ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 271-283
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_271_0>

SOPRA I PROBLEMI DI VALORI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

di SILVIO CINQUINI (Pavia).

In una recente Memoria [1] ho stabilito con procedimento di natura elementare alcuni teoremi di esistenza di un integrale dell'equazione differenziale

$$y'' = f(x, y, y'),$$

il quale congiunga due punti assegnati, ed ho osservato, alla fine dell'introduzione alla Memoria stessa, che « i semplicissimi procedimenti usati riescono pure utili, oltrechè per stabilire altri teoremi (alcuni dei quali evidenti) ecc. ». In un lavoro pubblicato in questi giorni G. SCORZA-DRAGONI [2] dimostra, mediante considerazioni di carattere funzionale, che traggono la loro origine dalle note ricerche di BIRKHOFF e KELLOG, altri due teoremi di esistenza al secondo dei quali l'A. ha dato, successivamente [3], una nuova forma, togliendo alcune restrizioni.

Nella presente Nota voglio mettere in rilievo che anche queste due proposizioni si possono stabilire, nella loro forma più ampia e in modo rapido, mediante le considerazioni elementari svolte nella mia citata Memoria, nella quale ho indicato due diversi procedimenti per ricondursi al caso di equazioni $y'' = f(x, y, y')$ con secondo membro continuo e lipschitziano rispetto a (y, y'). Ambedue questi procedimenti sono immediatamente applicabili alle nuove condizioni considerate dallo SCORZA-DRAGONI, come mostrerò nelle pagine che seguono, utilizzando il primo di essi per provare una proposizione più generale del primo teorema dello SCORZA-DRAGONI, a cui ho sopra accennato, e l'altro per stabilire un'altra proposizione anch'essa più generale del secondo teorema del citato Autore.

---

[1] S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine.* (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VIII (1939), pp. 1-22). Tale Memoria verrà indicata nel seguito con *M. I.*

[2] G. SCORZA-DRAGONI: *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti.* (Rend. Seminario Matematico di Roma, Vol. II (1938), pp. 255-275).

[3] G. SCORZA-DRAGONI: *Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. XXVIII (1938), pp. 317-325).

Il lettore avrà così, dalla presente Nota, una conferma di quanto ho sopra riportato, e potrà constatare, al tempo stesso, che i miei semplicissimi procedimenti riescono efficaci non solo « in casi particolari », ma anche « in ipotesi molto generali » formulate dallo SCORZA-DRAGONI, come del resto tale Autore non esclude [4].

È perfettamente inutile che io soggiunga ancora che i metodi seguiti nella mia Memoria possono essere altrettanto utili in moltissimi altri casi.

1. - TEOREMA I. - *Sia* $f(x, y, y')$ *una funzione definita per ogni* x *di* (a, b) *e per ogni coppia* (y, y') *di numeri reali* y *e* y', *la quale, per ogni* x *fissato, risulti continua rispetto a* (y, y'), *e, per ogni coppia* (y, y') *fissata, risulti quasi-continua in* x, *e si supponga che:* I) *esistano tre funzioni* $\psi_1(x)$, $\gamma(y)$, $\varphi(y')$, *di cui le prime due siano non negative e integrabili* [5] *rispettivamente sugli intervalli* (a, b), *e* $(-\infty, +\infty)$, *e la terza sia sempre positiva, continua in* $(-\infty, +\infty)$ *e tale che*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = -\infty,$$

in modo che in tutto il campo

$$a \leq x \leq b, \qquad |y| < +\infty, \qquad |y'| < +\infty,$$

risulti

$$|f(x, y, y')| \leq \gamma(y)\varphi(y') + \psi_1(x), \tag{1}$$

intendendo che, o sia $\psi_1(x) = 0$ *in quasi-tutto* (a, b), *oppure esista una costante* $k > 0$, *tale che sia sempre* $|u| \leq k\varphi(u)$; II) *in corrispondenza ad ogni numero* $\lambda^* > 0$ *si possa determinare una funzione* $\psi_*(x)$ *non negativa e integrabile sull'intervallo* (a, b), *in modo che per ogni terna* (x, y, y'), *con* $a \leq x \leq b$, $|y| \leq \lambda^*$, $|y'| \leq \lambda^*$, *risulti*

$$|f(x, y, y')| \leq \psi_*(x).$$

Allora se (x_0, y_0), (x_1, y_1) *sono due punti qualunque del piano* (x, y) *tali che sia* $a \leq x_0 < x_1 \leq b$, *l'equazione*

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y, y')\, dx \tag{2}$$

---

[4] Cfr. luogo cit. in [2], p. 256, e in particolare nota [8].

[5] In tutto il presente lavoro l'integrabilità va intesa sempre nel senso del LEBESGUE.

ammette in (x_0, x_1) *almeno una soluzione* $y=y_0(x)$, *con* $y_0(x)$, $y_0'(x)$ *assolutamente continue e tale che* $y_0(x_0)=y_0$, $y_0(x_1)=y_1$.

Basta ripetere il procedimento di dimostrazione seguito nel § 1 di *M. I* con qualche complemento.

Si osservi innanzi tutto che, se $F(x, y, y')$ è una funzione che nel campo

$$C_\infty:\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad |y| < +\infty, \qquad |y'| < +\infty,$$

verifica la condizione I) del nostro enunciato, nella quale si sostituisca alla (1) la disuguaglianza

$$|F(x, y, y')| \leqslant 4g(y)\varphi(y') + \psi_1(x),$$

ove $g(y)$ è una funzione non negativa e tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(y)dy + 2,$$

è possibile, in base ad una lieve estensione del lemma del n° 2, γ) di *M. I* (6), determinare una costante $L_1 > 0$, in modo che per ogni curva $y=y(x)$, con $y(x)$ e $y'(x)$ assolutamente continue, la quale congiunga i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), e

---

(6) Osserviamo innanzi tutto, in vista del teorema del numero successivo, che il lemma del n.° 2, β) di *M. I* può generalizzarsi nel seguente modo:

a) *Sia* $u(x)$ *una funzione assolutamente continua, insieme con la sua derivata del primo ordine, sull'intervallo* (a, b) *e sia in tutto* (a, b) $u_1 \leqslant u(x) \leqslant u_2$; *siano* $\delta(x)$ *e* $\gamma(u)$ *due funzioni non negative e integrabili rispettivamente sugli intervalli* (a, b) *e* (u_1, u_2) *e sia* $\varphi(v)$ *una funzione continua e sempre positiva sull'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *e tale che sia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{v}{\varphi(v)}\, dv = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{v}{\varphi(v)}\, dv = -\infty,$$

e in quasi-tutto l'intervallo (a, b) *sia verificata la disuguaglianza*

$$|u''(x)| \leqslant \gamma(u(x))\varphi(u'(x)) + \delta(x),$$

intendendosi che, o sia $\delta(x) = 0$ *in quasi-tutto* (a, b), *oppure esista una costante* $k > 0$ *tale che sia sempre* $|v| \leqslant k\varphi(v)$. *Allora, in corrispondenza ad ogni numero* $h' > 0$, *è possibile determinare un numero* $H' > 0$, *in modo che, se esiste almeno un valore* a' *dell'intervallo* (a, b) *con* $|u'(a')| \leqslant h'$, *risulti in tutto* (a, b) $|u'(x)| \leqslant H'$.

b) *Il lemma ora enunciato continua a sussistere anche quando non si conoscano « a priori » i limiti superiore e inferiore della funzione* $u(x)$ *sull'intervallo* (a, b), *purchè* $\gamma(u)$ *sia non negativa e integrabile su tutto l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$.

Per la dimostrazione delle proposizioni ora enunciate cfr. L. TONELLI: *Sull'equazione differenziale* $y'' = f(x, y, y')$. (Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. VIII (1939), pp. 75-88), n.° 6, *c*).

soddisfi all'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} F(x, y, y')dx,$$

risulti in tutto (x_0, x_1)

$$|y'(x)| \leqslant L_1.$$

Indicato con L' il maggiore dei numeri $|y_0|$, $|y_1|$, si ponga

$$L = L' + (2L_1 + 1)\ (x_1 - x_0).$$

Considerato x come parametro si approssimi, nel quadrato $|y| \leqslant L+1$, $|y'| \leqslant L+1$, la funzione $f(x, y, y')$ mediante la nota successione dei polinomi di STIELTJES (7) nelle due variabili y e y'. Avremo allora una successione di funzioni $\pi_n(x, y, y')$, $(n=1, 2,....)$, definite per ogni x di (x_0, x_1), e per ogni coppia y, y' del quadrato considerato, e ognuna di tali funzioni sarà, per ogni coppia y, y' fissata, quasi-continua in x, e, per ogni x fissato, razionale intera nelle y, y'.

In virtù della (1), tenuta presente l'espressione dei polinomi di STIELTJES e una loro proprietà stabilita dal TONELLI (8), abbiamo per ogni terna (x, y, y') sopra indicata

$$|\pi_n(x, y, y')| \leqslant \gamma_n(y)\varphi_n(y') + \psi_1(x), \qquad (n=1, 2,....),$$

ove $\gamma_n(y)$ e $\varphi_n(y')$ sono i polinomi di STIELTJES di ordine n che approssimano, sull'intervallo $(-L-1, L+1)$, rispettivamente le funzioni $\gamma(y)$ e $\varphi(y')$.

Siccome $\varphi(y')$ è continua e sempre >0, si può quindi determinare un numero intero $\bar{n}$, in modo che, in tutto il campo

$$C_L: \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad -L \leqslant y \leqslant L, \qquad -L \leqslant y' \leqslant L,$$

risulti, per $n > \bar{n}$,

$$(3) \qquad |\pi_n(x, y, y')| \leqslant 2\gamma_n(y)\varphi(y') + \psi_1(x).$$

Inoltre, indicato con Φ il massimo di $\varphi(y')$ sull'intervallo $(-L, L)$, e con Γ_n il massimo di $\gamma_n(y)$ sull'intervallo stesso, risulta in tutto C_L

$$(4) \qquad |\pi_n(x, y, y')| \leqslant 2\Gamma_n\Phi + \psi_1(x), \qquad (n > \bar{n})$$

e pertanto, tenuto presente che $\pi_n(x, y, y')$, per ogni x fissato di (a, b), è, rispetto

---

(7) Sarà conveniente assumere il polinomio di STIELTJES in quella forma, in cui è stato considerato da L. TONELLI in: *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. III (1926), p. 714 e segg.).

(8) L. TONELLI: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali.* (Rend. Circolo Mat. di Palermo, T. XXIX, 1910, pp. 1-36), n.° 18.

al complesso delle due variabili y, y', funzione razionale intera di grado $2n$, in virtù di un ragionamento fatto dal TONELLI ([9]), si può determinare, in corrispondenza ad ogni intero $n > \bar{n}$, una funzione $\chi_n(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo (x_0, x_1), in modo che, in tutto C_L, risulti

$$\left|\frac{\partial \pi_n(x, y, y')}{\partial y}\right| \leqslant \chi_n(x), \qquad \left|\frac{\partial \pi_n(x, y, y')}{\partial y'}\right| \leqslant \chi_n(x). \tag{5}$$

Sia Λ_1 il massimo valore di y', non superiore a $L+1$ e tale che in tutto (L, Λ_1) risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(L)$; sia $-\Lambda_2$ il minimo valore di y', non inferiore a $-L-1$, e tale che in tutto $(-\Lambda_2, -L)$ risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(-L)$. Indicato con σ_n il minimo numero intero, non inferiore ad n, tale che, in ogni intervallo di $(-L-1, L+1)$ di ampiezza non superiore a $1:\sigma_n$, l'oscillazione della funzione $\gamma_n(y)$ non superi l'unità, si definisca nel campo C_∞ una successione di funzioni $Q_n(x, y, y')$, $(n=1, 2, \ldots.)$ ponendo per ogni x di (x_0, x_1):

$$Q_n(x, y, y') = \pi_n(x, y, y'), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad |y'| \leqslant L;$$

$$Q_n(x, y, y') = \frac{\Lambda_1 - y'}{\Lambda_1 - L}\, \pi_n(x, y, L), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad L < y' \leqslant \Lambda_1;$$

$$Q_n(x, y, y') = \frac{\Lambda_2 + y'}{\Lambda_2 - L}\, \pi_n(x, y, -L), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad -\Lambda_2 \leqslant y' < -L;$$

$$Q_n(x, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L, \quad y' > \Lambda_1, \quad \text{e} \quad y' < -\Lambda_2;$$

$$Q_n(x, y, y') = \sigma_n\left(L + \frac{1}{\sigma_n} - y\right) Q_n(x, L, y'), \quad \text{per} \quad L < y \leqslant L + \frac{1}{\sigma_n}, \quad |y'| < +\infty;$$

$$Q_n(x, y, y') = \sigma_n\left(L + \frac{1}{\sigma_n} + y\right) Q_n(x, -L, y'), \quad \text{per} \quad -L - \frac{1}{\sigma_n} \leqslant y < -L, \; |y'| < +\infty;$$

$$Q_n(x, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad |y| > L + \frac{1}{\sigma_n}, \quad |y'| < +\infty.$$

In virtù della (3) risulta, in tutto C_∞ e per $n > \bar{n}$,

$$|Q_n(x, y, y')| \leqslant 4 g_n(y) \varphi(y') + \psi_1(x), \tag{6}$$

ove

$$g_n(y) = \gamma_n(y), \quad \text{per} \quad |y| \leqslant L; \qquad 0 \leqslant g_n(y) \leqslant \gamma_n(y) + 1, \quad \text{per} \quad L < |y| \leqslant L + \frac{1}{\sigma_n};$$

$$g_n(y) = 0, \quad \text{per} \quad |y| > L + \frac{1}{\sigma_n}.$$

Inoltre, per una nota proprietà dei polinomi di STIELTJES, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y)\,dy = \int_{-L-\frac{1}{\sigma_n}}^{L+\frac{1}{\sigma_n}} g_n(y)\,dy \leqslant \int_{-L-\frac{1}{\sigma_n}}^{L+\frac{1}{\sigma_n}} \gamma_n(y)\,dy + \frac{2}{\sigma_n} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(y)\,dy + 2. \tag{7}$$

([9]) L. TONELLI: *I polinomi di approssimazione di Tchebychev.* (Annali di Matematica pura e applicata, Serie III, T. XV (1908), pp. 47-119), p. 61.

Indicato con Δ il minore dei due numeri $\Lambda_i - L$, $(i=1, 2)$, e posto

$$\tau_n(x) = \frac{\sigma_n}{\Delta}[2\Gamma_n\Phi + \psi_1(x)] + \chi_n(x),$$

tenendo conto nel modo in cui è stata definita $Q_n(x, y, y')$ e tenendo presenti le (4) e (5), risulta per ogni x di (x_0, x_1), se t_1, t_1', t_2, t_2' sono quattro numeri reali qualunque,

$$(8) \qquad | Q_n(x, t_1, t_1') - Q_n(x, t_2, t_2') | \leq \tau_n(x)[| t_1 - t_2 | + | t_1' - t_2' |].$$

Ciò premesso, basta ripetere la dimostrazione del n.° 1 di *M. I*, procedendo in modo analogo al n.° 3 della Memoria stessa, tenendo presente che in virtù della (8), nonchè della continuità della funzione $Q_n(x, y, y')$ rispetto alle variabili y e y' sussistono, per l'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} Q_n(x, y, y')dx,$$

i classici teoremi che affermano l'esistenza e l'unicità di una soluzione che esce da un dato punto con una data direzione, e il fatto che tale soluzione varia con continuità al variare delle condizioni iniziali ([10]).

Si prova così che esiste almeno una soluzione $y = y_n(x)$ dell'equazione

$$y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} \pi_n(x, y, y')dx,$$

con $y_n(x_0) = y_0$, $y_n(x_1) = y_1$, e per la quale ogni punto $(x, y_n(x), y_n'(x))$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$ appartiene al campo C_L.

L'uguale continuità delle derivate $y_n'(x)$, $(n = \bar{n}+1, \bar{n}+2, ...)$ discende dall'ipotesi II) del nostro enunciato (ove si determina la funzione $\psi_*(x)$ prendendo per λ^* il numero L), e per provare l'asserto basta procedere come al luogo citato, tenendo conto di un noto teorema di integrazione per serie.

OSSERVAZIONE I. - Se $\gamma(y)$ è limitata su tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$, l'ipotesi II) del nostro enunciato è conseguenza immediata della I).

Pertanto, facendo $\gamma(y) \equiv 0$, ne segue evidentemente, che *il teorema del presente numero contiene, come caso particolare, il primo dei teoremi dimostrati dallo* SCORZA-DRAGONI *nel luogo cit. in* ([2]).

OSSERVAZIONE II. - Nell'enunciato del presente n.° alla condizione $|u| \leq k\varphi(u)$ può sostituirsi la seguente ([11]): esistano due numeri positivi μ e ν, in modo che

---

([10]) Vedi p. es. C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen.* (Teubner, 1918, Leipzig), Cap. XI.

([11]) Cfr. L. TONELLI, luogo cit. in ([6]).

È superfluo osservare che se fosse $|u| \leq k\varphi(u)$ soltanto per $|u| \geq k_0 > 0$, basterebbe sostituire alla funzione $\varphi(u)$ la $\varphi(u) + \frac{k_0}{k}$, perchè la disuguaglianza in questione fosse verificata su tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

gli intervalli, in cui sono verificate entrambe le disuguaglianze $u > \mu$, $\varphi(u) < \nu u$, abbiano lunghezza complessiva infinita, e della stessa proprietà godano quegli intervalli, nei quali sono verificate entrambe le disuguaglianze $u < -\mu$, $\varphi(u) < -\nu u$.

ESEMPIO. - La funzione definita da

$$f(x, y, y') = \frac{y'^2 \lg (1 + y'^2) + \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{y^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + y^2} + x^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{per} \quad x \neq 0; \qquad f(x, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad x = 0,$$

soddisfa alle condizioni del teorema del presente n.° anche quando il punto $x=0$ non sia esterno all'intervallo (x_0, x_1). Infatti è evidentemente

$$|f| \leq \frac{y'^2 \lg (1 + y'^2) + 1}{y^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + y^2}},$$

e quindi la (1) è verificata per

$$\gamma(y) = \frac{1}{y^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + y^2}}, \qquad \varphi(y') = y'^2 \lg (1 + y'^2) + 1, \qquad \psi_1(x) = 0.$$

Inoltre, per $|y'| \leq \lambda^*$, risulta $|f| \leq \dfrac{\lambda^{*2} \lg (1 + \lambda^{*2}) + 1}{x^{\frac{2}{3}}}$, per qualunque y.

Sono dunque verificate tutte le condizioni dell'enunciato del presente numero, ma l'esempio ora citato non soddisfa alle condizioni di alcuno dei teoremi dello SCORZA-DRAGONI.

2. - TEOREMA II. - *Sia $f(x, y, y')$ una funzione definita per ogni (x, y, y') del campo*

$$C': \quad a \leq x \leq b, \qquad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \qquad -\infty < y' < +\infty,$$

ove $y_1(x) \leq y_2(x)$ ed esistono due numeri finiti l_1, l_2 tali che in tutto (a, b) risulti $l_1 \leq y_i(x) \leq l_2$, $(i=1, 2)$, e si supponga che $f(x, y, y')$, per ogni x fissato, risulti continua rispetto a (y, y'), e, per ogni coppia (y, y') fissata, risulti quasi-continua in x, ed inoltre che: I) *le derivate $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ esistano finite e continue in tutto (a, b), ed ivi le differenze*

$$y_1'(x) - \int_a^x f(t, y_1(t), y_1'(t))dt, \qquad \int_a^x f(t, y_2(t), y_2'(t))dt - y_2'(x)$$

siano non decrescenti; II) *esistano tre funzioni $\psi_1(x)$, $\gamma(y)$, $\varphi(y')$, di cui le prime due siano non negative e integrabili rispettivamente sugli intervalli (a, b) e (l_1, l_2), e la terza sia sempre positiva, continua in $(-\infty, +\infty)$, tale che*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = -\infty,$$

e che esista una costante $k>0$, *per la quale sia sempre* $|u|\leqslant k\varphi(u)$, *in modo che in tutti i punti del campo* C' *risulti*

$$|f(x, y, y')|\leqslant \gamma(y)\varphi(y')+\psi_1(x); \tag{9}$$

III) *in corrispondenza ad ogni numero* $\lambda^*>0$, *si possa determinare una funzione* $\psi_*(x)$, *non negativa e integrabile sull'intervallo* (a, b), *in modo che per ogni punto* (x, y, y') *del campo* C', *con* $|y'|\leqslant\lambda^*$, *risulti*

$$|f(x, y, y')|\leqslant\psi_*(x).$$

Allora se (x_i, y_i), $(i=0, 1)$ *sono due punti qualunque, per i quali risultano verificate le disuguaglianze*

$$a\leqslant x_0<x_1\leqslant b, \qquad y_1(x_i)\leqslant y_i\leqslant y_2(x_i), \quad (i=0, 1),$$

l'equazione

$$y'=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(x, y, y')dx$$

ammette almeno una soluzione $y=y_0(x)$, $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$, *con* $y_0(x)$ *e* $y_0'(x)$ *assolutamente continue, soddisfacente alle condizioni*

$$y_1(x)\leqslant y_0(x)\leqslant y_2(x), \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1), \qquad y_0(x_0)=y_0, \qquad y_0(x_1)=y_1.$$

Basta ripetere, con qualche piccolo complemento, la dimostrazione del n.° 7 di *M. I.*

Supposto ancora, dapprima, $y_2(x)>y_1(x)$ in tutto (x_0, x_1), si osservi innanzi tutto che se $F(x, y, y')$ è una funzione che nel campo

$$C:\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1, \qquad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), \qquad -\infty<y'<+\infty,$$

verifica la condizione II) del nostro enunciato nella quale si sostituisca alla (9) la disuguaglianza

$$|F(x, y, y')|\leqslant 2\gamma(y)\varphi(y')+\psi_1(x)+|f(x, y_1(x), y_1'(x))|+|f(x, y_2(x), y_2'(x))|, \tag{10}$$

si può determinare ([12]) una costante $L>0$, in modo che per ogni curva $y=y(x)$, con $y(x)$, $y'(x)$ assolutamente continue, la quale congiunga i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), soddisfi all'equazione

$$y'=y'(x_0)+\int_{x_0}^{x} F(x, y, y')dx,$$

e per la quale ogni punto $(x, y(x), y'(x))$, $(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$ appartenga al campo C, risulti in tutto (x_0, x_1)

$$|y'(x)|\leqslant L.$$

([12]) Si tenga presente il lemma enunciato in ([6]).

Indicato con L' il maggiore dei massimi moduli delle derivate $y_i'(x)$, $(i=1, 2)$ nell'intervallo (x_0, x_1), si prenda

$$H = L + L' + 1.$$

Per ogni intero $n \geqslant 4$ si definisca, nel seguente modo, una funzione $f_n(x, y, y')$.

Sia $R_{\bar{x}}$ il rettangolo, di cui al n.° 7 di *M. I*, e lo si decomponga in triangoli nel modo allora indicato.

Considerati quei triangoli della suddivisione fatta in $R_{\bar{x}}$, che hanno un vertice nel punto $Q_1 \equiv (\bar{x}, y_1(\bar{x}), y_1'(\bar{x}))$, si definisca in ciascuno dei loro vertici

$$f_n(\bar{x}, y, y') = f(\bar{x}, y_1(\bar{x}), y_1'(\bar{x}))\,;$$

e analogamente in ciascuno dei vertici dei triangoli, a cui appartiene il punto $Q_2 \equiv (\bar{x}, y_2(\bar{x}), y_2'(\bar{x}))$, si prenda

$$f_n(\bar{x}, y, y') = f(\bar{x}, y_2(\bar{x}), y_2'(\bar{x})).$$

Per ogni altro vertice Q della suddivisione fatta in $R_{\bar{x}}$ (distinto da quelli già considerati), si consideri l'insieme $E(Q)$ dei punti appartenenti a quelli, fra i triangoli in cui è stato suddiviso $R_{\bar{x}}$, che hanno un vertice in Q, e nel punto Q si definisca

$f_n(\bar{x}, y, y')$ uguale al minimo di $f(\bar{x}, y, y')$ in $E(Q)$, se in tale insieme è $f(\bar{x}, y, y') \geqslant 0$;

$f_n(\bar{x}, y, y')$ uguale al massimo di $f(\bar{x}, y, y')$ in $E(Q)$, se in tale insieme è $f(\bar{x}, y, y') \leqslant 0$;

$f_n(\bar{x}, y, y') = 0$, altrimenti.

Successivamente si completi la definizione di $f_n(\bar{x}, y, y')$ in $R_{\bar{x}}$, in modo che in ciascuno dei triangoli, in cui è stato suddiviso $R_{\bar{x}}$, la $f_n(\bar{x}, y, y')$ sia funzione lineare rispetto a y e a y', cioè in modo che, in ognuno di tali triangoli, $z = f_n(\bar{x}, y, y')$ sia una superficie piana.

Poi, indicato con H_1 il massimo valore di y', non superiore a $H+1$ e tale che in tutto (H, H_1) risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(H)$, e indicato con $-H_2$ il minimo valore di y', non inferiore a $-H-1$ e tale che in tutto $(-H_2, -H)$ risulti $2\varphi(y') \geqslant \varphi(-H)$, si ponga

$$f_n(\bar{x}, y, y') = \frac{H_1 - y'}{H_1 - H} f_n(\bar{x}, y, H), \quad \text{per} \quad H < y' \leqslant H_1\,;$$

$$f_n(\bar{x}, y, y') = \frac{H_2 + y'}{H_2 - H} f_n(\bar{x}, y, -H), \quad \text{per} \quad -H_2 \leqslant y' < -H\,;$$

$$f_n(\bar{x}, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad y' > H_1, \quad \text{e per} \quad y' < -H_2.$$

Fatta tale costruzione per ogni $\bar{x}$ di (x_0, x_1), la funzione $f_n(x, y, y')$ risulta definita in tutto il campo C, ed ivi è, per ogni coppia (y, y') fissata, quasi-continua rispetto ad x, e, per ogni x fissato, continua rispetto a (y, y').

Nel campo

$$C_H: \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad -H \leqslant y' \leqslant H,$$

$f_n(x, y, y')$ converge, per $n \to \infty$, verso $f(x, y, y')$, e in virtù della (9) risulta, in tutto C e per ogni intero n,

$$(11) \qquad |f_n(x, y, y')| \leqslant 2\gamma(y)\varphi(y') + \psi_1(x) + |f(x, y_1(x), y_1'(x))| + |f(x, y_2(x), y_2'(x))|.$$

Inoltre, in corrispondenza ad ogni numero intero n, è possibile determinare un numero $\theta_n > 0$ ([13]), in modo che sia

$$f_n(x, y, y') = f(x, y_1(x), y_1'(x)),$$

per

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_1(x) + \theta_n, \qquad y_1'(x) - \theta_n \leqslant y' \leqslant y_1'(x) + \theta_n,$$

ed anche

$$f_n(x, y, y') = f(x, y_2(x), y_2'(x)),$$

per

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad y_2(x) - \theta_n \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad y_2'(x) - \theta_n \leqslant y' \leqslant y_2'(x) + \theta_n.$$

Infine, determinata in virtù dell'ipotesi III) del nostro enunciato, in corrispondenza ad H una funzione $h(x)$ non negativa e integrabile sull'intervallo (x_0, x_1), in modo che in tutto il campo C_H sia

$$|f(x, y, y')| \leqslant h(x),$$

ne segue immediatamente, per il modo in cui è stata definita f_n e con calcoli elementari che omettiamo, che, in corrispondenza ad ogni intero n positivo, esiste un numero $\varrho_n > 0$ ([14]), tale che risulta

$$(12) \qquad |f_n(x, t_1, t_1') - f_n(x, t_2, t_2')| \leqslant \varrho_n h(x)[|t_1 - t_2| + |t_1' - t_2'|],$$

per ogni x di (x_0, x_1), e per ogni quadrupla di numeri reali t_1, t_1', t_2, t_2', con

$$y_1(x) \leqslant t_i \leqslant y_2(x), \qquad -\infty < t_i' < +\infty, \qquad (i = 1, 2).$$

([13]) Si vede subito, con considerazioni elementari, che, indicato con $\delta (> 0)$ il minore dei minimi in (x_0, x_1) delle espressioni $y_2(x) - y_1(x)$, $H - y_1'(x)$, $H - y_2'(x)$, $y_1'(x) + H$, $y_2'(x) + H$, basta prendere $\theta_n = \delta^2 : 8nH$.

([14]) Basta prendere $\varrho_n = \dfrac{2n}{\delta}\left(1 + \dfrac{2H}{\delta}\right) + \dfrac{1}{\delta'}$, ove δ è il numero indicato in ([13]), e δ' è il minore dei due numeri $H_1 - H$, $H_2 - H$.

Per l'equazione

$$(13)\qquad y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y, y')dx,$$

può quindi ripetersi il ragionamento di carattere elementare già fatto al n.° 7 di *M. I*, facendo rilevare che ogni curva integrale della (13) ed uscente dal punto (x_0, y_0), se è tangente in un punto ad una delle due curve $y = y_i(x)$, (x_0, x_1), $[i = 1, 2]$, coincide con tale curva in tutto l'intervallo in cui è definita.

Infatti, sia $y = Y_n(x)$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_n)$, [con $x_n \leqslant x_1$] una curva integrale della (13), uscente dal punto (x_0, y_0), e supponiamo, per fissare le idee, che per $x = \xi$, con $x_0 \leqslant \xi < x_n$, sia

$$(14)\qquad Y_n(\xi) = y_1(\xi), \qquad Y_n'(\xi) = y_1'(\xi).$$

Indicato con ξ_1 $(\xi_1 \geqslant \xi)$ il massimo valore di x tale che, in tutto l'intervallo (ξ, ξ_1), risulti $y_1(x) = Y_n(x)$, dico che è necessariamente $\xi_1 = x_n$. Infatti, in caso contrario, esisterebbe qualche x', con $\xi_1 < x' < x_n$, e vicino quanto si vuole a ξ_1, verificante la disuguaglianza

$$(15)\qquad Y_n(x') > y_1(x').$$

D'altra parte, per la continuità delle funzioni

$$(16)\qquad y_1(x), \qquad y_1'(x), \qquad Y_n(x), \qquad Y_n'(x),$$

si potrebbe determinare un $\delta_n > 0$, (con $\delta_n < x_n - \xi_1$), in modo che in tutto $(\xi_1, \xi_1 + \delta_n)$ fosse $Y_n(x) \geqslant y_1(x)$, e ciascuna delle funzioni (16) avesse ivi un'oscillazione non superione a $\theta_n : 2$. Allora, avendosi per ogni x di $(\xi_1, \xi_1 + \delta_n)$,

$$Y_n'(x) = Y_n'(\xi_1) + \int_{\xi_1}^{x} f_n(x, Y_n(x), Y_n'(x))dx,$$

ed anche in virtù della condizione I),

$$y_1'(x) - \int_{\xi_1}^{x} f(x, y_1(x), y_1'(x))dx \geqslant y_1'(\xi_1),$$

ne seguirebbe, essendo $Y_n(\xi_1) = y_1(\xi_1)$, $Y_n'(\xi_1) = y_1'(\xi_1)$ e tenendo presente la definizione della f_n, in tutto $(\xi_1, \xi_1 + \delta_n)$

$$Y_n'(x) \leqslant y_1'(x);$$

e questa disuguaglianza, siccome $Y_n(\xi_1) = y_1(\xi_1)$, contradice la (15). Dunque in tutto (ξ, x_n) è necessariamente $Y_n(x) = y_1(x)$, e, se è $x_0 < \xi$, si prova, analogamente, che tale uguaglianza è verificata anche in (x_0, ξ).

Pertanto, in virtù della (12), possiamo concludere che esiste almeno un integrale $y = y_n(x)$ della (13) che congiunge i punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1), e per il quale ogni punto $(x, y_n(x), y_n'(x))$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ appartiene al campo C_H. Non rimane che proseguire come al luogo citato, osservando che l'uguale continuità delle derivate $y_n'(x)$ discende dalla condizione III), e utilizzando poi un noto teorema di integrazione per serie.

Infine si elimina l'ipotesi supplementare $y_1(x) < y_2(x)$, $(x_0 \leq x \leq x_1)$, fatta all'inizio della dimostrazione, come al n.° 7, *b*) di *M. I.*

3. - OSSERVAZIONI E COMPLEMENTI AL TEOREMA II.

a) UN CASO PARTICOLARE. - Se è in quasi-tutto (a, b)

$$\psi_1(x) + |f(x, y_1(x), y_1'(x))| + |f(x, y_2(x), y_2'(x))| = 0, \tag{17}$$

l'ipotesi $|u| \leq k\varphi(u)$ può essere soppressa, e le condizioni I) e II) assumono la forma seguente: I') *le derivate* $y_1'(x)$, $y_2'(x)$ *siano finite e continue in tutto* (a, b), *con* $y_1'(x)$ *non decrescente*, $y_2'(x)$ *non crescente, e sia* $f(x, y_i(x), y_i'(x)) = 0$, $(i = 1, 2)$ *in quasi-tutto* (a, b); II') *esistano due funzioni* $\gamma(y)$, $\varphi(y')$, *di cui la prima sia non negativa e integrabile sull'intervallo* (l_1, l_2), *e la seconda sia sempre positiva, continua in* $(-\infty, +\infty)$ *e tale che sia*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\varphi(u)}\, du = -\infty,$$

in modo che in tutti i punti del campo C' risulti

$$|f(x, y, y')| \leq \gamma(y)\varphi(y').$$

b) Se la funzione $\gamma(y)$ è limitata sull'intervallo (l_1, l_2), la condizione III) può essere soppressa nell'enunciato del n.° 2 (come pure nel caso particolare indicato nell'*a*) del presente numero), perchè è conseguenza immediata della II).

c) Inoltre, se la funzione $\gamma(y)$ è limitata sull'intervallo (l_1, l_2), e se è $\psi_1(x) = 0$ in quasi-tutto (a, b), l'ipotesi $|u| \leq k\varphi(u)$ può essere soppressa, anche quando non sia verificata, in quasi-tutto (a, b), la (17).

Infatti, poichè nelle ipotesi del presente capoverso $\gamma(y)$ può farsi, praticamente, uguale ad 1, basta determinare il numero L sostituendo alla (10) la disuguaglianza

$$|F(x, y, y')| \leq 4\varphi(y'),$$

perchè in base alla costruzione fatta, tenendo conto della continuità di $\varphi(y')$ e dell'ipotesi $\varphi(y') > 0$, risulta in tutto C_H per ogni n sufficientemente grande,

$$|f_n(x, y, y')| \leq 2\varphi(y'),$$

e quindi in tutto C

$$|f_n(x, y, y')| \leq 4\varphi(y').$$

In virtù dell'osservazione del presente capoverso *il teorema dello* SCORZA-DRAGONI, *di cui ai luoghi citati in* (²) *e in* (³) *viene ad essere contenuto, anche nella sua forma meno restrittiva, come caso particolare in quello del n.° 2 del presente lavoro.*

d) Può ripetersi l'osservazione II) fatta alla fine del n.° 1.

e) ESEMPIO. - Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y, y') = \frac{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} + y'^2\right) \lg(1 + y'^2)}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}, \quad \text{per} \quad x \neq 0; \qquad f(x, y, y') = 0, \quad \text{per} \quad x = 0.$$

Ogni curva $y = C$, ($C =$ costante) è un integrale dell'equazione

$$y' = y'(a) + \int_a^x f(x, y, y')dx, \tag{18}$$

e quindi, essendo

$$|f| \leq \frac{(1 + y'^2) \lg (1 + y'^2)}{\sqrt[3]{y^2}},$$

ed anche, per $|y'| \leq \lambda^*$,

$$|f| \leq \frac{(1 + \lambda^{*2}) \lg (1 + \lambda^{*2})}{\sqrt[3]{x^2}},$$

se (x_0, y_0), (x_1, y_1) sono due punti qualunque del piano (x, y) con $x_0 \neq x_1$, esiste sempre, per il teorema del n.° 2, almeno una curva integrale della (18), che congiunge tali punti, anche quando $x = 0$ non è esterno all'intervallo (x_0, x_1). Peraltro è da rilevare che la funzione f considerata nel presente capoverso non soddisfa alle ipotesi del teorema del n.° 1 del presente lavoro, e nemmeno a quelle di alcuno dei teoremi dati dallo SCORZA-DRAGONI ([15]).

([15]) Durante la revisione delle bozze del presente lavoro ho preso visione di una Nota di G. ZWIRNER: *Un'osservazione su un problema ai limiti per le equazioni differenziali.* (Boll. Un. Mat. Italiana, S. II, A. I, n.° 4 (giugno 1939), pp. 334-336), nella quale l'A. dà una dimostrazione di carattere elementare del primo dei due teoremi dello SCORZA-DRAGONI, di cui al luogo cit. in ([2]).

Il risultato ottenuto dallo ZWIRNER in tale Nota, la quale trae la sua naturale origine dalla mia precedente Memoria (*non* citata da tale A.), è quindi contenuto, come caso particolare, nella proposizione del n.° 1 del presente lavoro.

Inoltre (per quanto la dimostrazione dello ZWIRNER presenti alcune varianti rispetto a quella del n.° 1 del presente lavoro, nella quale io mi sono attenuto al metodo seguito nel § 1 della mia precedente Memoria), lo ZWIRNER ha utilizzato proprio il procedimento (opportunamente semplificato) di approssimazione che io avevo seguito, in condizioni diverse, nel § 2 della stessa mia Memoria, e che ho ripreso, nel n.° 2 del presente lavoro, con opportune varianti per superare nuove e maggiori difficoltà.

Ma lo ZWIRNER non cita affatto la mia Memoria, della quale ben conosceva l'esistenza, come risulta dal contenuto della Sua nota ([2]) a pié della pag. 335.

Prendo occasione per soggiungere che le proposizioni che ho dimostrato nel presente lavoro sono suscettibili di una nuova estensione che ho segnalato, come caso particolare, in un lavoro già pronto per la stampa.