ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 2 (1939), p. 131-148

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_2_131_0>

SULLA STABILITÀ DELLE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI [1]

di LAMBERTO CESARI (Pisa).

In una nota postuma di FATOU [2] era asserito un criterio di stabilità per gli integrali dell'equazione differenziale

$$(1) \qquad y'' + \varphi(x) y = 0, \qquad \varphi(x) \text{ reale}, \qquad x \text{ reale},$$

che CACCIOPPOLI [3] e PERRON [4] hanno dimostrato, con esempi, essere falso. Gli Autori FUKUHARA e NAGUMO [5] nonchè CACCIOPPOLI [6] hanno dato delle condizioni sufficienti per la detta stabilità. In particolare FUKUHARA e NAGUMO [7] hanno dimostrato che se, per un certo x_0,

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = c, \qquad c > 0, \qquad \int_{x_0}^{\infty} | \varphi(x) - c | \, dx < \infty,$$

gli integrali della (1) sono stabili per $x \to \infty$.

Scopo della presente memoria è di dare una condizione sufficiente per la stabilità degli integrali dell'equazione differenziale

$$(2) \qquad y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \dots + f_n(x) y = 0, \qquad x \text{ reale}.$$

Noi dimostreremo precisamente il

---

[1] Lavoro eseguito nell' Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Desidero ringraziare il prof. MAURO PICONE, Direttore dell' Istituto, di avermi consigliato di occuparmi delle condizioni sufficienti per la stabilità, importanti per il loro interesse speculativo, indispensabili a molti problemi di applicazione.

[2] P. FATOU: *Sur un critère de stabilité.* Comptes Rendus, T. 189, pp. 967-969 (1929).

[3] R. CACCIOPPOLI: *Sopra un criterio di stabilità.* Rend. Acc. Lincei, S. VI, T. 11, pp. 251-256 (1930).

[4] O. PERRON: *Über ein vermeintliches Stabilitäts Kriterium.* Nachrichten der Math. Gesell. zu Göttingen, pp. 28-29 (1930).

[5] FUKUHARA e NAGUMO: *On a condition of stability for a differential equation.* Proceedings of Imperial Akad. Tokio, T. 6, pp. 131-132 (1930).

[6] Loc. cit. in [3].

[7] Loc. cit. in [5].

TEOREMA. - *Se le funzioni $f_\lambda(x)$, $\lambda=1, 2,...., n$, anche complesse, continue per x maggiore di un certo x_0, hanno determinati e finiti i limiti*

$$\lim_{x\to\infty} f_\lambda(x)=a_\lambda, \qquad (\lambda=1, 2,...., n), \tag{3}$$

se l'equazione differenziale

$$z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+ .... +a_nz=0 \tag{4}$$

ha tutti i suoi integrali stabili e se

$$\int_{x_0}^{\infty}|f_\lambda(x)-a_\lambda|\,dx<\infty, \qquad (\lambda=1, 2,...., n), \tag{5}$$

allora tutti gli integrali della (2) *sono stabili* [8].

Il criterio di FUKUHARA e NAGUMO risulta così un caso particolare di questo teorema.

A questo risultato giungeremo generalizzando opportunamente la dimostrazione di FUKUHARA e NAGUMO ma sopratutto richiamando e raffinando notevolmente le considerazioni che il PERRON [9] ha fatto in varie sue memorie del 1913. Il PERRON infatti aveva già dimostrato che, nelle sole ipotesi (3) e di continuità per le $f_\lambda(x)$ ammesse, il comportamento all'infinito degli integrali della (2) dipende da quello degli integrali della (4), ma quanto il PERRON dimostra non è sufficiente per giungere al teorema ora asserito.

---

(8) Diremo che un integrale $y(x)$ della (2) è stabile se comunque assunto un $\varepsilon>0$ arbitrario, esiste un $\delta>0$ tale che, qualunque siano i numeri assegnati ad arbitrio

$$y_0,\quad y_1,....,\quad y_{n-1},\quad \sum_{i=0}^{n-1}|y_i-y^{(i)}(x_0)|<\delta, \tag{*}$$

l'integrale $y(x)$ della (2) che ha i numeri (*) come valori iniziali per $x=x_0$ è tale che per tutti gli $x\geqslant x_0$

$$\sum_{i=0}^{n-1}|y_1^{(i)}(x)-y^{(i)}(x)|<\varepsilon.$$

È ben noto che condizione necessaria e sufficiente perchè tutti gli integrali della (2) siano stabili è che per ogni integrale $y(x)$ della (2) esista una costante C tale che, per ogni $x\geqslant x_0$

$$|y(x)|+|y'(x)|+ .... +|y^{(n-1)}(x)|<C. \tag{**}$$

Desideriamo inoltre rilevare che, come gentilmente il prof. G. SANSONE ci ha comunicato, in base ad un teorema di ESCLANGON e nelle condizioni del nostro teorema, è sufficiente, perchè valga la (**), dimostrare che $y(x)$ è limitata. [Cfr. E. LANDAU: *Über einen Satz von Herrn Esclangon.* Math. Ann. Bd. 102 (1930), pp. 177-188].

(9) O. PERRON: *Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist.* (1. und 2. Mitteilung). Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 142, pp. 254-270 (1913) e Bd. 143, pp. 29-50 (1913). Cfr. inoltre, Math. Zeitschr. 6 (1920) pp. 161-166 e 17 (1923) pp. 149-152.

La stabilità degli integrali della (4) e le sole ipotesi (3) e di continuità ammesse non sono sufficienti per garantire la stabilità degli integrali della (2), come, per la equazione (1), che è un caso particolare della (2), il PERRON ha dimostrato con un esempio [10].

1. - Consideriamo l'equazione caratteristica della (4)

$$\varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{6}$$

e siano $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ le sue radici. Sappiamo che condizione necessaria e sufficiente per la stabilità degli integrali della (4) è che le radici della (6) abbiano tutte parte reale non positiva e che le (eventuali) radici a parte reale nulla non siano multiple.

2. - Cominciamo col trattare un

CASO PARTICOLARE. - *Le radici della* (6) *abbiano tutte parte reale nulla.* Esse saranno perciò tutte distinte e inoltre sarà

$$R(a_1) = -[R(\varrho_1) + R(\varrho_2) + \dots + R(\varrho_n)] = 0.$$

Sia $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ un sistema fondamentale di integrali della (4). Precisamente scegliamo gli integrali $e^{\varrho_1 x}, e^{\varrho_2 x}, \dots, e^{\varrho_n x}$, di modulo unitario. Poniamo

$$W(x) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1' & z_2' & \dots & z_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = e^{-a_1 x}, \quad W_i(x) = (-1)^{n+i} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_{i-1} & z_{i+1} & \dots & z_n \\ z_1' & z_2' & \dots & z'_{i-1} & z'_{i+1} & \dots & z_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n-2)} & z_2^{(n-2)} & \dots & z_{i-1}^{(n-2)} & z_{i+1}^{(n-2)} & \dots & z_n^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

onde per ogni $x \geqq x_0$

$$|W(x)| = 1, \qquad |W_i(x)| < N, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

ove N è una opportuna costante che dipende solo dai numeri a_λ e dal particolare sistema fondamentale assunto.

Sia ora

$$Z_i(x) = |z_i| + |z_i'| + |z_i''| + \dots + |z_i^{(n-1)}|$$

e supponiamo N abbastanza grande perchè sia anche $|Z_i(x)| < N$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Poniamo

$$\tau(x) = \sum_{j=1}^{n} |a_j - f_j(x)|$$

e assunto un numero $1 > a > 0$ determiniamo quel punto $x_1 \geqq x_0$ tale che

$$\int_{x_1}^{\infty} \tau(x)\,dx < \frac{a}{nN^2}.$$

---

[10] Loc. cit. in [4].

Sia ora $y(x)$ un qualsiasi integrale della (2) e $z(x)$ l'integrale della (4) che assume in x_1 gli stessi valori iniziali. È intanto

$$(y-z)^{(n)}+a_1(y-z)^{(n-1)}+\dots+a_n(y-z)=$$
$$=[a_1-f_1(x)]y^{(n-1)}+[a_2-f_2(x)]y^{(n-2)}+\dots+[a_n-f_n(x)]y=\mu(x)$$

e quindi

$$y-z=C_1(x)z_1(x)+\dots+C_n(x)z_n(x),$$

ove le funzioni

$$C_i(x)=\int_{x_1}^{x}\frac{W_i(x)}{W(x)}\mu(x)dx$$

soddisfano al sistema di equazioni

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)z_i^{(j)}(x)=0, & (j=0,1,2,\dots,n-2)\\ \sum_{i=1}^{n}C_i'(x)z_i^{(n-1)}(x)=\mu(x).\end{cases}$$

Ne risulta

$$(8)\qquad\begin{cases}y-z=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)z_i(x)\\ (y-z)'=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)z_i'(x)\\ (y-z)''=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)z_i''(x)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ (y-z)^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)z_i^{(n-1)}(x)\end{cases}$$

e quindi, posto

$$Y(x)=|y|+|y'|+\dots+|y^{(n-1)}|$$
$$Z(x)=|z|+|z'|+\dots+|z^{(n-1)}|,$$

sommando le (8) termine a termine, prendendo i moduli e maggiorando tenendo conto delle (7), si trova

$$Y(x)\leq Z(x)+\sum_{i=1}^{n}Z_i(x)\left|\int_{x_1}^{x}\frac{W_i(x)}{W(x)}\mu(x)dx\right|$$
$$\leq Z(x)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Z_i(x)\int_{x_1}^{x}|W_i(x)|\,|a_j-f_j(x)|\,|y^{(n-j)}(x)|\,dx$$
$$\leq Z(x)+nN^2\int_{x_1}^{x}\tau(x)Y(x)dx.$$

La funzione $Z(x)$ è certo limitata e sia L il suo massimo modulo per $x \geqslant x_1$.

Dimostriamo che anche $Y(x)$ è limitata per $x > x_1$. Infatti scelto un numero $M > \frac{L}{1-a}$, dimostriamo che $Y(x)$ non può superare M. Se ciò avvenisse esisterebbe un primo punto $x_2 > x_1$ tale che

$$Y(x_2) = M, \qquad Y(x) < M \quad \text{per} \quad x_1 \leqslant x < x_2$$

onde per $x = x_2$

$$M < L + nN^2 M \int_{x_1}^{\infty} \tau(x)dx < L + aM$$

$$M < (1-a)M + aM = M.$$

Siamo dunque caduti in un assurdo. Deve essere quindi per ogni $x \geqslant x_1$

$$Y(x) \leqslant \frac{L}{1-a}.$$

Abbiamo con ciò dimostrato il caso particolare considerato del nostro teorema.

3. - Caso generale. — Per dimostrare il nostro teorema in tutta la sua generalità, ricordiamo anzitutto il seguente risultato del Perron ([11]).

Se nella (2) le funzioni $f_\lambda(x)$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, anche complesse, continue per ogni x maggiore di un certo x_0, hanno determinati e finiti i limiti (3); se diciamo r_1, $r_2, \ldots, r_\sigma$ le parti reali distinte delle radici $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ della (6) e se in generale k_i è il numero delle radici di parte reale r_i $(i = 1, 2, \ldots, \sigma)$, le radici multiple essendo contate tante volte quant'è il loro ordine di molteplicità, onde

$$r_\sigma < r_{\sigma-1} < \ldots < r_2 < r_1, \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_\sigma = n;$$

allora la (2) ammette un sistema fondamentale di integrali che si spezza in σ classi di integrali e per gli integrali della classe λ e per ogni loro combinazione lineare, hanno luogo le relazioni

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n)}|}{e^{(r_\lambda - \varepsilon)x}} = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n-1)}|}{e^{(r_\lambda + \varepsilon)x}} = \infty \end{cases}$$

qualunque sia il numero reale e positivo $\varepsilon > 0$. Il numero degli integrali di ogni classe è k_λ.

Nei seguenti numeri ci procureremo inoltre alcuni Lemmi. Il primo di essi

---

([11]) Loc. cit. in ([9]), Bd. 143, pp. 46-50.

è del PERRON, ma siamo costretti a riportarne brevemente anche la dimostrazione, essendo questa necessaria per una chiara comprensione di ciò che segue. Il secondo è invece completamente nuovo insieme alla sua dimostrazione, che ha presentato qualche difficoltà. Del terzo e quarto sono nuovi gli enunciati, ma le dimostrazioni ricalcando altre dimostrazioni del PERRON, vengono qui riportate solo per sommi capi. Per alcuni ulteriori particolari rimandiamo per semplicità al PERRON.

4. - Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineari

$$z_\lambda' = \varrho_\lambda z_\lambda + \sum_{\mu=\lambda+1}^{n} c_{\lambda,\mu} z_\mu + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\lambda,\mu}(x) z_\mu \tag{10}$$

ove supporremo sempre che le funzioni $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ siano continue per $x \geqslant x_0$ e tendano a zero per $x \to \infty$. Vale intanto il

LEMMA I (PERRON ([12])). - Se le funzioni $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ sono continue per $x \geqslant x_0$ e tendono a zero per $x \to \infty$, se $R(\varrho_1) > R(\varrho_\lambda)$, $(\lambda = 2, 3, \ldots, n)$ e se $0 < \alpha < 1$ è un numero tale che

$$R(\varrho_1) > R(\varrho_\lambda) + 2cn\alpha, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n), \qquad c = \max |c_{\lambda,\mu}|, \tag{11}$$

il sistema (10) ha n integrali indipendenti tali che, per tutti gli x sufficientemente grandi,

$$|z_\lambda| < \alpha^{\lambda-1} |z_1|, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{z_\lambda}{z_1} = 0, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n). \tag{12}$$

Poniamo

$$\varepsilon = R(\varrho_1) - R(\varrho_\lambda) - 2cn\alpha \tag{13}$$

e determiniamo un punto x_1 tale che per ogni $x \geqslant x_1$ sia

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{\lambda\mu}(x)| < \frac{\alpha^n \varepsilon}{2}. \tag{14}$$

Sia ora $z_1, z_2, \ldots, z_n$ un qualunque integrale del sistema (10) che nel punto $x = x_1$ soddisfi alle condizioni

$$|z_\lambda(x_1)| < \alpha^{\lambda-1} |z_1(x_1)|, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n). \tag{15}$$

Esistono evidentemente n integrali indipendenti del sistema (10) che soddisfano alle condizioni (15). Dimostriamo che le (12) valgono per tutti gli $x \geqslant x_1$.

([12]) Loc. cit. in ([11]), pp. 30-33.

Infatti se ciò non fosse esisterebbe un primo punto $x_2 > x_1$ nel quale almeno una delle (12) cessa di essere vera. Per $x = x_2$ si avrebbe quindi per un certo $k \neq 1$

$$\begin{cases} |z_k| = a^{k-1} |z_1| \\ |z_\lambda| \leqslant a^{\lambda-1} |z_1| \quad \text{per} \quad \lambda \neq 1,\ k \quad \text{per} \quad x = x_2 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx} |z_k|^2 \geqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx} [a^{2k-2} |z_1|^2]. \end{cases} \tag{16}$$

È certo $z_1(x_2) \neq 0$ altrimenti in x_2 tutte le $z_i(x)$ sarebbero nulle e allora le $z_i(x)$ sarebbero identicamente nulle, contro le (15).

Dalle (10) per $\lambda = 1$, moltiplicando per $\bar{z}_1$, prendendo le parti reali e osservando che

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx} |z_1|^2 = R(\bar{z}_1 z_1'),$$

si ha

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx} |z_1|^2 - R(\varrho_1) |z_1|^2 = \sum_{\mu=2}^{n} R(c_{1\mu} z_\mu \bar{z}_1) + \sum_{\mu=1}^{n} R(\varphi_{1\mu} z_\mu \bar{z}_1) \geqslant$$

$$\geqslant -c \sum_{\mu=2}^{n} |z_\mu z_1| - \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1\mu} z_\mu z_1|$$

e, per $x = x_2$ ed essendo $a < 1$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx} |z_1|^2 - R(\varrho_1) |z_1|^2 \geqslant -c \sum_{\mu=2}^{n} a^{\mu-1} |z_1|^2 - \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1\mu}|\, a^{\mu-1} |z_1|^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx} |z_1|^2 - R(\varrho_1) |z_1|^2 \geqslant -cna |z_1|^2 - |z_1|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{1\mu}|. \tag{17}$$

Analogamente per $\lambda = k$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx} |z_k|^2 - R(\varrho_k) |z_k^2| = \sum_{\mu=k+1}^{n} R(c_{k\mu} z_\mu \bar{z}_k) + \sum_{\mu=1}^{n} R(\varphi_{k\mu} z_\mu \bar{z}_k) \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{\mu=k+1}^{n} |z_\mu z_k| + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k\mu} z_\mu z_k|$$

e, per $x = x_2$ tenendo conto delle (16),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx} (a^{2k-2} |z_1|^2) - R(\varrho_k) a^{2k-2} |z_1|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{\mu=k+1}^{n} a^{\mu+k-2} |z_1|^2 + \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k\mu}|\, a^{\mu+k-2} |z_1|^2 \leqslant$$

$$\leqslant cna^{2k-1} |z_1|^2 + a^{k-2} |z_1|^2 \sum_{\mu=1}^{n} |\varphi_{k\mu}|.$$

Infine dividendo per a^{2k-2}

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_1|^2 - R(\varrho_k)|z_1|^2 \leq cna|z_1|^2 + a^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{k\mu}|. \tag{18}$$

Confrontando la (17) con la (18) e dividendo per $|z_1|^2$ si ha

$$R(\varrho_1) - R(\varrho_\lambda) \leq 2cna + \sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{1\mu}| + a^{-n}\sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{k\mu}| \leq 2cna + \frac{\varepsilon}{2},$$

il che è in contrasto con la (11) e la (13). La prima parte del Lemma I è con ciò dimostrata. Per la seconda rimandiamo al PERRON ([13]).

5. - Vale ora il

LEMMA II. - *Se le funzioni $\varphi_{\lambda\mu}(x)$ sono continue per $x \geqq x_0$ e tendono a zero per $x \to \infty$, se $R(\varrho_1) > R(\varrho_\lambda)$, $(\lambda = 2, 3, \ldots, n)$, e se*

$$\int_{x_0}^{\infty} |\varphi_{\lambda\mu}(x)|\, dx < \infty, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

il sistema (10) *ha n integrali indipendenti per i quali oltre le* (12) *valgono le seguenti*

$$\int_{x_1}^{\infty} \left|\frac{z_\lambda}{z_1}\right| dx < \infty, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n),$$

x_1 essendo un numero sufficientemente grande.

Consideriamo uno degli n integrali indipendenti del sistema (10) per il quale valgono, per $x \geqq x_1$, le tesi del Lemma I. Poniamo

$$|z_\lambda(x)| = a^{\lambda-1}T_\lambda(x)\,|z_1(x)|, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n),$$

cosicchè le funzioni $T_\lambda(x)$ sono reali e positive e $0 \leq T_\lambda(x) \leq 1$. Inoltre poichè $|z_1(x)|$ non si annulla mai per $x \geqq x_1$, le funzioni $T_\lambda(x)$ riescono continue in (x_1, ∞) con derivata prima continua a tratti. Si ha allora

$$|z_\lambda(x)|^2 = a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)\,|z_1(x)|^2, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n)$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_\lambda(x)|^2 = a^{2\lambda-2}T_\lambda(x)T_\lambda'(x)\,|z_1(x)|^2 + a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)\cdot\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_1(x)|^2$$

e quindi

$$a^{2\lambda-2}T_\lambda(x)T_\lambda'(x)\,|z_1(x)|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_\lambda(x)|^2 - a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)\cdot\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|z_1(x)|^2$$
$$= R(\bar{z}_\lambda z_\lambda') - a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)R(\bar{z}_1 z_1').$$

([13]) Loc. cit. in ([12]).

Utilizzando le (10) si trova

$$a^{2\lambda-2}T_\lambda(x)T_\lambda'(x)\,|z_1(x)|^2=$$

$$=R[\varrho_\lambda\bar z_\lambda z_\lambda+\sum_{\mu=\lambda+1}^{n}c_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu]-a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)R[\varrho_1\bar z_1 z_1+\sum_{\mu=2}^{n}c_{1\mu}\bar z_1 z_\mu+\sum_{\mu=2}^{n}\varphi_{1\mu}\bar z_1 z_\mu]=$$

$$=R(\varrho_\lambda)a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)\,|z_1|^2-R(\varrho_1)a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)\,|z_1|^2+R\left[\sum_{\mu=\lambda+1}^{n}c_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu\right]$$

$$-a^{2\lambda-2}T_\lambda^2(x)R\left[\sum_{\mu=2}^{n}c_{1\mu}\bar z_1 z_\mu+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{1\mu}\bar z_1 z_\mu\right].$$

Infine, dividendo per $a^{2\lambda-2}T_\lambda(x)\,|z_1(x)|^2$,

$$[R(\varrho_1)-R(\varrho_\lambda)]T_\lambda(x)=$$

$$=-T_\lambda'(x)+\frac{1}{a^{2\lambda-2}T_\lambda\,|z_1|^2}R\left[\sum_{\mu=\lambda+1}^{n}c_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu\right]$$

$$-\frac{T_\lambda}{|z_1|^2}R\left[\sum_{\mu=2}^{n}c_{1\mu}\bar z_1 z_\mu+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{1\mu}\bar z_1 z_\mu\right].$$

Integrando da x_1 ad x_2, $x_1\leqslant x_2$,

$$[R(\varrho_1)-R(\varrho_\lambda)]\int_{x_1}^{x_2}T_\lambda(x)dx=$$

$$=T_\lambda(x_1)-T_\lambda(x_2)+\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{a^{2\lambda-2}T_\lambda\,|z_1|^2}R\left[\sum_{\mu=\lambda+1}^{n}c_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{\lambda\mu}\bar z_\lambda z_\mu\right]$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{T_\lambda(x)dx}{|z_1|^2}R\left[\sum_{\mu=2}^{n}c_{1\mu}\bar z_1 z_\mu+\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{1\mu}\bar z_1 z_\mu\right].$$

Ma il primo membro di questa eguaglianza è positivo, onde maggiorando si trova

$$[R(\varrho_1)-R(\varrho_\lambda)]\int_{x_1}^{x_2}T_\lambda(x)dx<2+$$

$$+\frac{1}{a^{2\lambda-2}}\left[c\sum_{\mu=\lambda+1}^{n}a^{\lambda+\mu-2}\int_{x_1}^{x_2}T_\mu(x)dx+a^{\lambda-1}\int_{x_1}^{x_2}|\varphi_{\lambda1}|\,dx+\sum_{\mu=2}^{n}a^{\lambda+\mu-2}\int_{x_1}^{x_2}|\varphi_{\lambda\mu}|\,T_\mu(x)dx\right]$$

$$+c\sum_{\mu=2}^{n}a^{\mu-1}\int_{x_1}^{x_2}T_\lambda T_\mu\,dx+\int_{x_1}^{x_2}|\varphi_{11}|\,T_\lambda(x)dx+\sum_{\mu=2}^{n}\int_{x_1}^{x_2}|\varphi_{1\mu}|\,T_\lambda T_\mu dx$$

e, tenendo conto che $0<a<1$, $0\leqslant T_\lambda\leqslant 1$,

$$[R(\varrho_1)-R(\varrho_\lambda)]\int_{x_1}^{x_2}T_\lambda(x)dx<2+2ca\sum_{\mu=2}^{n}\int_{x_1}^{x_2}T_\mu(x)dx+a^{-n}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\int_{x_1}^{x_2}|\varphi_{\lambda\mu}|\,dx.$$

Posto

$$\tau(x)=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}|\varphi_{\lambda\mu}(x)|, \qquad T(x)=T_2(x)+T_3(x)+ \dots +T_n(x),$$

sommando le precedenti diseguaglianze per $\lambda=2, 3, \dots, n$ e maggiorando

$$[R(\varrho_1)-R(\varrho_2)]\int_{x_1}^{x_2} T(x)\,dx<2n+2nca\int_{x_1}^{x_2} T(x)dx+na^{-n}\int_{x_1}^{x_2}\tau(x)dx.$$

Risulta per ogni $x_2 \geqslant x_1$

$$[R(\varrho_1)-R(\varrho_2)-2nca]\int_{x_1}^{x_2} T(x)dx<L, \qquad L=2n+na^{-n}\int_{x_1}^{\infty}\tau(x)dx.$$

È con ciò dimostrato che $T(x)$ e quindi tutte le funzioni $T_2(x)$, $T_3(x), \dots, T_n(x)$ sono assolutamente integrabili.

6. - Vale infine il seguente

LEMMA III. - *Se le funzioni $\varphi_{\lambda,\mu}(x)$ sono continue per $x \geqslant x_0$ e tendono a zero per $x \to \infty$, se, per un certo intero k, ($k<n$) la parte reale di ognuna delle radici $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_k$ è maggiore della parte reale di ognuna delle radici ϱ_λ rimanenti, se*

$$\int_{x_0}^{\infty}|\varphi_{\lambda,\mu}(x)|\,dx<\infty, \qquad (\lambda, \mu=1, 2, \dots, n),$$

il sistema (10) *ha n integrali indipendenti*

$$(z_1=\bar{z}_{1,\nu},\ z_2=\bar{z}_{2,\nu}, \dots,\ z_n=\bar{z}_{n,\nu}), \qquad (\nu=1, 2, \dots, n)$$

tali che, detti, per semplicità,

$$(z_1=z_{1,\nu},\ z_2=z_{2,\nu}, \dots,\ z_n=z_{n,\nu}), \qquad (\nu=1, 2, \dots, k)$$

k qualunque di essi, per ogni combinazione $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ diversa da $(1, 2, \dots, k)$ dei numeri $1, 2, \dots, n$, *si ha*

$$(20)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} \dots & z_{\lambda_1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} \dots & z_{\lambda_k,k}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \dots & z_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{k,1} & z_{k,2} \dots & z_{k,k}\end{vmatrix}}=0, \qquad \int_{x_1}^{\infty}\text{val. ass.}\frac{\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} \dots & z_{\lambda_1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} \dots & z_{\lambda_k,k}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \dots & z_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{k,1} & z_{k,2} \dots & z_{k,k}\end{vmatrix}}dx<\infty$$

ove x_1 è un numero sufficientemente grande ([14]).

([14]) Loc. cit. in ([11]), pp. 33-36. Questo Lemma differisce da un Lemma del PERRON per la precisazione dell'esistenza di ben n integrali (invece di soli k) aventi le proprietà in questione e per la seconda delle (20).

Per $k=1$ questo Lemma si riduce ai Lemmi I e II. Consideriamo tutte le combinazioni $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ dette sopra e ordiniamone gli elementi nel loro ordine naturale $(\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k)$; inoltre ordiniamo le $m=\binom{n}{k}$ combinazioni stesse nella solita maniera, cioè in modo che $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ venga prima di $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ se $\lambda_1 < \mu_1$, oppure se $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 < \mu_2$, oppure ...., oppure $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}$, $\lambda_k < \mu_k$. Nello stesso modo ordiniamo i determinanti

$$\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} \ldots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} \ldots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}$$

che così ordinati diremo costituire la successione $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$.

In particolare è

$$v_1 = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \ldots & z_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{k1} & z_{k2} \ldots & z_{kk} \end{vmatrix}.$$

Dobbiamo dimostrare che, con una opportuna scelta degli integrali $z_{1\lambda}, \ldots, z_{n\lambda}$, si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v_h}{v_1} = 0, \qquad \int_{x_1}^{\infty} \left|\frac{v_h}{v_1}\right| dx < \infty, \qquad (h=2, 3, \ldots, n).$$

Allo scopo ordiniamo anche i $m=\binom{n}{k}$ numeri

$$\varrho_{\lambda_1} + \varrho_{\lambda_2} + \ldots + \varrho_{\lambda_k}$$

nello stesso modo e diciamo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ la loro successione. In particolare è

$$\sigma_1 = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_k$$

e quindi per le ipotesi fatte è

$$R(\sigma_1) > R(\sigma_\lambda).$$

Se ora è

$$v_\lambda = \begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} \ldots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} \ldots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}$$

e anche

$$\sigma_\lambda = \varrho_{\lambda_1} + \varrho_{\lambda_2} + \ldots + \varrho_{\lambda_k},$$

segue differenziando

$$v_\lambda' = \begin{vmatrix} z'_{\lambda_1,1} & z'_{\lambda_1,2} \ldots & z'_{\lambda_1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} \ldots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} \ldots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z'_{\lambda_k,1} & z'_{\lambda_k,2} \ldots & z'_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}.$$

Ma gli integrali $z_{\lambda\mu}$ soddisfano alle (10) onde tenendo conto di queste, sostituendo nell'ultima uguaglianza e sviluppando i determinanti con la solita regola, si dimostra che le quantità v_λ soddisfano al seguente sistema di equazioni del tipo già considerato

$$(21) \qquad v_\lambda' = \sigma_\lambda v_\lambda + \sum_{\nu=\lambda+1}^{m} d_{\lambda\nu} v_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} \psi_{\lambda\nu}(x) v_\nu, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

dove $d_{\lambda\nu}$ sono opportune combinazioni lineari a coefficienti costanti delle funzioni $\varphi_{\lambda\mu}$ del primitivo sistema (10).

Le funzioni $\psi_{\lambda\nu}$ tendono perciò a zero per $x \to \infty$, sono continue per $x > x_0$ e sono assolutamente integrabili in (x_0, ∞) e poichè d'altra parte $R(\sigma_1) > R(\sigma_\lambda)$, $(\lambda = 2, 3, \ldots, m)$, possiamo applicare i Lemmi I e II. Se quindi poniamo

$$d = \max |d_{\lambda\nu}|, \qquad R(\sigma_1) - R(\sigma_\lambda) > 2mda$$

esisteranno degli integrali indipendenti delle (21) tali che per tutti gli $x \geqq$ di un opportuno x_1

$$(22) \qquad \begin{cases} |v_\lambda(x)| < a^{\lambda-1} |v_1(x)|, & (\lambda = 2, 3, \ldots, m) \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{v_\lambda}{v_1} = 0, \quad \displaystyle\int_{x_1}^{\infty} \left| \frac{v_\lambda}{v_1} \right| dx < \infty, & (\lambda = 2, 3, \ldots, m). \end{cases}$$

Più precisamente noi abbiamo dimostrato, seguendo il PERRON, che se x_1 è sufficientemente grande, basta che nel punto x_1 sia soddisfatta la prima delle (22) perchè questa sia soddisfatta per ogni $x \geqq x_1$ e insieme siano soddisfatte le rimanenti (22). Dobbiamo ora dimostrare che esistono n integrali indipendenti del sistema (10)

$$(z_1 = \bar{z}_{1,\nu},\ z_2 = \bar{z}_{2,\nu}, \ldots, z_n = \bar{z}_{n,\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

per k qualunque dei quali

$$(z_1 = z_{1,\nu},\ z_2 = z_{2,\nu}, \ldots, z_n = z_{n,\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

sono soddisfatte le condizioni (20).

Per questo basta dimostrare che esistono n integrali indipendenti del sistema (10) che assumono nel punto x_1 valori tali che la prima delle (22) riesca soddisfatta nel punto x_1. Allo scopo scegliamo gli n^2 numeri costituenti il determinante di ordine n che segue

$$D = \begin{vmatrix} \bar{z}_{1,1}(x_1) & \bar{z}_{1,2}(x_1) \ldots & \bar{z}_{1,n}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{z}_{k,1}(x_1) & \bar{z}_{k,2}(x_1) \ldots & \bar{z}_{k,n}(x_1) \\ \hline \bar{z}_{k+1,1}(x_1) & \bar{z}_{k+1,2}(x_1) \ldots & \bar{z}_{k+1,n}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{z}_{n,1}(x_1) & \bar{z}_{n,1}(x_1) \ldots & \bar{z}_{n,n}(x_1) \end{vmatrix}$$

nel seguente modo. Scegliamo anzitutto gli nk numeri costituenti le prime k righe di D in modo che tutti i minori di ordine k costituiti con esse siano non nulli, ossia si abbia per qualsiasi combinazione $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ dei numeri $(1, 2, \ldots, n)$

$$D^{(1,2,\ldots,n)}_{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k)} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{1,\mu_1}(x_1) & \bar{z}_{1,\mu_2}(x_1) \ldots & \bar{z}_{k,\mu_k}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{z}_{k,\mu_1}(x_1) & \bar{z}_{k,\mu_2}(x_1) \ldots & \bar{z}_{k,\mu_k}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se ora scegliessimo i rimanenti $n(n-k)$ numeri costituenti le ultime $n-k$ righe di D tutti nulli, allora per qualsiasi combinazione $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ dei numeri $1, 2, \ldots, n$, diverse da $(1, 2, \ldots, k)$ si avrebbe

$$D^{(\lambda_2,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)}_{(\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_k)} = \begin{vmatrix} \bar{z}_{\lambda_1,\mu_1}(x_1) & \bar{z}_{\lambda_1,\mu_2}(x_1) \ldots & \bar{z}_{\lambda_1,\mu_k}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{z}_{\lambda_k,\mu_1}(x_1) & \bar{z}_{\lambda_k,\mu_2}(x_1) \ldots & \bar{z}_{\lambda_k,\mu_k}(x_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Detto λ il numero d'ordine della combinazione generica $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ dei numeri $1, 2, \ldots, n$ secondo le convenzioni dette in principio, potremo sempre scegliere gli $n(n-k)$ numeri costituenti le ultime $n-k$ righe di D così piccoli in modo che sia

$$\left| D^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k} \right| < a^{\lambda-1} \left| D^{(1,2,\ldots,k)}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k} \right|, \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, m),$$

per ogni combinazione $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ dei numeri $(1, 2, \ldots, m)$ diversa da $(1, 2, \ldots, k)$.

A queste condizioni è inoltre possibile soddisfare in modo che sia

$$D \neq 0.$$

Gli n integrali del sistema (10)

$$(\bar{z}_1 = \bar{z}_{1,\nu},\ z_2 = \bar{z}_{2,\nu}, \ldots, z_n = \bar{z}_{n,\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

che nel punto x_1 assumono i valori dianzi fissati sono manifestamente indipendenti.

Se ora $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$ è una combinazione qualunque dei numeri $1, 2, \ldots, n$ e scegliamo tra gli n integrali ora costruiti i k integrali che hanno i numeri d'ordine $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ e questi li indichiamo per semplicità con

$$(z_1 = z_{1,\nu},\ z_2 = z_{2\nu}, \ldots, z_n = z_{n\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

abbiamo nel punto x_1

$$v_1 = D^{(1,2,\ldots,k)}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k}, \qquad v_\lambda = D^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k}$$

e quindi

$$|v_\lambda| < a^{\lambda-1} |v_1|.$$

Il lemma III è con ciò completamente dimostrato.

7. - Applichiamo ora i Lemmi I, II, III allo studio degli integrali dell'equazione (2). Trasformiamo anzi tutto, seguendo il PERRON ([15]), questa equazione, in un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine ponendo

$$(23)\qquad \begin{cases} y = z_1 \\ z_2' - \varrho_1 z_1 = z_2 \\ z_2' - \varrho_2 z_2 = z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z'_{n-1} - \varrho_{n-1} z_{n-1} = z_n \end{cases}$$

cosicchè ogni z_λ è una combinazione lineare a coefficienti costanti di y, y', y'',...., $y^{(\lambda-1)}$. Precisamente

$$(24)\qquad \begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' - \varrho_1 y \\ z_3 = y'' - (\varrho_1 + \varrho_2) y' + \varrho_1 \varrho_2 y \\ z_4 = y''' - (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) y'' + (\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3) y' - \varrho_1\varrho_2\varrho_3 y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Queste si possono anche invertire e forniscono le y, y', y'',...., $y^{(n-1)}$ come combinazioni lineari a coefficienti costanti di z_1, z_2,...., z_n.

Dalle (23) e (24) segue

$$z_n' - \varrho_n z_n = y^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} \varrho_i y^{(n-1)} + \sum_{i<k}^{1,n} \varrho_i \varrho_k y^{(n-2)} - \ldots \pm \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n y =$$
$$= y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$$

e se $y(x)$ è un integrale della (2)

$$z_n' - \varrho_n z_n = (a_1 - f_1(x)) y^{(n-1)} + (a_2 - f_2(x)) y^{(n-2)} + \ldots + (a_n - f_n(x)) y.$$

Sostituendo alle y, y',...., $y^{(n-1)}$ le loro espressioni mediante le z_1, z_2,...., z_n si trova

$$z_n' - \varrho_n z_n = \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu(x) z_\mu$$

ove

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_\mu(x) = 0, \qquad \int_{x_0}^{\infty} |\varphi_\mu(x)|\, dx < \infty, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

([15]) Loc. cit. in ([11]), pp. 37-38.

La (2) si trasforma così nel sistema

$$(25)\qquad \begin{cases} z_1' = \varrho_1 z_1 + z_2 \\ z_2' = \varrho_2 z_2 + z_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ z'_{n-1} = \varrho_{n-1} z_{n-1} + z_n \\ z_n' = \varrho_n z_n + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_\mu(x) z_\mu , \end{cases}$$

e a questo possiamo applicare i lemmi I, II, III.

8. - Ci occuperemo addirittura del caso generale.

Siano $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_k$, k radici della (6) la cui parte reale è maggiore della parte reale delle rimanenti radici ϱ_λ. Allora per il Lemma III, il sistema (25) ammette n integrali indipendenti

$$z_1 = \bar{z}_{1,\nu}, \qquad z_2 = \bar{z}_{2,\nu}, \dots, \qquad z_n = \bar{z}_{n,\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

per k qualunque dei quali valgono le (20), che non riscriviamo per brevità. A questi n integrali corrispondono per mezzo delle (24), n integrali indipendenti delle (2) che vogliamo qui indicare con $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$. Si ha per ogni $\nu = 1, 2, \dots, n$,

$$(26)\qquad \begin{cases} \bar{z}_{1\nu} = \bar{y}_\nu \\ \bar{z}_{2\nu} = \bar{y}_\nu' - \varrho_1 \bar{y}_\nu \\ \bar{z}_{3\nu} = \bar{y}_\nu'' - (\varrho_1 + \varrho_2)\bar{y}_\nu' + \varrho_1 \varrho_2 \bar{y}_\nu , \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Sia

$$\varrho^k + c_1 \varrho^{k-1} + \dots + c_k = 0$$

l'equazione che ha per radici $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_k$.

Scegliamo k qualsiasi dei detti integrali

$$\bar{y}_{\mu_1}, \quad \bar{y}_{\mu_2}, \dots, \quad \bar{y}_{\mu_k}$$

i quali corrisponderanno agli integrali

$$(z_1 = \bar{z}_{1,\nu}, \; z_2 = \bar{z}_{2,\nu}, \dots, \; z_n = \bar{z}_{n,\nu}), \qquad (\nu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$$

del sistema (10). Per semplicità li indichiamo rispettivamente con le notazioni

$$y_1, \quad y_2, \dots, \quad y_k$$
$$(z_1 = z_{1,\nu}, \; z_2 = z_{2,\nu}, \dots, \; z_n = z_{n,\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \dots, k).$$

L'equazione differenziale d'ordine k a cui soddisfano gli integrali $y_1, y_2, \dots, y_k$ è

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} y_1, \dots, & y_k & y \\ y_1', \dots, & y_k' & y' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k)}, \dots, & y_k^{(k)} & y^{(k)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & , \dots, & y_k \\ y_1' & , \dots, & y_k' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)} & , \dots, & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix} = 0$$

che possiamo scrivere

$$y^{(k)}+\omega_1(x)y^{(k-1)}+\ldots.+\omega_k(x)y=0.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{x\to\infty}\omega_\lambda(x)=c_\lambda,\qquad \int_{x_0}^{\infty}|\,\omega_\lambda(x)-c_\lambda\,|\,dx<\infty,\qquad (\lambda=1,\,2,\ldots.,\,k). \tag{28}$$

Poniamo per brevità

$$\left\{\begin{array}{l} y=Z_1 \\ y'-\varrho_1 y=Z_2 \\ y''-(\varrho_1+\varrho_2)y'+\varrho_1\varrho_2 y=Z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(k)}+c_1y^{(k-1)}+\ldots.+c_ky=Z_{k+1}. \end{array}\right. \tag{29}$$

Sostituendo queste nelle (27) si ottiene, a meno di un fattore costante

$$\begin{vmatrix} z_{11} & ,\ldots., & z_{1k} & Z_1 \\ z_{21} & ,\ldots., & z_{2k} & Z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{k+1,1} & ,\ldots., & z_{k+1,k} & Z_{k+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_{11},\ldots., & z_{1k} \\ \cdots & \cdots \\ z_{k1},\ldots., & z_{kk} \end{vmatrix}=0$$

dalla quale sviluppando, si ottiene

$$Z_{k+1}+X_1(x)Z_k(x)+\ldots.+X_k(x)Z_1=0 \tag{30}$$

e sappiamo già che

$$\lim_{x\to\infty}X_i(x)=0,\qquad \int_{x_1}^{\infty}|\,X_i(x)\,|\,dx<\infty,\qquad (i=1,\,2,\ldots.,\,k),$$

poichè le funzioni $X_i(x)$ non sono che i rapporti $\dfrac{v_\lambda}{v_1}$.

Ma dalla (30) tenendo conto delle (29)

$$y^{(k)}+c_1y^{(k-1)}+\ldots.+c_ky+\psi_1(x)y^{(k-1)}+\ldots.+\psi_k(x)y=0$$

ove le funzioni $\psi_i(x)$ sono opportune combinazioni lineari a coefficienti costanti delle $X_i(x)$. Ne risultà così

$$\omega_\lambda(x)=c_\lambda+\psi_\lambda(x),\qquad (\lambda=1,\,2,\ldots.,\,k),$$

e quindi le funzioni $\omega_\lambda(x)$ hanno le proprietà (28). Rimandiamo al PERRON ([16]) per la dimostrazione del fatto che, per ogni $\mu=1,\,2,\ldots.,\,k$,

$$\lim_{x\to\infty}X_\mu(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}X_\mu'(x)=0,\ldots.,\quad \lim_{x\to\infty}X_\mu^{(n-k)}(x)=0.$$

([16]) Loc. cit. in ([11]), pp. 42-43.

Le considerazioni svolte in questo numero possono essere raccolte nel seguente.

LEMMA IV. - *Se* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ *sono* k *radici* ($k<n$) *della* (6) *le cui parti reali sono maggiori delle parti reali delle rimanenti radici* ϱ_λ; *se* $\varrho^k + c_1\varrho^{k-1} + \ldots + c_k = 0$ *è l'equazione che ha per radici* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$; *se nella* (2) *le funzioni* $f_\lambda(x)$ *sono continue per* $x \geqslant x_0$ *e se*

$$\lim_{x\to\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda, \qquad \int_{x_0}^{\infty} |f_\lambda(x) - a_\lambda|\, dx < \infty, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

allora esistono n *integrali indipendenti della* (2)

$$\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2, \ldots, \quad \bar{y}_n$$

tali che, se

$$y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_k$$

sono k *qualunque di essi, questi soddisfano anche ad una equazione d'ordine* k

(31) $$y^{(k)} + \omega_1(x) y^{k-1} + \ldots + \omega_k(x) y = 0$$

tale che

$$\lim_{x\to\infty} \omega_\lambda(x) = c_\lambda, \qquad \lim_{x\to\infty} \omega_\lambda^{(j)}(x) = 0, \qquad \int_{x_1}^{\infty} |\omega_\lambda(x) - c_\lambda|\, dx < \infty$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, n-k)$$

ove x_1 *è un numero abbastanza grande.*

9. - Dimostrazione del teorema nel caso generale.

Siano

$$r_\sigma < r_{\sigma-1} < \ldots < r_2 < r_1 \leqslant 0$$

le parti reali distinte delle radici $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ della (6) e k_i il numero delle radici di parte reale r_i, $i = 1, 2, \ldots, \sigma$, onde

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_\sigma = n.$$

Se $r_1 < 0$, allora dalle (9) del teorema di PERRON ricordato nel n.° 3, *e senza utilizzare le* (5), segue subito la stabilità di tutti gli integrali della (2).

Sia ora $r_1 = 0$ e poniamo per brevità $k = k_1$.

Per il Lemma IV ove si faccia $k = k_1$, esiste un sistema fondamentale di integrali della (2)

$$\bar{y}_1, \quad \bar{y}_2, \quad \bar{y}_3, \ldots, \quad \bar{y}_n$$

k qualunque dei quali soddisfano ad una equazione come la (31).

Siano y_1, y_2,...., y_k k di questi integrali. Essi soddisfano ad una equazione come la (31) nella quale

$$R(\varrho_1) = R(\varrho_2) = ... = R(\varrho_k) = 0$$

onde si può applicare il caso particolare, già dimostrato nel n.° 3, del nostro teorema.

Esiste dunque una costante C tale che, per ognuno degli integrali y_1, y_2,...., y_k, ossia per ogni integrale $\bar{y}$, si ha

$$|\bar{y}|, \quad |\bar{y}'|, \quad |\bar{y}''|,...., \quad |\bar{y}^{(k)}| < C.$$

Ma la (31) si può derivare $n-k$ volte onde, successivamente, se M è il massimo modulo delle funzioni $\omega_\lambda^{(j)}(x)$, $j = 0, 1,...., n-k$, $\lambda = 1, 2,...., k$ in (x_1, ∞)

$$|\bar{y}^{(k+1)}| < 2MKC$$
$$|\bar{y}^{(k+2)}| < 2^2 MKC$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|\bar{y}^{(n)}| < 2^{n-k} MKC.$$

Gli integrali $\bar{y}$ e tutte le loro derivate fino alla n^{ma} sono dunque limitati in (x_1, ∞) e quindi tutti gli integrali della (2) sono stabili.

Il teorema è con ciò completamente dimostrato.