ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO MAMBRIANI

La derivazione parziale d'ordine qualunque e la risoluzione dell'equazione di Euler e Poisson

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 11, nº 1-2 (1942), p. 79-97
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1942_2_11_1-2_79_0>

LA DERIVAZIONE PARZIALE D'ORDINE QUALUNQUE E LA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI EULER E POISSON

di ANTONIO MAMBRIANI (Bologna).

1. - Cenno bibliografico. Oggetto.

Nel presente lavoro indichiamo un'applicazione della *derivazione* (*parziale*) *d'ordine qualunque* (1) alla risoluzione della classica equazione alle derivate parziali, detta (2) *equazione di* EULER *e* POISSON,

$$(E) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

dove α e β sono costanti date e $z = z(x, y)$ è la funzione incognita (3).

Eseguiamo in (E) la trasformazione

$$z = (x-y)^{\nu} u, \qquad \text{con } \nu \text{ costante.}$$

---

(1) Sulla *derivazione d'ordine qualunque* (o *derivazione generalizzata*) sono sufficienti, per questo lavoro, le considerazioni da me fatte in una precedente Nota: *La derivazione d'ordine qualunque e la risoluzione dell'equazione ipergeometrica* [Boll. Unione Matem. Italiana, S. 2, Vol. III (1940), pp. 9-18]. L'importante *teoria della derivazione d'ordine qualunque* s'inquadra nel così detto *Calcolo delle operazioni funzionali*, sul quale — com'è ben noto — si hanno i notevoli contributi dell'Eccellenza prof. G. GIORGI. Le basi di tale teoria sono ancora in diversi punti immerse nella nebbia: ben giunge quindi a proposito l'incitamento del GIORGI, in seno al Reale Istituto Nazionale d'Alta Matematica, ad occuparsi di dette basi. [Vedasi, fra i « Problemi, risultati e discussioni » del Seminario del Reale Istituto Nazionale d'Alta Matematica, l'argomento: *Ricerca della valutazione più generale della derivazione a indice frazionario* (febbraio 1941), « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », S. 5, Vol. 2 (1941), pp. 120-121]. Su ciò ho in corso un lavoro con la collaborazione dell'amico prof. L. ONOFRI.

(2) Seguiamo la denominazione introdotta dal DARBOUX. Vedasi la pagina 54 dell'Opera: G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, Paris, Gauthier-Villars, t. II (1915).

(3) Osserviamo subito che i così detti *invarianti*, secondo la teoria di LAPLACE, dell'equazione (E), sono

$$H(x, y) = (1-\alpha)\,\beta\cdot(x-y)^{-2}, \qquad K(x, y) = (1-\beta)\,\alpha\cdot(x-y)^{-2},$$

ed essi non sono in generale nulli. Di più si trova che, quando nè α nè β sono interi, il classico *metodo di Laplace* conduce a equazioni formanti una successione illimitata nei due sensi, e quindi tale metodo non è efficace (vedasi la pagina 66 di loc. cit. in (2)).

Si ottiene l'equazione più generale

$$(E_\nu) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha+\nu}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\beta+\nu}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(\alpha+\beta+\nu-1)\nu}{(x-y)^2}u = 0.$$

Quest'equazione (E_ν) pone in speciale evidenza i tre casi particolari seguenti:

1° Caso $\nu=0$, nel quale (E_ν) si riduce a (E).

2° Caso $\nu=1-\alpha-\beta$, nel quale (E_ν) si riduce all'equazione

$$(E') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1-\alpha}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

che ha — fatto notevole — la stessa forma di (E). Si passa, dunque, da (E) a (E') mediante la trasformazione

$$z = (x-y)^{1-\alpha-\beta} u.$$

3° Caso $\nu = -\alpha = -\beta$, nel quale (E_ν) si riduce all'equazione

$$(E'') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(x-y)^2} u.$$

Le precedenti equazioni s'incontrano nella Geometria in varie questioni importanti [4], e anche nella Fisica matematica in ricerche relative alla propagazione del suono.

Dopo EULER [5], LAPLACE [6] e POISSON [7], tali equazioni sono state studiate ampiamente dal DARBOUX [8], dall'APPELL [9] e da vari

---

[4] Ad esempio, il problema della determinazione delle superficie che hanno per rappresentazione sferica delle loro linee di curvatura un sistema di coniche omofocali (vedasi le pp. 69-70 di loc. cit. in [2]).

[5] L. EULER: *Institutionum Calculi integralis*, Vol. I (1768), Vol. II (1769), Vol. III (1770) Petropoli, Impensis Academiae Imperialis Scientiarum. Cfr. precisamente: Vol. III, pp. 262-271.

[6] P. S. LAPLACE: *Recherches sur le Calcul intégral aux différences partielles.* Histoire de l'Académie Royale des Sciences (Mémoires de Mathématique et de Physique pour l'année 1773), Paris, Imprimerie royale, 1777, pp. 341-402.

[7] S. D. POISSON: *Mémoire sur l'intégrations des équations linéaires aux différences partielles.* Journal de l'École Polytechnique, Cahier 19, t. 12 (1823), pp. 215-248.

[8] G. DARBOUX (cfr. loc. cit. in [2], nel Tomo II delle sue « Leçons sur la théorie générale des surfaces » dedica un intero Capitolo (Capitolo III, pp. 54-70) all'equazione (E) di EULER e POISSON e tale argomento è ripreso in successivi Capitoli. Di tale Autore vedasi pure:

— *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles.* Comptes rendus, t. 95 (1882), pp. 69-72. In questa Nota il DARBOUX studia la particolare equazione (E'').

— *Intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* Comptes rendus, t. 159 (1914), pp. 721-728. In questa Memoria il DARBOUX si riferisce all'equazione $(s^2-rt)xyz+pq(z-px-qy)=0$, da lui incontrata nello studio della « superficie delle onde di Fresnel »: una tale equazione viene ricondotta alla particolare equazione (E) di EULER e POISSON avente $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

[9] P. APPELL: *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles.* Bulletin des Sciences math. et astron., S. 2, t. 6 (1882), pp. 314-318. L'APPELL, qui, estende all'equazione (E) lo studio fatto dal DARBOUX per l'equazione (E''), e, per primo, indica un'espressione di tutte le soluzioni di (E).

altri [10]. Il DARBOUX, relativamente a queste equazioni, esclama [11]: « De toutes « les équations que nous aurions pu choisir, il n'en est aucune dont l'étude « présente plus d'intérêt et puisse fournir autant d'indications précieuses sur « l'intégration des équations linéaires les plus générales ».

In questo lavoro s'eseguisce la risoluzione dell'equazione (E) di EULER e POISSON mediante il *metodo della derivazione generalizzata* che già venne applicato per risolvere l'equazione ipergeometrica [12]. Dapprima si deducono [vedasi n.° 4] sei semplici *equazioni alle derivate generalizzate* [precisamente le equazioni **(5)**, **(6)**, **(7)** e **(V)**, **(VI)**, **(VII)**] ciascuna delle quali include (E). Fra queste equazioni ora citerò soltanto le due seguenti:

$$\underline{D_x^{\alpha} D_y^{\beta} (x-y) D_y^{1-\beta} D_x^{1-\alpha}}\, z=0, \qquad \underline{D_x^{1-\beta} D_y^{1-\alpha} (x-y) D_y^{\alpha} D_x^{\beta} (x-y)^{\alpha+\beta-1}}\, z=0,$$

dove si è posto $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $D_y=\frac{\partial}{\partial y}$ [13]; la prima equazione coincide con (E)

[10] L. LÉVY: *Note sur l'équation d'Euler et de Poisson.* Nouv., Ann. S. 3, t. 8 (1889), pp. 545-552. L'A. si rivolge alla determinazione di particolari classi di soluzioni.

J. LE ROUX: *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* Annales sc. de l'École Norm. Supér., S. 3, t. 12 (1895), pp. 227-316. Importante Memoria nella cui ultima parte (Parte 3ª) l'A. si occupa specificatamente dell'equazione (E) d'EULER e POISSON, riprendendo e estendendo le conclusioni del DARBOUX e dell'APPELL.

V. JAMET: *Sur l'équation d'Euler.* Bulletin des Sciences mathématiques, S. 2, t. 19 (1895), pp. 208-213.

V. JAMET: *Sur une équation aux dérivées partielles.* Annales sc. de l'École Norm. Supér., S. 3, t. 13 (1896), pp. 95-106.

A. BUHL: *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus.* Journal de Math. pure et appliquées, S. 5, t. 10 (1904), pp. 85-129. Interessante Memoria nella quale il BUHL prende largamente in considerazione l'equazione (E) di EULER e POISSON.

[11] Vedasi la pagina 55 dell'Opera di DARBOUX citata in [2]).

[12] Vedasi la mia Nota citata in [1].

[13] La sottolineatura ha l'ufficio d'associare (evitando così l'uso di parentesi) le diverse operazioni (operazioni fattori) che vanno applicate successivamente (nell'ordine da destra verso sinistra) alla funzione $z=z(x, y)$. La parte sottolineata risulta così un unico blocco, ed è una determinata operazione (operazione prodotto). Ad esempio,

$$\underline{D_x^{1-\beta} D_y^{1-\alpha} (x-y) D_y^{\alpha} D_x^{\beta} (x-y)^{\alpha+\beta-1}}$$

è la determinata operazione che ha ordinatamente le operazioni fattori seguenti:

1° Moltiplicazione per la funzione $(x-y)^{\alpha+\beta-1}$.
2° Derivazione parziale, rispetto ad x, d'ordine β.
3° Derivazione parziale, rispetto ad y, d'ordine α.
4° Moltiplicazione per la funzione $x-y$.
5° Derivazione parziale, rispetto ad y, d'ordine $1-\alpha$.
6° Derivazione parziale, rispetto ad x, d'ordine $1-\beta$.

quando α e β sono entrambi interi non negativi, la seconda equazione coincide con (E) quando α e β sono entrambi interi non maggiori dell'unità. Dalle dette sei equazioni discendono, con grande naturalezza e semplicità, sia i risultati ottenuti — con metodi vari — dagli Autori sopra citati, sia parecchie altre conclusioni. Viene trattato prima [vedasi n.° 4] la risoluzione di (E) nell'ipotesi che α e β siano entrambi interi positivi oppure entrambi interi negativi, poi [vedasi n.° 5] la risoluzione di (E) nell'ipotesi che uno almeno dei numeri α e β sia intero (positivo o negativo), infine [vedasi n.° 6] la risoluzione di (E) senza fare alcuna ipotesi su α e β (reali o complessi qualunque). Chiude il lavoro l'indicazione [vedasi n.° 7] di varie espressioni delle soluzioni di (E) mediante integrali definiti semplici o doppi.

Le formule risolutive ottenute per l'equazione (E) presentano grandi somiglianze con quelle trovate per l'equazione ipergeometrica ([14]). Ciò conduce spontaneamente a dedurre, per l'equazione (E) di EULER e POISSON, quelle soluzioni particolari, collegate alle funzioni ipergeometriche, che già vennero indicate dal DARBOUX, dall'APPELL e anche dal BUHL ([15]).

Il metodo qui seguito, con poche varianti, serve a risolvere equazioni alle derivate parziali più generali di (E), ciò che risulterà in altro lavoro.

2. - Due sostituzioni che lasciano invariato (E).

Conviene fare subito l'osservazione seguente:

L'equazione (E) di EULER *e* POISSON *non muta per effetto di una delle due sostituzioni*

$$S_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & x & y\\ \beta & \alpha & y & x\end{pmatrix},\qquad S_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & z\\ 1-\beta & 1-\alpha & (x-y)^{\alpha+\beta-1}\,z\end{pmatrix}\quad ([16]).$$

L'affermazione è evidente nel caso della sostituzione S_1 (naturalmente s'intende che la funzione incognita z non muti), discende subito nel caso della sostituzione S_2, se si ricorda [vedasi n.° 1] che, eseguendo in (E) la trasformazione

$$z=(x-y)^{1-\alpha-\beta}\,u,$$

s'ottiene l'equazione (E') avente la stessa forma di (E).

Si nota che è $S_1^2=1$, $S_2^2=1$.

([14]) Vedasi la mia Nota citata in ([1]).

([15]) Vedasi il lavoro del BUHL citato in ([10]).

([16]) Le sostituzioni S_1 e S_2 — conformemente al simbolismo più comune — sostituiscono a ciascuna quantità della riga superiore ordinatamente la quantità sottostante della riga inferiore.

3. - Deduzione di sei semplici equazioni, alle derivate parziali generalizzate includenti (E).

a) Usando i simboli D_x e D_y, ordinatamente in luogo di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, l'equazione (E) (moltiplicata per $x-y$) si scrive

$$(1) \qquad (x-y)D_x D_y z + \alpha D_y z - \beta D_x z = 0,$$

od anche

$$(2) \qquad \{(x-y)D_x + \alpha\} D_y z - \beta D_x z = 0.$$

Introduciamo ora le d e r i v a t e p a r z i a l i g e n e r a l i z z a t e. Osserviamo che le due operazioni

$$(x-y)D_x + \alpha, \qquad \underline{D_x^\alpha (x-y) D_x^{1-\alpha}}$$

stanno in una relazione molto stretta ([17]): se α è intero positivo o nullo, esse coincidono; in caso contrario, la prima operazione è una specificazione della seconda. Osservazione analoga vale per le due operazioni, più semplici delle precedenti,

$$D_x, \qquad D_x^\alpha D_x^{1-\alpha}.$$

Consideriamo, allora, l'e q u a z i o n e a l l e d e r i v a t e p a r z i a l i g e n e r a l i z z a t e

$$(3) \qquad \underline{D_x^\alpha (x-y) D_x^{1-\alpha}} D_y z - \beta D_x^\alpha D_x^{1-\alpha} z = 0,$$

ottenuta materialmente da (2) sostituendo, nel suo primo membro, all'operazione $(x-y)D_x + \alpha$, figurante nel primo termine, l'altra $\underline{D_x^\alpha (x-y) D_x^{1-\alpha}}$, e all'operazione D_x, figurante nel secondo termine, l'altra $D_x^\alpha D_x^{1-\alpha}$. Da quanto sopra s'è detto risulta quindi: *Se α è intero positivo o nullo, le equazioni (E) e* (3) *coincidono*; *in caso contrario*, (E) *è una specificazione di* (3). Notiamo ora che, invertendo in (3) l'ordine delle derivazioni D_y e $D_x^{1-\alpha}$ ([18]) e tenendo presente che β è una costante, l'equazione (3) si può scrivere

$$\underline{D_x^\alpha (x-y) D_y D_x^{1-\alpha}} z - \underline{D_x^\alpha \beta D_x^{1-\alpha}} z = 0,$$

e anche, come si vede facilmente,

$$(4) \qquad \underline{D_x^\alpha \{(x-y)D_y - \beta\} D_x^{1-\alpha}} z = 0.$$

Procedendo in modo analogo, possiamo introdurre in (4) altre derivate parziali generalizzate: basta semplicemente sostituire, in (4), l'operazione

$$(x-y)D_y - \beta \qquad \text{coll'altra} \qquad \underline{D_y^\beta (x-y) D_y^{1-\beta}}$$

([17]) Vedasi le pagine 12 e 13 della mia Nota citata in ([1]).

([18]) Tale i n v e r s i o n e non dà qui luogo ad obiezioni in virtù della definizione di derivata generalizzata e della necessaria natura della nostra funzione incognita $z(x, y)$.

[quando β è intero positivo o nullo, queste due operazioni coincidono; in caso contrario, la prima operazione è una specificazione della seconda]. Si giunge così all' importante conclusione seguente:

L'equazione, di forma semplice,

(5) ([19]) $$\underline{D_x^\alpha D_y^\beta (x-y) D_y^{1-\beta} D_x^{1-\alpha}}\, z=0,$$

coincide con (E) *quando* α *e* β *sono entrambi interi non negativi, include* (E) *in caso contrario.*

Si può notare pure che è

$$(x-y)D_y-\beta=\underline{(x-y)^{1-\beta}D_y(x-y)^\beta}, \quad \text{qualunque sia } \beta,$$

onde (4) si può scrivere

(6) $$\underline{D_x^\alpha (x-y)^{1-\beta} D_y (x-y)^\beta D_x^{1-\alpha}}\, z=0,$$

equazione, quindi, *che include* (E), *e che coincide con* (E) *quando* α *è intero positivo o nullo* (β *potendo essere qualunque*).

b) Eseguiamo ora in (**5**) e (6) la sostituzione S_1 [vedasi n.° 2]: s'ottengono, manifestamente, delle equazioni pure includenti (E). Precisamente, si trova che (**5**) non muta — tenendo sempre conto dell' invertibilità dell' ordine delle derivazioni parziali ([20]) —, mentre (6) diventa

(7) $$\underline{D_y^\beta (x-y)^{1-\alpha} D_x (x-y)^\alpha D_y^{1-\beta}}\, z=0,$$

equazione che include (E), *e che coincide con* (E) *quando* β *è intero positivo o nullo* (α *potendo essere qualunque*).

c) Eseguiamo poi in (**5**), (6) e (7) la sostituzione S_2 [vedasi n.° 2]: s'ottengono altre tre equazioni includenti (E). Precisamente:

Le tre equazioni alle derivate generalizzate

(V) $$\underline{D_x^{1-\beta} D_y^{1-\alpha} (x-y) D_y^\alpha D_x^\beta (x-y)^{\alpha+\beta-1}}\, z=0,$$

(VI) $$\underline{D_x^{1-\beta} (x-y)^\alpha D_y (x-y)^{1-\alpha} D_x^\beta (x-y)^{\alpha+\beta-1}}\, z=0,$$

(VII) $$\underline{D_y^{1-\alpha} (x-y)^\beta D_x (x-y)^{1-\beta} D_y^\alpha (x-y)^{\alpha+\beta-1}}\, z=0.$$

includono pure tutte l'equazione (E):

la prima equazione coincide con (E) *quando* α *e* β *sono entrambi interi non maggiori dell'unità,*

([19]) Una numerazione viene scritta in grassetto quando si vuole marcare l' ufficio speciale o il particolare interesse dell'uguaglianza o dell'espressione numerata.

([20]) Vedasi il richiamo ([18]).

la seconda equazione c o i n c i d e *con* (E) *quando* β *è intero non maggiore dell'unità* (α *potendo essere qualunque*),

la terza equazione c o i n c i d e *con* (E) *quando* α *è intero non maggiore dell'unità* (β *potendo essere qualunque*).

d) Dalle equazioni (5), (6) e (7) e dalle (V), (VI) e (VII) discendono le conclusioni che seguono.

4. - Risoluzione di (E) quando α e β sono entrambi interi positivi o entrambi interi negativi.

a) Supponiamo che α *e* β *siano entrambi interi positivi.* Allora l'equazione (E) si può porre e s a t t a m e n t e nella forma (5), cioè

$$\underline{D_x^\alpha D_y^\beta (x-y) D_y^{1-\beta} D_x^{1-\alpha}} z = 0,$$

da cui segue che le soluzioni z di (E) sono le seguenti:

$$z = \underline{D_x^{\alpha-1} D_y^{\beta-1} (x-y)^{-1} D_y^{-\beta} D_x^{-\alpha}} 0. \tag{8}$$

Ora si può scrivere

$$D_y^{-\beta} D_x^{-\alpha} 0 = \sum_{k=0}^{\beta-1} \varphi_k(x) \cdot (x-y)^k + \sum_{k=0}^{\alpha-1} \psi_k(y) \cdot (x-y)^k, \tag{9}$$

dove le funzioni $\varphi_k(x)$, della sola x, e $\psi_k(y)$, della sola y, sono a r b i t r a r i e, condizionate solamente al fatto che al secondo membro di (9) sia applicabile $D_x^\alpha D_y^\beta$. Segue poi

$$(x-y)^{-1} D_y^{-\beta} D_x^{-\alpha} 0 = \frac{\varphi_0(x) + \psi_0(y)}{x-y} + \sum_{k=1}^{\beta-1} \varphi_k(x) \cdot (x-y)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\alpha-1} \psi_k(y) \cdot (x-y)^{k-1}.$$

Applichiamo qui ad ambo i membri l'operazione $D_x^{\alpha-1} D_y^{\beta-1}$ (avendo, naturalmente, la condizione che $\varphi_0(x)$ abbia le prime $\alpha-1$ derivate e $\psi_0(y)$ le prime $\beta-1$ derivate); s'ottiene

$$\underline{D_x^{\alpha-1} D_y^{\beta-1} (x-y)^{-1} D_y^{-\beta} D_x^{-\alpha}} 0 = D_x^{\alpha-1} D_y^{\beta-1} \frac{\varphi_0(x) + \psi_0(y)}{x-y},$$

dove il primo membro coincide col secondo membro di (8). Possiamo quindi concludere [ponendo $\varphi_0(x) = X$, $\psi_0(y) = -Y$, unicamente per dare al risultato una certa simmetria]:

Quando α *e* β *sono entrambi* i n t e r i p o s i t i v i, *le soluzioni di* (E) *hanno l'espressione elegante* [21]

$$z(x, y) = \frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial x^{\alpha-1} \partial y^{\beta-1}} \frac{X-Y}{x-y}, \tag{10}$$

([21]) Così s'esprime il DARBOUX: vedasi la pagina 65 dell'Opera citata in ([2]).

dove $X=X(x)$ è una funzione arbitraria, della sola x, avente le prime α derivate, e $Y=Y(y)$ è una funzione arbitraria, della sola y, avente le prime β derivate ([22]).

Osserviamo che da (10) segue

$$z(x, y)=\frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial x^{\alpha-1}\partial y^{\beta-1}}\frac{X}{x-y}-\frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial x^{\alpha-1}\partial y^{\beta-1}}\frac{Y}{x-y}=\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}}\frac{(\beta-1)!\,X}{(x-y)^{\beta}}+\frac{\partial^{\beta-1}}{\partial y^{\beta-1}}\frac{(-1)^{\alpha}(\alpha-1)!\,Y}{(x-y)^{\alpha}};$$

risulta cioè:

Quando α e β sono entrambi interi positivi, le soluzioni di (E) hanno anche l'espressione

$$z(x, y)=\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}}\frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta}}+\frac{\partial^{\beta-1}}{\partial y^{\beta-1}}\frac{\psi(y)}{(x-y)^{\alpha}},\tag{11}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione arbitraria, della sola x, avente le prime α derivate, e $\psi(y)$ è una funzione arbitraria, della sola y, avente le prime β derivate.

Esempi. - L'equazione

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

[corrispondente al caso $\alpha=\beta=1$] ha — applicando (10) — le soluzioni

$$z(x, y)=\frac{X-Y}{x-y},$$

dove $X=X(x)$, $Y=Y(y)$ sono funzioni arbitrarie derivabili.

L'equazione

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

[corrispondente al caso $\alpha=1$, $\beta=2$] ha — applicando (10) — le soluzioni

$$z(x, y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{X-Y}{x-y}=\frac{X-Y}{(x-y)^2}-\frac{Y'}{x-y},$$

dove $X=X(x)$ è funzione arbitraria derivabile e $Y=Y(y)$ è funzione arbitraria con le derivate Y' e Y''.

b) Supponiamo invece che *α e β siano entrambi interi negativi.* Allora l'equazione (E) si può porre e s a t t a m e n t e nella forma (V), cioè

$$\underline{D_x^{1-\beta}D_y^{1-\alpha}(x-y)D_y^{\alpha}D_x^{\beta}(x-y)^{\alpha+\beta-1}}\,z=0,$$

([22]) La condizione dell'esistenza di tali derivate per X e per Y discende dal fatto che la $z(x, y)$, data da (10), per verificare all'equazione (E) deve avere la derivata

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\frac{X-Y}{x-y}.$$

da cui segue che le soluzioni di (E) sono le seguenti:

$$z=\underline{(x-y)^{1-\alpha-\beta}D_x^{-\beta}D_y^{-\alpha}(x-y)^{-1}D_y^{\alpha-1}D_x^{\beta-1}}\,0.$$

Operando analogamente a quanto s'è fatto ad **a**), si conclude:

Quando α e β sono entrambi interi negativi, le soluzioni di (E) hanno l'espressione elegante

$$(12)\qquad z(x,\,y)=(x-y)^{1-\alpha-\beta}\frac{\partial^{-\alpha-\beta}}{\partial y^{-\alpha}\partial x^{-\beta}}\frac{X-Y}{x-y},$$

dove $X=X(x)$ è una funzione arbitraria, della sola x, avente le prime $1-\beta$ derivate, e $Y=Y(y)$ è una funzione arbitraria, della sola y, avente le prime $1-\alpha$ derivate.

Analogamente ad **a**), si conclude ancora:

Quando α e β sono entrambi interi negativi, le soluzioni di (E) hanno anche l'espressione

$$(13)\qquad z(x,\,y)=\frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}\left\{\frac{\partial^{-\beta}}{\partial x^{-\beta}}\frac{\varphi(x)}{(x-y)^{1-\alpha}}+\frac{\partial^{-\alpha}}{\partial y^{-\alpha}}\frac{\psi(y)}{(x-y)^{1-\beta}}\right\},$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione arbitraria, della sola x, avente le prime $1-\beta$ derivate, e $\psi(y)$ è una funzione arbitraria, della sola y, avente le prime $1-\alpha$ derivate.

Si noterà che (12) e (13) s'ottengono semplicemente eseguendo su (10) e (11) la sostituzione S_2 [vedasi n.° 2].

Esempi. - L'equazione

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

[corrispondente al caso $\alpha=\beta=-1$] ha — applicando (12) — le soluzioni

$$z(x,\,y)=(x-y)^3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\frac{X-Y}{x-y}=-2(X-Y)+(x-y)(X'+Y'),$$

dove $X=X(x)$, $Y=Y(y)$ sono funzioni arbitrarie con le derivate X', X'', Y', Y''.

L'equazione

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

[corrispondente al caso $\alpha=-1$, $\beta=-2$] ha — applicando (12) — le soluzioni

$$z(x,\,y)=(x-y)^4\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\frac{X-Y}{x-y}=6\,(X-Y)-2(x-y)(2X'+Y')+(x-y)^2X'',$$

dove $X=X(x)$, $Y=Y(y)$ sono funzioni arbitrarie con le derivate X', X'', X''', Y', Y''.

5. - Risoluzione di (E) quando uno dei numeri α, β è intero (positivo o negativo).

a) Supponiamo che *sia α intero positivo* (*e β qualunque*). Allora (E) si può porre esattamente nella forma (6), cioè

$$\underline{D_x^{\alpha}(x-y)^{1-\beta}D_y(x-y)^{\beta}D_x^{1-\alpha}}\,z=0,$$

da cui segue che le soluzioni z di (E) sono le seguenti:

$$z=\underline{D_x^{\alpha-1}(x-y)^{-\beta}D_y^{-1}(x-y)^{\beta-1}D_x^{-\alpha}}\,0,$$

od anche, ponendo in evidenza la funzione arbitraria che viene introdotta da D_y^{-1},

$$z=\underline{D_x^{\alpha-1}(x-y)^{-\beta}}\left\{\varphi(x)+\int(x-y)^{\beta-1}D_x^{-\alpha}\,0\cdot dy\right\},\tag{14}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione arbitraria, della sola x, avente le prime α derivate, e l'integrale indefinito rappresenta una particolare funzione. Avendosi

$$D_x^{-\alpha}\,0=\sum_{k=0}^{\alpha-1}(x-y)^k\,\psi_k(y),$$

dove le $\psi_k(y)$ sono funzioni arbitrarie della sola y, la (14) diventa

$$z=\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}}\frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta}}+\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{\alpha-1}(x-y)^{-\beta}\int(x-y)^{k+\beta-1}\,\psi_k(y)dy.\tag{15}$$

Queste funzioni arbitrarie $\psi_k(y)$ si possono conglobare in una sola funzione arbitraria $\psi(y)$. Invero, in (15) il termine sotto il segno sommatorio si può scrivere [come discende eseguendo successive integrazioni per parti, nelle quali il fattore finito sia sempre la potenza di $x-y$]

$$\begin{aligned}&(x-y)^{k-1}\,\psi_k^{(-1)}(y)+(k+\beta-1)(x-y)^{k-2}\,\psi_k^{(-2)}(y)+\dots\\&\qquad+(k+\beta-1)(k+\beta-2)\dots(\beta+1)\,\psi_k^{(-k)}(y)+\\&\qquad+(k+\beta-1)(k+\beta-2)\dots(\beta+1)\beta\,(x-y)^{-\beta}\int(x-y)^{\beta-1}\,\psi_k^{(-k)}(y)\,dy,\end{aligned}$$

dove $\psi_k^{(-1)}(y)$ è una particolare primitiva di $\psi_k(y)$, $\psi_k^{(-2)}(y)$ è una particolare primitiva di $\psi_k^{(-1)}(y)$, e così via. Applicando all'espressione ora ottenuta l'operazione $D_x^{\alpha-1}$, resta solo il contributo dato dall'ultimo termine. Pertanto l'ultimo termine del secondo membro di (15) è uguale a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{\alpha-1}k!\binom{k+\beta-1}{k}(x-y)^{-\beta}\int(x-y)^{\beta-1}\,\psi_k^{(-k)}(y)\,dy=\\&\qquad=\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}}\left[(x-y)^{-\beta}\int(x-y)^{\beta-1}\left\{\sum_{k=0}^{\alpha-1}k!\binom{k+\beta-1}{k}\psi_k^{(-k)}(y)\right\}dy\right],\end{aligned}$$

dove la quantità fra graffe costituisce una sola funzione arbitraria $\psi(y)$.

Da (15) risulta quindi:

Quando α è intero positivo (e β qualunque), le soluzioni z di (E) si possono esprimere così:

$$z(x, y) = \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta} + \frac{1}{(x-y)^\beta} \int_{y_0}^{y} \frac{\psi(y)dy}{(x-y)^{1-\beta}} \right\}, \tag{16}$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono funzioni convenientemente arbitrarie, (l'espressione fra graffe dà le soluzioni di (E) quand'è $\alpha=1$ e β qualunque).

Osserviamo ora che dall'equazione (VII), includente (E), segue

$$z = (x-y)^{1-\alpha-\beta} D_y^{-\alpha} (x-y)^{\beta-1} \underline{D_x^{-1} (x-y)^{-\beta} D_y^{\alpha-1}\, 0}\,; \tag{17}$$

ma, essendo α intero positivo,

$$\underline{D_x^{-1}(x-y)^{-\beta} D_y^{\alpha-1}}\, 0 = \underline{D_x^{-1}(x-y)^{-\beta}}\, 0 = D_x^{-1}\, 0 = \Psi(y),$$

con $\Psi(y)$ funzione arbitraria della sola y; onde (17) si riduce a

$$z = (x-y)^{1-\alpha-\beta} D_y^{-\alpha} \{ (x-y)^{\beta-1}\, \Psi(y) \}. \tag{17'}$$

Si ha dunque che le soluzioni z di (E) sono *fra* le funzioni

$$\begin{aligned} z(x, y) = {} & (x-y)^{1-\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\alpha-1} (x-y)^k \varphi_k(x) + \\ & + (x-y)^{1-\alpha-\beta} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} (x-y)^{\beta-1} \Psi(y)\, dy^\alpha, \end{aligned} \tag{17''}$$

dove le $\varphi_k(x)$ sono funzioni arbitrarie della sola x. Ora notiamo che si possono fare coincidere i primi termini nei secondi membri di (16) e (17'') [supponendo che nella (16) si sia distribuita l'operazione $\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}}$ ai due termini della graffa]: basta prendere

$$\varphi_k(x) = (-1)^{\alpha-k-1} \binom{\alpha-1}{k} \beta(\beta+1) \ldots (\alpha+\beta-k-2)\, \varphi^{(k)}(x).$$

Pertanto possiamo anche concludere:

Quando α è intero positivo (e β qualunque), le soluzioni z di (E) hanno anche l'espressione

$$z(x, y) = \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta} + \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi(y)\, dy^\alpha}{(x-y)^{1-\beta}}, \tag{18}$$

dove $\varphi(x)$ e $\Psi(y)$ sono funzioni convenientemente arbitrarie.

Esempio. - L'equazione

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial y}-\beta\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

[corrispondente al caso $\alpha=2$, β qualunque] ha — applicando (16) — le soluzioni

$$z(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta}+\frac{1}{(x-y)^\beta}\int_{y_0}^{y}\frac{\psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\beta}}\right\},$$

od anche — applicando (18) — le soluzioni

$$z(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta}+\frac{1}{(x-y)^{\beta+1}}\int_{y_0}^{y}\int_{y_0}^{y}\frac{\Psi(y)\,dy^2}{(x-y)^{1-\beta}}.$$

b) Supponiamo che *sia α intero negativo* (*e β qualunque*). Allora, operando su (VII), che coincide con (E), e su (6), che include (E), analogamente a quanto si è fatto ad **a)** sulle (6) e (VII) rispettivamente, si stabilisce che *le soluzioni z di* (E) *hanno l'espressione*

$$(19)\qquad z(x,y)=(x-y)^{1-\alpha-\beta}\frac{\partial^{-\alpha}}{\partial y^{-\alpha}}\left\{\frac{\psi(y)}{(x-y)^{1-\beta}}+\frac{1}{(x-y)^{1-\beta}}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)\,dx}{(x-y)^\beta}\right\},$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono funzioni convenientemente arbitrarie. Le soluzioni di (E) *hanno anche l'espressione*

$$(20)\qquad z(x,y)=(x-y)^{1-\alpha-\beta}\frac{\partial^{-\alpha}}{\partial y^{-\alpha}}\frac{\psi(y)}{(x-y)^{1-\beta}}+\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi(x)\,dx^{1-\alpha}}{(x-y)^\beta},$$

dove $\Phi(x)$ e $\psi(y)$ sono funzioni convenientemente arbitrarie.

Esempio. - L'equazione

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}+\beta\frac{\partial z}{\partial x}$$

[corrispondente al caso $\alpha=-1$, β qualunque] ha — applicando (19) — le soluzioni

$$z(x,y)=(x-y)^{2-\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\psi(y)}{(x-y)^{1-\beta}}+\frac{1}{(x-y)^{1-\beta}}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)\,dx}{(x-y)^\beta}\right\},$$

o anche — applicando (20) — le soluzioni

$$z(x,y)=(x-y)^{2-\beta}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\psi(y)}{(y-y)^{1-\beta}}+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi(x)\,dx^2}{(x-y)^\beta}.$$

c) Qualora *sia β intero positivo* (*e α qualunque*), eseguendo su (16) e (18) la sostituzione S_1 del n.° 2, risulta che le soluzioni (E) hanno le espressioni seguenti:

$$z(x, y) = \frac{\partial^{\beta-1}}{\partial y^{\beta-1}} \left\{ \frac{\psi(y)}{(x-y)^{\alpha}} + \frac{1}{(x-y)^{\alpha}} \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(x)\, dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right\}, \tag{21}$$

$$z(x, y) = \frac{\partial^{\beta-1}}{\partial y^{\beta-1}} \frac{\psi(y)}{(x-y)^{\alpha}} + \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}} \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(x)\, dx^{\beta}}{(x-y)^{1-\alpha}}. \tag{22}$$

Si noterà che, per conservare l'analogia delle notazioni, nell'eseguire la sostituzione S_1 si è inoltre mutato le lettere φ, ψ, Ψ ordinatamente in Ψ, φ, Φ, inoltre si è tenuta invariata la differenza $x-y$.

Quando *sia invece β intero negativo* (*e α qualunque*), operando analogamente colla sostituzione S_1 sulle (19) e (20), s'ottiene che le soluzioni di (E) hanno le espressioni seguenti:

$$z(x, y) = (x-y)^{1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{-\beta}}{\partial x^{-\beta}} \left\{ \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{1-\alpha}} + \frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}} \int_{y_0}^{y} \frac{\psi(y)\, dy}{(x-y)^{\alpha}} \right\}, \tag{23}$$

$$z(x, y) = (x-y)^{1-\alpha-\beta} \frac{\partial^{-\beta}}{\partial x^{-\beta}} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{1-\alpha}} + \int_{y_0}^{y} \dots \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi(y)\, dy^{1-\beta}}{(x-y)^{\alpha}}. \tag{24}$$

6. - Risoluzione di (E) quando α e β sono qualunque.

Le costanti α e β siano ora qualunque (*reali o complesse*). Mostriamo, allora, che le soluzioni dell'equazione (E) di EULER e POISSON s'ottengono modificando molto semplicemente le soluzioni trovate in precedenza per (E) quando sono interi α e β, o uno almeno di essi.

a) Riprendiamo dal n.° 5 le espressioni seguenti:

$$D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta}}, \qquad D_y^{\beta-1} \frac{\psi(y)}{(x-y)^{\alpha}},$$

$$(x-y)^{1-\alpha-\beta} D_x^{-\beta} \frac{\varphi_1(x)}{(x-y)^{1-\alpha}}, \qquad (x-y)^{1-\alpha-\beta} D_y^{-\alpha} \frac{\psi_1(y)}{(x-y)^{1-\beta}},$$

$$D_y^{\beta-1} \left\{ (x-y)^{-\alpha} \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(x)\, dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right\}, \qquad D_x^{\alpha-1} \left\{ (x-y)^{-\beta} \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi(y)\, dy}{(x-y)^{1-\beta}} \right\},$$

$$(x-y)^{1-\alpha-\beta} D_y^{-\alpha} \left\{ (x-y)^{\beta-1} \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_1(x)\, dx}{(x-y)^{\beta}} \right\}, \qquad (x-y)^{1-\alpha-\beta} D_x^{-\beta} \left\{ (x-y)^{\alpha-1} \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi_1(y)\, dy}{(x-y)^{\alpha}} \right\},$$

ciascuna delle quali contiene una funzione opportunamente arbitraria, dipendente solo da x [come $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$] oppure solo da y [come $\psi(y)$,

$\psi_1(y)$, $\Psi(y)$, $\Psi_1(y)$]. Ciascuna di queste espressioni è soluzione di (E) quando una delle costanti α e β è intera in modo che risulti intero non negativo l'ordine della derivazione indicata nell'espressione stessa, mentre l'altra costante può essere qualunque.

Analogamente a quanto è stato posto per derivate d'ordine qualunque ([23]), poniamo ora — essendo n intero positivo —

$$ {}_{x_0}D_x^{-n} f(x, y) = \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx^n, $$

dove il simbolo a primo membro si leggerà: derivata d'ordine $-n$, fatta (sempre) rispetto ad x e partendo da x_0, della funzione $f(x, y)$. Se nel precedente quadro di soluzioni si muta materialmente D_x in ${}_{x_0}D_x$ e D_y in ${}_{y_0}D_y$, s'ottiene il nuovo *quadro* Q di funzioni:

$$ (25) \qquad {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta}, $$

$$ (25') \qquad {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha}, $$

$$ (26) \qquad \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}\; {}_{x_0}D_x^{-\beta} \frac{\varphi_1(x)}{(x-y)^{1-\alpha}}, $$

$$ (26') \qquad \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}\; {}_{y_0}D_y^{-\alpha} \frac{\psi_1(y)}{(x-y)^{1-\beta}}, $$

$$ (27) \qquad {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{(x-y)^\alpha} \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(x)\, dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right\}, $$

$$ (27') \qquad {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \left\{ \frac{1}{(x-y)^\beta} \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi(y)\, dy}{(x-y)^{1-\beta}} \right\}, $$

$$ (28) \qquad \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}\; {}_{y_0}D_y^{-\alpha} \left\{ \frac{1}{(x-y)^{1-\beta}} \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_1(x)\, dx}{(x-y)^\beta} \right\}, $$

$$ (28') \qquad \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}\; {}_{x_0}D_x^{-\beta} \left\{ \frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}} \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi_1(y) dy}{(x-y)^\alpha} \right\}, $$

dove in ognuna si supporrà ora che una delle costanti α e β sia intera in modo che risulti intero negativo l'ordine della derivazione indicata, inoltre x_0 e y_0 siano scelti tali che le espressioni scritte abbiano senso. È già risultato che (25), (25'), (26) e (26') sono tante soluzioni di (E) [vedasi formule (20), (24),

([23]) Vedasi la pagina 11 della mia Nota citata in ([1]).

(22) e (18) ordinatamente]; ora si può provare che (27), (27'), (28) e (28') sono altre soluzioni della corrispondente equazione (E). Dimostriamo anzi di più:

Le funzioni del quadro Q sono soluzioni di (E) anche quando gli ordini di derivazione parziale sono qualunque, e ciò, sempre, sotto convenienti ipotesi sulle funzioni arbitrarie.

Proviamo quest'affermazione per (25), cioè per

$$z_1(x, y) = {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta}.$$

Sia $\varphi(x)$ arbitraria tale da aversi

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = {}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \beta \, {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \, \partial y} = \beta \, {}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}}.$$

Sostituendo queste derivate nel primo membro di (E), moltiplicato per $x-y$, si ha

$$\beta \left\{ (x-y) \, {}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}} + \alpha \, {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}} \right\} - \beta \, {}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta},$$

espressione uguale a zero in quanto è ([24])

$${}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta} = {}_{x_0}D_x^{\alpha} \left\{ (x-y) \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}} \right\} = (x-y) \, {}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}} + \alpha \, {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}}.$$

Proviamo l'asserzione precedente relativamente a (27), cioè per

$$z_2(x, y) = {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{(x-y)^\alpha} \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(x) \, dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right\} = {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\mathfrak{J}(x, y)}{(x-y)^\alpha},$$

indicando, per brevità, con $\mathfrak{J}(x, y)$ l'integrale rispetto ad x. Per $\Phi(x)$ arbitraria conveniente, risulta

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = -\alpha \, {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\mathfrak{J}(x, y)}{(x-y)^{\alpha+1}} + {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\Phi(x)}{x-y},$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial y} = {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{\mathfrak{J}(x, y)}{(x-y)^\alpha} = {}_{y_0}D_y^{\beta} \left\{ (x-y) \frac{\mathfrak{J}(x, y)}{(x-y)^{\alpha+1}} \right\} = (x-y) \, {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{\mathfrak{J}(x, y)}{(x-y)^{\alpha+1}} - \beta \, {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\mathfrak{J}(x, y)}{(x-y)^{\alpha+1}},$$

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = -\alpha \, {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{\mathfrak{J}(x, y)}{(x-y)^{\alpha+1}} + {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{\Phi(x)}{x-y}.$$

([24]) Vedasi la pagina 12, formula (4), della mia Nota citata in ([1]).

Sostituendo queste derivate nel primo membro di (E), moltiplicato per $x-y$, e riducendo, si ha :

$$(x-y)\,{}_{y_0}D_y^\beta \frac{\Phi(x)}{x-y} - \beta\,{}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\Phi(y)}{x-y} = {}_{y_0}D_y^\beta \left\{ (x-y) \frac{\Phi(x)}{x-y} \right\} = {}_{y_0}D_y^\beta\, \Phi(x) = 0.$$

In modo analogo si ragiona per le altre espressioni.

Le varie somme di due qualunque funzioni, del quadro Q, contenenti funzioni arbitrarie non dipendenti dalla stessa variabile, sono tante espressioni delle soluzioni di (E). Consideriamo, ad esempio, le somme

$$(29)\qquad z(x,y) = {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta} + {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha},$$

$$(30)\qquad z(x,y) = \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}} \left[{}_{x_0}D_x^{-\beta} \frac{\varphi_1(x)}{(x-y)^{1-\alpha}} + {}_{y_0}D_y^{-\alpha} \frac{\psi_1(y)}{(x-y)^{1-\beta}} \right],$$

$$(31)\qquad z(x,y) = {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{(x-y)^\alpha} \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi(x)\,dx}{(x-y)^{1-\alpha}} \right\} + {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \left\{ \frac{1}{(x-y)^\beta} \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi(y)\,dy}{(x-y)^{1-\beta}} \right\},$$

$$(32)\qquad z(x,y) = \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}} \left[{}_{y_0}D_y^{-\alpha} \left\{ \frac{1}{(x-y)^{1-\beta}} \int_{x_0}^{x} \frac{\Phi_1(x)\,dx}{(x-y)^\beta} \right\} + {}_{x_0}D_x^{-\beta} \left\{ \frac{1}{(x-y)^{1-\alpha}} \int_{y_0}^{y} \frac{\Psi_1(y)\,dy}{(x-y)^\alpha} \right\} \right].$$

Non darò qui la dimostrazione completa della proposizione enunciata, occorrendo qualche altra premessa sulla derivazione generalizzata. Mi limiterò ad accennare alla via della dimostrazione. Riferiamoci, ad esempio, a (29). Intanto, in (29) le $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono funzioni arbitrarie compatibilmente alla condizione che esistano le derivate figuranti nel secondo membro di (29) e le seguenti altre :

$$ {}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta}, \qquad {}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}}, \qquad {}_{x_0}D_x^{\alpha} \frac{\varphi(x)}{(x-y)^{\beta+1}},$$

$$ {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha}, \qquad {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{\psi(y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \qquad {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{\psi(y)}{(x-y)^{\alpha+1}}.$$

Quando α e β sono entrambi interi positivi, i due) termini del secondo membro di (29) diventano indipendenti da x_0 e da y_0, e (29 coincide colla formula (11) : in tale caso, dunque, (29) dà proprio tutte le soluzioni di (E). Per provare che (29) ci dà sempre tutte le soluzioni di (E), basterà mostrare ([25]) che, pre-

([25]) Cfr., ad esempio, É. PICARD : *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la phisique mathématique*. Paris, Gauthier-Villars, 1927. Vedasi, precisamente, pp. 102-115.

fissate due funzioni $f(x)$ e $g(y)$, derivabili, con derivate continue e inoltre con $f(x_0)=g(y_0)$, si possono determinare $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ in modo che sia

$$\begin{cases} \left[{}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \dfrac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta} + {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \dfrac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha} \right]_{y=y_0} = f(x), \\ \left[{}_{x_0}D_x^{\alpha-1} \dfrac{\varphi(x)}{(x-y)^\beta} + {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \dfrac{\psi(y)}{(x-y)^\alpha} \right]_{x=x_0} = g(y). \end{cases}$$

Esprimendo le derivate generalizzate figuranti in questo sistema mediante integrali, s'ottiene un sistema d'equazioni integrali nelle funzioni incognite $\varphi(x)$ e $\psi(y)$.

b) Riprendiamo dal n.° 4 le espressioni seguenti :

$$(33) \qquad D_x^{\alpha-1} D_y^{\beta-1} \frac{X-Y}{x-y}, \qquad\qquad (33') \qquad \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}} D_x^{-\beta} D_y^{-\alpha} \frac{X-Y}{x-y},$$

nelle quali $X=X(x)$ e $Y=Y(y)$ sono funzioni convenientemente arbitrarie. Si è trovato [vedasi n.° 4] che (33) dà le soluzioni di (E) quando α e β sono entrambi interi positivi e che (33') dà le soluzioni di (E) quando α e β sono entrambi interi negativi. Analogamente a quanto s'è fatto ad **a)**, cambiamo, in (33) e (33'), D_x in ${}_{x_0}D_x$ e D_y in ${}_{y_0}D_y$, dove x_0 e y_0 sono convenienti costanti prefissate : s'ottiene

$$(34) \qquad {}_{x_0}D_x^{\alpha-1}\, {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{X-Y}{x-y}, \qquad\qquad (34') \qquad \frac{1}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}\, {}_{x_0}D_x^{-\beta}\, {}_{y_0}D_y^{-\alpha} \frac{X-Y}{x-y},$$

dove supponiamo ora che, in (34), α e β siano interi $\leqslant 0$, e che, in (34'), α e β siano interi >0. Risulta allora che (34) e (34') sono soluzioni della corrispondente equazione (E) ; anzi dimostriamo più generalmente:

Le funzioni (34) *e* (34') *sono soluzioni di* (E) *anche quando* α *e* β *sono qualunque, e ciò, sempre, sotto le naturali ipotesi sulle funzioni arbitrarie* $X=X(x)$ *e* $Y=Y(y)$.

Proviamo quest'affermazione per (34), analogamente si procederebbe per (34'). Anzitutto X e Y saranno tali che (34) abbia senso e inoltre tali che, detta Z la funzione definita da (34), esistano le derivate

$$\frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$$

e siano date ordinatamente da

$${}_{x_0}D_x^{\alpha}\, {}_{y_0}D_y^{\beta-1} \frac{X-Y}{x-y}, \qquad {}_{x_0}D_x^{\alpha-1}\, {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{X-Y}{x-y}, \qquad {}_{x_0}D_x^{\alpha}\, {}_{y_0}D_y^{\beta} \frac{X-Y}{x-y}.$$

Sostituiamo queste derivate nel primo membro di (E). Si trova che (E) è soddisfatta, come segue dal notare che è

$${}_{x_0}D_x^{\alpha}\, {}_{y_0}D_y^{\beta} (X-Y) = 0,$$

e d'altra parte, in virtù di una formula d'ALEMBERT estesa alle derivate parziali ([26]) e alla derivazione generalizzata, che è

$$ {}_{x_0}D_x^\alpha\, {}_{y_0}D_y^\beta (X-Y) = {}_{x_0}D_x^\alpha\, {}_{y_0}D_y^\beta \left\{ (x-y)\,\frac{X-Y}{x-y} \right\} = $$

$$ = (x-y)\, {}_{x_0}D_x^\alpha\, {}_{y_0}D_y^\beta \frac{X-Y}{x-y} + \alpha\, {}_{x_0}D_x^{\alpha-1}\, {}_{y_0}D_y^\beta \frac{X-Y}{x-y} - \beta\, {}_{x_0}D_x^\alpha\, {}_{y_0}D_y^\beta \frac{X-Y}{x-y}\,. $$

Notiamo poi che da (34), applicando le regole sulla derivazione generalizzata, si può fare discendere (29): pertanto (34) *dà le varie soluzioni di* (E), *e analogamente per* (34').

7. - Diverse espressioni integrali delle soluzioni di (E).

Ricordiamo ([27]) che una derivata generalizzata, fatta a partire da un determinato valore, si può definire — in generale, però, non rappresentare — mediante un integrale definito. Così ad esempio,

$$ {}_{x_0}D_x^\omega f(x,y) \qquad \text{è definibile con} \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{-\omega-1}}{(-\omega-1)\,!}\, f(t,y)\,dt, $$

sempre quando l'integrale scritto abbia senso, per il che, fra l'altro, si richiede $\mathfrak{R}(\omega) < 0$.

a) Definendo in tale modo le derivate generalizzate, fatte a partire da un prefissato valore x_0 oppure y_0, figuranti in (29), (30), (31) e (32), s'ottengono ordinatamente *le seguenti espressioni, a mezzo d'integrali definiti, delle soluzioni di* (E):

$$ (35)\quad z(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\alpha (y-t)^\beta} + \int_{y_0}^{y} \frac{\psi(t)\,dt}{(x-t)^\alpha (y-t)^\beta}, $$

$$ (36)\quad z(x,y) = (x-y)^{1-\alpha-\beta} \left\{ \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\beta-1}(y-t)^{\alpha-1}\varphi_1(t)\,dt + \int_{y_0}^{y} (x-t)^{\beta-1}(y-t)^{\alpha-1}\psi_1(t)\,dt \right\}, $$

$$ (37)\quad z(x,y) = \int_{x_0}^{x} \Phi(t)\,dt \int_{y_0}^{y} \frac{(t-s)^{\alpha-1}\,ds}{(x-s)^\alpha (y-s)^\beta} + \int_{y_0}^{y} \Psi(t)\,dt \int_{x_0}^{x} \frac{(t-s)^{\beta-1}\,ds}{(x-s)^\alpha (y-s)^\beta}, $$

$$ (38)\quad z(x,y) = (x-y)^{1-\alpha-\beta} \left\{ \int_{x_0}^{x} \Phi_1(t)\,dt \int_{y_0}^{y} \frac{(x-s)^{\beta-1}(y-s)^{\alpha-1}}{(t-s)^\beta}\,ds + \right. $$

$$ \left. + \int_{y_0}^{y} \Psi_1(t)\,dt \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{\beta-1}(y-s)^{\alpha-1}}{(t-s)^\alpha}\,ds \right\}, $$

([26]) T. BOGGIO: *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali.* Annali di Matematica pura e applicata, S. 3, t. 8 (1902), pp. 181-232. In particolare, vedasi pagina 6, formula (8).

([27]) Vedasi le pagine 11 e 12 della mia Nota citata in ([1]).

dove in (35) *e* (37) *è* $\Re(\alpha) < 1$ *e* $\Re(\beta) < 1$, *mentre in* (36) *e* (38) *è* $\Re(\alpha) > 0$ *e* $\Re(\beta) > 0$, *inoltre il campo* C_x *di variabilità della* x *non ha punti comuni col campo* C_y *di variabilità della* y.

Va notato poi che in (35) colle funzioni arbitrarie convenienti $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ si è indicato, per brevità, le funzioni che in base a (29) hanno rispettivamente le espressioni

$$\frac{\varphi(t)}{(-1)^{\beta}(-\alpha)\,!}\,, \qquad \frac{\psi(t)}{(-\beta)\,!}\,;$$

analogamente in (36) colle funzioni arbitrarie convenienti $\varphi_1(t)$ e $\psi_1(t)$ si è indicato, per brevità, le funzioni che in base a (30) hanno rispettivamente le espressioni

$$(-1)^{\alpha-1}\frac{\varphi_1(t)}{(\beta-1)\,!}\,, \qquad \frac{\psi_1(t)}{(\alpha-1)\,!}\,;$$

e ancora, in (37) colle funzioni arbitrarie convenienti $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ si è indicato, per brevità, le funzioni che in base a (31) hanno rispettivamente le espressioni

$$\frac{\Phi(t)}{(-\beta)\,!}\,, \qquad -\frac{\Psi(t)}{(-\alpha)\,!}\,;$$

infine, in (38) colle funzioni arbitrarie convenienti $\Phi_1(t)$ e $\Psi_1(t)$ si è indicato, per brevità, le funzioni che in base a (32) hanno rispettivamente le espressioni

$$\frac{\Phi_1(t)}{(\alpha-1)\,!}\,, \qquad -\frac{\Psi_1(t)}{(\beta-1)\,!}\,.$$

b) Definendo, come sopra s'è detto, mediante integrali anche le derivate generalizzate, fatte a partire da x_0 o da y_0, che figurano in (34) e (34'), *s'ottengono le seguenti altre espressioni integrali delle soluzioni di* (E):

$$z(x,y) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{y_0}^{y} \frac{(x-t)^{-\alpha}(y-\tau)^{-\beta}}{t-\tau}\,\{X(t) - Y(\tau)\}\,d\tau, \tag{39}$$

$$z(x,y) = (x-y)^{1-\alpha-\beta} \int_{x_0}^{x} dt \int_{y_0}^{y} \frac{(x-t)^{\beta-1}(y-\tau)^{\alpha-1}}{t-\tau}\,\{X(t) - Y(\tau)\}\,d\tau, \tag{40}$$

dove in (39) *è* $\Re(\alpha) < 1$ *e* $\Re(\beta) < 1$ *e in* (40) *è* $\Re(\alpha) > 0$ *e* $\Re(\beta) > 0$, *inoltre il campo* C_x *di variabilità della* x *non ha punti comuni col campo* C_y *di variabilità della* y.