Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Carlo Birindelli

Sui metodi di Gronwall per la sommazione delle serie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 241-270

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_241_0>

SUI METODI DI GRONWALL PER LA SOMMAZIONE DELLE SERIE

di CARLO BIRINDELLI (Pavia).

Introduzione.

In due precedenti lavori [1] stabilimmo alcune fondamentali proprietà dei metodi (f, g) di sommazione delle serie, ideati da T. H. GRONWALL [2].

Rammentiamo brevemente i concetti essenziali su cui il GRONWALL ha basato i metodi in questione, ed anche le proprietà più importanti di tali metodi.

Date due funzioni $f(w)$ e $g(w)$, delle quali la prima è analitica per $|w| \leqslant 1$, eccetto $w=1$, e tale da rappresentare $|w|<1$, semplicemente in un campo D interno a $|z|<1$, in modo che $z=0$ corrisponda a $w=0$ e $z=1$ a $w=1$, e la seconda $g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ $(b_n \neq 0)$ è esprimibile mediante la $g(w)=(1-w)^{-\alpha}+\gamma(w)$ $(\alpha>0)$, diversa da zero per $|w|<1$ con $\gamma(w)$ analitica per $|w| \leqslant 1$, e supposto che la funzione inversa della prima sia olomorfa lungo il contorno di D eccetto che per $z=1$ e in questo punto sia

$$1-w=(1-z)^{\lambda} \cdot (a+ \ldots.), \qquad \lambda \geqslant 1, \qquad a>0,$$

indicando i puntini una serie di potenze in $1-z$ senza termine noto e a coefficienti reali o complessi, si dice che una serie $\sum_{0}^{\infty} u_{\gamma}$ è sommabile (f, g) verso una somma s, se le quantità $U_0, U_1, \ldots., U_n$, che si ricavano dalla

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu} z^{\nu} = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot U_n \cdot w^n, \qquad (\text{ove } z=f(w)) \tag{1}$$

son tali che $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = s$.

---

[1] *Sulla applicazione dei metodi di sommazione di Gronwall al problema del prolungamento analitico.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, vol. VI, (1937-XV). Scienze Fisiche e Matematiche.

Contributo all'analisi dei metodi di sommazione di Gronwall. Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, Tomo LXI, Anno 1937-XVI.

[2] T. H. GRONWALL: *Summation of series and conformal mapping.* Annals of Mathematics, 2[d] series, vol. 33, n.° 1, January 1932.

Poichè $f(0)=0$, lo sviluppo di z^ν in serie di potenze di w comincia con la potenza ν^{ma} e perciò la U_n è della forma $\sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu} u_\nu$ ove $a_{n,\nu}$ dipende dai coefficienti di $f(w)$ e $g(w)$, ma non dalle u_ν.

Le proprietà fondamentali, comuni ai metodi (f, g), che il GRONWALL trova nel citato suo lavoro possono essere riassunte dai tre teoremi seguenti.

TEOREMA I. - La serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sia sommabile (f, g), con la somma s, e la funzione $\varphi(z)$ definita nell'intorno di $z=0$ mediante

$$\varphi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$$

sia regolare entro D; Allora $\varphi(z)\to s$ per $z\to 1$ uniformemente per ogni cammino di z interno a D, perveniente a $z=1$, internamente al settore $z=1-re^{i\beta}$, $-\beta_0<\beta<\beta_0$, $\beta_0<\frac{\pi}{2\lambda}$, $r\geqslant 0$.

TEOREMA II. - Se $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ è sommabile (C, k) verso la somma s, allora ogni volta che è $\lambda>1$, la serie è pure sommabile (f, g) e verso la stessa somma s. La condizione $\lambda>1$ è essenziale.

TEOREMA III. - Se per due metodi (f, g), (f_1, g_1) è $\lambda_1>\lambda$ e D_1 interno a D, allora ogni serie sommabile (f, g) è pur sommabile (f_1, g_1) con la stessa somma e le serie uniformemente sommabili col primo metodo lo sono pure col secondo.

I procedimenti (C, k) di CESÀRO rappresentano il caso limite dei metodi (f, g), ponendo $f(w)=w$, $g(w)=(1-w)^{-k-1}$ (D coincide allora con tutto il campo $|z|<1$). Per $k=0$ si ha la sommazione ordinaria delle serie.

Per altre proprietà, studiate nei lavori citati ([1]), daremo via via i riferimenti relativi, quando sarà necessario, per le applicazioni che ne faremo qui.

Come conseguenza dei citati teoremi, molti procedimenti già noti in Analisi si presentano come particolari metodi (f, g).

OSSERVAZIONE I. - In relazione alla sommazione delle serie a termini reali, è una proposizione relativa ai metodi (f, g) e alla sommabilità (C, k), per $k>0$, della serie di FOURIER d'una funzione sommabile $f(x)$, quasi ovunque verso la somma $f(x)$ ([3]). Da questo teorema segue anzi la sommabilità, quasi ovunque e verso la somma $f(x)$, della serie stessa di FOURIER, con qualunque metodo (f, g), purchè $\lambda>1$.

([3]) Teorema di HARDY-LEBESGUE. Cfr. A. ZYGMUND: *Trigonometrical series.* (Warszawa, 1935). Per il caso $(C, 1)$, cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche.* Bologna, 1928, Zanichelli.

OSSERVAZIONE II. - È pure una proposizione relativa a metodi (f, g) il seguente

TEOREMA [4]. - La serie di LAPLACE di una funzione $f(P)$, sommabile secondo LEBESGUE, converge quasi ovunque e verso $f(P)$, se le si applicano i metodi (C, k), con $k > \frac{1}{2}$. E così via.

***

Nel § 1 di questo lavoro viene studiato il procedimento da seguirsi quando pei metodi $(f(w), g(w))$ è assegnata non la $z=f(w)$ ma la sua funzione inversa $w=F(z)$. Questo procedimento applicato a casi particolari permette di mostrare nel corso del § 1 stesso che varî metodi di sommazione già noti rientrano fra quelli di GRONWALL e che alcuni altri sono in tutto equivalenti a metodi particolari di GRONWALL. Fra l'altro viene posta la definizione di una nuova classe di metodi (f, g) che nel suo complesso permette di risolvere il problema del prolungamento analitico nel miglior modo possibile e cioè permettendo la sommazione delle serie di potenze entro tutta la stella di MITTAG-LEFFLER; al n.° 2 del § 1 vien data la forma esplicita dei polinomi di approssimazione per questa classe di metodi.

Nel § 2 viene mostrato come, almeno nel caso delle serie di potenze, dati i due polinomi

$$U_n = \sum_0^n a_{n\nu} u_\nu, \qquad V_n = \sum_0^n b_{n\nu} u_\nu,$$

relativi a due metodi (f, g), (f_1, g_1), il nuovo polinomio

$$W_n = \sum_0^n a_{n\nu} b_{n\nu} u_\nu$$

definisca un vero e proprio procedimento di sommazione di cui nel corso del § 2 si studia il contributo al problema del prolungamento analitico. Son pure studiati altri metodi dedotti da quelli (f, g).

Nel § 3 vengono accennate questioni varie riguardanti sopratutto esempi di comportamento non regolare analogo a quello dei metodi di CESÀRO non regolari in riferimento al principio di permanenza.

§ 1.

1\. - Di solito per ottenere nei metodi (f, g) la forma esplicita dei polinomi U_n di approssimazione, si sostituisce nel primo membro di (1) alla z lo sviluppo di $f(w)$ in serie di potenze di w.

---

(4) G. SANSONE: *Sulla sommabilità di Cesàro delle serie di Laplace*. Rendiconti R. A. N. dei Lincei, gennaio 1937-XV.

Osserviamo qui che talvolta può, invece, presentarsi la possibilità di riconoscere particolari proprietà di un metodo (f, g), studiando il metodo mediante la conoscenza iniziale della $w=F(z)$, inversa di $z=f(w)$. In tal caso bisogna trovare prima la forma esplicita degli U_n mediante i coefficienti di $F(z)$ e di $g(w)$.

Per essere $F(0)=0$, $F'(0)\neq 0$, si ha, applicando alla

$$F_1(w, z)=F(z)-w$$

il teorema delle funzioni implicite, che per questa equazione esiste una radice $z(w)$, di primo ordine, data da

$$z(w)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{(\varrho)} t\,\frac{F'_{1t}(w, t)}{F_1(w, t)}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} t\cdot\frac{F'(t)}{F(t)-w}\,dt \tag{2}$$

e in generale,

$$[z(w)]^\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} t^\nu\,\frac{F'(t)}{F(t)-w}\,dt. \tag{3}$$

La (3) ci permette di scrivere la

$$z^\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{t^\nu\cdot F'(t)}{F(t)}\,\frac{dt}{1-\dfrac{w}{F(t)}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{t^\nu\cdot F'(t)}{F(t)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{w^r}{[F(t)]^r}\,dt=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} w^r\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{t^\nu\cdot F'(t)}{[F(t)]^{r+1}}\,dt.$$

Conviene ora notare che $F(0)=0$; la precedente espressione si semplifica quindi nella

$$z^\nu=\sum_{r=\nu}^{\infty} w^r\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{t^\nu\cdot F'(t)}{[F(t)]^{r+1}}\,dt. \tag{3'}$$

Sia ora

$$w=F(z)=\sum_{1}^{\infty} c_s z^s$$

l'elemento di w per $z=0$; abbiamo

$$[F(t)]^{r+1}=\frac{t^{r+1}}{(r+1)!}\,D_{r+1}[F(0)]^{r+1}+\ldots.+\ldots.=\sum_{s=r+1}^{\infty}\frac{t^s}{s!}\,D_s[F(0)]^{r+1}. \tag{4}$$

D'altra parte, per la

$$D_s(\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3\cdot\ldots.\cdot\varphi_{r+1})=\sum_{(s)}\frac{s!}{i_1!\,i_2!\,i_3!\cdot\ldots.\cdot i_{r+1}}\,\varphi_1^{(i_1)}\cdot\varphi_2^{(i_2)}\cdot\ldots.\cdot\varphi_{r+1}^{(i_{r+1})}$$

(ove la $\sum$ è estesa a tutte le disposizioni $i_1\, i_2 \cdot .... \cdot i_{r+1}$ di classe $r+1$ di numeri interi non negativi tali che sia $i_1+i_2+ .... +i_{r+1}=s$), si ha, nel caso $\varphi_1=\varphi_2= .... =\varphi_{r+1}=F(0)=0$,

$$D_s[F(0)]^{r+1}=\sum_{(s)} \frac{s!}{i_1!\, i_2!\, i_3! \cdot .... \cdot i_{r+1}!} F(0)^{(i_1)} \cdot F(0)^{(i_2)} \cdot .... \cdot F(0)^{(i_{r+1})}$$

e qui basta limitare la sommatoria ai numeri $i_1,\ i_2, ..., i_{r+1}$ positivi *non nulli* (poichè $F(0)^{(0)}=F(0)=0$).

Possiamo dunque scrivere la

$$D_s[F(0)]^{r+1}=\sum_{(s)} s!\, c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot c_{i_3} \cdot .... \cdot c_{i_{r+1}} \tag{4'}$$

ove la sommatoria è estesa a tutte le disposizioni $i_1\, i_2 \cdot .... \cdot i_{r+1}$ di classe $r+1$ di numeri interi positivi (*mai nulli*) tali che sia $i_1+i_2+ .... +i_{r+1}=s$.

La (4) si può scrivere, dopo ciò,

$$[F(t)]^{r+1}=\sum_{s=r+1}^{\infty} t^s \Big(\sum_{(s)} c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot c_{i_3} \cdot .... \cdot c_{i_{r+1}}\Big).$$

La (3′) diventa di conseguenza

$$z^\nu=\sum_{r=\nu}^{\infty} w^r \cdot \frac{1}{2\pi i}\int \frac{t^\nu \cdot \sum\limits_{s=0}^{\infty}(s+1)c_{s+1}t^s}{\sum\limits_{s=r+1}^{\infty} t^s \cdot \Big(\sum\limits_{(s)} c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot .... \cdot c_{i_{r+1}}\Big)}\, dt, \tag{3''}$$

$$z^\nu=\sum_{r=\nu}^{\infty} w^r \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} t^{\nu-(r+1)} \cdot \frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty}(s+1)c_{s+1}t^s}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} t^s \Big(\sum\limits_{(s+r+1)} c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot .... \cdot c_{i_{r+1}}\Big)}\, dt.$$

Chiamando con $A_s^{(r)}$ e B_s le

$$\sum_{(s+r+1)} c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot .... \cdot c_{i_{r+1}}, \qquad (s+1)c_{s+1},$$

abbiamo

$$z^\nu=\sum_{r=\nu}^{\infty} w^r \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} t^{\nu-(r+1)} \cdot \frac{\sum\limits_{s=0}^{\infty} B_s t^s}{\sum\limits_{s=0}^{\infty} A_s^{(r)} t^s}\, dt.$$

In questo sviluppo il coefficiente di w^r è il coefficiente di $t^{r-\nu}$ nell'elemento della $\dfrac{\sum_{s=0}^{\infty} B_s t^s}{\sum_{s=0}^{\infty} A_s^{(r)} t^s}$ relativo a $t=0$. Si ha

$$z^\nu = \sum_{r=\nu}^{\infty} \frac{w^r}{\{A_0^{(r)}\}^{r-\nu+1}} \begin{vmatrix} A_0^{(r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_0 \\ A_1^{(r)} & A_0^{(r)} & 0 & 0 & 0 & B_1 \\ A_2^{(r)} & A_1^{(r)} & A_0^{(r)} & 0 & 0 & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r-\nu}^{(r)} & A_{r-\nu-1}^{(r)} & A_{r-\nu-2}^{(r)} & \cdots & A_1^{(r)} & B_{r-\nu} \end{vmatrix}$$

e sostituendo questo elemento $[z(w)]^\nu$ nel primo membro di (1) a z^ν ed esprimendo la $g(w)$ mediante il suo elemento

$$g(w) = \sum b_n w^n$$

si perviene alla determinazione della forma esplicita delle U_n. Scrivendo U_n sotto la solita forma

$$U_n = \sum a_{n,\nu} u_\nu$$

si ha da quanto sopra che le $a_{n,\nu}$ dipendono dai coefficienti (in numero finito) delle $\sum_1^{\infty} c_s z^s$, $\sum b_n w^n$.

OSSERVAZIONE. - Se $F'(0)=0$ (indicando con s l'ordine dello zero in $z=0$ per la $w=F(z)$) non è più possibile di determinare, in generale, le radici $z_1, z_2, \ldots, z_s$, come serie di potenze intere positive di w. Queste s radici, riducentesi tutte a 0 per $w=0$, coincidono, come è noto dalla teoria generale delle funzioni implicite, con le radici di una equazione algebrica di grado s, i cui coefficienti sono funzioni analitiche di w, regolari in $w=0$.

Non è infrequente il caso che metodi di sommazione, incontrati trattando svariati indirizzi di ricerca, si rivelino veri e propri metodi di GRONWALL. Lo studio del metodo, ripreso seguendo la via offerta dai procedimenti (f, g), permette di dare, pel metodo in questione, risultati che per via diversa ben più difficilmente si potrebbero stabilire.

Diamone varî esempi qui.

2. - Consideriamo il metodo di GRONWALL, in cui $z=f_{(a)}(w)$ è ottenuto risolvendo la $w=za^{1-z}$ nell'intorno di $z=0$ e la $g(w)$ è fornita dalla $\dfrac{1}{1-f_{(a)}(w)}$, $(a \geqslant 1)$.

In riferimento alle (3), (3') si ha

$$w = F(z) = za^{1-z}, \qquad F'(z) = (1 - z \log a) a^{1-z},$$

$$z^\nu = \sum_{r=\nu}^{\infty} w^r \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} \frac{t^\nu (1-t \log a) a^{1-t}}{t^{r+1} \cdot a^{(r+1)(1-t)}} dt = \frac{\nu \cdot w^\nu}{a^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+\nu)^{s-1}}{a^s \cdot s!} (w \log a)^s.$$

In particolare

$$z=f_{(a)}(w)=\frac{w}{a}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)^{s-1}}{a^s\cdot s!}(w\log a)^s$$

e

$$g(w)=\frac{1}{1-f(w)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}z^m=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{mw^m}{a^m}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+m)^{s-1}}{a^s\cdot s!}(w\log a)^s\right).$$

Sostituendo nella (1) viene successivamente

$$(5)\qquad \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}z^\nu\right)\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots.+u_n)z^n=$$

$$=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_n)n\frac{w^n}{a^n}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+n)^{s-1}}{a^s\cdot s!}(w\log a)^s\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nU_nw^n$$

ove b_n è il coefficiente di w^n in $g(w)$ ed U_n è il polinomio di approssimazione.

Si trova

$$b_n=\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\log^q a^n}{q!}(n-q)\frac{1}{na^n};\qquad g(w)=1+\sum_{n=1}^{\infty}w^n\left(\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\log^q a^n}{q!}(n-q)\right)\frac{1}{na^n}.$$

Il coefficiente di w^n è, nel primo membro di (5),

$$\frac{1}{a^n}(u_0+u_1)\sum_{q=0}^{n-1}n^{q-1}\cdot(n-q)\frac{\log^q a}{q!}+\frac{1}{a^n}\sum_{\nu=2}^{n}u_\nu\left(\sum_{q=0}^{n-\nu}n^{q-1}\cdot(n-q)\frac{\log^q a}{q!}\right)$$

mentre nel secondo membro, della (5) stessa, è

$$b_nU_n=U_n\cdot\frac{1}{na^n}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{\log^q a^n}{q!}(n-q).$$

Risulta dunque che per il metodo $(f_{(a)}, g)$ in questione è

$$(6)\qquad U_n=\frac{(u_0+u_1)\sum\limits_{q=0}^{n-1}n^q\cdot(n-q)\frac{\log^q a}{q!}+\sum\limits_{\nu=2}^{n}u_\nu\left(\sum\limits_{q=0}^{n-\nu}n^q\cdot(n-q)\frac{\log^q a}{q!}\right)}{\sum\limits_{q=0}^{n-1}\frac{\log^q a^n}{q!}(n-q)}$$

il polinomio $(1+n)^{\text{mo}}$ di sommazione per la serie $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}u_\nu$.

Rammentando i seguenti teoremi (2° l. c. [1])):

a) La serie geometrica $1+\xi+\xi^2+\ldots.+\xi^n+\ldots.$ è sommabile (f, g) con la somma $\frac{1}{1-\xi}$ entro l'area racchiusa dalla linea

$$(7)\qquad \xi=\frac{1}{f(e^{i\varphi})},\qquad -\pi\leq\varphi\leq\pi,$$

e la convergenza è uniforme per ogni campo interno, contorno incluso, alla detta area; fuori della (7) la sommazione è invece sempre divergente;

b) se l'elemento di funzione analitica $\sum a_\nu \xi^\nu$ si può prolungare analiticamente in un campo semplicemente connesso Σ, contenente il cerchio di convergenza dell'elemento, dando luogo ad un ramo monodromo $\varphi(\xi)$, la serie data sarà sommabile (f, g) uniformemente verso la somma $\varphi(\xi)$ in ogni campo C chiuso interno all'insieme $S\Delta$, dove S è il contorno di Σ, Δ il campo racchiuso dalla linea (7).

Possiamo concludere che per $n \to \infty$ il polinomio (6) converge a $\frac{1}{1-\xi}$, se è applicato alla serie $\sum \xi^\nu \left(=\sum u_\nu\right)$, purchè ξ appartenga al campo Δ racchiuso dalla linea $\xi = \frac{1}{f_{(a)}(e^{i\varphi})}$ ottenibile, mediante la reciprocità, dalla

$$r = a^{r\cos\theta - 1}, \qquad (\xi = re^{i\theta}).$$

Fuori di questo campo Δ di sommabilità la sommazione è sempre divergente.

Questo campo Δ di sommabilità, per la serie geometrica, comprende internamente il cerchio $|\xi| = 1$ di convergenza della $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n$ e si allarga indefinitamente ([5]) quando $a \to +\infty$; il contorno è poi simmetrico rispetto all'asse reale ([5]).

([5]) Presa la curva

$$r = a^{r\cos\theta - 1}, \qquad (\xi = re^{i\theta}), \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

trasformata, mediante la $w = \xi a^{1-\xi}$, della $|w| = 1$ (cioè di $e^{i\psi} = \xi a^{1-\xi}$, $-\pi \leqslant \psi \leqslant \pi$), si ha che la

$$w = e^{i\psi}, \qquad -\pi \leqslant \psi \leqslant \pi,$$

è trasformata nella $e^{i\psi} = re^{i\theta} \cdot a^{1 - r\cos\theta - ir \operatorname{sen}\theta}$. Valgono dunque le due relazioni

$$\begin{cases} r = a^{r\cos\theta - 1} \\ \psi = \theta - r \operatorname{sen}\theta \cdot \log a \end{cases}$$

e in queste quando è $-\pi \leqslant \psi \leqslant \pi$ è pure $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Dalla seconda di queste due relazioni si deduce che $r \operatorname{sen}\theta$, coefficiente dell'immaginario, nel numero complesso ξ, tende a zero quando $a \to +\infty$. Infatti si ha

$$r \operatorname{sen}\theta = \frac{\theta - \psi}{\log a} \to 0 \quad \text{per} \quad a \to +\infty.$$

Siccome, per $\theta = \pi$, è $r = \frac{1}{a^{1+r}}$ ($\to 0$ per $a \to +\infty$), si ha che la curva

$$r = a^{r\cos\theta - 1}, \qquad \xi = re^{i\theta}, \qquad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

tende al segmento (0, 1) dell'asse reale del piano complesso della ξ, quando $a \to +\infty$.

D'altra parte la curva

$$r = a^{r\cos\theta - 1}$$

è simmetrica, rispetto all'asse reale di ξ; il contorno del campo Δ (ottenuto dalla $r = a^{r\cos\theta - 1}$ mediante la reciprocità $z = \frac{1}{\xi}$ 0, per la vista simmetria, mediante la inversione di cerchio unito $r = 1$) tende dunque, quando $a \to +\infty$, al taglio da 1 $a + \infty$, lungo l'asse reale del

Poichè il metodo (6) è un procedimento (f, g) di sommazione si ha che per un elemento di funzione analitica $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^\nu$ è valevole il teorema *b*).

OSSERVAZIONE I. - Dall'essere

$$w = z a^{1-z}, \qquad w' = (1 - z \log a) a^{1-z}, \qquad w'' = -(2 - z \log a) \log a \cdot a^{1-z},$$

segue che la funzione $1 - w = 1 - z a^{1-z}$ ha uno zero del primo ordine $z = 1$, se $a \neq e$, mentre ha uno zero del secondo ordine $z = 1$, se $a = e$. Nel primo caso il coefficiente λ pel metodo $(f_{(a)}, g)$ è eguale ad 1, mentre nel secondo è uguale a 2.

OSSERVAZIONE II. - Per le cose viste possiamo dire che se alla serie geometrica si applica il nostro metodo $(f_{(a)}, g)$ il campo di sommabilità si allarga, quando si fa crescere a col farlo divergere $a + \infty$, e l'area limite di sommabilità è la stella rettilinea per l'elemento $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu$, cioè il piano tagliato da $+1$ a $+\infty$ lungo l'asse reale. Nessun metodo $(f_{(a)}, g)$ raggiunge questo campo, ma ogni suo punto è raggiunto da un conveniente metodo $(f_{(a)}, g)$. L'ufficio di a è di essere un ordine di sommazione permettente di ottenere la sommazione della $\sum z^\nu$, qualunque sia la posizione di z entro la stella, purchè esso a venga scelto sufficientemente grande (la sommazione è a più forte ragione valida per gli infiniti valori dell'ordine di sommazione maggiori di quello già considerato).

Le considerazioni precedenti si possono d'altronde estendere ad un elemento qualunque di funzione analitica $f(z) v \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$ e permettono di concludere che i procedimenti $(f_{(a)}, g)$ consentono, nel loro complesso, la sommazione della $\sum u_\nu z^\nu$ verso la somma $f(z)$ in ogni punto interno alla stella rettilinea dell'elemento in questione. Per ogni campo S, contenuto entro la stella, esiste un valore a_1 di a tale che per $a > a_1$ il campo S cade entro il campo di sommabilità (della $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu$) pel metodo $(f_{(a)}, g)$. Il metodo $(f_{(a)}, g)$ permette anzi la uniforme sommabilità della serie $\sum u_\nu z^\nu$, in tutto il campo S e verso la somma $f(z)$, purchè sia $a > a_1$. L'importanza del contributo dei metodi $(f_{(a)}, g)$ alla soluzione delle questioni inerenti

---

piano complesso z. Conviene infine accertarsi che per due diversi valori a, a', le corrispondenti curve (7) non si attraversano. Basta stabilirlo per le due

$$r = a^{r \cos \theta - 1}$$
$$r = a'^{r \cos \theta - 1}.$$

Nel punto $\xi_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ di attraversamento dovrebbe essere $a^{r_1 \cos \theta_1 - 1} = a'^{r_1 \cos \theta_1 - 1}$ $(a > 1, a' > 1)$ il che è assurdo (accetto pel comune punto di ramificazione $\xi_1 = 1$).

al prolungamento analitico, consiste dunque nel fatto di condurre alla risoluzione, nel modo migliore, permettendo la sommabilità, entro tutta la stella, come col metodo di MITTAG-LEFFLER.

3. - Ha importanza fra i metodi $(f_{(a)}, g)$ quello $(f_{(e)}, g)$. Esso si realizza, dunque, col definire la f mediante la soluzione della $w=ze^{1-z}$, nell'intorno di $z=0$, mentre la $g(w)$ è $\frac{1}{1-f(w)}$.

Ripetendo il procedimento del numero precedente si trova che è

$$z^{\nu}=[f_{(e)}(w)]^{\nu}=\nu\cdot\frac{w^{\nu}}{e^{\nu}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+\nu)^{s-1}}{e^{s}\cdot s!}w^{s};\qquad z=f_{(e)}(w)=\frac{w}{e}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)^{s-1}}{e^{s}\cdot s!}w^{s};$$

$$g(w)=1+\sum_{1}^{\infty}z^{m}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(m\frac{w^{m}}{e^{m}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+m)^{s-1}}{e^{s}\cdot s!}w^{s}\right).$$

Sostituendo nella (1) viene

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}u_{\nu}z^{\nu}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_n)z^{n}=$$

$$=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(u_0+u_1+u_2+\ldots.+u_n)n\frac{w^{n}}{e^{n}}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+n)^{s-1}}{e^{s}\cdot s!}w^{s}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nU_nw^{n}$$

con b_n coefficiente di w^n in $g(w)$. Ordinando la $1+\sum_{1}^{\infty}z^{m}=g(w)$ secondo le potenze crescenti di w si trova

$$g(w)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{e^{n}\cdot(n-1)!}w^{n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{e^{n}n!}w^{n},\qquad b_n=\frac{n^{n}}{e^{n}\cdot n!},$$

e infine

$$U_n=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{(n-m)!}n^{-m}u_m=\sum_{m=0}^{n}\frac{\binom{n}{m}m!}{n^{m}}u_m.$$

Il metodo $(f_{(e)}, g)$ si può dunque riassumere mediante la

$$\text{somma generalizzata di }\sum_{0}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n}{}_{m}\frac{\binom{n}{m}m!}{n^{m}}u_m.$$

Questo metodo è stato già studiato dal Dott. LUIGI AMERIO in una sua recente nota: *Un metodo di sommazione per le serie di potenze e sua applicazione alla teoria della trasformazione di Laplace,* in corso di pubblicazione negli Annali della Regia Scuola Normale Superiore di Pisa.

4. - Un importante metodo di sommazione di una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ è stato definito da NIKOLA OBRECHKOFF ([6]) nel modo seguente. Posto

$$A_\mu^\nu = \frac{(\nu+1)\ldots.(\nu+\mu)}{\mu!}, \qquad (A_\mu^\nu = A_\nu^\mu),$$

si dice che una serie $\sum u_n$ è sommabile F_n con la somma S se le

$$F_n = \frac{1}{A_n^n} \sum_{\mu=0}^{n} A_n^{n-\mu} \cdot 2^\mu \cdot u_\mu$$

tendono verso il limite S quando $n \to \infty$.

L'OBRECHKOFF ha, fra l'altro, dimostrato che se la $\sum u_n$ è convergente nel senso ordinario, oppure sommabile (C, k) secondo CESÀRO, è pure sommabile F_n e con la stessa somma.

Le proprietà di questo metodo si possono dedurre da quelle generali dei metodi di GRONWALL, in base al seguente

TEOREMA. - Il metodo F_n di OBRECHKOFF è il particolare metodo $(1-(1-w)^{\frac{1}{2}}, (1-w)^{-\frac{1}{2}})$ di GRONWALL.

Infatti in questo metodo di GRONWALL si ha

$$z = f(w) = 1-(1-w)^{\frac{1}{2}}, \qquad g(w) = (1-w)^{-\frac{1}{2}}$$

e queste due funzioni soddisfáno certamente a quelle delle funzioni f, g dei metodi in questione, poichè a $w=0$ e $w=1$ corrispondono $z=0$ e $z=1$ ed è $1-w=(1-z)^2$. In questo metodo (f, g) il coefficiente λ è inoltre eguale a 2, come risulta dalla precedente relazione, e la radice $z=0$ di $w=1-(1-z)^2=(2-z)z$ è del primo ordine poichè $w'=2(1-z)$.

Dalla (1) abbiamo

$$b_n U_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} g(w) \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu \frac{dw}{w^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho')} (1-w)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(1-z) \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu \frac{dz}{(2-z)^{n+1} \cdot z^{n+1}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho')} (2-z)^{-(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu \cdot \frac{dz}{z^{n+1}} =$$

([6]) *Sulla sommazione delle serie non convergenti e il prolungamento analitico.* Nota di N. OBRECHKOFF, presentata da E. BOREL; Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie del Sciences. Tom. 182, n.° 5 (1 febbraio 1926).

Vedi pure E. KOGBETLIANTZ: *Sommation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques,* pag. 47 del fascicule LI, Mémorial des Sciences mathématiques, 1931.

$$=\frac{2}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\varrho')}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-(n+1)}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\frac{dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\varrho')}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-(n+1)}{r}(-1)^r\frac{1}{2^r}z^r\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\cdot\frac{dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{-(n+1)}{n-\nu}(-1)^{n-\nu}\cdot 2^{\nu-n}u_\nu=$$

$$=b_n U_n=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{2n-\nu}{n}2^\nu\cdot u_\nu=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{\nu=0}^{n}A_n^{n-\nu}2^\nu u_\nu.$$

D'altra parte b_n è il coefficiente di w^n nella

$$g(w)=(1-w)^{-\frac{1}{2}};$$

$$b_n=\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n=(-1)^{2n}\cdot\frac{1}{2^n}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{2^n\cdot n!}=$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!\,n!}=\frac{A_n^n}{2^{2n}}.$$

Il polinomio U_n del metodo $(1-(1-w)^{\frac{1}{2}},\ (1-w)^{-\frac{1}{2}})$ è dato dunque da

$$U_n=\frac{1}{A_n^n}\sum_{\nu=0}^{n}A_n^{n-\nu}2^\nu u_\nu=F_n.$$

5. - Dagli esempi dati si vede quale sia la strada che conviene seguire per vedere se un metodo di sommazione rientri o no fra quelli (f, g) definiti dal GRONWALL. Si deve cercare anzi tutto quale sia il contorno del campo di sommabilità del metodo assegnato, nel caso della serie geometrica $\sum\limits_0^\infty z^n$. Trovato il contorno, è opportuno vedere se è possibile esprimere lo z di questo come funzione analitica del parametro $e^{i\varphi}$ (in modo che per $\varphi=0$ sia $z=1$) e per $|\varphi|\leqq\pi$. Sia dunque la

$$z=\Phi(e^{i\varphi})$$

questa funzione analitica del parametro $e^{i\varphi}$. La prima funzione generatrice del probabile metodo ai GRONWALL potrebbe essere la

$$z=f(w)=\frac{1}{\Phi(w)},$$

se questa funzione $z=f(w)$ soddisfa effettivamente alle note condizioni di GRONWALL, per la prima funzione f. Più grave è evidentemente la difficoltà che si presenta per la scelta della seconda funzione generatrice $g(w)$.

Talvolta però anche nel caso in cui non sia agevole stabilire se un metodo rientri in tutto e per tutto fra quelli (f, g), è almeno possibile costruire un opportuno metodo di GRONWALL, avente tutte le proprietà di quello assegnato (la stessa potenza, gli stessi campi di sommazione, ecc.) e soltanto quelle. Limitiamoci ai seguenti notevoli casi relativi a metodi di sommazione (λ ordine di sommazione) definiti e studiati da NIKOLA OBRECHKOFF, indipendentemente dal punto di vista dei metodi (f, g).

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_\nu$ è sommabile secondo il metodo (di N. OBRECHKOFF) di ordine λ (λ intero pos.^{vo}) e con la somma s, se la successione

$$F_n^\lambda = \frac{1}{A_{\lambda n}^n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\lambda n}^{n-\nu}(1+\lambda)^\nu u_\nu$$

tende ad S per $n \to \infty$. Se una serie è convergente, essa è sommabile col sopra definito procedimento e verso la stessa somma s [7]. Per $\lambda=1$ si ha il metodo, rientrante fra quelli (f, g), considerato al numero precedente.

Procuriamoci la prima funzione $z=f_\lambda(w)$ generatrice del metodo (f_λ, g) risolvendo la

$$w=\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^\lambda \cdot z,$$

nell'intorno di $z=0$, e prendiamo come seconda funzione generatrice $g(w)$ la

$$g(w)=(1-z)^{-1}.$$

La $z=f_\lambda(w)$ ha uno zero del primo ordine in $z=0$ e a $z=0$ e $z=1$ corrispondono $w=0$ e $w=1$. Per riconoscere che la $f_\lambda(w)$ soddisfa alle condizioni di GRONWALL, basta dunque cercare se vale una relazione del tipo (vedi introduzione)

$$1-w=(1-z)^{\lambda_1} \cdot (a+....), \qquad \lambda_1 \geqslant 1, \qquad a>0.$$

Infatti si ha

$$1-w-1=\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^\lambda(1-z-1); \qquad 1-w=\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^\lambda(1-z)+\left[1^\lambda-\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^\lambda\right];$$

$$1-w=\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^\lambda(1-z)+\left(1-\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)\left[1+\frac{1+\lambda-z}{\lambda}+....+\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\right]=$$

$$=\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^\lambda(1-z)-\frac{1-z}{\lambda}\left[1+\frac{\lambda+1-z}{\lambda}+....+\left(\frac{\lambda+1-z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\right]=$$

---

(7) *Sur la sommation des séries divergentes,* par NIKOLA OBRECHKOFF. Extrait de l'Annuaire de l'Université de Sofia, faculté physico-mathematique, t. XXIV, 1927-1928, liv. 8. Vedi pure E. KOGBETLIANTZ, l. c. pag. 47.

$$=(1-z)\cdot\left[\left(\frac{\lambda+1-z}{\lambda}\right)^{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\left[1+\ldots+\left(\frac{\lambda+1-z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\right]\right]=$$

$$=(1-z)\left[1+\sum_{r=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{r}\left(\frac{1-z}{\lambda}\right)^{r}-\frac{1}{\lambda}\left\{1+1+\frac{1-z}{\lambda}+1+\sum_{r=1}^{2}\binom{2}{r}\left(\frac{1-z}{\lambda}\right)^{r}+\ldots+1+\sum_{r=1}^{\lambda-1}\binom{\lambda-1}{r}\left(\frac{1-z}{\lambda}\right)^{r}\right\}\right]$$

$$1-w=(1-z)^2\cdot\left[\sum_{r=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{r}\frac{(1-z)^{r-1}}{\lambda^r}-\frac{1}{\lambda^2}-\sum_{r=1}^{2}\binom{2}{r}\frac{(1-z)^{r-1}}{\lambda^{r+1}}-\ldots-\sum_{r=1}^{\lambda-1}\binom{\lambda-1}{r}\frac{(1-z)^{r-1}}{\lambda^{r+1}}\right]$$

che è del tipo richiesto. Per esser poi

$$w'=\frac{1+\lambda}{\lambda}\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\cdot(1-z),\qquad w''=\frac{1+\lambda}{\lambda^{\lambda-1}}(1+\lambda-z)^{\lambda-2}\cdot(z-2),$$

si ha che la funzione $1-w$ ha uno zero del secondo ordine (e non d'ordine maggiore) in $z=1$. L'esponente λ_1 per questi metodi di GRONWALL è dunque costantemente eguale a 2 per ogni λ. Da questa osservazione segue intanto pel Teorema II° la seguente proposizione:

Ogni qualvolta una serie è sommabile (C, k), verso la somma s, essa è pur sommabile secondo questi metodi (f_λ, g) e con la stessa somma s.

Per essere

$$1-z=\frac{\lambda}{1+\lambda}\,w'\left(\frac{\lambda}{1+\lambda-z}\right)^{\lambda-1}$$

si ha dalla (1)

$$b_nU_n^{(\lambda)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{1+\lambda}{\lambda}\,\frac{1}{w'}\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\,\frac{dw}{w^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)}\frac{1+\lambda}{\lambda}\,\frac{1}{w'}\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\,\frac{w'dz}{z^{n+1}\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^{(n+1)\lambda}}$$

$$b_nU_n^{(\lambda)}=\frac{1+\lambda}{\lambda}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho')}\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^{-(n+1)\lambda+\lambda-1}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\,\frac{dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\frac{1+\lambda}{\lambda}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho')}\left(\frac{1+\lambda-z}{\lambda}\right)^{-(n\lambda+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\,\frac{dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\lambda^{n\lambda+1}\cdot\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot\frac{(1+\lambda)^{-n\lambda-1}}{2\pi i}\int_{(\varrho')}\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\left(1-\frac{z}{1+\lambda}\right)^{-n\lambda-1}\frac{dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\lambda^{n\lambda+1}\cdot(1+\lambda)^{-n\lambda-1}\,\frac{1+\lambda}{\lambda\cdot 2\pi i}\int_{(\varrho')}\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu z^\nu\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n\lambda-1}{r}(-1)^r\frac{z^r}{(1+\lambda)^r}\,\frac{dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{n\lambda}\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\binom{-(n\lambda+1)}{n-\nu}(-1)^{n-\nu}(1+\lambda)^{-n+\nu}u_\nu=$$

$$=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{n\lambda}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\frac{(n\lambda+1)(n\lambda+2)\ldots.(n\lambda+n-\nu)}{(n-\nu)!}(-1)^{n-\nu}\cdot(1+\lambda)^{-n+\nu}u_\nu=$$

$$=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{n\lambda}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n\lambda}^{n-\nu}(1+\lambda)^{-n+\nu}\cdot u_\nu=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{n\lambda}\cdot\frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{\nu=0}^{n}A_{\lambda n}^{n-\nu}(1+\lambda)^{\nu}\cdot u_\nu,$$

e quindi

$$U_n^{(\lambda)}=\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{\lambda n}\frac{1}{b_n(1+\lambda)^n}\sum_{\nu=0}^{n}A_{\lambda n}^{n-\nu}(1+\lambda)^{\nu}\cdot u_\nu$$

è il polinomio di approssimazione del costruito metodo (f_λ, g).

Dal suo confronto col polinomio di OBRECHKOFF

$$F_n^\lambda=\frac{1}{A_{\lambda n}^{n}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{\lambda n}^{n-\nu}(1+\lambda)^{\nu}u_\nu$$

segue che le due espressioni a fattor comune $\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{\lambda n}\frac{1}{b_n(1+\lambda)^n}$, $\frac{1}{A_{\lambda n}^{n}}$, (da cui dipende esclusivamente la differenziazione dei due polinomi $U_n^{(\lambda)}F_n^\lambda$) hanno lo stesso valore asintotico per $n\to\infty$. Infatti esse non dipendono dalle u_ν, ma solo da n; d'altra parte, nel caso della convergenza ordinaria di $\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu$, è contemporaneamente

$$U_n^{(\lambda)}\to s, \qquad F_n^\lambda\to s,$$

da cui

$$\frac{U_n^{(\lambda)}}{F_n^\lambda}=\frac{\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{\lambda n}\frac{1}{b_n(1+\lambda)^n}}{\frac{1}{A_{\lambda n}^{n}}}\to\frac{s}{s}=1.$$

Possiamo concludere col dire che anche quando i due polinomi $U_n^{(\lambda)}F_n^\lambda$ non si identificano, si può almeno affermare che hanno sempre lo stesso comportamento asintotico per $n\to\infty$. Studiare dunque tutte le proprietà del metodo (f_λ, g) serve a stabilire altrettante proprietà del metodo F_n^λ di OBRECHKOFF e viceversa. Il metodo F_n^λ appare dunque, almeno in questo senso, riconducibile a quelli di GRONWALL. Ad esempio dal fatto che, se una serie è sommabile (C, k) essa è pur sommabile (f_λ, g) verso la stessa somma, segue che dalla sommabilità (C, k) segue quella F_n^λ, verso la stessa somma s.

6. - Rammentiamo che i metodi di sommazione

$$(f,\,(1-w)^{-a}), \qquad (f,\,g)$$

con $g(w)=(1-w)^{-a}+\gamma(w)$ e $a\geqslant 1$ sono equivalenti se lo sviluppo della funzione $\frac{1}{1+\gamma(w)\cdot(1-w)^a}=\frac{(1-w)^{-a}}{g(w)}$ nell'intorno della origine converge assolutamente per $w=1$. Nel caso opposto il secondo metodo è più potente del primo.

È d'altronde notevole la proposizione seguente: l'equivalenza sussiste certamente se $a \geqslant 1$ e $g(w)$ non si annulla neppure sulla circonferenza $|w|=1$.

Quanto precede vale in particolare per i due metodi

$$(w,\ (1-w)^{-a})=(C,\ a-1), \qquad (w,\ (1-w)^{-a}+\gamma(w)).$$

Sia ora una funzione $f(x)$ assolutamente integrabile in $(-\pi, \pi)$ ed ammetta nel punto x la derivata generalizzata $f^{(r)}(x)$ di ordine r, sia cioè

$$\frac{1}{2}\left[f(x+h)+(-1)^r f(x-h)\right]=\sum_{\lambda=0}^{\frac{r-l}{2}} f^{(l+2\lambda)}(x)\,\frac{h^{l+2\lambda}}{(l+2\lambda)!}+\left[f^{(r)}(x)+\omega(x,h)\right]\frac{h^r}{r!}$$

con $l=0$, 1, secondochè r è pari o dispari e $\lim\limits_{h\to 0}\omega(x,h)=0$.

Formate per la serie di FOURIER della $f(x)$ le medie di CESARO, d'ordine $r+1$, $s_n^{(r+1)}\{f(x)\}$ si ha il seguente

TEOREMA DI GRONWALL. - Se in un punto x esiste la $f^{(r)}(x)$ è

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d^r}{dx^r}\,s_n^{(r+1)}\{f(x)\}=f^{(r)}(x).$$

Il teorema cessa di esser vero se si sostituisce l'ordine $r+1$ con r.

Dalle proposizioni ricordate in questo numero si ha che se $a \geqslant 1$ e lo sviluppo in serie di potenze di $\dfrac{(1-w)^{-a}}{g(w)}$ converge assolutamente per $w=1$ (in particolare se la $g(w)$ non si annulla lungo la $|w|=1$) vale il

TEOREMA. - Formato il polinomio $V_n^{(r+1)}\{f(x)\}$ con un qualsiasi metodo $(w,\ (1-w)^{-r-2}+\gamma(w))$ è

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d^r}{dx^r}\,V_n^{(r+1)}\{f(x)\}=f^{(r)}(x).$$

Il teorema cessa d'esser vero se si sostituisce l'ordine $r+1$ con r. Per $\gamma(w)=0$ si ha il precedente teorema di GRONWALL; facendo inoltre $r=0$ si ha il noto teorema di FÈJER.

§ 2.

7. - Come è noto la serie geometrica è sommabile (f, g) con la somma $\dfrac{1}{1-\xi}$ entro l'area D^{-1} racchiusa dalla linea L^{-1}

$$z=\frac{1}{f(e^{i\varphi})}, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

mentre fuori di questa linea la sommazione è invece sempre divergente. Indicando dunque con $U_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu}\,\xi^\nu$ il polinomio di approssimazione è

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu}\,\xi^\nu=\frac{1}{1-\xi}$$

uniformemente entro l'area racchiusa dalla L^{-1}.

Sia un secondo metodo (f_1, g_1) e indichiamo con L_1^{-1} la curva relativa e con $U_{1n}=\sum_{\nu=0}^{n} a_{1n,\nu}\xi^\nu$ il polinomio di approssimazione per la serie geometrica. Supponiamo inoltre che λ e λ_1 siano entrambi maggiori di 1.

Fatto ciò definiamo un nuovo metodo di sommazione per la serie geometrica $\sum_{\nu=0}^{\infty}\xi^\nu$ cercando il limite, per $n\to\infty$, cui tende il polinomio misto $U_{2,n}=\sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu}a_{1n,\nu}\xi^\nu$. Sia Ω il campo di punti ξ, interni a D_1^{-1}, tali che le curve ξL_1 siano interne alla curva L^{-1} e Ω_1 il campo di punti ξ, interni a D^{-1}, tali che le curve ξL siano interne alla curva L_1^{-1}. Si ha il seguente

TEOREMA. - Il polinomio $U_{2,n}$ converge uniformemente a $\frac{1}{1-\xi}$, per $n\to\infty$, entro il campo $A=\Omega_1+\Omega$; si suppone $g=g_1=(1-w)^{-\alpha}$ con α minore di $\frac{1}{\lambda}$ e $\frac{1}{\lambda_1}$.

Sarà necessario premettere qualche richiamo.

Siccome la $z=f(w)$ soddisfa alle condizioni di GRONWALL, la funzione di z

$$\psi(z)=\frac{1-w}{(1-z)^\lambda} \tag{7}$$

è regolare nel campo D (campo rappresentante quello $|w|<1$ nel piano z, mediante la $z=f(w)$) ed anche sul suo contorno, non escluso il punto $z=1$; la funzione non si annulla poi entro D. D'altra parte, essendo per ipotesi la $z=f(w)$ regolare anche per $|w|=1$ salvo il punto $\omega=1$, e la sua inversa regolare anche sul contorno di D, salvo il punto $z=1$, la corrispondenza biunivoca tra il cerchio $|w|\leq 1$ e il campo D può prolungarsi anche oltre i rispettivi contorni, anzi in modo uniforme quando si asportino da essi due intorni corrispondenti, piccoli a piacere, dei punti $w=1$ e $z=1$.

Ma anche nell'intorno di questi punti, in forza della (7) la corrispondenza si può estendere opportunamente: un cerchio di centro $w=1$ e raggio abbastanza piccolo h, tagliato nel senso $(1, +\infty)$ si rappresenta sul piano z in un'area a forma di settore, racchiusa tra due archi uscenti da $z=1$ e formanti col segmento $(1, 0)$ angoli di $\frac{\pi}{\lambda}$, e un terzo arco che ne riunisce gli estremi. Al settore di questo cerchio, di apertura $\pi+2\zeta$, con $\zeta<\frac{\pi}{2}$, simmetrico rispetto al segmento $(1, 0)$, corrisponde una figura analoga nel piano z, dove però gli archi che rappresentano i raggi estremi formano con il segmento $(1, 0)$ angoli di $\frac{\pi}{2\lambda}+\frac{\zeta}{\lambda}$. E poichè per $\zeta<\frac{\pi(\lambda-1)}{2}$ questi angoli sono $<\frac{\pi}{2}$, si vede che se h è abbastanza piccolo essi cadranno entro il cerchio $|z|\leq 1$.

Da tutto ciò vediamo che se dal cerchio $|w|\leq 1+h$ togliamo la parte compresa tra le semirette uscenti da $w=1$ e formanti angoli di $\frac{\pi}{2}-\zeta$ con l'asse reale positivo, questo campo C, per h ed ζ abbastanza piccoli, si rappresenta con la $z=f(w)$ in un campo interno a $|z|\leq 1$ e avente D all'interno, in modo che i tre contorni abbiano il punto comune $z=1$.

Quando poi si voglia stabilire il risultato della applicazione del metodo $(f(w), (1-w)^{-a})$ alla serie geometrica (vedremo fra breve quanto ciò serva per la dimostrazione del teorema che ci occupa in questo numero) conviene rammentare il procedimento altrove seguito:

a) Si applica anzitutto la sommazione alla serie avente i termini

$$u_0=1-\frac{1}{1-\xi}, \qquad u_\nu=\xi^\nu \quad \text{per} \quad \nu>1,$$

e per questa serie la somma generalizzata deve risultare nulla.

Posto allora $z_0=\frac{1}{\xi}$, si ha, per $|z|<|z_0|$:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{1-\xi z}-\frac{1}{1-\xi}=\frac{-\xi(1-z)}{(1-\xi z)(1-\xi)}=\frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{1-z}{z-z_0} \tag{8}$$

e quindi, nell'intorno dell'origine, per la (1),

$$\sum b_n^{(a)} U_n w^n = \frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{1-z}{z-z_0}\cdot\frac{1}{(1-w)^a} \tag{8'}$$

dove $b_n^{(a)}$, coefficiente di w^n nello sviluppo di $(1-w)^{-a}$ vale

$$b_n^{(a)}=\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(n+1)}.$$

Dalla (8′) segue, per la formula di CAUCHY:

$$b_n^{(a)} U_n = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{1-z}{z-z_0}\cdot\frac{dw}{(1-w)^a\cdot w^{n+1}}$$

l'integrazione essendo fatta, provvisoriamente, lungo una circonferenza di centro O e raggio abbastanza piccolo. Per la (7), essa può anche scriversi

$$b_n^{(a)} U_n = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{(1-w)^{a'-a}}{[\psi(z)]^{a'}}\cdot\frac{dw}{w^{n+1}}, \quad \text{con} \quad a'=\frac{1}{\lambda}. \tag{9}$$

Si consideri ora la linea L, di equazione

$$z=f(e^{i\varphi}), \qquad (-\pi\leq\varphi\leq\pi),$$

contorno di D e immagine, mediante la $z=f(w)$, della circonferenza $|w|=1$, e la sua inversa L^{-1} di equazione

$$z=\frac{1}{f(e^{i\varphi})},$$

e sia C un campo chiuso tutto interno ad L^{-1}. Diciamo che per ogni ξ in C la linea l può deformarsi nella linea l_h costituita dal segmento da 1 a $1+h$, concepito sull'orlo superiore del taglio da 1 a $+\infty$ che rende monodroma la funzione integranda, dal cerchio $|w|=1+h$, descritto in senso positivo, e dal segmento da $1+h$ ad 1 sull'orlo inferiore del taglio. Ciò con h positivo, sufficientemente piccolo.

E difatti il fattore $(1-w)^{\alpha'-\alpha}$, per l'ipotesi $\alpha' \geqq \alpha$, è regolare all'interno, continuo al contorno; inoltre avendo presente quanto si è visto sul prolungamento della rappresentazione conforme del cerchio $|w|\leqq 1$ nel campo D oltre i rispettivi contorni, si vede che a un tale contorno corrisponde sul piano z una linea l_h' costituita da due archetti uscenti da $z=1$ e formanti col segmento $(1, 0)$ angoli $\frac{\pi}{\lambda}$, e da un arco esterno a D e prossimo ad esso quanto si vuole che con questi avvolge completamente D. Onde il fattore $\frac{1}{[\psi(z)]^{\alpha'}}$, come funzione di w, sarà regolare su l_h e nell'interno purchè h sia abbastanza piccolo. Quanto al fattore $\frac{1}{z-z_0}$, esso, come funzione di w, rimarrà regolare se su l_h' e nell'interno è $z \neq z_0$ cioè z_0 esterno a l_h'. Ora mentre ξ descrive C, $z_0=\frac{1}{\xi}$ descrive un campo chiuso C^{-1} esterno a D e avente quindi dal contorno L di D distanza positiva; onde z_0 sarà certo esterno a l_h', per h abbastanza piccolo. Assunta dunque l_h come linea di integrazione, passiamo a maggiorare il secondo membro della (9) osservando che su tutto il contorno è, con un conveniente M_1 per tutti gli ξ di C,

$$\left|\frac{1}{1-\xi}\cdot\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{(1-w)^{\alpha'-\alpha}}{[\psi(z)]^{\alpha'}}\right|<M$$

onde la parte dell'integrale relativa al cerchio è maggiorata da $\frac{M}{(1+h)^n}$; mentre quella relativa ai tratti rettilinei è maggiorata da

$$\frac{M}{\pi}\int_1^{1+h}\frac{dw}{w^{n+1}}<\frac{M}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{dw}{w^{n+1}}=\frac{M}{\pi n}.$$

Osservando allora che per $n\to\infty$ è, per la formula di STIRLING,

$$b_n^{(\alpha)}\sim\frac{e^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot n^{\alpha-1},$$

se ne conclude che U_n è $O(n^{-\alpha})$, uniformemente per tutti gli ξ di C; in particolare esso tende a zero per $n\to\infty$, uniformemente in C.

b) Richiamati gli elementi cui appresso dovremo ricorrere, veniamo alla dimostrazione del teorema che ci occupa.

Consideriamo il polinomio $U_n=\sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu}u_\nu$, con $u_0=1-\frac{1}{1-\xi}$, $u_\nu=\xi^\nu$ per $\nu>1$, pensandolo una serie coi termini nulli dall'$(n+2)^{\text{mo}}$ in poi. Applicando il metodo $(f_1(w), (1-w)^{-\alpha})$ si ha la

$$(10) \qquad z=f_1(w),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu} u_\nu z^\nu = \frac{1}{(1-w)^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} b_r^{(\alpha)} (a_{n,0} a_{1r,0} u_0 + a_{n,1} a_{1r,1} u_1 + \dots + a_{n,n} a_{1r,n} u_n) w^r.$$

In particolare, per $r=n$ il polinomio entro parentesi a secondo membro si identifica col nostro polinomio misto

$$U_{2,n} = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu} a_{1n,\nu} u_\nu .$$

Posto $z_0 = \frac{1}{\xi}$, si ha, dalla convergenza della serie (8) o dalla sua sommabilità (f, g),

$$(11) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu} u_\nu z^\nu = \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1-z}{z-z_0} + \varepsilon_n(\xi, z), \quad \text{con} \quad \varepsilon_n(\xi, z) = O(n^{-\alpha}),$$

se ξz è interno al campo racchiuso dalla L^{-1}; in particolare per $|\xi z|<1$ cioè per $|z|<|z_0|$. Sia Ω il campo di punti ξ, interni al campo D_1^{-1}, tali che le curve ξL_1 siano interne alla curva L^{-1}. Per ogni ξ di Ω la solita linea l_h per h abbastanza piccolo si può ridurre si prossima alla $|w|=1$ tanto che il contorno l_h' di punti z, ottenuto da l_h con la trasformazione $z=f_1(w)$, sia così prossimo alla curva L_1 in modo che oltre alla ξL_1 anche la curva $\xi l_h'$ sia interna alla curva L^{-1}; onde

$$(11') \qquad \sum_{r=0}^{\infty} b_r^{(\alpha)} (a_{n,0} a_{1r,0} u_0 + \dots) w^r = \left[\frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1-z}{z-z_0} + \varepsilon_n(\xi, z)\right] \frac{1}{(1-w)^\alpha}.$$

Dalle (10) e (11') si ha, per la formula di Cauchy, nel caso di $r=n$

$$b_n^{(\alpha)} U_{2,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_h} \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1-z}{z-z_0} \cdot \frac{dw}{(1-w)^\alpha \cdot w^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_h} \frac{\varepsilon_n(\xi, z)}{(1-w)^\alpha} \cdot \frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Valendo, per la $z=f_1(w)$, la relazione solita

$$(7') \qquad \psi_1(z) = \frac{1-w}{(1-z)^{\lambda_1}}, \qquad \alpha'' = \frac{1}{\lambda_1},$$

segue che

$$b_n^{(\alpha)} U_{2,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_h} \frac{1}{1-\xi} \, \frac{1}{z-z_0} \, \frac{(1-w)^{\alpha''-\alpha}}{[\psi_1(z)]^{\alpha''}} \, \frac{dw}{w^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_h} \frac{\varepsilon_n(\xi, z)}{(1-w)^\alpha} \cdot \frac{dw}{w^{n+1}},$$

$$(12) \qquad U_{2,n} = \frac{1}{b_n^{(\alpha)} 2\pi i} \int_{l_h} \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1}{z-z_0} \, \frac{(1-w)^{\alpha''-\alpha}}{[\psi_1(z)]^{\alpha''}} \, \frac{dw}{w^{n+1}} + \frac{1}{b_n^{(\alpha)} 2\pi i} \int_{l_h} \frac{\varepsilon_n(\xi, z)}{(1-w)^\alpha} \cdot \frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Dalle considerazioni svolte nel caso della (9) segue che il primo integrale del secondo membro di (12) non è altro che U_{1n}; è dunque per ogni ξ del campo Ω

$$U_{2,n}=U_{1,n}+\frac{1}{b_n^{(a)}2\pi i}\int\limits_{l_h}\frac{\varepsilon_n(\xi,z)}{(1-w)^a}\,\frac{dw}{w^{n+1}},$$

(z è allora presa lungo l_h' e ξz è così interno alla curva L^{-1}), con

$$0<a<1,\qquad \varepsilon_n(\xi,z)=O(n^{-a}),\qquad b_n^{(a)}\backsim\frac{e^{1-a}}{\Gamma(a)}\,n^{a-1}.$$

Il comportamento asintotico dei polinomi $U_{2,n}\,U_{1,n}$ è certo il medesimo, quando ξ è in Ω, poichè è possibile dimostrare che

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{b_n^{(a)}2\pi i}\int\limits_{l_h}\frac{\varepsilon_n(\xi,z)}{(1-w)^a}\,\frac{dw}{w^{n+1}}=0.$$

Infatti, per quanto riguarda la integrazione lungo $|w|=1+h$, la precedente espressione è minore in modulo di

$$\frac{k}{n^{a-1}}\cdot n^{-a}\cdot\frac{1}{h^a\cdot(1+h)^n}=\frac{k}{n^{2a-1}\cdot h^a\cdot(1+h)^n},$$

e, per quanto riguarda l'integrazione lungo i due tratti rettilinei, il modulo della espressione è minore di

$$\frac{k'}{n^{2a-1}}\int\limits_1^{1+h}(w-1)^{-a}dw=\frac{k'}{n^{2a-1}}\cdot\frac{h^{1-a}}{1-a}.$$

Rendendo h infinitesimo, per $n\to\infty$, col porre $h=\frac{\log n}{n}$, si ha

$$\frac{1}{n^{2a-1}}\cdot\frac{1}{h^a\cdot(1+h)^n}=\frac{1}{n^{2a-1}\cdot\frac{\log^a n}{n^a}\cdot\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}\log n}}\backsim\frac{1}{n^{2a-1}\cdot n^{1-a}\cdot\log^a n}\to 0;$$

è poi

$$\frac{1}{n^{2a-1}}\cdot\frac{h^{1-a}}{1-a}=\frac{(1-a)^{-1}}{n^{2a-1}}\cdot\frac{\log^{1-a}n}{n^{1-a}}=\frac{(1-a)^{-1}\cdot\log^{1-a}n}{n^a}\to 0.$$

Per ξ nel campo Ω è dunque

$$\lim_{n\to\infty}U_{2,n}=\lim_{n\to\infty}U_{1,n}=\frac{1}{1-\xi},$$

se i polinomi sono relativi alla $\sum u_\nu=\sum\xi^\nu$.

Detto Ω_1 il campo di punti ξ, interni al campo D^{-1}, tali che le curve ξL siano interne alla curva L_1^{-1}, col ragionamento precedente si dimostra che per ξ nel campo Ω_1 è

$$\lim_{n\to\infty}U_{2,n}=\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{1-\xi}.$$

Entro il campo $A = \Omega_1 + \Omega$ la convergenza di $U_{2,n}$ a $\frac{1}{1-\xi}$ è uniforme.

Coi soliti procedimenti si dimostra che:

Se un elemento di funzione analitica $\sum a_\nu \xi^\nu$ si può prolungare analiticamente in un campo semplicemente connesso $\sum$ contenente il cerchio di convergenza dell'elemento, dando luogo ad un ramo monodromo $F(\xi)$, la serie data sarà sommabile $U_{2,n}$ uniformemente verso la somma $F(\xi)$ in ogni campo C chiuso interno all'insieme SA, dove S è il contorno di $\sum$.

OSSERVAZIONE. - Da quanto sappiamo nei riguardi della sommabilità della serie $\sum_0^\infty \xi^n$ si può dedurre che:

La serie $\sum_{n=0}^\infty \xi^{-n}$ è sommabile (f, g) con la somma $\frac{1}{1-\frac{1}{\xi}}$ nell'intorno di $\xi = \infty$ esterno alla linea

$$z = f(e^{i\varphi}), \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

mentre nel campo D racchiuso da questa linea la sommazione è invece sempre divergente.

Se avessimo la $\sum_{-\infty}^{+\infty} \xi^n$, si deduce da quanto precede che, per $n \to \infty$, il polinomio

$$U_n = \sum_1^n a_{n\nu}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + 2a_{no}$$

converge a $\frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{1-\frac{1}{\xi}}$ entro l'area compresa fra le due curve

$$z = \frac{1}{f(e^{i\varphi})}, \qquad z = f(e^{i\varphi}), \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Segue da tutto ciò la via da seguirsi per stabilire i risultati per la applicazione dei metodi (f, g) alle serie di LAURENT e alle loro generalizzazioni studiate da APPELL.

8. - Dato un procedimento (f, g), sia $U_n(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu} z^\nu$ il relativo polinomio d'ordine n per la $\sum_{\nu=0}^\infty z^\nu$. Per ogni campo chiuso di punti z, interno al campo racchiuso dalla $L^{-1}_{(f,g)}$ e al campo racchiuso dalla $(-1)L^{-1}_{(f,g)}$, è uniformemente

$$\lim_{n=\infty} [U_n(z) \cdot U_n(-z)] = \frac{1}{1-z^2}.$$

Nel polinomio

$$U_n(z)\, U_n(-z) = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\nu'=0}^n a_{n,\nu} a_{n,\nu'} z^{\nu+\nu'} \cdot (-1)^{\nu'},$$

ove i termini in cui ν è pari (o dispari) e ν' dispari (o pari) si elidono due a due, restano solo gli addendi relativi alle coppie ν, ν', costituite di numeri entrambi pari o entrambi dispari. Posto allora $z^2=y$ e indicati con $p_1, p_2, \ldots, p_{r_n}$ i numeri positivi pari $\leqslant n$ e con $d_1, d_2, \ldots, d_{s_n}$ i numeri positivi dispari $\leqslant n$, avremo

$$\lim_{n=\infty} \Big[\sum_{\nu, \nu' = p_1, p_2, \ldots, p_{r_n}} a_{n,\nu} \cdot a_{n,\nu'} \cdot y^{\frac{\nu+\nu'}{2}} - \sum_{\nu, \nu' = d_1, d_2, \ldots, d_{s_n}} a_{n,\nu} \cdot a_{n,\nu} \cdot y^{\frac{\nu+\nu'}{2}}\Big] = \frac{1}{1-y}$$

uniformemente in ogni campo chiuso di punti y tale che il suo trasformato nel piano z, mediante la $z^2=y$, sia tutto interno al campo comune alle due regioni racchiuse dalle curve $L^{-1}_{(f,g)}$, $(-1)L^{-1}_{(f,g)}$.

Segue al solito che: « Dato un elemento di funzione analitica $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$, e detto $\Omega'_{(f,g)}$ il trasformato, mediante la $z^2=y$, del campo z comune alle regioni racchiuse dalle curve $L^{-1}_{(f,g)}$, $(-1)L^{-1}_{(f,g)}$, il polinomio

$$U_n'(y) = \sum_{\nu, \nu' = p_1, p_2, \ldots, p_{r_n}} a_{n,\nu} \cdot a_{n,\nu'} \cdot \mathrm{a}_{\frac{\nu+\nu'}{2}} y^{\frac{\nu+\nu'}{2}} - \sum_{\nu, \nu' = d_1, d_2, \ldots, d_{s_n}} a_{n,\nu} \cdot a_{n,\nu'} \cdot \mathrm{a}_{\frac{\nu+\nu'}{2}} \cdot y^{\frac{\nu+\nu'}{2}}$$

converge uniformemente, al ramo della funzione analitica che risulta dal prolungamento dell'elemento, in ogni campo interno a quello $B'_{(f,g)}$ comune a tutte le regioni $a\Omega'_{(f,g)}$; gli a sono i punti singolari per il ramo di funzione analitica ».

Il metodo U_n' sarà di qualche interesse quando il contorno $L^{-1}_{(f,g)}$ è interno al campo $\Omega'_{(f,g)}$.

OSSERVAZIONE I. - Hanno particolare importanza i metodi (V, k) del DE LA VALLÉE POUSSIN (vedi note (1), (2)) poichè si può dimostrare che, al crescere di k, il campo Ω_k' tende a ricoprire il piano tagliato da 1 a $+\infty$ assai più rapidamente che non quello D_k^{-1}.

OSSERVAZIONE II. - Le considerazioni svolte sopra si potrebbero ripetere per gli stessi metodi (f, g) se mediante la $z^2=y$ si eseguissero sui metodi in questione delle generalizzazioni analoghe a quelle viste in questo numero; ad esempio, nel caso in cui si ottenesse da $U_n(z)+U_n(-z)$ la somma generalizzata

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} = \frac{2}{1-z^2} = \frac{2}{1-y}.$$

§ 3.

Come è noto, i procedimenti (C, k) di CESARO sono i particolari metodi (f, g) ottenuti ponendo

$$f(w)=w, \qquad g(w)=(1-w)^{-k-1};$$

in particolare, per $k=0$, si ha la sommazione ordinaria.

Rammentiamo che generalmente si definisce la sommabilità (C, k), con k reale, di una serie $\sum_0^\infty u_\nu$ cercando il limite, per $n \to \infty$, della media $C_n^{(k)}$ di ordine k definita da

$$C_n^{(k)}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n-m+k-1}{n-m}\frac{s_m}{\binom{n+k}{n}}, \qquad s_m=u_0+u_1+\dots+u_m;$$

questa espressione ha significato per ogni numero reale positivo o nullo, come pure per ogni k negativo non intero.

Però i procedimenti (C, k) con $k<-1$ non sono regolari, poichè non è sempre valido pei procedimenti $(C, -1-\varepsilon)$, il principio di permanenza. Dalla proprietà d'essere una serie, certo sommabile (C, k'), se è sommabile (C, k), ogni volta che sia $k'>k>-1$, segue che se una serie è sommabile $(C, -\varepsilon)$, con $-\varepsilon>-1$, essa è pure sommabile $(C, 0)$. Non vale però la proposizione inversa e perciò un procedimento di sommazione $(C, -\varepsilon)$ con $-1<-\varepsilon<0$ non è regolare, mentre lo sono quelli (C, ε).

Vogliamo qui, a proposito di questi ultimi procedimenti $(C, -\varepsilon)$ non regolari, mettere in evidenza un curioso comportamento che si può realizzare in infiniti casi:

Vi sono delle serie che, mentre per gli infiniti ordini di sommazione $-\varepsilon$ compresi fra $-\varepsilon_1$ e 0 con $\varepsilon_1<1$ (0 e $-\varepsilon_1$ inclusi) fanno convergere al comune limite s tutte le successioni $C_n^{(0)}$, $C_n^{(-\varepsilon)}$, $C_n^{(-\varepsilon_1)}$, quando la $-\varepsilon$ si mantiene costante, mentre n diverge, fanno invece convergere la successione $C_n^{(-\varepsilon)}$ costantemente al limite zero $(\neq s)$, quando la ε mantenendosi interna a $(0, \varepsilon_1)$ varia (mentre n diverge) tendendo a zero in modo tale che n^ε diverga.

Rendere ε infinitesimo nel detto modo, è sempre possibile: basta ad esempio porre $\varepsilon=\dfrac{\log(\log n)}{\log n}$, $n^\varepsilon=e^{\log(\log n)}=\log n \ (\to\infty)$.

Dedurremo quanto sopra da una proposizione più generale che mostreremo valere per estese classi di metodi (f, g). Ricordiamo a questo scopo di avere studiato in un precedente lavoro [8] una classe di infiniti procedimenti di GRONWALL. Conviene riassumerne brevemente la definizione e le proprietà trovate.

---

[8] Vedi, della nota [1], il secondo l. c.

Partendo da un qualunque metodo (f, g) si eseguisca nelle

$$z=f(w), \qquad 1-w=(1-z)^{\lambda}(a+....), \qquad \lambda \geqslant 1, \qquad a>0,$$

il cambiamento di variabile

$$1-w'=(1-w)^{\theta},$$

ove θ è una costante positiva tale che $\theta\lambda \geqslant 1$. Si ottiene così la

$$f_{\theta}(w')=f(w)=f(1-(1-w')^{\theta^{-1}})$$

che per $\theta \geqslant 1$ soddisfa le condizioni di GRONWALL. Scelta una arbitraria

$$g_1(w')=(1-w')^{-\alpha}+\gamma(w'),$$

si ha così un metodo di GRONWALL

$$(f_{\theta}(w'),\ g_1(w'))=(f(1-(1-w')^{\theta^{-1}}),\ g_1(w')).$$

Le principali proprietà son le seguenti:

Ogni serie $\sum u_{\nu}$ sommabile (f, g) è pur sommabile (f_{θ}, g_1), se $\theta>1$, con la stessa somma.

Per $\theta=1$ il metodo (f_{θ}, g) si identifica con quello fondamentale (f, g); per $\theta>1$ e assumente valori via via crescenti, il procedimento (f_{θ}, g_1) si rende man mano sempre più potente. θ ha dunque l'ufficio di un vero e proprioordine di sommazione. Di questa classe di infiniti metodi, quello fondamentale (f, g) è il meno potente di tutti.

Ciò posto, sia l'insieme di funzioni $g_{\varepsilon}(w)=(1-w)^{\varepsilon-1}$ ordinato in corrispondenza al tendere di ε a zero, mentre n diverge, semprechè n^{ε} sia tale da divergere Possiamo considerare i procedimenti $(f_{\theta}(w),\ (1-w)^{\varepsilon-1})$ e indicare con $U_{\varepsilon,n}^{(\theta)}$ il poli nomio n^{mo} (θ arbitrario mentre ε dipendente da n è infinitesimo nel modo detto quando n diverge). Dimostriamo la seguente proposizione:

« Mentre una serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} U_{\nu}$ si mantiene sommabile coi metodi (f_{θ}, g) verso una comune somma s (almeno se la costante θ è maggiore di θ_1) quando essa è sommabile (f_{θ_1}, g) con somma s, la successione $U_{\varepsilon,n}^{(\theta)}$ converge invece costantemente al limite $s'=0$, mentre n diverge. Mentre ε ed $\frac{1}{n}$ convergono a zero, la θ $(>\theta_1)$ si può mantenere costante, oppure considerarla variabile, assieme ad n (ed ε), ma sempre $\geqslant \theta' > \theta_1$ ».

Prima di iniziare la dimostrazione di quanto sopra, osserviamo che la successione $U_{\varepsilon,n}^{(\theta)}$ è una particolarissima successione, estratta dalla classe delle successioni di polinomi $U_n^{(\theta)}$ relativi ai metodi $(f_{\theta},\ (1-w)^{-\alpha})$ scegliendo il polinomio n^{mo} opportunamente in successioni diverse, quando n varia, senza quindi restare sempre nella successione di polinomi U_n relativa solamente ad uno particolare dei metodi $(f_{\theta},\ (1-w)^{-\alpha})$.

Per stabilire il non regolare comportamento della successione $U_{\varepsilon,n}^{(\theta)}$ estratta dalla classe di quelli U_n relativi agli infiniti metodi tutti regolari compresi fra i due, per così dire, estremali, $(f_\theta,\ (1-w)^{+\varepsilon-1})$, $(f_\theta,\ (1-w)^{-1})$, osserviamo che la trasformazione conforme di w in w' nelle

$$1-w=(1-z)^{\theta\lambda}\cdot(a+....)^{\theta}, \qquad 1-w'=(1-z)^{\theta_1\lambda}\cdot(a+....)^{\theta_1},$$

è data dalla

$$1-w'=(1-w)^{\frac{\theta_1}{\theta}}. \tag{13}$$

In un primo tempo dimostriamo la proposizione supponendo che θ possa assumere comunque, mentre n ed ε variano, valori θ compresi fra θ' e θ''. Se nel piano w tagliato da 1 a $+\infty$ lungo l'asse reale prendiamo un campo L_θ finito e semplicemente connesso e applichiamo la precedente trasformazione ai punti del suo contorno per due distinti valori di θ maggiori di θ' e minori di θ'', le due corrispondenti curve nel piano w' non si attraversano. È possibile inoltre scegliere, in corrispondenza dei due numeri prescelti $\theta''>\theta'>\theta_1$, un campo, come in figura, situato nel piano w e tale che quelli corrispondenti nel piano w', ottenuti con le (13) per i θ tali che $\theta''\geqslant\theta\geqslant\theta'$, siano interni tutti al cerchio $|w'|=1$ e le direzioni tangenziali con cui i loro contorni pervengono al punto $w'=1$, formino col segmento $1-0$ dell'asse reale, angoli $<\beta_0<\frac{\pi}{2}$; bisogna inoltre scegliere opportunamente piccolo ϱ_1 affinchè il contorno $C_1+C_2+C_3+C_4=C$ sia abbastanza vicino a quello $|w|=1$ in modo da rendere interni a $|w'|=1$ quelli trasformati C' del piano w', per i θ tali che $\theta''\geqslant\theta\geqslant\theta'$. Ricordiamo che il trasformato di $|w|=1$ è tutto interno a $|w'|=1$.

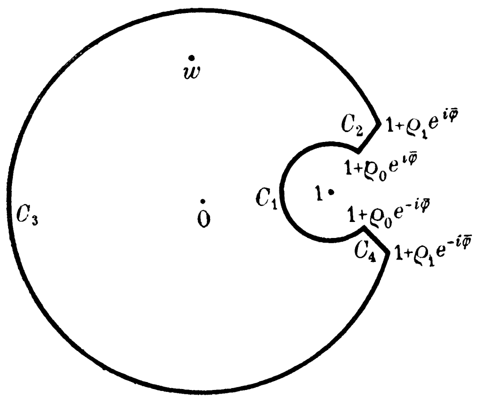

FIG. 1.

Premesso ciò, osserviamo che dalla supposta sommabilità della $\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu$ col metodo $(f_{\theta_1},\ g)$ segue che è $U_n^{(\theta_1)}\to s$. La

$$\Phi(w')=\sum_{\nu=0}^{\infty}u_\nu[f_{\theta_1}(w')]^\nu=\frac{1}{g(w')}\sum_{n=0}^{\infty}b_n U_n^{(\theta_1)}w'^n$$

è analitica regolare entro tutto $|w'|<1$ (poichè per $|w'|<1$ è $g(w')\neq 0$).

Pel teorema 1° di GRONWALL è, uniformemente, $\Phi(w')\to s$ per $w'\to 1$ quando w' è entro $|w'|<1$ e nel settore $1-w'=re^{i\beta}$, $-\beta_0<\beta<\beta_0$.

Essendo le $z=f_{\theta_1}(w')$, $z=f_\theta(w)$, regolari rispettivamente in $|w'|\leqslant 1$, $|w|\leqslant 1$, si ha che

$$z=f_{\theta_1}(w'(w))$$

è regolare per $|w|\leqslant 1$, eccetto $w=1$.

Le solite identità

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w')}\sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n^{(\theta_1)} w'^n, \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g_1(w)}\sum_{n=0}^{\infty} b_{1,\,n} U_n^{(\theta)} w^n,$$

relative ai procedimenti (f_{θ_1}, g), (f_θ, g_1), portano alla

$$\Phi(w'(w)) = \frac{1}{g_1(w)}\sum_{n=0}^{\infty} b_{1,\,n} U_n^{(\theta)} w^n$$

regolare nel campo di contorno C (eccetto $w=1$) e minore, in modulo, in questo campo chiuso di un M assegnabile, e questo per tutti i θ tali che $\theta''\geqslant\theta\geqslant\theta'(>\theta_1)$.

Con la formula integrale si ha

$$2\pi i b_{1,\,n} U_n^{(\theta)} = \int_C g_1(w)\Phi(w'(w))\frac{dw}{w^{n+1}} = I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Da

$$g_1(w)=(1-w)^{-\alpha}$$

segue che è

$$|g_1(w)|=\varrho_0^{-\alpha}$$

lungo C_1. È dunque, lungo C_1,

$$\left|\frac{dw}{w^{n+1}}\right| \leqslant \frac{\varrho_0 d\varphi}{(1-\varrho_0)^{n+1}}, \qquad |I_1| < N\frac{\varrho_0^{1-\alpha}}{(1-\varrho_0)^{n+1}}, \qquad (N \text{ è costante opportuna}).$$

Lungo C_2 e C_4 abbiamo

$$|w^2| = 1+\varrho^2+2\varrho\cos\overline{\varphi} > 1+2\varrho\cos\overline{\varphi},$$

$$|I_2+I_4| < 2N_1\varrho_0^{-\alpha}\int_{\varrho_0}^{\varrho_1}(1+2\varrho\cos\overline{\varphi})^{-\frac{n+1}{2}}\cdot d\varrho,$$

$$|I_2+I_4| < \frac{N_1}{\cos\overline{\varphi}}\cdot\frac{2\varrho_0^{-\alpha}}{n-1}(1+2\varrho_0\cos\overline{\varphi})^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Si ha infine, lungo C_3,

$$|g_1(w)\cdot\Phi(w'(w))| < M\cdot\varrho_1^{-\alpha}, \qquad |I_3| < 2\pi M\cdot\varrho_1^{-\alpha}\cdot|1+\varrho_1 e^{i\overline{\varphi}}|^{-n}.$$

Nel caso di

$$g(w)=(1-w)^{-\alpha}=(1-w)^{-(-\varepsilon)-1},$$

ove è ε infinitesimo con $\frac{1}{n}$ nel modo detto, il coefficiente di w^n (cioè $b_{1,n}$) è

$$b_{1,n}=\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(n+1)}=\frac{\Gamma(n+1-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)\cdot\Gamma(n+1)}$$

tendente ad 1 per n^{-1} ed ε tendenti a zero.

Fatto poi nelle precedenti disuguaglianze $\varrho_0=\frac{1}{n}$, si ha

$$\frac{\varrho_0^{1-\alpha}}{(1-\varrho_0)^{n+1}}=\frac{\varrho_0^{\varepsilon}}{(1-\varrho_0)^{n+1}}=\frac{1}{n^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}},$$

$$\frac{\varrho_0^{-\alpha}}{n-1}(1+2\varrho_0\cos\bar{\varphi})^{-\frac{n-1}{2}}<\frac{1}{n^{\varepsilon-1}}\cdot\frac{1}{n-1}\sim\frac{1}{n^{\varepsilon}},$$

e questi sono, per $n\to\infty$, uniformemente infinitesimi rispetto a θ, appartenente all'intervallo (arbitrario) (θ',θ'').

Si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} U^{(\theta)}_{\varepsilon,n}=0(\mp s).$$

Rimane da concludere egualmente per la classe dei valori di θ maggiori di θ''. Basta osservare che, dato il solito campo, del piano w, avente come contorno la C, le trasformazioni

$$1-w'=(1-w)^{\frac{\theta_1}{\theta}},\qquad \theta>\theta'',$$

portano a campi di rappresentazioni nel piano w' che sono tutti interni al settore

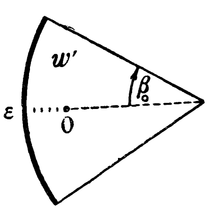

FIG. 2.

$$1-w'=re^{i\beta},\qquad -\beta_0<\beta<\beta_0,\qquad 0<r<1+\varepsilon,\qquad \beta_0<\frac{\pi}{2},$$

quando θ'' venga preso abbastanza grande.

Questo settore è interno al cerchio $|w'|=1$, eccetto $w'=1$.

Si può concludere, come nel caso precedente, che per la regolarità di $\Phi(w')$ entro $|w'|<1$ e pel teorema 1° di GRONWALL la $\Phi(w'(w))$ è minore in valore assoluto di un M assegnabile in tutto il campo di contorno C. Dopo ciò basta ripetere la precedente dimostrazione.

La proposizione relativa al comportamento affermato in principio del § per la successione $C_n^{(-\varepsilon)}$ segue dalle seguenti osservazioni deducibili dal ragionamento svolto.

Ricordiamo ([8]) la relazione

$$(f,g)=(f,(1-w)^{-1})(w,g(w))$$

valevole per ogni metodo (f,g) di GRONWALL.

Una serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ sommabile verso s col metodo (f_{θ_1}, g) lo è pure verso s coi metodi (f_θ, g_1). Ma applicare alla serie $\sum u_\nu$ il metodo (f_θ, g_1) vuol dire applicarle prima il metodo $(f_\theta, (1-w)^{-1})$ cioè dedurre, prima di tutto, dalla

$$z=f_\theta(w), \qquad (1-z)\sum s_n z^n=(1-w)\sum s_n^{(f_\theta)}\cdot w^n, \qquad s_n=u_0+u_1+ \dots +u_n,$$

la successione di somme parziali $s_n^{(f_\theta)}$ di una nuova serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} V_\nu$ (convergente in senso ordinario alla somma s) e poi applicare a questa serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} V_\nu$, convergente ad s, il procedimento $(w, g(w))$. Se in particolare si opera sulla $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ col metodo $(f_\theta, (1-w)^{\varepsilon-1})$, si viene ad applicare alla serie convergente $\sum_{\nu=0}^{\infty} V_\nu$ il procedimento di CESARO $(C, -\varepsilon)$: mantenendo θ costante (senza alterare cioè i termini della $\sum_{\nu=0}^{\infty} V_\nu$) mentre ε ed $\frac{1}{n}$ tendono a zero ed $n^\varepsilon \to \infty$, la successione $C_n^{(-\varepsilon)}$ ha per limite zero e non s.

OSSERVAZIONE I. - L'esempio di comportamento non regolare, dato in questo numero, relativamente a successioni di polinomi U_n estratte dalla classe degli U_n, senza tenere costante α, deve mettere in guardia quando si tentano metodi diagonali poichè non è più lecito limitarsi (come fa il GRONWALL nei suoi teoremi in cui col mantenere α e le altre caratteristiche costanti non altera, per $n\to\infty$, la trasformazione conforme $z=f(w)$, nè il successivo metodo $(w, g(w))$ più potente o equivalente di quello $(w, (1-w)^{-\alpha})$ di CESARO, che poi si applica) al caso di $s=0$ col maggiorare i moduli degli integrali curvilinei a mezzo di espressioni rese infinitesime, mediante il far dipendere opportunamente da n, le λ, α, ecc. Per esser sicuri che un metodo diagonale soddisfi alle condizioni di regolarità, bisogna stabilire in che modo necessiti far dipendere λ, α, ecc. da n affinchè, mentre n diverge, la successione degli integrali curvilinei converga al limite s, anche se diverso da zero, se s è la somma generalizzata, di una serie, mediante gli ordinari metodi (f, g).

OSSERVAZIONE II. - In relazione ai metodi (f_θ, g) osserviamo che dalla sommazione ordinaria, corrispondente a

$$f(w)=w, \qquad g(w)=(1-w)^{-1},$$

si deducono i metodi di sommazione corrispondenti a

$$f_\theta(w)=1-(1-w)^{\frac{1}{\theta}}, \qquad g(w)=(1-w)^{-1},$$

per i quali la legge di formazione dei numeri V_n è la seguente

$$\sum u_\nu \{ 1-(1-w)^{\frac{1}{\theta}} \}^\nu = (1-w) \sum V_n w^n.$$

Nel § 1 venne mostrato che il metodo semplice di N. OBRECHKOFF non è altro che il particolare procedimento $(1-(1-w)^{\frac{1}{2}}, (1-w)^{-\frac{1}{2}})$ di GRONWALL. Osserviamo qui che questo rientra fra quelli (f_θ, g), qui sopra accennati, facendo $\theta=2$ e $g(w)=(1-w)^{-\frac{1}{2}}$. La classe dei $(1-(1-w)^{\frac{1}{\theta}}, (1-w)^{-1})$ può dunque pensarsi, facendo $\theta \geqslant 2$, una generalizzazione del metodo semplice di OBRECHKOFF.