *in* $(0, T)$, $p_{ij}(t)$ *continue in* $(0, T)$ *e* $G(t, \omega_1, \dots, \omega_n')$ *continua rispetto al complesso delle sue variabili. La forma quadratica*

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} p_{ij}(t)\, \omega_i'' \omega_j'',$$

sia per ogni t *di* $(0, T)$ *definita positiva ed esista una costante* N *tale che sia*

$$f \geqslant N$$

per ogni t *di* $(0, T)$ *ed ogni valore finito di* $\omega_1, \dots, \omega_n, \dots, \omega_n''$. *Allora nella classe* (K) *esiste il minimo assoluto di*

$$\int_0^T f dt.$$

Recentemente ([11]) ho dato una estensione della precedente proposizione di B. Manià, che comprende anche un importante teorema di esistenza di Mc Shane-Cinquini.

Per quello che a noi interessa il mio risultato si può così enunciare:

Sia

$$I = \int_0^T f(t, \omega_1, \dots, \omega_n'')\, dt,$$

e si supponga:

a) *I sia quasi regolare positivo* ([12]);

b) *Esista un numero finito* N *tale che sia sempre*

$$f(t, \omega_1, \dots, \omega_n'') \geqslant N;$$

c) *Sia, per ogni valore finito di* $\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_1', \dots, \omega_n'$

$$\lim_{\{|\omega_1''| + \dots + |\omega_n''|\} \to \infty} \frac{|f(t, \omega_1, \dots, \omega_n'')|}{|\omega_1''| + \dots + |\omega_n''|} = \infty;$$

in tali ipotesi, I *ammette minimo assoluto in* (K).

Da tale teorema segue l'esistenza delle approssimazioni del metodo variazionale per vaste classi di equazioni e sistemi di equazioni non lineari.

([11]) Loc. cit. in ([7]), n. 6.

([12]) L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Vol. I, pag. 361.

Si consideri, ad esempio, l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+E(u)=0,$$

dove $E(u)$ indica un qualunque operatore differenziale al più del primo ordine rispetto a t e del secondo rispetto alle variabili locali e che sia continuo.

Il corrispondente integrale da minimizzare, per ottenere le approssimazioni del metodo variazionale, ove si faccia una opportuna scelta delle funzioni peso e dei sistemi (8), è dato da

$$I=\int_0^T f(t, \omega_1, \ldots, \omega_n''),$$

con

$$f\equiv\sum_{i=1}^{n} \omega_i''^2+\Phi(t, \omega_1, \ldots, \omega_n''),$$

dove la Φ è lineare nelle $\omega_1'', \ldots, \omega_n''$.

Pertanto sono soddisfatte le condizioni *a*), *b*), *c*), del teorema di esistenza e si può così costruire la successione (1).

2. - Se poi interessasse l'integrazione di una equazione non lineare per t variabile su un intervallo infinito, basta osservare che il teorema di esistenza da me dato continua a sussistere anche in tale caso ([13]).

([13]) S. FAEDO : *Un nuovo teorema di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali su un intervallo infinito.* Boll. U. M. I., 1943.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 31 dicembre 1943.