

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI SANSONE

## **Le equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine, nel campo reale**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 11, n° 3-4 (1942), p. 151-195

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1942\\_2\\_11\\_3-4\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_3-4_151_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI, OMOGENEE, DEL QUARTO ORDINE, NEL CAMPO REALE

di GIOVANNI SANSONE (Firenze).

G. CIMMINO <sup>(1)</sup>, G. MAMMANA <sup>(2)</sup>, W. M. WHYBURN <sup>(3)</sup> hanno dedicato alcuni loro studi alle equazioni differenziali lineari ordinarie, omogenee, del quarto ordine, *autoaggiunte*, ossia alle equazioni della forma

$$(\alpha) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] + \theta_0 y = 0,$$

ma non ci risulta che siano state istituite ricerche sistematiche per la più generale equazione del quarto ordine

$$(\beta) \quad y^{(4)} + 4p_1 y^{(3)} + 6p_2 y^{(2)} + 4p_3 y' + p_4 y = 0,$$

e di tale problema vogliamo occuparci in questa memoria e in una successiva, allo scopo di mettere in rilievo metodi di indagine e di precisare, per alcune classi di equazioni, teoremi che raggiungano la completezza degli analoghi pertinenti al caso autoaggiunto.

Nel n. 4 del Cap. I abbiamo osservato che nell'ipotesi della continuità di  $p_1'', p_2', p_3, p_4$ , la  $(\beta)$ , moltiplicandola per  $e^{2 \int p_1 dx}$  può scriversi

$$(\gamma) \quad \boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0}$$

e questa abbiamo assunto come *forma tipica* delle equazioni del quarto ordine. Rispetto al caso autoaggiunto si è in presenza di un solo termine perturbativo  $-\omega y'$ , e si capisce come questa circostanza debba giovare, e giova infatti,

<sup>(1)</sup> G. CIMMINO: *Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore*. Math. Zeitschr., 32 (1930), pp. 4-58.

<sup>(2)</sup> G. MAMMANA: *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici, e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*. Math. Zeitschr., 33 (1931), (pp. 186-231), Cap. VIII, n. 2, Cap. X, n. 3.

<sup>(3)</sup> W. M. WHYBURN: *On self-adjoint ordinary differential equations of the fourth order*. Am. Journ. of Math., 52 (1930), pp. 171-196.

a trasportare nel caso generale vari risultati relativi al caso autoaggiunto, cioè al caso  $\omega \equiv 0$ .

Ma la ( $\gamma$ ) ha ancora una notevole particolarità che vogliamo rilevare. E. HILLE <sup>(4)</sup> e W. M. WHYBURN <sup>(5)</sup> riducono la risoluzione dell'equazione lineare autoaggiunta ( $\alpha$ ) al sistema

$$y'' + p(x)y = q(x)z, \quad z'' + p(x)z = r(x)y,$$

del quale, riferendoci ad un moto piano, è facile stabilire il significato meccanico, e noi vedremo nel n. 5 del Cap. I, che alla ( $\gamma$ ) si collega il sistema lineare

$$(\delta) \quad \boxed{y'' + p(x)y = q(x)z, \quad z'' + p(x)z = r(x)y + \omega(x)y'}$$

di cui rileveremo pure il semplicissimo significato meccanico.

La seconda memoria di cui abbiamo poc'anzi parlato sarà appunto dedicata allo studio asintotico delle soluzioni del sistema ( $\delta$ ), del quale non faremo la riduzione alla forma canonica di WILCZYNSKI <sup>(6)</sup>,

$$\eta_1'' + \varrho_{1,1} \eta_1 + \varrho_{1,2} \eta_2 = 0, \quad \eta_2'' + \varrho_{2,1} \eta_1 + \varrho_{2,2} \eta_2 = 0, \quad (\varrho_{11} + \varrho_{22} = 0),$$

perchè, come è noto, una tale trasformazione esige la ricerca di una coppia di soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee del primo ordine, di una soluzione di un'equazione di RICCATI [non sempre esistente in grande nel campo reale] e un cambiamento di variabile indipendente definito da una quadratura.

Nel Cap. II, al n. 1, stabiliremo per gli integrali dell'equazione ( $\gamma$ ) una prima identità integrale della quale ci serviremo al n. 3 per costruire equazioni differenziali i cui integrali non possono possedere due o più zeri doppi distinti, e daremo poi per i loro zeri espressivi teoremi di separazione <sup>(7)</sup>.

Nel n. 4 dello stesso Cap. II, basandosi sulla medesima identità integrale, studieremo minuziosamente il comportamento asintotico degli integrali di una particolare classe di equazioni, e nel n. 5 isoleremo un'importante sottoclasse i cui integrali  $y(x)$  quando siano limitati, convergono senza eccezione, per  $x \rightarrow \infty$ , allo zero.

<sup>(4)</sup> E. HILLE: *Oscillation theorems in the complex domain*. Trans. of the Am. Math. Soc., 23 (1922), pp. 350-385.

<sup>(5)</sup> W. M. WHYBURN; mem. cit. in <sup>(3)</sup>.

<sup>(6)</sup> E. J. WILCZYNSKI: *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*. (Leipzig, 1906), p. 116.

<sup>(7)</sup> Per un teorema generale di separazione degli zeri degli integrali di un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$ , soddisfacenti condizioni ai limiti atte a determinare una doppia infinità di soluzioni, quale ad esempio la condizione che gli integrali abbiano uno zero  $n - 2^{uplo}$  in un punto prefissato cfr. R. D. CARMICHAEL: *Boundary value and expansion problems: oscillation, comparison and expansion theorems*. Am. Journ. of Math., 44 (1922), (pp. 129-152), Teor. III, p. 138.

Il Cap. III, dedicato ai teoremi di confronto delle equazioni differenziali del quarto ordine, si fonda su l'impiego di una seconda identità integrale.

Qui, nelle tesi dei vari teoremi, apparirà ogni volta la possibilità dell'esistenza di uno zero per uno almeno dei determinanti

$$(\varepsilon) \quad \begin{vmatrix} u(x), & v(x) \\ u'(x), & v'(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u(x), & v(x) \\ u''(x), & v''(x) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u'(x), & v'(x) \\ u''(x), & v''(x) \end{vmatrix}$$

costruiti con due soluzioni linearmente indipendenti  $u(x), v(x)$  di una delle equazioni che si confrontano, e una più precisa discriminazione esigerà naturalmente una conseguente particolarizzazione dei coefficienti delle equazioni <sup>(8)</sup>.

Nei nn. 1 e 2 del Cap. IV diamo per via diretta due teoremi sulla frequenza degli zeri doppi degli integrali di due classi di equazioni del quarto ordine a coefficienti costanti e nel n. 3 seguendo poi i consueti procedimenti, grazie ai teoremi di confronto del Cap. III, deduciamo rapidamente un teorema sul comportamento degli integrali di un'equazione del quarto ordine con coefficienti dipendenti da un parametro, e con uno zero doppio in un punto prefissato.

In questo lavoro non abbiamo considerato, per le equazioni i cui coefficienti dipendono da un parametro, quei problemi ai limiti che nel caso delle equazioni autoaggiunte conducono all'esistenza di autovalori.

Nel caso delle equazioni del secondo ordine tale questione può risolversi rapidamente con l'uso della scomposizione simbolica degli operatori differenziali in prodotto di operatori lineari reali, o complessi e coniugati <sup>(9)</sup>, ma per operatori di ordine superiore ha osservato recentemente GUIDO ASCOLI <sup>(10)</sup> non sempre esiste tale possibilità; di guisa che la questione preventiva da risolvere, per chi volesse porsi in questo indirizzo, sarebbe di assegnare per i coefficienti delle equazioni, condizioni sufficienti atte ad assicurare la decomposizione di un

<sup>(8)</sup> Per le equazioni del quarto ordine autoaggiunte tali teoremi si riducono alla separazione degli zeri degli integrali e dei Wronskiani di una coppia di integrali. Per il caso di una sola equazione autoaggiunta cfr. C. N. REYNOLDS: *On the zeros of homogeneous linear differential equations*. Trans. of the Am. Math. Soc., 22 (1921), (pp. 220-229), pp. 227-229; e per due equazioni autoaggiunte cfr. il Cap. I, pp. 4-29 della memoria cit. in <sup>(4)</sup> di G. CIMMINO che si vale principalmente in questa parte dei suoi studi della così detta *identità generalizzata* di M. PICONE. Nel testo noi troviamo i teoremi di confronto seguendo una via analoga.

<sup>(9)</sup> Cfr. G. MAMMANA: *Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari*. Math. Zeitschr., 25 (1926), pp. 734-748. I risultati sono riportati in G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel Campo Reale*, (Zanichelli, Bologna, 1941) I, Cap. IV, § 5, pp. 194-202.

<sup>(10)</sup> GUIDO ASCOLI: *Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si connettono*. Revista Matem. di Fisica Teorica (Tucuman, 1940), n. 279, pp. 189-215, Cap. III, p. 208.

operatore del quarto ordine in prodotto di fattori simbolici a coefficienti reali di tipo prestabilito, per esempio in due di secondo ordine di cui uno dotato di integrali oscillanti.

Volendo invece studiare con l'impiego dei consueti schemi dimostrativi il problema degli autovalori corrispondenti a determinate condizioni ai limiti, per esempio l'esistenza di integrali  $y(x, \lambda)$  dell'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2(x, \lambda) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1(x, \lambda) \frac{dy}{dx} \right] - \omega(x, \lambda) \frac{dy}{dx} + \theta_0(x, \lambda) y = 0,$$

soddisfacenti le condizioni ai limiti

$$y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = 0, \quad y(b, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0, \quad (a < b),$$

bisognerà imporre ai coefficienti dell'equazione ipotesi suscettibili di raffinare i teoremi di confronto del Cap. III, in modo da poter concludere l'esistenza in determinati intervalli di almeno uno zero del Wronskiano di due soluzioni indipendenti, cioè del primo dei determinanti ( $\epsilon$ ). La questione di cui abbiamo ora parlato resta quindi da approfondirsi.

## CAPITOLO I.

### Forme tipiche delle equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine Sistema di equazioni differenziali associato.

1. - Le trasformazioni moltiplicative. Il caso delle equazioni riducibili in autoaggiunte.

a) Data l'equazione

$$(1) \quad Y^{(4)} + 4p_1 Y^{(3)} + 6p_2 Y^{(2)} + 4p_3 Y' + p_4 Y = 0,$$

con  $p_1, p_2, p_3, p_4$  funzioni continue di  $x$  in  $(a, b)$ , <sup>(14)</sup>  $a < b$ , vogliamo nelle nostre ricerche considerare principalmente il carattere oscillatorio dei suoi integrali, carattere che rimane manifestamente invariato quando si operi sull'equazione la trasformazione

$$Y = e^{\int_a^x z dx} u,$$

dove  $z$  è una funzione assegnata della  $x$  in  $(a, b)$  con derivate continue fino al terzo ordine.

---

<sup>(14)</sup> Le funzioni  $p_1, p_2, p_3, p_4$  sono reali in  $(a, b)$  e intendiamo soltanto riferirci alle soluzioni reali dell'equazione (1), non identicamente nulle.

Supposto che  $p_1$  abbia derivate continue fino al terzo ordine, con la trasformazione

$$(2) \quad Y = e^{\alpha \int p_1 dx} u$$

la (1) diventa

$$(3) \quad u^{(4)} + 6P_2 u^{(2)} + 4P_3 u' + P_4 u = 0,$$

dove  $P_2, P_3, P_4$  [i così detti *semiinvarianti differenziali della (1)* rispetto alla *normalizzazione* relativa (2)] hanno l'espressione

$$(4) \quad \begin{cases} P_2 = p_2 - p_1^2 - p_1', & P_3 = p_3 - 3p_1 p_2 + 2p_1^3 - p_1'', \\ P_4 = p_4 - 4p_1 p_3 + 6p_1^2 p_2 - 6p_1' p_2 - 3p_1^4 + 6p_1^2 p_1' + 3(p_1')^2 - p_1^{(3)}. \end{cases}$$

Se oltre a supporre  $p_1^{(3)}$  continua in  $(a, b)$  supponiamo anche  $p_2'$  continua in  $(a, b)$ , la (3) può scriversi

$$(I_1) \quad u^{(4)} + 6[P_2 u']' - 2[3P_2' - 2P_3]u' + P_4 u = 0,$$

ove  $3P_2' - 2P_3$  è il così detto semiinvariante di G. H. HALPHEN <sup>(12)</sup>.

b) Supponiamo sia nullo il semiinvariante di G. H. HALPHEN relativo alla (1), si abbia cioè

$$(5) \quad \boxed{3P_2' - 2P_3 = 0};$$

la (1), con la trasformazione (2), assume allora la *forma autoaggiunta*

$$\boxed{u^{(4)} + 6[P_2 u']' + P_4 u = 0}.$$

Inversamente consideriamo l'equazione autoaggiunta del quarto ordine

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dY}{dx} \right] + \theta_0 Y = 0;$$

supposte  $\theta_2'', \theta_1', \theta_0$  continue in  $(a, b)$ ,  $\theta_2(x) > 0$  per  $a \leq x \leq b$ , si ha con le nostre notazioni

$$p_1 = \theta_2' / 2\theta_2, \quad p_2 = [\theta_2'' - \theta_1] / 6\theta_2, \quad p_3 = -\theta_1 / 4\theta_2, \quad p_4 = \theta_0 / \theta_2,$$

e supposto ancora che  $\theta_2'''$  sia finita in  $(a, b)$  costruiti con le (4) i semiinvarianti  $P_2$  e  $P_3$  si troverà che è verificata la (5).

<sup>(12)</sup> Cfr. G. H. HALPHEN: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre*, Acta Mathematica, 3 (1883), (pp. 325-380), p. 329.

**2. - La trasformazione di Laguerre-Forsyth.**

È bene noto che l'equazione (1) con la così detta trasformazione di LAGUERRE-FORSYTH può ridursi in un'altra priva dei termini contenenti le derivate terza e seconda della funzione incognita: infatti *supposta esistente una soluzione positiva dell'equazione* <sup>(13)</sup>

$$(6) \quad \boxed{z'' + \frac{3}{5} P_2 z = 0}$$

operando sulla (1) con la trasformazione

$$(7) \quad Y = e^{-\int p_1 dx} z^3 u, \quad \xi = \int z^{-2} dx + \text{cost.}$$

otteniamo l'equazione

$$(I_2) \quad \frac{d^4 u}{d\xi^4} - \omega(\xi) \frac{du}{d\xi} + \theta_0(\xi) u = 0.$$

Per potere effettuare sulla (1) la trasformazione (7) è necessaria l'esistenza di  $\xi^{(4)}(x)$ , quindi di  $z'''$ , e perciò di  $P_2'$ ; supporremo perciò  $p_1^{(3)}$ ,  $p_2'$  *continue* in  $(a, b)$ , ciò che assicura la continuità in  $(a, b)$  di  $\omega(\xi)$  e  $\theta_0(\xi)$ .

Quanto all'esistenza di una soluzione della (6) positiva in tutto  $(a, b)$ , è ben noto che se  $P_2(x) \leq 0$  in  $(a, b)$ , un integrale della (6) che soddisfi le condizioni  $z(a) > 0$ ,  $z'(a) > 0$  è positivo e crescente in  $(a, b)$  <sup>(14)</sup>.

Ove  $P_2(x)$  assuma in tutto  $(a, b)$ , o in alcuni tratti di esso, valori positivi, consideriamo l'equazione

$$z'' + \lambda P_2(x) z = 0,$$

e il primo autovalore positivo  $\lambda^*$  relativo alle condizioni ai limiti  $z(a) = z(b) = 0$ . Se risulta  $\lambda^* > 3/5$ , allora per risultati noti <sup>(15)</sup> la (6) ammette una soluzione positiva in  $(a, b)$  e la riduzione della (1) alla forma (I<sub>2</sub>) è ancora lecita.

**3. - La forma tipica nel caso che l'invariante di G. H. Halphen abbia segno costante in  $(a, b)$ .**

Supponiamo che sia

$$\varphi = |3P_2' - 2P_3| \neq 0 \quad \text{per } a \leq x \leq b,$$

<sup>(13)</sup> Cfr. ad es. G. SANSONE: *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*. (Zanichelli, Bologna, 1941), I, p. 91.

<sup>(14)</sup> Cfr. G. SANSONE; op. cit., p. 180.

<sup>(15)</sup> Cfr. M. PICONE: *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine*. Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (1), 11 (1910), (pp. 1-141), p. 31; M. BÔCHER: *Leçons sur les méthodes de Sturm*. (Paris, 1917), pp. 70-72.

e poniamo

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} (3P_2' - 2P_3),$$

perciò  $3P_2' - 2P_3 = \varepsilon\varphi$ , con  $\varepsilon = \pm 1$ .

Operiamo sulla (3) la trasformazione

$$u = e^{\int h dx} y,$$

otteniamo l'equazione

$$(8) \quad y^{(4)} + 4\bar{p}_1 y^{(3)} + 6\bar{p}_2 y^{(2)} + 4\bar{p}_3 y' + \bar{p}_4 y = 0,$$

con

$$(8') \quad \bar{p}' = -h; \quad \bar{p}_2 = P_2 + h^2 - h'; \quad \bar{p}_3 = P_3 - 3hP_2 - h^3 + 3hh' - h'';$$

e supposto che  $p_1$  ammetta derivate continue fino al sesto ordine,  $p_2$  fino al quinto,  $p_3$  fino al quarto, posto

$$h = \varphi' / 2\varphi$$

si avrà

$$4\bar{p}_1 = -2 \frac{\varphi'}{\varphi}, \quad 6\bar{p}_2 = 6P_2 + \frac{9\varphi'^2 - 6\varphi\varphi''}{2\varphi^2},$$

$$4\bar{p}_3 = 6P_2' - 6 \frac{\varphi'}{\varphi} P_2 + \frac{-15\varphi'^2 + 18\varphi\varphi'\varphi'' - 4\varphi^2\varphi'''}{2\varphi^3} - 2\varepsilon\varphi,$$

e l'equazione (8) diventa

$$y^{(4)} - 2 \frac{\varphi'}{\varphi} y^{(3)} + 2 \left[ 3P_2 + \frac{9\varphi'^2 - 6\varphi\varphi''}{4\varphi^2} \right] y'' +$$

$$+ \left[ 6P_2' - 6 \frac{\varphi'}{\varphi} P_2 + \frac{-15\varphi'^2 + 18\varphi\varphi'\varphi'' - 4\varphi^2\varphi'''}{2\varphi^3} \right] y' - 2\varepsilon\varphi y' + \bar{p}_4 y = 0,$$

e dividendo per  $2\varphi$ , e posto

$$\theta_2 = \frac{1}{2\varphi}, \quad \theta_1 = - \left[ 3 \frac{P_2}{\varphi} + \frac{5\varphi'^2 - 4\varphi\varphi''}{4\varphi^4} \right], \quad \theta_0 = \frac{\bar{p}_4}{2\varphi},$$

l'equazione assume la forma

$$(I_3) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \varepsilon \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0, \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

#### 4. - La forma tipica nel caso generale.

a) Supponiamo che nella (1) i coefficienti  $p_1''$ ,  $p_2'$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  siano continui in  $(a, b)$ ; moltiplicando per

$$(9_1) \quad \theta_2(x) = e^{\int p_1 dx},$$



e posto

$$(9_2) \quad S(x) = 3p_2 - p_1' - 2p_1^2$$

$$(9_3) \quad \theta_1(x) = -2S\theta_2, \quad \omega(x) = 2(S\theta_2)' - 4p_3\theta_2 = 2\theta_2[3P_2' - 2P_3], \quad \theta_0(x) = p_4\theta_2 \quad (16)$$

essa assume la forma

$$(II) \quad \boxed{\frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dY}{dx} \right] - \omega(x) \frac{dY}{dx} + \theta_0(x) Y = 0},$$

con  $\theta_2''(x)$ ,  $\theta_1'(x)$ ,  $\omega(x)$ ,  $\theta_0(x)$  continue in  $(a, b)$ .

Diremo la (II) la forma tipica delle equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine.

b) Dalle cose dette precedentemente risulta più in particolare:

1.° Se nella (1)  $p_1''', p_2', p_3, p_4$  sono continue in  $(a, b)$ , la (1) si può trasformare in un'equazione della forma (II), con  $\theta_2 \equiv 1$  [n. 1 a), (I<sub>1</sub>)];

2.° Se nella (1)  $p_1''', p_2', p_3, p_4$  sono continue in  $(a, b)$  ed è lecita [nel campo reale] la trasformazione di LAGUERRE-FORSYTH, la (1) si può trasformare in un'equazione della forma (II) con  $\theta_2 \equiv 1$ ,  $\theta_1 \equiv 0$  [n. 2, (I<sub>2</sub>)] (17);

3.° Se nella (1)  $p_1''', p_2', p_3, p_4$  sono continue in  $(a, b)$ , ed è nullo il seminvariante  $3P_2' - 2P_3$  di G. H. HALPHEN, la (1) si può trasformare in un'equazione della forma (II), con  $\omega(x) \equiv 0$ , cioè la (II) ha la forma autaggiunta [n. 1, b)].

4.° Se nella (1)  $p_1^{(6)}, p_2^{(5)}, p_3^{(4)}, p_4$  sono continue in  $(a, b)$ , ed ivi il seminvariante di G. H. HALPHEN ha segno costante, la (1) si può trasformare in un'equazione della forma (II), con  $\omega(x) = \operatorname{sgn}(3P_2' - 2P_3)$ , [ $\omega = \pm 1$ ].

c) Vogliamo ora dimostrare che se nella (1)  $p_1''', p_2', p_3, p_4$  sono continue in  $(a, b)$ , e l'intervallo  $(a, b)$  è finito, oppure se essendo  $b = +\infty$  esiste una costante  $M$  tale che  $3P_2 - M \leq 0$  in  $(a, +\infty)$ , la (1) si può trasformare in un'equazione della forma (II) con

$$-\theta_1/2\theta_2 = S = \text{cost.}$$

Dalla (1) effettuando la trasformazione

$$Y = e^{\int_z dx} y$$

otteniamo

$$y^{(4)} + 4\bar{p}_1 y^{(3)} + 6\bar{p}_2 y^{(2)} + 4\bar{p}_3 y' + \bar{p}_4 y = 0,$$

con

$$\bar{p}_1 = p_1 + z, \quad \bar{p}_2 = z^2 + z' + 2p_1 z + p_2,$$

(16) Per le espressioni di  $P_2$  e  $P_3$  cfr. le (4) del n. 1, a).

(17) La trasformazione, come abbiamo osservato nel n. 2, è sempre lecita per  $P_2 \leq 0$ .

e per la corrispondente  $\bar{S}(x)$ , in virtù della (9<sub>2</sub>), abbiamo

$$\bar{S}(x) = 3\bar{p}_2 - \bar{p}_1' - 2\bar{p}_1^2 = (p_1 + z)^2 + 2z' + S - p_1^2,$$

talchè, posto

$$z = -p_1 - h$$

abbiamo

$$\bar{S}(x) = h^2 - 2h' + 3P_2,$$

e posto ora

$$\tau = e^{-\frac{1}{2} \int h dx}, \quad [\tau'/\tau = -h/2],$$

ossia effettuando sulla (1) la trasformazione

$$(10) \quad Y = e^{-\int p_1 dx} \tau^2 y,$$

la  $\bar{S}(x)$  relativa all'equazione trasformata diventa

$$\bar{S}(x) = 4 \frac{\tau''}{\tau} + 3P_2.$$

Esista una costante reale  $M$  tale che l'equazione

$$(11) \quad 4\tau'' + (3P_2 - M)\tau = 0,$$

ammetta un soluzione  $\tau(x)$  mai nulla in  $(a, b)$ . Una tale costante può sempre determinarsi se  $(a, b)$  è finito; infatti se  $M_0$  è il massimo di  $3P_2$  in  $(a, b)$  per  $M \geq M_0$  si ha  $3P_2 - M \leq 0$  e un qualunque integrale  $\tau(x)$  dell'equazione (10) che soddisfa le condizioni iniziali  $\tau(a) > 0$ ,  $\tau'(a) > 0$ , risulta positivo [e crescente] in  $(a, b)$  <sup>(18)</sup>. Quando sia  $b = +\infty$ , una costante  $M$  per la quale  $3P_2 - M \leq 0$  esiste per ipotesi, e abbiamo dunque che scelto l'integrale  $\tau(x)$  della (11) nel modo dichiarato, la (10) trasforma la (1) in un'equazione che scritta nella forma (II) gode la particolarità che

$$-\theta_1/\theta_2 = \bar{S} = M = \text{cost.}$$

**5. - Sistema lineare associato alle equazioni differenziali del quarto ordine, e corrispondente problema dinamico.**

a) Abbiamo visto nel numero precedente che supposto nell'equazione (1)  $p_1''$ ,  $p_2'$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  continue in  $(a, b)$ , ad essa può assegnarsi la forma

$$(II) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 Y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dY}{dx} \right] - \omega(x) \frac{dY}{dx} + \theta_0(x) Y = 0,$$

con  $\theta_2''$ ,  $\theta_1'$ ,  $\omega(x)$ ,  $\theta_0(x)$  continue in  $(a, b)$ ,  $\theta_2 > 0$ .

<sup>(18)</sup> Cfr. (14).

Se poi nella (1)  $p_1'''$ ,  $p_2''$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  sono continue in  $(a, b)$ , risultano anche continue in  $(a, b)$   $\theta_2'''$ ,  $\theta_1''$ ,  $\omega(x)$ ,  $\theta_0(x)$ , e posto

$$(12_1) \quad \theta_2 Y'' = \frac{\theta_1}{2} Y + Z,$$

la (II) dà

$$(12_2) \quad \left[ \frac{\theta_1^2}{4\theta_2} - \frac{1}{2} \theta_1'' - \theta_0 \right] Y + \omega Y' = Z'' - \frac{\theta_1}{2\theta_2} Z,$$

e inversamente, se  $Y, Z$  è una soluzione del sistema (12<sub>1</sub>), (12<sub>2</sub>),  $Y$  soddisfa la (II).

Posto

$$(13) \quad \boxed{p = -\frac{\theta_1}{2\theta_2}, \quad q = \frac{1}{\theta_2}, \quad r = \frac{\theta_1^2}{4\theta_2} - \frac{1}{2} \theta_1'' - \theta_0}$$

le (12<sub>1</sub>), (12<sub>2</sub>) diventano

$$(III) \quad \boxed{Y'' + pY = qZ, \quad Z'' + pZ = rY + \omega Y'}$$

e per le (9<sub>1</sub>), (9<sub>2</sub>), (9<sub>3</sub>) si ha

$$(14) \quad \begin{cases} q = e^{-2 \int p_1 dx}, & p = 3p_2 - p_1' - 2p_1^2, & \omega = 2[3P_2' - 2P_3] e^{\alpha} \\ r = -4p_1^4 + 9p_2^2 - 5p_1'^2 - 20p_1^2 p_1' + 12p_1 p_2' - 8p_1 p_1'' + 3p_2'' - p_1''' - p_4, \end{cases}$$

essendo  $P_2, P_3$  date dalle (4).

Abbiamo dunque che se le funzioni  $p_1'''$ ,  $p_2''$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  sono continue in  $(a, b)$ , ad ogni soluzione  $Y(x)$  della (1) si può associare una soluzione  $(Y, Z)$  del sistema (III), con i coefficienti  $p, q, r$  determinati dalle (14), e inversamente. Risulta inoltre  $q(x) > 0$ , e per i risultati del n. 4 si può supporre in ipotesi molto generali  $p = \text{cost.}$ , oppure quando non sia  $\omega \equiv 0$  [caso dell'equazione autoaggiunta]  $\omega = \pm 1$ .

Occorre ancora notare che se  $(Y, Z)$  è una soluzione del sistema (III),  $Y$  soddisfa l'equazione (II) con

$$(15) \quad \boxed{\theta_2 = \frac{1}{q}, \quad \theta_1 = -2 \frac{p}{q}, \quad \theta_0 = \frac{p^2}{q} + \left( \frac{p}{q} \right)' - r}$$

b) Del sistema (III) possiamo dare la seguente interpretazione dinamica.

La variabile  $x$  indichi il tempo e si consideri nel piano  $Y, Z$  di origine  $O$  il moto di un punto materiale  $P \equiv (Y, Z)$  di massa unitaria, sollecitato dalla forza centrale di modulo  $|p| \sqrt{Y^2 + Z^2}$ , con la direzione  $\overrightarrow{PO}$  o l'opposta secondochè la

funzione  $p(x)$  è positiva o negativa, da una forza parallela all'asse  $Y$  di componente  $qZ$ , e da una forza parallela all'asse  $Z$  di componente  $rY + \omega Y'$ . Le equazioni del moto del punto  $P$  sono allora date dalle (III) <sup>(49)</sup>.

## CAPITOLO II.

### Una prima identità integrale per le equazioni differenziali lineari del quarto ordine. Applicazioni.

## 1. - Una prima identità integrale.

Siano  $\theta_2''(x)$ ,  $\theta_1'(x)$ ,  $\omega'(x)$ ,  $\theta_0(x)$  funzioni continue in  $(a, b)$ ,  $\theta_2(x) > 0$ , sia

$$(1) \quad \boxed{Dy = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega(x) \frac{dy}{dx} + \theta_0 y},$$

e  $x_1$  e  $x_2$  due punti di  $(a, b)$ .

Con successive integrazioni per parti abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} y \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] dx &= \left[ y \{ \theta_2 y'' \}' \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] \frac{dy}{dx} dx = \\ &= \left[ y \{ \theta_2 y'' \}' \right]_{x_1}^{x_2} - \left[ \theta_2 y' y'' \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \theta_2 y''^2 dx; \\ - \int_{x_1}^{x_2} y \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] dx &= - \left[ \theta_1 y y' \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \theta_1 y'^2 dx; \\ - \int_{x_1}^{x_2} \omega y \frac{dy}{dx} dx &= - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \omega (y^2)' dx = - \frac{1}{2} \left[ \omega y^2 \right]_{x_1}^{x_2} + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \omega' y^2 dx; \end{aligned}$$

e perciò l'identità

$$(2) \quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} y Dy dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \theta_2 y''^2 + \theta_1 y'^2 + \left( \theta_0 + \frac{1}{2} \omega' \right) y^2 \right] dx + \left[ y \{ \theta_2 y'' \}' - \theta_2 y' y'' - \theta_1 y y' - \frac{1}{2} \omega y^2 \right]_{x_1}^{x_2}}.$$

<sup>(49)</sup> Per  $\omega = 0$ ,  $r = -q$  cfr. E. HILLE, mem. cit. in <sup>(4)</sup>, e per  $\omega = 0$  W. M. WHYBURN, mem. cit. in <sup>(4)</sup>.

Si ha da qui che se  $y$  è un integrale dell'equazione  $Dy=0$ , e in  $(x_1, x_2)$ , con  $x_1 < x_2$ , si ha

$$(3) \quad \theta_2(x) > 0, \quad \theta_1(x) \geq 0, \quad \theta_0 + \frac{1}{2} \omega' \geq 0,$$

allora si ha anche

$$\left[ y \left\{ \theta_2 y'' \right\}' - \theta_2 y' y'' - \theta_1 y y' - \frac{1}{2} \omega y^2 \right]_{x_1}^{x_2} \leq 0.$$

## 2. - Una classe di equazioni priva di coppie di zeri doppi.

a) Se nell'equazione

$$(4) \quad \boxed{Dy = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega(x) \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0}$$

le funzioni  $\theta_2''$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega'$  sono continue per  $x \geq x_1$ , se

$$(3) \quad \boxed{\theta_2(x) > 0, \quad \theta_1(x) \geq 0, \quad \theta_0 + \frac{1}{2} \omega' \geq 0 \quad \text{per } x \geq x_1}, \quad (2^0)$$

e se un integrale  $y(x)$  della (4) (non identicamente nullo) ha uno zero doppio in  $x_1$ ,

$$y(x_1) = y'(x_1) = 0,$$

allora in nessun punto  $\bar{x}$ , con  $\bar{x} > x_1$ , può aversi simultaneamente

$$y(\bar{x}) = 0, \quad y'(\bar{x}) = 0 \quad [\text{oppure } y(\bar{x}) = 0, \quad y''(\bar{x}) = 0].$$

Ove si verificano quest'ultime, per la (2) dovrebbe aversi

$$\int_{x_1}^{\bar{x}} \left[ \theta_2 y''^2 + \theta_1 y'^2 + \left( \theta_0 + \frac{1}{2} \omega' \right) y^2 \right] dx = 0,$$

ma  $\theta_2 > 0$  perciò  $y'' \equiv 0$ , quindi  $y = c_1 x + c_2$ , con  $c_1$  e  $c_2$  costanti, e siccome  $y$  deve annullarsi in  $x_1$  e  $\bar{x}$ ,  $y \equiv 0$ , e ciò non è.

(<sup>20</sup>) D'ora in avanti escluderemo che si abbia simultaneamente  $\theta_1 \equiv 0$ ,  $\omega \equiv 0$ ,  $\theta_0 \equiv 0$ , ossia che l'equazione (4) si riduca a

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] = 0, \quad \theta_2 > 0, \quad \theta_2 \text{ continua per } x \geq a,$$

nel qual caso l'integrale generale dell'equazione ha l'espressione  $y(x) = \int_a^x (x-t) \frac{c_1 t + c_2}{\theta_2(t)} dt + c_3 x + c_4$ , con  $c_1, c_2, c_3, c_4$  costanti arbitrarie, e lo studio del comportamento di  $y(x)$  è del tutto elementare.

b) Si ha di conseguenza che *nelle ipotesi precedenti, se  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  sono due integrali linearmente indipendenti della (4), ciascuno possedente uno zero doppio in  $x_1$*

$$(5) \quad y_1(x_1) = y_1'(x_1) = 0 \quad y_2(x_1) = y_2'(x_1) = 0,$$

allora per  $x > x_1$  si ha

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si abbia per assurdo in un punto  $\bar{x} > x_1$ ,  $y_1(\bar{x})y_2'(\bar{x}) - y_2(\bar{x})y_1'(\bar{x}) = 0$ ,  $[y_1(\bar{x})y_2''(\bar{x}) - y_2(\bar{x})y_1''(\bar{x}) = 0]$  e si determini una soluzione  $c_1, c_2$  non nulla del sistema

$$\begin{aligned} c_1 y_1(\bar{x}) + c_2 y_2(\bar{x}) &= 0, & c_1 y_1'(\bar{x}) + c_2 y_2'(\bar{x}) &= 0; \\ [c_1 y_1(\bar{x}) + c_2 y_2(\bar{x}) &= 0, & c_1 y_1''(\bar{x}) + c_2 y_2''(\bar{x}) &= 0]; \end{aligned}$$

allora  $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  rappresenta un integrale dell'equazione (4) che si annulla insieme alla sua derivata prima [seconda] in  $\bar{x}$ ; e per le (5) e per quanto abbiamo dimostrato in a) ciò non può verificarsi.

c) Ne segue che *supposto che i coefficienti dell'equazione (4) per  $x \geq x_1$  verificchino le (3), e che  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  siano due suoi integrali linearmente indipendenti, ciascuno con uno zero doppio in  $x_1$ , tanto il Wronskiano*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

che la sua derivata

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}$$

per  $x > x_1$  hanno un segno costante [le coppie  $y_1(x), y_2(x)$ ;  $y_1'(x), y_2'(x)$ ;  $y_1''(x), y_2''(x)$  non hanno zeri comuni per  $x > x_1$ ], e poichè  $W(x_1) = 0$ , si ha anche che per  $x > x_1$  il Wronskiano  $W(x)$  è positivo e crescente, oppure negativo decrescente.

Si ha pure che nelle nostre ipotesi l'integrale che ha uno zero doppio in  $x_1$  e uno zero semplice in  $\bar{x}$ , con  $\bar{x} > x_1$ , è determinato a meno di un fattore costante.

**3. - Teoremi di separazione per gli integrali dell'equazione (4) con uno zero doppio in un punto prefissato.**

a) 1° TEOREMA. - *Nell'equazione (4)  $\theta_2'', \theta_1', \theta_0, \omega'$  siano continue per  $x \geq x_1$ , e siano verificate le (3), e siano  $y_1(x), y_2(x)$  due suoi integrali linearmente indipendenti, aventi ciascuno uno zero doppio in  $x_1$ . Vogliamo*

*dimostrare che se  $y_1(x)$  si annulla consecutivamente in  $x_2$  e  $x_3$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$ , allora  $y_2(x)$  ha uno zero [semplice, n. 2, a)] interno a  $(x_2, x_3)$ , e uno soltanto.*

Supponiamo per assurdo che per qualunque  $x$  tale che  $x_1 < x < x_2$  sia  $y_2(x) \neq 0$ ; per il n. 2 c), salvo a cangiare di segno  $y_2(x)$ , potremo supporre  $y_1'y_2 - y_2'y_1 > 0$ , quindi internamente a  $(x_2, x_3)$

$$(6) \quad \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_2^2} > 0$$

ma  $y_2(x_2) \neq 0$ ,  $y_2(x_3) \neq 0$ ,  $(y_1/y_2)_{x=x_2} = 0$ ,  $(y_1/y_2)_{x=x_3} = 0$ , e allora non può verificarsi la (6).

È evidente che  $y_2(x)$  può annullarsi una volta soltanto in un punto  $\bar{x}$  di  $(x_1, x_2)$ ; l'esistenza infatti di un secondo zero  $\bar{\bar{x}}$  implicherebbe che  $y_1(x)$  dovrebbe annullarsi tra  $\bar{x}$  e  $\bar{\bar{x}}$ , e allora  $x_2$  e  $x_3$  non sarebbero zeri consecutivi di  $y_1(x)$ .

Dal teorema dimostrato segue che *nelle ipotesi dichiarate se l'equazione (4) ammette un integrale  $y_1(x)$  tale che  $y_1(x_1) = y_1'(x_1) = 0$ , e mai nullo per  $x > x_1$ , ogni altro integrale della (4), avente uno zero doppio in  $x_1$ , o non si annulla mai per  $x > x_1$ , o ammette al più uno zero (semplice) dopo  $x_1$ .*

Infatti se un tale integrale si annullasse in  $x_2$  e  $x_3$ , con  $x_1 < x_2 < x_3$  per il teorema dimostrato  $y_1(x)$  si dovrebbe annullare tra  $x_2$  e  $x_3$ , contro l'ipotesi.

b) 2° TEOREMA. - *Se nell'equazione (4)  $\theta_2''$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega'$  sono continue per  $x \geq x_1$ , e sono verificate le (3), e se l'integrale  $y_1(x)$  che ha uno zero triplo in  $x_1$  ha uno zero successivo in  $x_2$ , ogni altro integrale  $y_2(x)$  della (4), linearmente indipendente da  $y_1(x)$  e con uno zero doppio in  $x_1$ , possiede uno zero e uno soltanto interno a  $(x_1, x_2)$  <sup>(21)</sup>.*

Supponiamo per assurdo che sia  $y_2(x) \neq 0$  per  $x_1 < x \leq x_2$ ; si ha allora  $\lim_{x \rightarrow x_1} [y_1(x)/y_2(x)] = 0$ ,  $[y_1(x)/y_2(x)]_{x=x_2} = 0$ , e ciò non può essere perchè internamente a  $(x_1, x_2)$  si ha  $(y_1/y_2)' \neq 0$ , [n. 2, c)].

c) Vogliamo provare con due esempi che le ipotesi dichiarate per i coefficienti  $\theta_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega$  nei due teoremi precedenti non possono essere da sole sufficienti a garantire o escludere in  $(x_1, +\infty)$  il carattere oscillatorio degli integrali dell'equazione (4) con uno zero doppio in  $x_1$ .

Per l'equazione  $y^{(4)} + 4y = 0$  si ha  $\theta_2 = 1, \theta_1 = 0, \omega = 0, \theta_0 = 4$ , e sono soddisfatte le (3);  $y = e^x (\sin x - \cos x) + e^{-x} (\sin x + \cos x)$  è un integrale particolare dell'equazione con un zero triplo per  $x = 0$ , ed esso è oscillante perchè con  $k$  intero positivo si ha  $y(2k\pi) = -[e^{2k\pi} - e^{-2k\pi}] < 0$ ,  $y((2k+1)\pi) = e^{(2k+1)\pi} - e^{-(2k+1)\pi} > 0$ .

Per l'equazione  $y^{(4)} - [x^2 y']' - xy' + 15y = 0$  si ha  $\theta_2 = 1, \theta_1 = x^2, \omega = x, \theta_0 = 15$ , e in  $(0, +\infty)$  sono verificate le (3);  $y = x^3$  è un suo integrale particolare mai nullo per  $x > 0$ , quindi ogni altro integrale dell'equazione considerata, con uno

<sup>(21)</sup> Si noti che è  $y_2(x_2) \neq 0$ , perchè in caso opposto  $y_2(x)$  differirebbe per un fattore costante da  $y_1(x)$  [n. 2, c)].

zero doppio per  $x=0$ , o non si annulla mai, oppure possiede un solo zero positivo, [cfr. b)].

4. - Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione

$$(4) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0.$$

TEOREMA. - Nell'equazione (4) siano  $\theta_2''$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega'$  continue per  $x \geq a$ ; e si abbia

$$(7) \quad L \geq \theta_2(x) > 0, \quad (L \text{ costante}), \quad \theta_2' \geq 0;$$

$$(8) \quad M \geq \theta_1(x) \geq m > 0 \quad (M \text{ e } m \text{ costanti});$$

$$(9) \quad \theta_1(x) \geq \theta_2'(x), \quad \theta_1'(x) \geq \omega(x);$$

$$(10) \quad \theta_0(x) + \frac{1}{2} \omega'(x) \geq \frac{1}{2} [\theta_1'(x) - \omega(x)], \quad \theta_0(x) + \frac{1}{2} \omega'(x) \geq \tau > 0, \quad (\tau \text{ costante}).$$

Vogliamo allora dimostrare che per qualunque integrale  $y(x)$  dell'equazione (4), quando  $x \rightarrow +\infty$  sono possibili i seguenti casi:

i)  $|y(x)|$  diventa definitivamente positiva, e allora si ha

$$o \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = 0, \quad oppure \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = \infty;$$

ii) oppure  $y(x)$  è oscillante [cioè  $y(x)$  si annulla infinite volte e i suoi zeri hanno necessariamente per unico punto di accumulazione  $+\infty$ ]. Inoltre se  $y(x)$  è oscillante, e non è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ , si ha

$$(11) \quad \int_a^{+\infty} [y^2(x) + y'^2(x)] dx = +\infty,$$

e se  $\{x_n\}$  indica la successione degli zeri di  $y(x)$  risulta

$$(12) \quad y'(x_n) y''(x_n) > 0 \quad [\text{per } n \text{ sufficientemente grande}]$$

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y'^2(x_n) = \infty.$$

DIMOSTRAZIONE. - Posto

$$(14) \quad U(x) = y \left\{ \theta_2 y'' \right\}' - \theta_2 y' y'' - \theta_1 y y' - \frac{1}{2} \omega y^2,$$

dalla (2), qualunque sia  $b \geq a$ , si ha

$$(15) \quad U(x) = U(b) - \int_b^x \left[ \theta_2 y''^2 + \theta_1 y'^2 + \left( \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \right) y^2 \right] dx,$$

e perciò la  $U(x)$  è non crescente.



Distinguiamo ora due casi: esiste un  $b \geq a$  tale che qualunque sia  $x \geq b$  risulta  $U(x) > 0$ , oppure esiste un punto  $b \geq a$  tale che  $U(b) \leq 0$ . Esamineremo in  $b$ ) il primo caso, in  $c$ ) il secondo, e poi in  $d$ ) proveremo l'ultima parte del teorema.

$b$ ) Sia

$$(16) \quad U(x) > 0 \quad \text{per qualunque } x \geq b, \quad (b \geq a);$$

dalla (15) segue allora che l'integrale

$$(17_1) \quad \int_b^{+\infty} \left[ \theta_2 y''^2 + \theta_1 y'^2 + \left( \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \right) y^2 \right] dx$$

è convergente, e avendosi per le (9) e (10)

$$0 \leq \theta_2' \leq \theta_1, \quad 0 \leq \frac{1}{2} (\theta_1' - \omega) \leq \theta_0 + \frac{1}{2} \omega',$$

è anche convergente l'integrale

$$(17_2) \quad \int_b^{+\infty} \left[ \theta_2' y'^2 + \frac{1}{2} (\theta_1' - \omega) y^2 \right] dx.$$

Si ha dalla (14)

$$(18_1) \quad U(x) = [\theta_2 y y'']' - \theta_2 (y'^2)' - \frac{1}{2} \theta_1 (y^2)' - \frac{1}{2} \omega y^2,$$

talchè posto

$$(18_2) \quad \boxed{T(x) = \theta_2 (y y'' - y'^2) - \frac{1}{2} \theta_1 y^2},$$

dalla (18<sub>1</sub>) integrando per parti si ottiene

$$\int_b^x U(x) dx = T(x) - T(b) + \int_b^x \left[ \theta_2' y'^2 + \frac{1}{2} (\theta_1' - \omega) y^2 \right] dx,$$

ovvero

$$(19) \quad T(x) = T(b) + \int_b^x U(x) dx - \int_b^x \left[ \theta_2' y'^2 + \frac{1}{2} (\theta_1' - \omega) y^2 \right] dx.$$

Se risulta  $\int_b^{+\infty} U(x) dx = +\infty$ , dalla (19) si ha  $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = +\infty$ , esiste quindi un  $\bar{x}$  tale che per  $x \geq \bar{x}$  è  $T(x) > 0$ , e questa a motivo della (18<sub>2</sub>) [ $\theta_2 > 0$ ,  $\theta_1 > 0$ ]

implica che per  $x \geq \bar{x}$  è  $y''(x) \neq 0$ , perciò  $y'(x)$  monotona, tale è quindi  $y(x)$ , e poichè

$$\int_b^{+\infty} y^2 dx \leq \frac{1}{\tau} \int_b^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \right) y^2 dx,$$

l'integrale  $\int_b^{+\infty} y^2 dx$  è convergente e ne viene  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .

Resta da esaminare il caso che ferma l'ipotesi (16) l'integrale  $\int_b^{+\infty} U(x) dx$  sia convergente.

Dalla (19) segue che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x)$  esiste ed è finito, ed indicando con  $A$  tale limite, dalla (19) stessa, passando al limite per  $x \rightarrow +\infty$  e cangiando  $b$  con  $x$  otteniamo

$$(20) \quad T(x) + \int_x^{+\infty} U(x) dx - \int_x^{+\infty} \left[ \theta_2' y'^2 + \frac{1}{2} (\theta' - \omega) y^2 \right] dx = A.$$

Vogliamo provare che  $A=0$ , e per questo basterà dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = 0$ .

Infatti la convergenza dell'integrale (17<sub>1</sub>) implica che fissato  $\varepsilon > 0$  e arbitrario, esistono valori di  $x$  superiori a qualsiasi numero prefissato  $x_0$  tali che per essi risulta

$$\theta_2(x) y''^2(x) + \theta_1(x) y'^2(x) + \left[ \theta_0(x) + \frac{1}{2} \omega'(x) \right] y^2(x) < \tau^* \varepsilon^2,$$

dove  $\tau^*$  indica un numero positivo inferiore ai minimi limiti [positivi per le (7), (8), (10)] di  $\theta_2(x)$ ,  $\theta_1(x)$ ,  $\theta_0(x) + \frac{1}{2} \omega'(x)$  in  $(a, +\infty)$ ; ne viene  $|y''(x)| < \varepsilon$ ,  $|y'(x)| < \varepsilon$ ,  $|y(x)| < \varepsilon$ , quindi per le (18<sub>2</sub>), (7), (8)

$$|T(x)| \leq \left( 2L + \frac{1}{2} M \right) \varepsilon^2,$$

e ciò porta che nella (20) è  $A=0$ , e dalla (20) stessa moltiplicando per  $2/\theta_1$  abbiamo

$$(21) \quad 2 \frac{\theta_2}{\theta_1} (y y'' - y'^2) - y^2 + \frac{2}{\theta_1} \int_x^{+\infty} U(x) dx - \frac{2}{\theta_1} \int_x^{+\infty} \left[ \theta_2' y'^2 + \frac{1}{2} (\theta' - \omega) y^2 \right] dx = 0.$$

Ora se la curva  $y=y(x)$  non diventa definitivamente monotona, per gli eventuali suoi punti di massimo [minimo] del semipiano  $y > 0$  [ $y < 0$ ] si ha  $y' = 0$ ,  $y'' \leq 0$  [ $y'' > 0$ ] e le ordinate  $y(x)$  dei punti estremanti considerati soddisfano la limitazione

$$y^2 < \frac{2}{\theta_1} \int_x^{+\infty} U(x) dx - \frac{2}{\theta_1} \int_x^{+\infty} \left[ \theta_2' y'^2 + \frac{1}{2} (\theta_1' - \omega) y^2 \right] dx,$$

ma  $\theta_1 \geq m > 0$ , e ne viene  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^2(x) = 0$ .

Se poi  $y(x)$  quando  $x \rightarrow +\infty$  diventa definitivamente monotona, la condizione  $\theta_0 + \frac{1}{2} \omega' \geq \tau > 0$ , e la convergenza dell'integrale  $\int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \omega' + \theta_0\right) y^2 dx$  implica ancora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = 0$ .

Abbiamo dunque che *gli integrali  $y(x)$  della (4) per i quali è verificata la (16), oscillanti o no, sono tutti convergenti allo zero per  $x \rightarrow +\infty$ .*

c) Esista un punto  $b \geq a$  tale che  $U(b) \leq 0$  e quindi per la non crescenza di  $U(x)$ ,  $U(x) \leq U(b) \leq 0$  per  $x \geq b$ , e dimostriamo allora che si ha definitivamente  $U(x) < 0$ .

Infatti se per un  $\bar{x} > b$  risulta  $U(\bar{x}) = 0$ , si avrà  $U(x) = 0$  per  $\bar{x} \geq x \geq b$ , e quindi per la (15) e la seconda delle (10),  $y(x) \equiv 0$ .

Sia allora  $c$  un punto tale che

$$(22) \quad U(x) \leq U(c) < 0 \quad \text{per } x \geq c \geq b;$$

dalla (19) segue che  $T(x)$  in  $(c, +\infty)$  è non crescente, e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = -\infty.$$

Supponiamo che  $y(x)$  non risulti oscillante, e senza alterare le generalità supponiamo che  $y(x)$  per  $x \geq c$  sia positiva

$$y(x) > 0 \quad \text{per } x \geq c,$$

e proviamo subito che se non è  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = +\infty$ ,  $y(x)$  deve diventare definitivamente monotona.

Supponiamo per assurdo che  $\{\xi_n\}$  sia una successione infinita di punti di minimo per  $y(x)$ ; siccome in ogni intervallo finito cade un numero finito di punti  $\xi_n$  [che in caso contrario se  $\xi^*$  è un loro punto di accumulazione si avrebbe  $y'(\xi^*) = y''(\xi^*) = y'''(\xi^*) = y^{(4)}(\xi^*) = 0$ , perciò  $y(\xi^*) = 0$  e  $y(x) \equiv 0$ ] si ha  $\lim_{x \rightarrow \infty} \xi_n = \infty$ .

Sia  $K$  un numero positivo arbitrario e si fissi un  $d \geq c$  tale che

$$(23) \quad T(x) < -K \quad \text{per } x \geq d.$$

Dalla (19) cangiando  $b$  in  $d$  si ha

$$(24) \quad T(x) = T(d) + \int_d^x U(x) dx - \int_d^x \left[ \theta_2' y'^2 + \frac{1}{2} (\theta_1' - \omega) y^2 \right] dx,$$

talchè posto

$$\Omega(x) = \int_d^x [ |U(t)| + \theta_2'(t) y'^2(t) + \frac{1}{2} [\theta_1'(t) - \omega(t)] y^2(t) ] dt \geq 0$$

tenuto conto della (18<sub>2</sub>) si ha

$$2 \frac{\theta_2(x)}{\theta_1(x)} y(x) y''(x) - 2 \frac{\theta_2(x)}{\theta_1(x)} y'^2(x) - y^2(x) = -2 \frac{|T(d)|}{\theta_1(x)} - \frac{2}{\theta_1(x)} \Omega(x),$$

e per  $x = \xi_n$  [ $y'(\xi_n) = 0$ ]

$$y^2(\xi_n) - 2 \frac{\theta_2(\xi_n)}{\theta_1(\xi_n)} y''(\xi_n) y(\xi_n) - 2 \frac{|T(d)|}{\theta_1(\xi_n)} - \frac{2}{\theta_1(\xi_n)} \Omega(\xi_n) = 0,$$

ed essendo  $y''(\xi_n) \geq 0$ ,  $y(\xi_n) > 0$  risulta

$$y(\xi_n) = \frac{\theta_2(\xi_n)}{\theta_1(\xi_n)} y''(\xi_n) + \sqrt{\left[ \frac{\theta_2(\xi_n)}{\theta_1(\xi_n)} y''(\xi_n) \right]^2 + 2 \frac{|T(d)|}{\theta_1(\xi_n)} + 2 \frac{\Omega(\xi_n)}{\theta_1(\xi_n)}},$$

da cui

$$y(\xi_n) > \sqrt{\frac{2|T(d)|}{\theta_1(\xi_n)}} \geq \sqrt{\frac{2K}{M}},$$

e per l'arbitrarietà di  $K$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y(\xi_n) = +\infty$ , e perciò anche  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = +\infty$ .

Abbiamo dunque che nelle nostre ipotesi se non è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$  l'integrale  $y(x)$  è monotono, e noi proveremo ora in generale che se l'integrale  $y(x)$  è monotono, ed è verificata la (22), si ha necessariamente  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ , oppure

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ . Infatti se tale limite non è infinito, avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = A, \quad (A \text{ finito, } A \geq 0),$$

e se supponiamo per assurdo  $A > 0$ , esiste una costante positiva  $R$  e un numero  $\bar{c} \geq c$  tale che  $y(x) \geq R > 0$  per  $x \geq \bar{c}$ .

Dalla (24) ove supponiamo  $d > \bar{c}$  e dalla (23) si ha per  $x \geq d$

$$\theta_2(y y'' - y'^2) - \frac{1}{2} \theta_1 y^2 < -|T(d)|,$$

quindi

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' < \frac{1}{2} \frac{\theta_1}{\theta_2} - \frac{|T(d)|}{\theta_2 y^2} \leq \frac{M}{2\theta_2(a)} - \frac{K}{LR^2},$$

e per l'arbitrarietà di  $K$  si ha che fissato comunque un numero  $\bar{K}$  si può determinare un  $\bar{x}$  tale che per  $x \geq \bar{x}$  sia

$$\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)' < -\bar{K}, \quad \frac{y'(x)}{y(x)} < \frac{y'(\bar{x})}{y(\bar{x})} - \bar{K}(x - \bar{x}),$$

e ancora fissato  $\bar{K}$  positivo e arbitrario si può determinare un  $\bar{x}$  tale che per  $x \geq \bar{x}$  sia  $y'(x)/y(x) < -\bar{K}$ , quindi

$$0 < y(x) < y(\bar{x}) e^{-\bar{K}(x - \bar{x})},$$

ma allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ , e perciò se  $A$  non è infinito,  $A$  è nullo.

Infine il fatto che se  $y(x)$  è oscillante, e  $\{x_n\}$  è la successione dei suoi zeri, è  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \infty$  è immediato; che al solito è subito visto che in un intervallo finito o non cadono zeri di  $y(x)$  o ne cadono in numero finito.

d) Resta da provare che se  $y(x)$  è un integrale della (4) che si annulla infinite volte senza convergere a zero, e se  $\{x_n\}$  indica la successione dei suoi zeri valgono le (11), (12), (13).

Proveremo successivamente la (12), la (13) e la (11).

Ammettiamo per assurdo che non valga la (12); dalla  $\{x_n\}$  si può estrarre allora una successione  $\{x_n^*\}$  crescente (e divergente  $a + \infty$ ) tale che

$$y'(x_n^*) y''(x_n^*) \leq 0,$$

e perciò per la (14) [ $y(x_n^*) = 0$ ],  $U(x_n^*) \geq 0$ , ma la  $U(x)$  è non crescente, e non può riuscire nulla in un tratto [chè per la (15) e la seconda delle (10) risulterebbe  $y(x) \equiv 0$  in quel tratto], e si ha allora  $U(x) > 0$  per  $x \geq x_n^*$ , e ne viene per le cose dette in b) che è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ , contro l'ipotesi. La (12) è perciò dimostrata.

Dalla (12) risulta che nei punti  $x_n$ , per  $n > n_0$  e  $n_0$  sufficientemente grande, è  $U(x_n) < 0$ , e siccome  $U(x)$  è non crescente, risulta  $U(x) < 0$  per  $x \geq x_{n_0}$  e dalla (24)

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = -\infty$$

ma per la (18<sub>2</sub>)

$$T(x_n) = -\theta_2(x_n) y'^2(x_n) = -|T(x_n)|, \quad (n \geq n_0),$$

$$y'^2(x_n) = |T(x_n)| / \theta_2(x_n) \geq |T(x_n)| / L,$$

e a motivo della (25), facendo tendere  $n \rightarrow \infty$  si trova la (13).

Si ha infine dalla (24) cangiando  $d$  in  $x_{n_0}$ , e per  $x > x_{n_0}$ ,

$$\theta_2(x) [y(x) y''(x) - y'^2(x)] - \frac{1}{2} \theta_1(x) y^2(x) < -|T(x_{n_0})|,$$

$$y(x) y''(x) < y'^2(x) + \frac{1}{2} \frac{\theta_1(x)}{\theta_2(x)} y^2(x) - \frac{|T(x_{n_0})|}{\theta_2(x)} < y'^2(x) + \frac{M}{2\theta_2(x)} y^2(x) - \frac{|T(x_{n_0})|}{L},$$

e integrando tra  $x_{n_0}$  e  $x_n$ , ( $n > n_0$ ) e tenuto conto che

$$\int_{x_{n_0}}^{x_n} y y'' dx = - \int_{x_{n_0}}^{x_n} y'^2 dx,$$

$$\frac{|T(x_{n_0})|}{L} (x_n - x_{n_0}) < 2 \int_{x_{n_0}}^{x_n} y'^2 dx + \frac{M}{2\theta_2(x)} \int_{x_{n_0}}^{x_n} y^2(x) dx,$$

e se  $\overline{M} = \max. [2, M/2\theta_2(a)]$ ,

$$\frac{|T(x_{n_0})|}{L} (x_n - x_{n_0}) < \overline{M} \int_{x_{n_0}}^{x_n} (y^2 + y'^2) dx,$$

e facendo tendere  $n \rightarrow \infty$  segue la (11).

**5. - Un secondo teorema sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione**

$$(4) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0.$$

a) **TEOREMA.** *Se nell'equazione (4) le funzioni  $\theta_2, \theta_1, \theta_0, \omega$  oltre le condizioni (7), (8), (9), (10), verificano per  $x \geq a$  le limitazioni*

$$(26) \quad |\theta_1'(x) - \omega(x)| \leq H_1, \quad |\theta_0(x) + \omega'(x)| \leq H_2, \quad (2^2)$$

con  $H_1, H_2$  costanti assolute, allora qualunque integrale  $y(x)$  dell'equazione (4), se è limitato, quando  $x \rightarrow +\infty$ , ha per limite lo zero.

**DIMOSTRAZIONE.** - Per il teorema dimostrato al n. 4 la proposizione è vera se l'integrale  $y(x)$  non è oscillante; supporremo allora che  $y(x)$  sia oscillante e limitato

$$(27) \quad |y(x)| \leq A, \quad (A = \text{cost. finita}).$$

Per le cose dette al n. 4 b) se esiste un  $b$  tale che per  $x \geq b$  risulta  $U(x) > 0$ , è  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ , e basterà allora provare che si perviene ad un assurdo nel supporre che esista un  $b$  tale per  $x \geq b$  risulti  $U(x) \leq 0$ , [si ricordi che  $U(x)$  è non crescente]. In questa ipotesi, salvo a crescere  $b$ , per le cose dette al n. 4 si può supporre

$$U(x) < 0, \quad T(x) < 0 \quad \text{per } x \geq b,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = -\infty.$$

Fissato  $K$  positivo e arbitrario si può determinare un  $d$  tale che per  $x \geq d$  risulti

$$T(x) < -4 \frac{L^2 A}{m} (K+2) - A^2 M, \quad \text{e } y(d) = 0,$$

e per la (18<sub>2</sub>)

$$\theta_2 (yy'' - y'^2) - \frac{1}{2} \theta_1 y^2 < -4 \frac{L^2 A}{m} (K+2) - A^2 M,$$

$$\theta_2 (yy'' - y'^2) < -4 \frac{L^2 A}{m} (K+2) - A^2 M + \frac{1}{2} \theta_1 y^2 < -4 \frac{L^2 A}{m} (K+2),$$

$$yy'' - y'^2 < -4 \frac{L^2 A}{m\theta_2} (K+2) \leq -4 \frac{LA}{m} (K+2),$$

(2<sup>2</sup>) Supponiamo sempre  $\theta_2'', \theta_1', \theta_0, \omega'$  continue per  $x \geq a$ .

e integrando tra  $d$  e  $x$ ,  $x \geq d$ ,

$$yy' - 2 \int_d^x y'^2 dx < -4 \frac{LA}{m} (K+2)(x-d),$$

$$\frac{1}{2} y^2(x) - 2 \int_d^x dt \int_d^t y'^2(s) ds < -2 \frac{LA}{m} (K+2)(x-d)^2,$$

quindi

$$2 \int_d^x dt \int_d^t y'^2(s) ds > 2 \frac{LA}{m} (K+2)(x-d)^2 + \frac{1}{2} y^2(x),$$

$$\int_d^x dt \int_d^t y'^2(s) ds > \frac{LA}{m} (K+2)(x-d)^2,$$

ma per la (15) è

$$|U(t)| > \int_d^t \theta_1(s) y'^2(s) ds \geq m \int_d^t y'^2(s) ds,$$

e per la (19)

$$|T(x)| > \int_d^x |U(t)| dt \geq m \int_d^x dt \int_d^t y'^2(s) ds > LA(K+2)(x-d)^2,$$

$$|T(x)| > LA(K+2)x^2 \left(1 - \frac{d}{x}\right)^2,$$

e quindi fissato  $K$  positivo arbitrario, esiste un  $g$  tale che per  $x \geq g$  risulta

$$(28) \quad |T(x)| > LA(K+1)x^2, \quad (x \geq g).$$

Ciò premesso essendo  $y(x)$  oscillante, e  $U(x) < 0$  per  $x \geq d$ , per la (18<sub>2</sub>) gli zeri di  $y(x)$  dopo  $d$  sono tutti semplici, e se indichiamo con  $\xi_0, \xi_2, \dots, \xi_{2n}, \dots$  la successione degli zeri di  $y(x)$  dopo  $d$ , e salvo a cangiare di segno  $y(x)$  indichiamo con  $\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{4n+1}, \dots$  i suoi punti di massimo assoluto in  $(\xi_0, \xi_2), (\xi_4, \xi_6), \dots, (\xi_{4n}, \xi_{4n+2}), \dots$  e con  $\xi_3, \xi_7, \dots, \xi_{4n+3}, \dots$  la successione dei suoi minimi assoluti in  $(\xi_2, \xi_4), (\xi_6, \xi_8), \dots, (\xi_{4n+2}, \xi_{4n+4}), \dots$ , si ha evidentemente

$$y(\xi_{4n+1}) > 0, \quad y'(\xi_{4n+1}) = 0, \quad y''(\xi_{4n+1}) \leq 0;$$

$$y(\xi_{4n+3}) < 0, \quad y'(\xi_{4n+3}) = 0, \quad y''(\xi_{4n+3}) \geq 0.$$

La (18<sub>2</sub>) dà:

$$-|T(\xi_{4n+1})| = -\theta_2(\xi_{4n+1}) |y''(\xi_{4n+1})| y(\xi_{4n+1}) - \frac{1}{2} \theta_1(\xi_{4n+1}) y^2(\xi_{4n+1}),$$

quindi

$$y^2(\xi_{4n+1}) + 2 \frac{\theta_2(\xi_{4n+1})}{\theta_1(\xi_{4n+1})} |y''(\xi_{4n+1})| y(\xi_{4n+1}) - \frac{2}{\theta_1(\xi_{4n+1})} |T(\xi_{4n+1})| = 0,$$

e per la (27)

$$A^2 + 2 \frac{\theta_2(\xi_{4n+1})}{\theta_1(\xi_{4n+1})} |y''(\xi_{4n+1})| A - 2 \frac{|T(\xi_{4n+1})|}{\theta_1(\xi_{4n+1})} \geq 0,$$

da cui

$$|y''(\xi_{4n+1})| \geq \frac{|T(\xi_{4n+1})|}{\theta_2(\xi_{4n+1})A} - \frac{\theta_1(\xi_{4n+1})A}{2\theta_2(\xi_{4n+1})},$$

$$|y''(\xi_{4n+1})| \geq \frac{|T(\xi_{4n+1})|}{LA} - \frac{MA}{2\theta_2(a)},$$

e per la (28)

$$|y''(\xi_{4n+1})| > (K+1)\xi_{4n+1}^2 \left[ 1 - \frac{MA}{2\theta_2(a)(K+1)\xi_{4n+1}^2} \right],$$

e ragionando analogamente su  $|y''(\xi_{4n+3})|$  abbiamo che fissato comunque un numero positivo  $K$ , esiste un  $n_0$  tale che per  $n \geq n_0$  risulta

$$(29) \quad |y''(\xi_{2n+1})| > K\xi_{2n+1}^2 \quad (23).$$

È ora facile arrivare ad un assurdo. Infatti dall'equazione (4) con due successive integrazioni otteniamo

$$\theta_2(x)y''(x) = \theta_1(x)y(x) - \int_d^x \{ [\theta_1'(t) - \omega(t)] + [\theta_0(t) + \omega'(t)](x-t) \} y(t) dt + c_1(x-d) + c_2,$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti assolute; da questa, tenuto conto delle (7), (8), (9), (26), (27) per  $x \geq d$  otteniamo

$$|\theta_2(x)y''(x)| \leq MA + A \int_d^x [H_1 + H_2(x-t)] dt + |c_1|(x-d) + |c_2|$$

$$\leq [MA + |c_2|] + [AH_1 + |c_1|](x-d) + \frac{1}{2} AH_2(x-d)^2,$$

$$|y''(x)| \leq \frac{MA + |c_2|}{\theta_2(a)} + \frac{AH_1 + |c_1|}{\theta_2(a)}(x-d) + \frac{1}{2} \frac{AH_2}{\theta_2(a)}(x-d)^2,$$

ed esiste quindi un  $\bar{x}$  tale che per  $x \geq \bar{x}$  risulta

$$|y''(x)| \leq \frac{AH_2}{\theta_2(a)} x^2,$$

(23) Giova a questo punto notare che l'equazione (4) può scriversi

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2 \frac{\theta_2'}{\theta_2} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\theta_2'' - \theta_1}{\theta_2} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\theta_1' + \omega}{\theta_2} \frac{dy}{dx} + \frac{\theta_0}{\theta_2} y = 0;$$

in questa, per le nostre ipotesi si ha in  $(a, +\infty)$   $|\theta_2'/\theta_2| \leq M/\theta_2(a)$ , e se risulta anche in  $(a, +\infty)$ ,  $|\theta_2'' - \theta_1| \leq R$ ,  $|\theta_1' + \omega| \leq R$ ,  $|\theta_0| \leq R$ , con  $R$  costante assoluta, per un teorema di E. ESCLANGON  $|y''(x)|$  è limitata, e perciò la (29) è assurda. [Cfr. E. ESCLANGON: *Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques*. Ann. Obs. Bordeaux, (1917), (pp. 51-226), p. 192. Cfr. anche E. LANDAU: *Ueber einen Satz von Herrn Esclangon*. Math. Ann., 102 (1929), pp. 177-188].



e ciò è contro la (29), perchè in quella  $K$  è arbitrario e la successione  $\{\xi_{2n+1}\}$  diverge a  $+\infty$ .

Il teorema è così dimostrato.

b) Vogliamo provare con un esempio che ferme rimanendo le ipotesi enunciate nel teorema, questo non può migliorarsi.

Si consideri l'equazione  $y^{(4)} - y^{(2)} + 2y' + 2y = 0$ ; si ha per essa  $\theta_2 = 1, \theta_1 = 1, \omega = -2, \theta_0 = 2$ , e risultano soddisfatte le (7), (8), (9), (10), (26). L'equazione caratteristica della nostra equazione  $\rho^4 - \rho^2 + 2\rho + 2 = 0$  ha la radice doppia  $\rho = -1$  e le radici  $1 + i, 1 - i$ , ed essa possiede il sistema fondamentale di integrali

$$e^{-x}, \quad xe^{-x}, \quad e^x \cos x, \quad e^x \sin x,$$

dei quali gli ultimi due sono oscillanti e non limitati.

Verosimilmente l'equazione (4) nelle ipotesi enunciate, e con  $\omega$  non identicamente nulla possiede sempre qualche integrale non limitato: questa circostanza si verifica sicuramente nel caso che la (4) abbia coefficienti costanti e sia  $\omega \neq 0$ , perchè allora la sua equazione caratteristica ammette radici con parte reale positiva.

### CAPITOLO III.

#### Una seconda identità integrale. Teoremi di confronto tra gli integrali di due equazioni differenziali del quarto ordine.

##### 1. - Una seconda identità integrale.

a) Se  $\bar{\theta}_2'', \bar{\theta}_1', \bar{\omega}, \bar{\theta}_0$  sono funzioni continue in  $(a, b)$ , se  $u(x)$  e  $v(x)$  sono due integrali [non identicamente nulli] dell'equazione

$$(1) \quad \bar{D}z = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \bar{\theta}_2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \bar{\theta}_1 \frac{dz}{dx} \right] - \bar{\omega} \frac{dz}{dx} + \bar{\theta}_0 z = 0, \quad [\bar{\theta}_2 > 0],$$

si ha allora

$$u \bar{D}v - v \bar{D}u = \frac{d}{dx} \left[ \bar{\theta}_2 (uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2' (uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2 (u'v' - u''v) - \bar{\theta}_1 (uv' - u'v) \right] - \bar{\omega} (uv' - u'v) = 0,$$

talchè se  $\alpha$  indica un punto di  $(a, b)$ , posto

$$(2) \quad \boxed{H(x) = \int_{\alpha}^x \bar{\omega} (uv' - u'v) dx,}$$

risulta

$$\bar{\theta}_2(uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2'(uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2(u'v'' - u''v') - \bar{\theta}_1(uv' - u'v) - H(x) = \text{cost.},$$

e se  $u, v$  è una coppia di integrali tale che

$$(3) \quad \boxed{\bar{\theta}_2(uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2'(uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2(u'v'' - u''v') - \bar{\theta}_1(uv' - u'v) \Big|_{x=\alpha} = 0},$$

si avrà allora

$$(4) \quad \boxed{H(x) = \bar{\theta}_2(uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2'(uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2(u'v'' - u''v') - \bar{\theta}_1(uv' - u'v)}.$$

Evidentemente la (3) può sempre soddisfarsi, basta scegliere ad esempio per  $u(x)$  e  $v(x)$  una coppia di integrali della (1), ciascuno dotato di un zero doppio nel punto  $\alpha$ .

D'ora in avanti noi intendiamo riferirci a coppie  $u(x), v(x)$  di integrali indipendenti della (1) che in un punto  $\alpha$  di  $(a, b)$  verificano la (3).

b) Prima di procedere nei nostri studi vogliamo ricavare dalle (3) e (4) una facile quanto importante conseguenza.

i) Se  $u(x)$  e  $v(x)$  sono due integrali linearmente indipendenti della (1), con due zeri doppi in  $x_1$  e  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$ ,

$$(5) \quad \begin{cases} u(x_1) = u'(x_1) = 0, & u(x_2) = u'(x_2) = 0, \\ v(x_1) = v'(x_1) = 0, & v(x_2) = v'(x_2) = 0, \end{cases}$$

e se  $\bar{\omega}(x) \geq 0$  [ $\bar{\omega}(x) \leq 0$ ] in  $(x_1, x_2)$ , senza mai annullarsi in tutto un tratto di  $(x_1, x_2)$ , allora il Wronskiano  $uv' - u'v$  assume almeno in due tratti non nulli di  $(x_1, x_2)$  valori di segno contrario, e perciò  $uv' - u'v$  si annulla in un punto interno di  $(x_1, x_2)$ .

Facendo infatti nella (3)  $\alpha = x_1$  e tenuto conto della (4) abbiamo

$$H(x_1) = 0, \quad H(x_2) = 0.$$

e perciò

$$\int_{x_1}^{x_2} \bar{\omega}(uv' - u'v) dx = 0,$$

e poichè  $uv' - u'v$  ha zeri in punti isolati (<sup>24</sup>), e non può aversi sempre internamente a  $(x_1, x_2)$ ,  $uv' - u'v > 0$ , nè sempre  $uv' - u'v < 0$ , segue il teorema.

(<sup>24</sup>) Cfr. M. BÔCHER: *On Wronskians of functions of a real variable*. Bull. of the Am. Math. Soc., (2), 8 (1901), pp. 53-63. Il teorema di BÔCHER ha il seguente enunciato: il Wronskiano di  $k$  soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione lineare omogenea di ordine  $n \geq k$  non può ammettere che un numero finito di zeri in un intervallo finito.

ii) Segue che se  $u(x)$  e  $v(x)$  sono due integrali indipendenti della (1) per i quali in  $x_1$  e  $x_2$  siano verificate le (5), esiste almeno un integrale  $z(x)$  della (1) avente uno zero doppio tanto in  $x_1$  quanto in un altro punto interno a  $(x_1, x_2)$ .

Da quanto abbiamo osservato in i) risulta che esiste un punto  $\bar{x}$  interno a  $(x_1, x_2)$  dove  $u(\bar{x})v'(\bar{x}) - u'(\bar{x})v(\bar{x}) = 0$ ,  $x_1 < \bar{x} < x_2$ . Allora se  $u(\bar{x})$  e  $v(\bar{x})$  non sono entrambi nulli e consideriamo l'integrale non identicamente nullo della (1):  $z(x) = v(\bar{x})u(x) - u(\bar{x})v(x)$  esso ha la proprietà voluta; se poi  $u(\bar{x}) = v(\bar{x}) = 0$  e  $u'(\bar{x}), v'(\bar{x})$  non sono entrambi nulli l'integrale  $z(x) = v'(\bar{x})u(x) - u'(\bar{x})v(x)$  ha la proprietà voluta, e infine se  $u(\bar{x}) = v(\bar{x}) = 0$ ,  $u'(\bar{x}) = v'(\bar{x}) = 0$ , tanto  $u(x)$  che  $v(x)$  hanno entrambi la proprietà voluta.

iii) Sia  $z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x)$  una quaterna di integrali indipendenti della (1) soddisfacenti le condizioni iniziali

$$z_1(x_1) = z_1'(x_1) = z_1''(x_1) - 1 = z_1'''(x_1) = 0; \quad z_2(x_1) = z_2'(x_1) = z_2''(x_1) = z_2'''(x_1) - 1 = 0, \\ z_3(x_1) - 1 = z_3'(x_1) = z_3''(x_1) = z_3'''(x_1) = 0; \quad z_4(x_1) = z_4'(x_1) - 1 = z_4''(x_1) = z_4'''(x_1) = 0.$$

L'integrale generale della (1) ha l'espressione

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) + c_3 z_3(x) + c_4 z_4(x),$$

e gli integrali con uno zero doppio in  $x_1$  hanno l'espressione

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x).$$

Se un tale integrale ha uno zero doppio in un punto  $\bar{x}$  distinto da  $x_1$  si avrà ivi  $c_1 z_1(\bar{x}) + c_2 z_2(\bar{x}) = 0$ ,  $c_1 z_1'(\bar{x}) + c_2 z_2'(\bar{x}) = 0$ , e siccome le costanti  $c_1$  e  $c_2$  non sono entrambe nulle dovrà essere  $z_1(\bar{x})z_2'(\bar{x}) - z_1'(\bar{x})z_2(\bar{x}) = 0$ , ma  $z_1(x)z_2'(x) - z_1'(x)z_2(x)$  per il teorema di BÔCHER non può ammettere che un numero finito di zeri in un intervallo finito e ne segue che fissato un punto  $x_1$  esiste un intervallo che ha per estremo sinistro (destro)  $x_1$  tale che gli integrali della (1) che hanno uno zero doppio in  $x_1$  non posseggono altri zeri doppi in detto intervallo.

Se diciamo con CIMMINO <sup>(25)</sup> che due zeri doppi  $x_1$  e  $x_2$ ,  $x_1 < x_2$  di un integrale  $z(x)$  della (1) sono *consecutivi* quando  $z(x_1) = z'(x_1) = 0$ ,  $z(x_2) = z'(x_2) = 0$ , e nessun altro integrale della (1) con uno zero doppio in  $x_1$  possiede uno zero doppio interno all'intervallo  $(x_1, x_2)$ , dalle cose dette segue che se in  $(a, b)$  è  $\omega(x) \geq 0$ ,  $[\omega(x) \leq 0]$ , senza che  $\omega(x)$  sia nullo in qualche tratto di  $(a, b)$ , l'equazione (1) non può ammettere due integrali linearmente indipendenti che abbiano due zeri doppi consecutivi a comune.

<sup>(25)</sup> G. CIMMINO, mem. cit. in <sup>(1)</sup>, pag. 21. La definizione, per le cose dette nel testo può trasportarsi al caso non autoaggiunto.

c) Se  $y(x)$  è una funzione che in un punto  $x$  ammette derivate prime e seconde, e se gli integrali  $u(x)$  e  $v(x)$  considerati in a) sono tali che nel punto  $x$  si ha  $uv' - u'v \neq 0$ , allora si ha anche

$$(6) \quad \bar{\theta}_2 y''^2 + \bar{\theta}_1 y'^2 + \bar{\theta}_0 y^2 - \bar{\theta}_2 \left[ y'' - \frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v} y' + \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} y \right]^2 = \\ = \frac{d}{dx} \left[ \left( \bar{\theta}_2' \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} + \bar{\theta}_2 \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} \right) y^2 - 2\bar{\theta}_2 \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} y y' + \bar{\theta}_2 \frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v} y'^2 \right] + \\ + H(x) \left[ \frac{u'v'' - u''v'}{(uv' - u'v)^2} y^2 - \frac{1}{uv' - u'v} y'^2 \right].$$

Infatti il secondo membro, tenuto conto dell'espressione (4) di  $H(x)$ , diventa

$$(7) \quad -\bar{\theta}_2 \left[ y'' - \frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v} y' + \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} y \right]^2 + \bar{\theta}_2 y''^2 + \\ + \left[ \bar{\theta}_2 \frac{u'v^{(4)} - u^{(4)}v'}{uv' - u'v} + 2\bar{\theta}_2' \frac{u'v^{(3)} - u^{(3)}v'}{uv' - u'v} + \bar{\theta}_2'' \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} - \bar{\theta}_1 \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} \right] y^2 + \bar{\theta}_1 y'^2.$$

Si ha d'altra parte

$$0 \equiv v' \bar{D}u - u' \bar{D}v = \bar{\theta}_2 (v'u^{(4)} - u'v^{(4)}) + 2\bar{\theta}_2' (v'u^{(3)} - u'v^{(3)}) + \bar{\theta}_2'' (v'u'' - v''u') - \\ - \bar{\theta}_1 (v'u'' - u'v'') + \bar{\theta}_0 (uv' - u'v),$$

perciò

$$\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_2 \frac{u'v^{(4)} - v'u^{(4)}}{uv' - u'v} + 2\bar{\theta}_2' \frac{u'v^{(3)} - v'u^{(3)}}{uv' - u'v} + \bar{\theta}_2'' \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} - \bar{\theta}_1 \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v},$$

e l'espressione (7), che rappresenta il secondo membro della (6), diventa allora

$$-\bar{\theta}_2 \left[ y'' - \frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v} y' + \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} y \right]^2 + \bar{\theta}_0 y^2 + \bar{\theta}_1 y'^2 + \bar{\theta}_2 y''^2,$$

ossia appunto il primo membro della (6).

d) Le funzioni  $\theta_2''$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega'$ ,  $\bar{\theta}_2''$ ,  $\bar{\theta}_1'$ ,  $\bar{\theta}_1'$ ,  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{\omega}$  siano continue in  $(a, b)$ ,  $\theta_2 > 0$ ,  $\bar{\theta}_2 > 0$ ;  $y(x)$  in un intervallo  $(x_1, x_2)$  contenuto in  $(a, b)$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  soddisfi l'equazione differenziale

$$(8) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0,$$

e le condizioni ai limiti

$$(9) \quad y(x_1) = y'(x_1) = 0, \quad y(x_2) = y'(x_2) = 0;$$

$u(x)$  e  $v(x)$  siano in  $(a, b)$  due integrali linearmente indipendenti dell'equazione

$$(1) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \bar{\theta}_2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \bar{\theta}_1 \frac{dz}{dx} \right] - \bar{\omega} \frac{dz}{dx} + \bar{\theta}_0 z = 0$$

che in un punto  $\alpha$  di  $(a, b)$  verificano la condizione (3)

$$(3) \quad \bar{\theta}_2(uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2'(uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2(u'v'' - u''v') - \bar{\theta}_1(uv' - u'v) \Big|_{x=\alpha} = 0,$$

e per  $x_1 < x < x_2$  l'altra condizione

$$(10) \quad uv' - u'v \neq 0, \quad (x_1 < x < x_2); \quad (25)$$

sussiste allora l'identità integrale (26)

$$(11) \quad \int_{x_1}^{x_2} [\theta_2 - \bar{\theta}_2] y''^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \theta_1 - \bar{\theta}_1 - \frac{H(x)}{uv' - u'v} \right] y'^2 dx + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 - \bar{\theta}_0 + H(x) \frac{u'v'' - u''v'}{(uv' - u'v)^2} \right] y^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{\theta}_2}{(uv' - u'v)^2} \begin{vmatrix} y, & u, & v \\ y', & u', & v' \\ y'', & u'', & v'' \end{vmatrix}^2 dx = 0,$$

dove

$$(2) \quad H(x) = \int_{\alpha}^x \bar{\omega}(uv' - u'v) dx.$$

**DIMOSTRAZIONE.** - Per provare la (11) conviene inizialmente osservare che la proprietà notata da CIMMINO (27) relativa al caso autoaggiunto cioè che i tre rapporti

$$\frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v}, \quad \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v}, \quad \frac{u'v^{(3)} - u^{(3)}v'}{uv' - u'v}$$

nel caso che in  $x_i$  si abbia  $uv' - u'v \Big|_{x=x_i} = 0$ , ( $i=1, 2$ ), sono rispetto ad  $1/(x-x_i)$

infiniti di ordine non superiore al primo, al secondo, e al terzo si estende senz'altro al caso non autoaggiunto; proveremo ora che se  $\frac{H(x)}{uv' - u'v}, \frac{H(x)(u'v'' - u''v')}{(uv' - u'v)^2}$  in  $x_i$  diventano infiniti, riferiti ad  $1/(x-x_i)$  sono infiniti rispettivamente di ordine non superiore al secondo e al quarto.

Quest'ultima proprietà è evidente se  $uv' - u'v$  ha in  $x_i$  uno zero di secondo ordine al massimo.

(25) Non si esclude che  $uv' - u'v$  si annulli in  $x_1$  e in  $x_2$ .

(26) G. CIMMINO estendendo un'identità di M. PICONE per le equazioni del secondo ordine [M. PICONE, mem. cit. in (15), pag. 20] trova la (11) per le equazioni autoaggiunte del quarto ordine [ $\omega \equiv 0, \bar{\omega} \equiv 0$ ] nella mem. cit. in (4), p. 14. Un'analogia identità per le equazioni autoaggiunte di ordine superiore trovasi nella nota di G. CIMMINO: *Estensione dell'identità di PICONE alla più generale equazione differenziale lineare ordinaria autoaggiunta*. Atti R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 28 (1939), pp. 354-364.

(27) Cfr. G. CIMMINO, mem. cit. in (4), pp. 10-13.

Se  $uv' - u'v$  ha in  $x_i$  uno zero del terzo ordine si ha allora

$$u(x_i) = v(x_i) = 0, \quad \left. u'v'' - u''v' \right|_{x=x_i} = 0, \quad \left. u'v^{(3)} - u^{(3)}v' \right|_{x=x_i} \neq 0, \quad \text{perciò } H(x_i) = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \frac{H(x)}{uv' - u'v} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\int_{x_i}^x \bar{\omega}(uv' - u'v) dx}{uv' - u'v} = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\bar{\omega}(uv' - u'v)}{uv'' - u''v} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i} (x - x_i) \frac{H(x)(u'v'' - u''v')}{(uv' - u'v)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{H(x)}{(x - x_i)(uv' - u'v)} \left[ (x - x_i)^2 \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} \right] = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\bar{\omega}(uv' - u'v)}{(uv' - u'v) + (x - x_i)(uv'' - u''v)} = 3\bar{\omega}(x_i) \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{1}{1 + (x - x_i) \frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v}} = \frac{3}{4} \bar{\omega}(x_i), \end{aligned}$$

cioè nel caso considerato  $H(x)/(uv' - u'v)$  è infinitesimo almeno del primo ordine, e  $H(x)(u'v'' - u''v')/(uv' - u'v)^2$  è al più infinito del primo ordine.

Se  $uv' - u'v$  ha in  $x_i$  uno zero del quarto ordine si ha

$$u(x_i) = v(x_i) = u'(x_i) = v'(x_i) = 0, \quad u''(x_i)v'''(x_i) - u'''(x_i)v''(x_i) \neq 0,$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{H(x)}{(x - x_i)(uv' - u'v)} &= \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{\bar{\omega}(uv' - u'v)}{uv' - u'v + (x - x_i)(uv'' - u''v)} = \frac{\bar{\omega}(x_i)}{1 + \lim_{x \rightarrow x_i} (x - x_i) \frac{uv'' - u''v}{uv' - u'v}} = \frac{\bar{\omega}(x_i)}{5}, \\ \lim_{x \rightarrow x_i} (x - x_i) \frac{H(x)(u'v'' - u''v')}{(uv' - u'v)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{H(x)}{(x - x_i)(uv' - u'v)} \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{(x - x_i)^2 (u'v'' - u''v')}{uv' - u'v} = \frac{6\bar{\omega}(x_i)}{5}, \end{aligned}$$

quindi  $H(x)/(uv' - u'v)$  ha in  $x_i$  almeno un infinitesimo del primo ordine, e  $H(x)(u'v'' - u''v')/(uv' - u'v)^2$  è al più infinito del primo ordine.

Dalle cose dette segue che in virtù delle (9), nella (6) è lecita l'integrazione tra  $x_1$  e  $x_2$  dei due membri, e si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\theta}_2 y''^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \bar{\theta}_1 + \frac{H(x)}{uv' - u'v} \right] y'^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \bar{\theta}_0 - H(x) \frac{u'v'' - u''v'}{(uv' - u'v)^2} \right] y^2 dx - \\ - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{\theta}_2}{(uv' - u'v)^2} \begin{vmatrix} y, & u, & v \\ y', & u', & v' \\ y'', & u'', & v'' \end{vmatrix} dx = 0, \end{aligned}$$

ma dalla (2) del Cap. II e dalle (9) si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} [\theta_2 y''^2 + \theta_1 y'^2 + (\theta_0 + \frac{1}{2} \omega') y^2] dx = 0,$$

talchè sottraendo la precedente si ottiene appunto la (11).

OSSERVAZIONE. - Si potrebbe generalizzare la (11) sopprimendo nelle (9) la condizione  $y'(x_2)=0$ , purchè allora si supponga  $(uv' - u'v)_{x=x_2} \neq 0$  e nel secondo membro della (11) stessa allo zero si sostituisca

$$[\theta_2(x_2)y''(x_2) - \bar{\theta}_2(x_2) \left( \frac{uw'' - u''v}{uv' - u'v} \right)_{x=x_2} y'(x_2)] y'(x_2).$$

2. - Primo teorema di confronto tra gli integrali di due equazioni differenziali lineari; omogenee, del quarto ordine.

a) Si abbia in  $(a, b)$

$$(12_1) \quad \bar{\omega} \geq 0,$$

e in  $(x_1, x_2)$  contenuto in  $(a, b)$ ,  $x_1 < x_2$ , le funzioni  $\theta_2'', \theta_1', \theta_0, \omega', \bar{\theta}_2'', \bar{\theta}_1', \bar{\theta}_0, \bar{\omega}$  siano continue, e siano verificate le disuguaglianze

$$(12_2) \quad \theta_2 \geq \bar{\theta}_2 > 0,$$

$$(12_3) \quad \theta_1 \geq \bar{\theta}_1 + \bar{\Omega},$$

$$(12_4) \quad \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \geq \bar{\theta}_0,$$

con

$$(13) \quad \bar{\Omega} = \int_a^b \bar{\omega} dx.$$

L'equazione

$$(8) \quad Dy = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0,$$

possieda una soluzione  $y(x)$ , non identicamente nulla, avente uno zero doppio in ciascuno dei punti  $x_1, x_2$

$$(9_1) \quad y(x_1) = y'(x_1) = 0, \quad (9_2) \quad y(x_2) = y'(x_2) = 0,$$

e sia  $u(x), v(x)$  una coppia di integrali linearmente indipendenti dell'equazione

$$(1) \quad \bar{D}z = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \bar{\theta}_2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \bar{\theta}_1 \frac{dz}{dx} \right] - \bar{\omega} \frac{dz}{dx} + \bar{\theta}_0 z = 0,$$

per la quale in  $x_1$  siano verificate le condizioni

$$(14_1) \quad \bar{\theta}_2(uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2'(uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2(u'v'' - u''v') - \bar{\theta}_1(uv' - u'v) \Big|_{x=x_1} = 0,$$

$$(14_2) \quad (uv' - u'v) \Big|_{x=x_1} = 0.$$

Se in un tratto non nullo di  $(x_1, x_2)$  si ha

$$(14_3) \quad (uv' - u'v)(u''v'' - u''v') > 0,$$

esiste allora almeno un punto  $\bar{x}$  interno a  $(x_1, x_2)$ ,  $x_1 < \bar{x} < x_2$ , tale che in esso si annulla uno almeno dei tre determinanti

$$\begin{vmatrix} u, & v \\ u', & v' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u, & v \\ u'', & v'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u', & v' \\ u'', & v'' \end{vmatrix}.$$

DIMOSTRAZIONE. - Se  $(uv' - u'v)(u''v'' - u''v')$  si annulla in un punto  $\bar{x}$ , con  $x_1 < \bar{x} < x_2$  il teorema è senz'altro verificato; supponiamo allora che si abbia

$$(uv' - u'v)(u''v'' - u''v') \neq 0 \quad \text{per } x_1 < x < x_2.$$

Risulta  $[(uv' - u'v)^2]' \neq 0$ , ed essendo  $(uv' - u'v)^2$  nulla in  $x_1$  esisteranno punti interni a  $(x_1, x_2)$  dove  $[(uv' - u'v)^2]' > 0$ , e poichè  $[(uv' - u'v)^2]'$  non cambia di segno internamente a  $(x_1, x_2)$ , si può supporre, salvo a cangiare  $u$  con  $v$

$$(15) \quad uv' - u'v > 0, \quad u''v'' - u''v > 0 \quad \text{per } x_1 < x < x_2.$$

La funzione  $uv' - u'v$  si annulla in  $x_1$  e per  $x > x_1$  è positiva crescente, sicchè dalla (12<sub>1</sub>) risulta

$$(16) \quad H(x) = \int_{x_1}^x \bar{\omega}(uv' - u'v) dx \geq 0.$$

Tenuto conto della (13) si ha

$$(16') \quad 0 \leq \frac{H(x)}{uv' - u'v} = \frac{1}{uv' - u'v} \int_{x_1}^x \bar{\omega}(uv' - u'v) dx \leq \int_{x_1}^x \bar{\omega} dx \leq \bar{\Omega},$$

ed anche  $\lim_{x \rightarrow x_1} H(x)/(uv' - u'v) = 0$ , e per la (12<sub>3</sub>) risulta

$$(17) \quad \theta_1 - \bar{\theta}_1 - \frac{H(x)}{uv' - u'v} \geq \theta_1 - \bar{\theta}_1 - \bar{\Omega} \geq 0.$$

A motivo della (15) e della (14<sub>3</sub>) esiste qualche tratto non nullo di  $(x_1, x_2)$  dove  $u''v'' - u''v' > 0$  e se in qualche punto interno a  $(x_1, x_2)$  è  $u''v'' - u''v' < 0$  il teorema è dimostrato.

Supponiamo allora per assurdo che in nessun punto interno a  $(x_1, x_2)$  si abbia  $u''v'' - u''v' < 0$ , e sia perciò

$$u''v'' - u''v' \geq 0 \quad \text{per } x_1 \leq x \leq x_2,$$

e quindi per la (16) e la (12<sub>4</sub>)

$$(18) \quad \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 - \bar{\theta}_0 + H(x) \frac{u''v'' - u''v'}{(uv' - u'v)^2} \geq 0.$$



L'identità (11), a motivo delle (12<sub>2</sub>), (17), (18) esige intanto

$$\begin{vmatrix} y, & u, & v \\ y', & u', & v' \\ y'', & u'', & v'' \end{vmatrix} = 0,$$

esistono quindi due costanti  $l_1$  e  $l_2$ , non entrambe nulle, tali che

$$y = l_1 u + l_2 v$$

cioè  $y$  è un integrale comune alle equazioni (1), (8).

Sia ad esempio  $l_1 \neq 0$ ; a motivo della (9<sub>2</sub>) si ha in  $x_2$

$$0 = \begin{vmatrix} y, & v \\ y', & v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 u + l_2 v, & v \\ l_1 u' + l_2 v', & v' \end{vmatrix} = l_1 (u v' - u' v),$$

perciò  $u v' - u' v$  si annulla oltre che in  $x_1$  anche in  $x_2$ , quindi la sua derivata  $u v'' - u'' v$  si annulla in un punto interno a  $(x_1, x_2)$ , contro la seconda delle (15).

Il teorema è così dimostrato.

b) Ferme restando tutte le ipotesi del teorema supponiamo che  $u(x)$  e  $v(x)$  soddisfino la (1) e abbiano ciascuna uno zero doppio in  $x_1$ , sia cioè

$$(19) \quad u(x_1) = u'(x_1) = 0, \quad v(x_1) = v'(x_1) = 0.$$

In queste ipotesi le (14<sub>1</sub>), (14<sub>2</sub>) sono verificate ed ora proveremo che esiste anche un intorno a destra di  $x_1$  dove è anche verificata la (14<sub>3</sub>).

Infatti se  $z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x)$  è la quaterna di integrali della (1) del n. 1, a), *iii*) si avrà, tenuto conto delle (19),

$$u(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x), \quad v(x) = \bar{c}_1 z_1(x) + \bar{c}_2 z_2(x)$$

con  $c_1 \bar{c}_2 - c_2 \bar{c}_1 \neq 0$ , e senza alterare le generalità potrà supporre

$$c_1 \bar{c}_2 - c_2 \bar{c}_1 > 0.$$

Si ha dalla formula di TAYLOR

$$u = \frac{c_1}{2} (x-x_1)^2 + \frac{c_2}{6} (x-x_1)^3 + (x-x_1)^4 \sigma_1(x),$$

$$u' = c_1 (x-x_1) + \frac{c_2}{2} (x-x_1)^2 + (x-x_1)^3 \sigma_2(x),$$

$$u'' = c_1 + c_2 (x-x_1) + (x-x_1)^2 \sigma_3(x),$$

con  $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)$  funzioni limitate in  $(x_1, x_2)$ : infatti a motivo della (1) le derivate quarte di  $z_1(x)$  e  $z_2(x)$  sono limitate in  $(x_1, x_2)$ ; formule analoghe sussistono per  $v, v', v''$ , cangiando  $c_1, c_2$ , in  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ , e  $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)$  in altre

tre funzioni anch'esse limitate in  $(x_1, x_2)$ , e abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} u, \quad v \\ u', \quad v' \end{array} \right| &= \frac{1}{12} \left| \begin{array}{l} c_1, \quad c_2 \\ \bar{c}_1, \quad \bar{c}_2 \end{array} \right| (x-x_1)^4 + (x-x_1)^5 \tau_1(x), \\ \left. \begin{array}{l} u', \quad v' \\ u'', \quad v'' \end{array} \right| &= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} c_1, \quad c_2 \\ \bar{c}_1, \quad \bar{c}_2 \end{array} \right| (x-x_1)^2 + (x-x_1)^3 \tau_2(x), \end{aligned}$$

con  $\tau_1(x)$ ,  $\tau_2(x)$  funzioni limitate in  $(x_1, x_2)$ , e perciò in un intorno a destra di  $x_1$  le differenze  $uv' - u'v$ ,  $u'v'' - u''v'$  sono positive, salvo il punto  $x_1$  ove si annullano entrambe, e la (14<sub>3</sub>) risulta anch'essa verificata.

Concludiamo che il teorema dimostrato in a) sussiste se ferme restando le ipotesi su  $y(x)$ ,  $u(x)$  e  $v(x)$  sono una coppia di integrali della (1) che verificano le (19), cioè  $u(x)$  e  $v(x)$  sono due integrali indipendenti dalla (1) aventi ciascuno uno zero doppio in  $x_1$ .

3. - Secondo teorema di confronto tra gli integrali di due equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine.

a) Sussiste il teorema del n. 2 a), quando all'ipotesi (12<sub>3</sub>) sostituiamo l'altra

$$(12_3') \quad \theta_1 \geq \bar{\theta}_1,$$

supponendo però che insieme alle altre ipotesi si abbia anche

$$(12_5) \quad (b-a)^2 \bar{\Omega}^2 \leq (\theta_1 - \bar{\theta}_1)(\theta_2 - \bar{\theta}_2).$$

DIMOSTRAZIONE. - Ripetendo il ragionamento del n. 2 a), se  $uv' - u'v$   $uv'' - u''v$  non si annullano in un punto interno a  $(x_1, x_2)$  possiamo supporre

$$uv' - u'v > 0, \quad uv'' - u''v > 0 \quad \text{per } x_1 < x < x_2,$$

e  $u'v'' - u''v' > 0$  in un tratto non nullo di  $(x_1, x_2)$ , e si ha per la (16')

$$0 \leq \frac{H(x)}{uv' - u'v} \leq \bar{\Omega}, \quad 0 \leq L(x) = \int_{x_1}^x \frac{H(x)}{uv' - u'v} dx \leq \bar{\Omega}(b-a),$$

perciò per la (12<sub>5</sub>)

$$(20) \quad L^2(x) - (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_1 - \bar{\theta}_1) \leq \bar{\Omega}^2(b-a)^2 - (\theta_2 - \bar{\theta}_2)(\theta_1 - \bar{\theta}_1) \leq 0.$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{H(x)}{uv' - u'v} y'^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} L'(x) y'^2 dx = -2 \int_{x_1}^{x_2} L(x) y' y'' dx,$$

e perciò la somma dei primi due termini del primo membro dell'identità (11) vale

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\theta_2 - \bar{\theta}_2) y''^2 + 2L(x) y' y'' + (\theta_1 - \bar{\theta}_1) y'^2] dx,$$

e a motivo della (20), (12<sub>2</sub>), (12<sub>3</sub>') tale integrale, essendo la funzione integranda una forma binaria quadratica in  $y'$ ,  $y''$  definita o semidefinita positiva, è non negativo, ma a questo punto possono ripetersi i ragionamenti del n. 2 a) [dopo la (17)] e ne segue il teorema.

b) Il teorema sussiste [cfr. n. 2, b)] se per gli integrali  $u(x)$ ,  $v(x)$  della (1) facciamo in particolare l'ipotesi che essi siano indipendenti, ed abbiano ciascuno uno zero doppio in  $x_1$ .

**4. - Terzo teorema di confronto tra gli integrali di due equazioni differenziali lineari, omogenee, del quarto ordine.**

*In  $(x_1, x_2)$  contenuto in  $(a, b)$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , le funzioni  $\theta_2''$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega'$ ,  $\bar{\theta}_2''$ ,  $\bar{\theta}_1'$ ,  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{\omega}$  siano continue; sia*

$$(21_1) \quad \bar{\omega} \geq 0,$$

$$(21_2) \quad \theta_2 \geq \bar{\theta}_2 > 0, \quad K \geq \bar{\theta}_2, \quad (K \text{ costante}),$$

e posto

$$(13) \quad \bar{\Omega} = \int_a^b \bar{\omega}(x) dx,$$

risulti in  $(x_1, x_2)$

$$(21_3) \quad \bar{\theta}_1 + \bar{\Omega} \leq -h < 0, \quad (21_4) \quad \theta_1 > \bar{\theta}_1 + \bar{\Omega},$$

$$(12_4) \quad \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \geq \bar{\theta}_0,$$

e

$$(21_5) \quad x_2 - x_1 > \pi \sqrt{\frac{K}{h}}.$$

*Se l'equazione*

$$(8) \quad Dy = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0$$

*possiede una soluzione  $y(x)$  non identicamente nulla, avente uno zero doppio in ciascuno dei punti  $x_1$  e  $x_2$ ,*

$$(9_1) \quad y(x_1) = y'(x_1) = 0, \quad (9_2) \quad y(x_2) = y'(x_2) = 0,$$

e se  $u(x), v(x)$  è una coppia di integrali linearmente indipendenti dell'equazione

$$(1) \quad \bar{D}z = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \bar{\theta}_2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \bar{\theta}_1 \frac{dz}{dx} \right] - \bar{\omega} \frac{dz}{dx} + \bar{\theta}_0 z = 0,$$

tali che

$$(14_1) \quad \bar{\theta}_2(uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2'(uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2(u'v'' - u''v') - \bar{\theta}_1(uv' - u'v) \Big|_{x=x_1} = 0,$$

$$(14_2) \quad (uv' - u'v) \Big|_{x=x_1} = 0,$$

esiste allora un punto  $\bar{x}$  interno a  $(x_1, x_2)$  dove

$$\begin{vmatrix} u, v \\ u', v' \end{vmatrix} \Big|_{x=\bar{x}} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. - Ripetendo il ragionamento del n. 2 a) se in ogni punto  $x$  interno a  $(x_1, x_2)$  si ha  $(uv' - u'v)(uv'' - u''v) \neq 0$ , non si alterano le generalità a supporre che internamente a  $(x_1, x_2)$  si abbia

$$uv' - u'v > 0, \quad uv'' - u''v > 0,$$

e inoltre [cfr. (17)]

$$(17) \quad \theta_1 - \bar{\theta}_1 - \frac{H(x)}{uv' - u'v} \geq 0.$$

Se in nessun punto interno a  $(x_1, x_2)$  risulta  $u'v'' - u''v' < 0$ , sempre per i ragionamenti del n. 2 a) si cade in assurdo, perciò dovrà esistere un tratto non nullo di  $(x_1, x_2)$  dove  $u'v'' - u''v' < 0$ , e per concludere il teorema basterà provare che non potrà risultare in tutto  $(x_1, x_2)$ ,  $u'v'' - u''v' \leq 0$ , [chè esistendo allora almeno un tratto non nullo dove  $u'v'' - u''v' > 0$ , esistono punti interni a  $(x_1, x_2)$  dove  $u'v'' - u''v' = 0$ ].

Posto  $Z = uv' - u'v$ , dalla (4) [la (3) è vera per  $\alpha = x_1$ ] si ha

$$(22) \quad [\bar{\theta}_2 Z']' + \left[ -\bar{\theta}_1 - \frac{H(x)}{uv' - u'v} - 2\bar{\theta}_2 \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} \right] Z = 0,$$

ma per la (16') e la (21<sub>3</sub>) è

$$-\bar{\theta}_1 - \frac{H(x)}{uv' - u'v} - 2\bar{\theta}_2 \frac{u'v'' - u''v'}{uv' - u'v} \geq -\bar{\theta}_1 - \bar{\Omega} \geq h,$$

per la seconda delle (21<sub>2</sub>) è  $K \geq \bar{\theta}_2$ , talchè è lecito confrontare la (22) con l'equazione di secondo ordine

$$K\sigma'' + h\sigma = 0,$$

e siccome gli zeri degli integrali di quest'ultima si seguono ad intervalli di ampiezza  $\pi\sqrt{K/h}$ , basterà applicare il teorema di confronto di STURM <sup>(28)</sup> e tener conto della (21<sub>5</sub>) per concludere che  $Z=uv'-u'v$  si deve annullare tra  $x_1$  e  $x_2$ , mentre avevamo escluso che ciò potesse accadere.

Il teorema è così dimostrato.

**5. - Quarto teorema di confronto tra gli integrali di due equazioni lineari, omogenee, del quarto ordine.**

Nelle ipotesi dei teoremi dei nn. 2, 3, 4 abbiamo inclusa la condizione  $\bar{\omega} \geq 0$ , daremo ora un quarto teorema con l'ipotesi  $\bar{\omega} < 0$ .

**TEOREMA.** - *In  $(x_1, x_2)$  contenuto in  $(a, b)$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , le funzioni  $\theta_2'', \theta_1', \theta_0, \omega', \bar{\theta}_2'', \bar{\theta}_1', \bar{\theta}_0, \bar{\omega}$  siano continue;  $\theta_2 > 0, \bar{\theta}_2 > 0$ , e si abbia in  $(x_1, x_2)$*

$$\theta_2 \geq \bar{\theta}_2, \quad \theta_1 \geq \bar{\theta}_1, \quad \bar{\omega} < 0, \quad \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \geq \bar{\theta}_0.$$

*Se l'equazione*

$$(8) \quad Dy = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0,$$

*possiede una soluzione non identicamente nulla avente uno zero doppio in ciascuno dei punti  $x_1, x_2$*

$$(9_1) \quad y(x_1) = y'(x_1) = 0, \quad (9_2) \quad y(x_2) = y'(x_2) = 0,$$

*e se  $u(x), v(x)$  è una coppia di integrali linearmente indipendenti dell'equazione*

$$(1) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \bar{\theta}_2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \bar{\theta}_1 \frac{dz}{dx} \right] - \bar{\omega} \frac{dz}{dx} + \bar{\theta}_0 z = 0,$$

*tale che*

$$(3) \quad \bar{\theta}_2 (uv^{(3)} - u^{(3)}v) + \bar{\theta}_2' (uv'' - u''v) - \bar{\theta}_2 (u'v'' - u''v') - \bar{\theta}_1 (uv' - u'v) \Big|_{x=x_1} = 0,$$

*e se in un tratto non nullo di  $(x_1, x_2)$  si ha*

$$(23) \quad (uv' - u'v)(u'v'' - u''v') < 0,$$

*esiste allora almeno un punto  $\bar{x}$  interno a  $(x_1, x_2)$  dove*

$$(uv' - u'v)(u'v'' - u''v') \Big|_{x=\bar{x}} = 0, \quad x_1 < \bar{x} < x_2.$$

---

<sup>(28)</sup> Cfr. ad es. G. SANSONE: *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*. (Zanichelli, Bologna, 1942), I, p. 183.

DIMOSTRAZIONE. - Se  $u'v - u'v \neq 0$  in  $(x_1, x_2)$ , e perciò  $uv' - u'v$  sempre dello stesso segno in  $(x_1, x_2)$ , ne viene

$$\frac{H(x)}{uv' - u'v} = \frac{\int_x^x \bar{\omega}(uv' - u'v) dx}{uv' - u'v} < 0, \quad (x_1 < x < x_2),$$

e dall'identità integrale (11) risulta che se  $u'v'' - u''v'$  non si annulla mai internamente a  $(x_1, x_2)$  deve esistere almeno un tratto non nullo di  $(x_1, x_1)$  dove  $(u'v'' - u''v')/(uv' - u'v) > 0$ , e allora per la (23) segue il teorema.

OSSERVAZIONE. - È facile persuadersi che si possono trovare infinite coppie di integrali della (1) soddisfacenti la (3) e la (23): basta fissare invero nel punto  $x_1$  i valori iniziali  $u(x_1), u'(x_1), u''(x_1), v(x_1), v'(x_1), v''(x_1)$  degli integrali  $u(x), v(x)$  in modo che sia soddisfatta la (23) e sia anche  $u(x_1) \neq 0$ ; scelto poi  $u^{(3)}(x_1)$  in modo arbitrario, si determinerà  $v^{(3)}(x_1)$  dalla (3).

6. - Teorema di confronto tra gli integrali di due equazioni differenziali lineari, omogenee, con la seconda equazione autoaggiunta.

a) I teoremi di confronto precedenti si possono maggiormente precisare quando nella (1) sia  $\bar{\omega} \equiv 0$ , quando cioè si vogliono confrontare le due equazioni

$$(8) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0,$$

$$(24) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \bar{\theta}_2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \bar{\theta}_1 \frac{dz}{dx} \right] + \bar{\theta}_0 z = 0.$$

Supponiamo  $\theta_2'', \theta_1', \theta_0, \omega', \bar{\theta}_2'', \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_0$  continue in  $(x_1, x_2), x_1 < x_2$ ,

$$(25_1) \quad \theta_2 \geq \bar{\theta}_2 > 0, \quad (25_2) \quad \bar{\theta}_1 \geq \theta_1, \quad (25_3) \quad \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \geq \bar{\theta}_0,$$

e la (25<sub>3</sub>), almeno in un tratto non nullo, valga in senso forte; supponiamo inoltre che la (8) ammetta un integrale  $y(x)$  non identicamente nullo avente due zeri doppi in  $x_1$  e  $x_2$ .

In queste ipotesi tra gli integrali della (24), non identicamente nulli, aventi uno zero doppio in  $x_1$ , ne esiste almeno uno avente un altro zero doppio in un punto  $\bar{x}$  interno a  $(x_1, x_2)$ , tale cioè che

$$z(x_1) = z'(x_1) = 0, \quad z(\bar{x}) = z'(\bar{x}) = 0, \quad (x_1 < \bar{x} < x_2).$$

DIMOSTRAZIONE. - Se  $u(x)$  e  $v(x)$  sono due integrali della (24) aventi ciascuno uno zero doppio in  $x_1$ , e se  $uv' - u'v$  risulta diverso da zero per  $x_1 < x < x_2$ ,

sussiste l'identità (11), la quale essendo  $H(x) \equiv 0$ , si scrive in questo caso

$$\int_{x_1}^{x_2} [\theta_2 - \bar{\theta}_2] y''^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} [\theta_1 - \bar{\theta}_1] y'^2 dx + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 - \bar{\theta}_0 \right] y^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{\theta}_2}{(uv' - u'v)^2} \begin{vmatrix} y, & u, & v \\ y', & u', & v' \\ y'', & u'', & v'' \end{vmatrix}^2 dx = 0,$$

e poichè la (25<sub>3</sub>) sussiste in senso forte almeno in un tratto non nullo, quest'ultima esige  $y \equiv 0$  in questo tratto e perciò  $y(x)$  identicamente nulla. Abbiamo dunque che  $uv' - u'v$  si annulla in un punto  $\bar{x}$  interno ad  $(x_1, x_2)$ , ed esiste quindi una combinazione lineare  $z = c_1 u(x) + c_2 v(x)$ , [ $c_1, c_2$  costanti] che si annulla insieme alla sua derivata prima in  $x_1$  e  $\bar{x}$ , avente cioè uno zero doppio in  $x_1$  e  $\bar{x}$ , e il teorema è dimostrato <sup>(29)</sup>.

b) Possiamo completare il teorema precedente supponendo che in  $(x_1, x_2)$  si abbia  $\theta = \bar{\theta}_2 > 0$ ,  $\theta_1 = \bar{\theta}_1$ ,  $\frac{1}{2} \omega' + \theta_0 = \bar{\theta}_0$  siano cioè da *confrontare le due equazioni*

$$(8) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dy}{dx} \right] - \omega \frac{dy}{dx} + \theta_0 y = 0,$$

$$(26) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2 \frac{d^2 z}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1 \frac{dz}{dx} \right] + \left( \frac{1}{2} \omega' + \theta_0 \right) z = 0,$$

nelle ipotesi di  $\theta_2''$ ,  $\theta_1'$ ,  $\theta_0$ ,  $\omega'$  continue in  $(x_1, x_2)$ ,  $\theta_2 > 0$ ,  $\omega$  non identicamente nulla in  $(x_1, x_2)$ . Vogliamo dimostrare che in queste ipotesi, se la (8) ammette un integrale  $y(x)$  non identicamente nullo, che verifica le condizioni

$$y(x_1) = y'(x_1) = 0, \quad y(x_2) = y'(x_2) = 0,$$

allora fra gli integrali dell'equazione autoaggiunta (26), aventi uno zero doppio  $x_1$ , ve ne è almeno uno, non identicamente nullo, avente un altro zero doppio in un punto  $\bar{x}$  interno a  $(x_1, x_2)$ .

DIMOSTRAZIONE. - Se  $u(x)$  e  $v(x)$  sono due integrali della (26) aventi ciascuno uno zero doppio in  $x_1$ , e se  $uv' - u'v$  risulta diverso da zero per  $x_1 < x < x_2$ , riprendendo i ragionamenti dei nn. 2 b), 2 a), si ha che deve esistere un integrale  $y(x)$  comune alle due equazioni (8), (26), ciò che esige  $-\omega y' = \frac{1}{2} \omega' y$ , ovvero  $(\omega y^2)' = 0$ , quindi  $\omega y^2 = \text{cost.}$ , ma  $y(x)$  si annulla in  $x_1$  e  $x_2$ , quindi  $\omega y^2 \equiv 0$ , e poichè  $\omega$  non è identicamente nulla, ne viene  $y \equiv 0$ . Dunque  $uv' - u'v$  si annulla in un punto interno a  $(x_1, x_2)$ , e come abbiamo prima osservato in a) ne segue la nostra proposizione.

<sup>(29)</sup> Il teorema estende quello dimostrato da G. CIMMINO [mem. cit. in (1), p. 15] nel caso in cui anche la (8) sia autoaggiunta [ $\omega \equiv 0$ ].

## CAPITOLO IV.

**Classi di equazioni del quarto ordine, lineari, omogenee,  
con i coefficienti dipendenti da un parametro.**

1. - Sulla frequenza degli zeri doppi degli integrali di una classe di equazioni differenziali lineari, del quarto ordine, a coefficienti costanti.

*Consideriamo l'equazione del quarto ordine*

$$(1) \quad P_2(\lambda)y^{(4)} + p_1(\lambda)y^{(3)} - y' - p_0(\lambda)y = 0,$$

e supponiamo che

$$(2) \quad 0 < h \leq P_2(\lambda) \leq K < +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_1(\lambda) = +\infty, \quad p_0(\lambda) \geq l > 0,$$

oppure

$$(3) \quad 0 < h \leq P_2(\lambda) \leq K < +\infty, \quad p_1(\lambda) > 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_0(\lambda) = +\infty \quad (3^0).$$

*Vogliamo dimostrare che comunque si fissi un numero positivo  $d$ , si può determinare corrispondentemente un  $\lambda_0$  tale che per ogni  $\lambda \geq \lambda_0$  se si considerano gli integrali  $y(x, \lambda)$  che si annullano insieme alla loro derivata prima in un punto  $x_1$  preso ad arbitrio, fra essi ne esiste uno che si annulla insieme alla sua derivata prima in un altro punto  $x_2$  interno all'intervallo  $(x_1, x_1 + d)$ , tale cioè che*

$$(4) \quad y(x_1, \lambda) = y'(x_1, \lambda) = 0, \quad y(x_2, \lambda) = y'(x_2, \lambda) = 0, \quad (x_1 < x_2 < x_2 + d).$$

$\alpha)$  Senza alterare le generalità, ove siano verificate le (2) ci limiteremo a considerare i valori di  $\lambda$  per i quali  $p_1(\lambda) > 0$ , e ove siano verificate le (3) i valori di  $\lambda$  per i quali  $p_0(\lambda) > 0$ .

Ciò premesso osserviamo che l'equazione caratteristica della (1) è

$$(5) \quad D(\varrho) = P_2(\lambda)\varrho^4 + p_1(\lambda)\varrho^2 - \varrho - p_0(\lambda) = 0,$$

la quale per la regola dei segni di CARTESIO ammette una sola *radice positiva*  $\alpha_1(\lambda)$ , e poichè la sua trasformata a radici opposte è l'equazione

$$D(-\varrho) = P_2(\lambda)\varrho^4 + p_1(\lambda)\varrho^2 + \varrho - p_0(\lambda) = 0,$$

---

<sup>(30)</sup> Si potrebbe pensare  $\lambda$  variabile in un certo ordinamento tale che  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_1(\lambda) = +\infty$  nel primo caso, oppure  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_0(\lambda) = +\infty$  nel secondo caso.



essa ammette una sola *radice negativa*  $\alpha_2(\lambda)$ , e perciò *due radici complesse e coniugate*  $\alpha_3(\lambda) + i\alpha_4(\lambda)$ ,  $\alpha_3(\lambda) - i\alpha_4(\lambda)$ , [ $\alpha_4(\lambda) > 0$ ], ed essendo nulla la somma delle radici della (5) risulta

$$(6) \quad \alpha_3(\lambda) = -\frac{\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)}{2}.$$

*b) Valgano le (2).*

Tenuto conto che la somma dei prodotti due a due delle radici della (5) vale  $p_1(\lambda)/P_2(\lambda)$  si ha

$$(7_1) \quad \alpha_4^2(\lambda) = \frac{p_1(\lambda)}{P_1(\lambda)} + \frac{3\alpha_1^2(\lambda) + 2\alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) + 3\alpha_2^2(\lambda)}{4},$$

$$\alpha_4^2(\lambda) > \frac{p_1(\lambda)}{P_2(\lambda)} > \frac{p_1(\lambda)}{K}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha_4(\lambda) = +\infty.$$

*Valgano le (3).*

Fissato  $L > 1$ , e del resto arbitrario, si scelga  $\lambda_0$  in modo che per  $\lambda \geq \lambda_0$  risulti

$$KL^8 + KL^6 + L^2 < p_0(\lambda).$$

Se per un valore di  $\lambda \geq \lambda_0$  è  $p_1(\lambda) \geq KL^2$ , si ha

$$\alpha_4^2(\lambda) > \frac{p_1(\lambda)}{P_2(\lambda)} \geq \frac{KL^2}{K}, \quad \alpha_4^2(\lambda) > L^2;$$

se invece  $p_1(\lambda) < KL^2$  si ha

$$D(\pm L^2) = P_1(\lambda)L^8 + p_1(\lambda)L^4 \mp L^2 - p_0(\lambda) < KL^8 + KL^6 + L^2 - p_0(\lambda) < 0,$$

quindi  $\alpha_1(\lambda) > L^2$ ,  $|\alpha_2(\lambda)| > L^2$  e allora dalla (7<sub>1</sub>)

$$4\alpha_4^2(\lambda) \geq 3\alpha_1^2(\lambda) + 2\alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) + 3\alpha_2^2(\lambda),$$

$$4\alpha_4^2(\lambda) \geq 2[\alpha_1^2(\lambda) + \alpha_2^2(\lambda)] + [\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)]^2,$$

$$\alpha_4^2(\lambda) \geq \frac{\alpha_1^2(\lambda) + \alpha_2^2(\lambda)}{2} \geq L^4 > L^2, \quad \alpha_4^2(\lambda) > L^2,$$

e perciò per ogni  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $\alpha_4(\lambda) > L$ , e quindi

$$(7_2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \alpha_4(\lambda) = +\infty.$$

*c) Ove si voglia determinare un integrale della (1) che si annulli insieme alla sua derivata prima in una coppia di punti distinti  $x_1, x$ ,  $x_1 < x$ , si osserverà che l'integrale generale della (1) ha la forma*

$$y = \gamma_1 e^{\alpha_1(x-x_1)} + \gamma_2 e^{\alpha_2(x-x_1)} + \gamma_3 e^{\alpha_3(x-x_1)} \cos \alpha_4(x-x_1) + \gamma_4 e^{\alpha_3(x-x_1)} \sin \alpha_4(x-x_1)$$

con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  costanti, e le condizioni

$$y(x_1, \lambda) = 0, \quad y'(x_1, \lambda) = 0, \quad y(x, \lambda) = 0, \quad y'(x, \lambda) = 0,$$

si traducono in un sistema lineare omogeneo per le  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  il quale ammetterà una soluzione con le  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  non tutte nulle, ove risulti

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 0 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ e^{\alpha_1(x-x_1)}, & e^{\alpha_2(x-x_1)}, & e^{\alpha_3(x-x_1)} \cos \alpha_4(x-x_1), & e^{\alpha_3(x-x_1)} \sin \alpha_4(x-x_1) \\ \alpha_1 e^{\alpha_1(x-x_1)}, & \alpha_2 e^{\alpha_2(x-x_1)}, & \alpha_3 e^{\alpha_3(x-x_1)} \cos \alpha_4(x-x_1) & \alpha_3 e^{\alpha_3(x-x_1)} \sin \alpha_4(x-x_1) \\ & & -\alpha_4 e^{\alpha_3(x-x_1)} \sin \alpha_4(x-x_1), & +\alpha_4 e^{\alpha_3(x-x_1)} \cos \alpha_4(x-x_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Per  $x = x_1 + \frac{\pi}{\alpha_4}$  si ha

$$\Delta\left(x_1 + \frac{\pi}{\alpha_4}\right) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 0 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ e^{\frac{\pi \alpha_1}{\alpha_4}}, & e^{\frac{\pi \alpha_2}{\alpha_4}}, & -e^{\frac{\pi \alpha_3}{\alpha_4}}, & 0 \\ \alpha_1 e^{\frac{\pi \alpha_1}{\alpha_4}}, & \alpha_2 e^{\frac{\pi \alpha_2}{\alpha_4}}, & -\alpha_3 e^{\frac{\pi \alpha_3}{\alpha_4}} & -\alpha_4 e^{\frac{\pi \alpha_3}{\alpha_4}} \end{vmatrix} = \\ = \alpha_4(\alpha_2 - \alpha_1) \left( e^{\frac{\pi \alpha_1}{\alpha_4}} + e^{\frac{\pi \alpha_3}{\alpha_4}} \right) \left( e^{\frac{\pi \alpha_2}{\alpha_4}} + e^{\frac{\pi \alpha_3}{\alpha_4}} \right),$$

cioè  $\Delta\left(x_1 + \frac{\pi}{\alpha_4}\right)$  ha il segno di  $\alpha_2 - \alpha_1$ , ossia negativo:

$$(8_1) \quad \Delta\left(x_1 + \frac{\pi}{\alpha_4}\right) < 0.$$

Si ha pure

$$\Delta\left(x_1 + \frac{2\pi}{\alpha_4}\right) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 0 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ e^{\frac{2\pi \alpha_1}{\alpha_4}}, & e^{\frac{2\pi \alpha_2}{\alpha_4}}, & e^{\frac{2\pi \alpha_3}{\alpha_4}}, & 0 \\ \alpha_1 e^{\frac{2\pi \alpha_1}{\alpha_4}}, & \alpha_2 e^{\frac{2\pi \alpha_2}{\alpha_4}}, & \alpha_3 e^{\frac{2\pi \alpha_3}{\alpha_4}}, & \alpha_4 e^{\frac{2\pi \alpha_3}{\alpha_4}} \end{vmatrix},$$

cioè

$$\Delta\left(x_1 + \frac{2\pi}{\alpha_4}\right) = \alpha_4(\alpha_2 - \alpha_1) e^{\frac{4\pi \alpha_3}{\alpha_4}} \left( e^{\frac{2\pi \alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_4}} - 1 \right) \left( e^{\frac{2\pi \alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_4}} - 1 \right),$$

e poichè  $\alpha_4 > 0$ ,  $\alpha_2 - \alpha_1 < 0$ , si avrà

$$(8_2) \quad \Delta\left(x_1 + \frac{2\pi}{\alpha_4}\right) > 0$$

per i valori di  $\lambda$  per i quali risulti

$$\alpha_1 - \alpha_3 > 0, \quad \text{e} \quad \alpha_2 - \alpha_3 < 0,$$

e per la (6) per i valori di  $\lambda$  tali che

$$(9_1) \quad \frac{1}{3} < -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (9_2) \quad -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 3.$$

Se scriviamo che nella (5) la somma dei prodotti delle radici tre a tre vale  $1/P_2(\lambda)$  otteniamo

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \left[ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4} + \alpha_1^2 \right] = \frac{1}{P_2(\lambda)},$$

perciò  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_1 > -\alpha_2$ ,  $1 > -\alpha_2/\alpha_1$  e a più forte ragione la (9<sub>2</sub>), cosicchè resta da provare che esiste un  $\lambda_0^*$  tale che per  $\lambda \geq \lambda_0^*$  vale la (9<sub>1</sub>).

Se  $D\left(-\frac{\alpha_1}{3}\right) < 0$  si ha allora  $\alpha_2 < -\alpha_1/3$ ,  $-\alpha_2/\alpha_1 > 1/3$  e perciò la (9<sub>1</sub>).

Perchè risulti

$$D(-\alpha_1/3) = \frac{\alpha_1^4}{81} P_2(\lambda) + \frac{\alpha_1^2}{9} p_1(\lambda) + \frac{\alpha_1}{3} - p_0(\lambda) < 0$$

occorre e basta che

$$\frac{\alpha_1^4}{81} P_2(\lambda) + \frac{\alpha_1^2}{9} p_1(\lambda) + \frac{\alpha_1}{3} < P_2(\lambda) \alpha_1^4 + p_1(\lambda) \alpha_1^2 - \alpha_1$$

ed essendo  $\alpha_1(\lambda) > 0$

$$\frac{4}{3} < \frac{80}{81} \alpha_1^3 P_2(\lambda) + \frac{8}{9} \alpha_1 p_1(\lambda),$$

e basta allora verificare che la radice positiva  $\alpha_1(\lambda)$  dell'equazione (5) per  $\lambda$  sufficientemente grande soddisfa una almeno delle disuguaglianze

$$(10_1) \quad \alpha_1(\lambda) > \frac{3}{2} \frac{1}{p_1(\lambda)}, \quad (10_2) \quad \alpha_1^3(\lambda) > \frac{27}{20} \frac{1}{P_2(\lambda)}.$$

La (10<sub>1</sub>) è verificata se  $D\left(\frac{3}{2p_1(\lambda)}\right) < 0$ , ma si ha

$$(11) \quad D\left(\frac{3}{2p_1(\lambda)}\right) = \frac{81 P_2(\lambda)}{16 p_1^4(\lambda)} + \frac{3}{4 p_1(\lambda)} - p_0(\lambda)$$

e nelle ipotesi (2)

$$D\left(\frac{3}{2p_1(\lambda)}\right) < \frac{81 K}{16 p_1^4(\lambda)} + \frac{3}{4 p_1(\lambda)} - l,$$

e poichè  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_1(\lambda) = +\infty$  ne viene che se sono verificate le (2) esiste un  $\lambda_0^*$  tale che per  $\lambda \geq \lambda_0^*$  è verificata la (10<sub>1</sub>).

Siano invece verificate le (3). Se esiste una costante  $\delta > 0$  tale che  $p_1(\lambda) \geq \delta$ ,

avendosi  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_0(\lambda) = +\infty$  risulta dalla (11) per  $\lambda$  sufficientemente grande  $D(3/2 p_1(\lambda)) < 0$  e la (10<sub>1</sub>) è verificata.

Supponiamo infine che fissato un  $\delta > 0$ , esistano dei valori di  $\lambda$  per i quali  $p_1(\lambda) \geq \delta$  e valori di  $\lambda$  per i quali  $p_1(\lambda) < \delta$ . Per le cose ora dette si può determinare un  $\lambda_0^*$  tale che quando  $\lambda \geq \lambda_0^*$  e  $p_1(\lambda) \geq \delta$  risulti  $D(3/2 p_1(\lambda)) < 0$ , perciò risulterà soddisfatta la (10<sub>1</sub>) e di conseguenza  $D(-\alpha_1/3) < 0$ .

Consideriamo allora i valori di  $\lambda \geq \lambda_0^*$  per i quali  $p_1(\lambda) < \delta$ ; si ha

$$D \left[ \frac{3}{\sqrt[3]{20 P_2(\lambda)}} \right] = \frac{3^4}{20^{\frac{4}{3}} [P_2(\lambda)]^{\frac{1}{3}}} + \frac{3^2 p_1(\lambda)}{20^{\frac{2}{3}} [P_2(\lambda)]^{\frac{2}{3}}} - \frac{3}{20^{\frac{1}{3}} [P_2(\lambda)]^{\frac{1}{3}}} - p_0(\lambda),$$

e risulterà certamente

$$(12) \quad D \left[ \frac{3}{\sqrt[3]{20 P_2(\lambda)}} \right] < 0$$

per 
$$\frac{3^4}{(20)^{\frac{4}{3}} h^{\frac{1}{3}}} + \frac{3^2 \delta}{(20)^{\frac{2}{3}} h^{\frac{2}{3}}} < p_0(\lambda),$$

ma per quest'ultima, in virtù della terza delle (3), basterà crescere sufficientemente  $\lambda_0^*$ . Ne viene dalla (12) per  $\lambda \geq \lambda_0^*$  e  $p_1(\lambda) < \delta$ ,  $\alpha_1(\lambda) > 3/\sqrt[3]{20 P_2(\lambda)}$ ,  $\alpha_1^3(\lambda) > 27/20 P_2(\lambda)$ , cioè la (10<sub>2</sub>).

d) Abbiamo dunque che per i valori di  $\lambda \geq \lambda_0^*$  risulterà

$$A \left( x_1 + \frac{\pi}{\alpha_4} \right) < 0, \quad A \left( x_1 + \frac{2\pi}{\alpha_4} \right) > 0,$$

e perciò fissato  $x_1$ , tra gli integrali che si annullano in  $x_1$  insieme alla loro derivata prima ne esiste almeno uno tale che si annulla insieme alla sua derivata prima in un punto  $x$  interno a  $(x_1 + \pi/\alpha_4, x_1 + 2\pi/\alpha_4)$ , e siccome per la (7<sub>2</sub>)

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_4(\lambda) = +\infty$ , basterà se occorre crescere  $\lambda_0^*$  in guisa che per  $\lambda \geq \lambda_0^*$  risulti  $2\pi/\alpha_4 < d$  per dedurne il teorema.

**2. - Sulla frequenza degli zeri doppi degli integrali di un'altra classe di equazioni differenziali lineari, del quarto ordine, a coefficienti costanti.**

Con gli stessi ragionamenti del n. 1 si dimostra il teorema per l'equazione

$$(13) \quad P_2(\lambda)y^{(4)} + p_1(\lambda)y^{(3)} + y' - p_0(\lambda)y = 0$$

quando i coefficienti  $P_2(\lambda)$ ,  $p_1(\lambda)$ ,  $p_0(\lambda)$  soddisfano le (2) oppure le (3); basterà infatti ripetere la dimostrazione precedente considerando in luogo di  $D(-\alpha_1/3)$ ,  $D(3/2 p_1(\lambda))$ ,  $D(3/\sqrt[3]{20 P_2(\lambda)})$  rispettivamente  $D(-3\alpha_1)$ ,  $D(1/2 p_1(\lambda))$ ,  $D(1/\sqrt[3]{20 P_2(\lambda)})$ .

3. - Sugli integrali di una particolare classe di equazioni differenziali, lineari, del quarto ordine, dipendenti da un parametro, con uno zero doppio in un punto prefissato.

*Si abbia l'equazione*

$$(14) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left[ \theta_2(x, \lambda) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \theta_1(x, \lambda) \frac{dy}{dx} \right] - \omega(x, \lambda) \frac{dy}{dx} + \theta_0(x, \lambda) y = 0$$

*nella quale per ogni fissato valore di  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $\theta_2''(x, \lambda)$ ,  $\theta_1'(x, \lambda)$ ,  $\theta_0(x, \lambda)$ ,  $\omega(x, \lambda)$  risultano funzioni continue rispetto ad  $x$  variabile in  $(a, b)$  ed esistano tre funzioni  $P_2(\lambda)$ ,  $p_1(\lambda)$ ,  $p_0(\lambda)$  tali che per ogni  $\lambda \geq \lambda_0$  ed  $x$  variabile in  $(a, b)$  risultino sempre soddisfatte le seguenti condizioni:*

$$(15_1) \quad K \geq P_2(\lambda) \geq \theta_2(x, \lambda) \geq h > 0, \quad (15_2) \quad -p_1(\lambda) \geq \theta_1(x, \lambda) + \Omega(\lambda),$$

$$(15_3) \quad 0 > -l \geq -p_0(\lambda) \geq \theta_0(x, \lambda), \quad (15_4) \quad \omega(x, \lambda) \geq 0,$$

$$(15_5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_1(\lambda) = +\infty,$$

*oppure sempre le condizioni*

$$(16_1) \quad K \geq P_2(\lambda) \geq \theta_2(x, \lambda) \geq h > 0, \quad (16_2) \quad 0 > -p_1(\lambda) \geq \theta_1(x, \lambda) + \Omega(\lambda),$$

$$(16_3) \quad -p_0(\lambda) \geq \theta_0(x, \lambda), \quad (16_4) \quad \omega(x, \lambda) \geq 0,$$

$$(16_5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} p_0(\lambda) = +\infty,$$

*essendo nei due casi considerati*

$$(17) \quad \left| \int_a^b \omega(x, \lambda) dx \right| \leq \Omega(\lambda) < +\infty.$$

*In queste ipotesi vale il teorema: Fissato un punto  $x_1$  di un intervallo  $(\alpha, \beta)$  contenuto in  $(a, b)$ ,  $a \leq \alpha \leq x_1 < \beta \leq b$ , si può determinare un  $\lambda_0^*$  tale che per ogni  $\lambda \geq \lambda_0^*$  se si considerano due integrali  $u(x, \lambda)$ ,  $v(x, \lambda)$  linearmente indipendenti della (14), aventi ciascuno uno zero doppio in  $x_1$ , uno almeno dei tre determinanti*

$$(18_1) \quad \begin{vmatrix} u(x, \lambda) & v(x, \lambda) \\ u'(x, \lambda) & v'(x, \lambda) \end{vmatrix}, \quad (18_2) \quad \begin{vmatrix} u(x, \lambda) & v(x, \lambda) \\ u''(x, \lambda) & v''(x, \lambda) \end{vmatrix}, \quad (18_3) \quad \begin{vmatrix} u'(x, \lambda) & v'(x, \lambda) \\ u''(x, \lambda) & v''(x, \lambda) \end{vmatrix}$$

*dovrà annullarsi in un punto  $x_2$  di  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha \leq x_1 < x_2 < \beta$ , o ciò che è lo stesso fra gli integrali  $y(x, \lambda)$  della (14), con uno zero doppio in  $x_1$ , ne*

esiste uno almeno (non identicamente nullo) che soddisfa una delle seguenti condizioni:

$$(19_1) \quad y(x_2, \lambda) = y'(x_2, \lambda) = 0, \quad (19_2) \quad y(x_2, \lambda) = y''(x_2, \lambda) = 0, \\ (19_3) \quad y'(x_2, \lambda) = y''(x_2, \lambda) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. - In virtù del teorema del n. 1 si può determinare un  $\lambda_0^* \geq \lambda_0$  tale che per  $\lambda \geq \lambda_0^*$  gli integrali dell'equazione

$$(20) \quad P_2(\lambda) Y^{(4)} + p_1(\lambda) Y^{(2)} - Y' - p_0(\lambda) Y = 0,$$

aventi uno zero doppio in  $x_1$  posseggano un altro zero doppio in un altro punto  $\bar{x}_2$  tale che  $\alpha \leq x_1 < \bar{x}_2 < \beta$ .

In virtù delle ipotesi (15<sub>1</sub>)... (15<sub>5</sub>), oppure (16<sub>1</sub>)... (16<sub>5</sub>) è applicabile il teorema di confronto del n. 2b) del Cap. III alle due equazioni (20) e (14) e ne risulta che per ogni  $\lambda \geq \lambda_0^*$  esiste almeno un punto  $x_2$  (dipendente dal parametro  $\lambda$ )  $x_1 < x_2 < \bar{x}_2 < \beta$  dove si annulla uno almeno dei tre determinanti (18<sub>1</sub>), (18<sub>2</sub>), (18<sub>3</sub>).

L'ultima parte del teorema è poi immediata, perchè qualunque siano le costanti  $c_1, c_2$  la funzione

$$y(x, \lambda) = c_1 u(x, \lambda) + c_2 v(x, \lambda)$$

rappresenta un integrale della (14) avente uno zero doppio in  $x_1$ , e secondo che in  $x_2$  si annulli il determinante (18<sub>1</sub>), (18<sub>2</sub>), (18<sub>3</sub>) si possono determinare le costanti  $c_1$  e  $c_2$ , non ambedue nulle, in guisa che siano rispettivamente verificate le (19<sub>1</sub>), (19<sub>2</sub>), (19<sub>3</sub>).

Il teorema è dimostrato.

b) OSSERVAZIONE. - Chiuderemo questo lavoro notando che ove si voglia arrivare a teoremi di oscillazione per gli integrali dell'equazione (14) che ad es. negli estremi  $a$  e  $b$  verifichino le condizioni

$$y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = 0, \quad y(b, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0,$$

bisognerà particularizzare i coefficienti della (14) in guisa che con le nostre notazioni, applicando i teoremi di confronto del Cap. III si possa esser sicuri dell'annullarsi del determinante (18<sub>1</sub>) in un punto interno a  $(x_1, \beta)$ .