ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 1 (1939), p. 75-88

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_75_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y'' = f(x, y, y')$

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Mi occuperò qui di una questione relativa all'esistenza di una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

che negli estremi di un dato intervallo assuma valori prestabiliti.

In una recentissima Memoria [1], GIUSEPPE SCORZA-DRAGONI stabilisce la seguente interessante proposizione (estensione di altra già nota):

« Se la funzione $f(x, y, y')$ è finita e continua nel campo

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < y' < +\infty$$

e lipschitziana rispetto ad y e y' in ogni porzione limitata di questo campo; se, inoltre, essa è della forma $\varphi(x, y) + \psi(x, y, y')$ con $\varphi(x, y)$ continua e non decrescente in y e $\psi(x, y, y')$ uniformemente infinita d'ordine minore di uno (in particolare limitata) con y e y', cioè tale che

$$\frac{\psi(x, y, y')}{|y| + |y'|} \to 0,$$

uniformemente rispetto ad x, quando $|y| + |y'| \to +\infty$; allora, fissati comunque due numeri y_0 e y_1, esiste in (x_0, x_1) almeno una soluzione $y(x)$ dell'equazione (1), tale che si abbia $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ ».

La dimostrazione datane dallo SCORZA-DRAGONI occupa circa 16 pagine ed è (come dichiara lo stesso Autore) « piuttosto delicata ». Per altro, ad una prima impressione, sembra che il fatto in essa provato discenda abbastanza naturalmente dalle ipotesi ammesse; e ciò mi ha indotto a ricercare una forma di ragionamento che permetta in modo semplice e rapido di stabilire rigorosamente il teorema enunciato. Non mi è stato difficile di rintracciare questo ragionamento, che esporrò nelle pagine che seguono per dimostrare una proposizione più generale di quella

---

[1] *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine.* (Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma, S. IV, V. 2, fasc. 3, 1938, pp. 177-215), § 3.

dello SCORZA-DRAGONI e per ottenerne con facilità anche altre, corrispondenti ad ipotesi assai più larghe [2].

1. - Dimostrerò il seguente teorema:

Sia $f(x, y, y')$ [3] *una funzione finita e continua nel campo*

$$C:\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad |y| < +\infty, \qquad |y'| < +\infty$$

e tale che, presi ad arbitrio un $\sigma > 0$ *ed un* $Y \geqslant 0$, *si possa sempre trovare, in corrispondenza, una funzione* $\psi(x)$, *positiva e integrabile* [4] *in* (x_0, x_1), *in modo da aversi, in tutti i punti del campo* C,

$$|f(x, y, y')| < \sigma|y'| + \psi(x) \tag{2}$$

se è $|y| \leqslant Y$,

$$f(x, y, y') > -\sigma\{|y| + |y'|\} - \psi(x) \tag{3}$$

se è $y > Y$, *e*

$$f(x, y, y') < \sigma\{|y| + |y'|\} + \psi(x) \tag{4}$$

---

(2) In una nota a piè della prima pagina della Memoria citata, lo SCORZA-DRAGONI, dopo di aver citato il lavoro di A. MAMBRIANI: *Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2º ordine.* (Rend. R. Accad. Lincei, S. 6, V. 9 (1929), pp. 620-622), aggiunge: « Riguardo la quale Nota mi sia però permesso far notare che non mi sembra esatta l'affermazione fatta da MAMBRIANI a piè di p. 622, secondo la quale il ragionamento da lui svolto darebbe, senz'altro, anche la completa dimostrazione del teorema da me enunciato nella Nota: *Su un'equazione differenziale particolare* (ibidem, pp. 623-625). Un esempio in cui, pur essendo soddisfatte tutte le ipotesi di questo mio teorema mancano quelle proprietà di dipendenza univoca e continua dai valori iniziali sfruttate in modo essenziale dal MAMBRIANI, si trova indicato nel n.º 48 della mia Memoria del Giornale di Battaglini già citata. Un esempio analogo ecc. ecc. ».

Poichè la Nota del MAMBRIANI alla quale lo SCORZA-DRAGONI si riferisce fu da me presentata all'Accademia dei Lincei, mi si consenta di dare allo SCORZA-DRAGONI ampia assicurazione che l'« affermazione » del MAMBRIANI è pienamente esatta, ciò che è ben facile di verificare.

Ed infatti, nelle ipotesi ammesse nel teorema dello SCORZA-DRAGONI, la mancanza della dipendenza univoca e continua dai valori iniziali può verificarsi soltanto quando nel punto iniziale sia $x=0$, ed il ragionamento fatto dal MAMBRIANI per dimostrare l'« *unicità* » vale evidentemente anche in questo caso. Per quanto poi riguarda l'« *esistenza* », basterà considerare, quando non ci sia un unico integrale, il *fascio* di tutti gli integrali che escono dal punto $(0, y_0)$ con una data direzione.

D'altronde (anche indipendentemente dalla considerazione di questo fascio) è immediato (dopo il ragionamento fatto dal MAMBRIANI per l'*unicità*) che tutti gli integrali che interessano nella dimostrazione del MAMBRIANI e che escono dal punto $(0, y_0)$ sono univocamente determinati dalla loro intersezione con la retta $x=\delta$, per un δ positivo, comunque piccolo.

(3) In tutto il presente lavoro si considereranno sempre soltanto costanti, variabili e funzioni reali.

(4) Intenderemo sempre, in questo lavoro, l'integrabilità nel senso del LEBESGUE.

se è $y<-Y$. *Allora, fissati comunque due numeri* y_0 *e* y_1, *esiste in* (x_0, x_1) *almeno una soluzione* $y(x)$ *dell'equazione* (1) *tale che si abbia*

$$y(x_0)=y_0, \qquad y(x_1)=y_1 \tag{5}$$ [5].

Senza nuocere alla generalità del risultato a cui voglio pervenire, posso senz'altro supporre $y_0=y_1=0$ [6].

a). Consideriamo una funzione $y(x)$ che verifichi l'equazione (1) in un intervallo (ξ_0, ξ_1) contenuto in (x_0, x_1) e che soddisfi alle condizioni

$$\begin{cases} y'(\xi_1)=0 \\ y(x)\geqslant 0 \quad \text{e} \quad y'(x)\geqslant 0, \text{ in tutto } (\xi_0, \xi_1). \end{cases} \tag{6}$$

Scegliamo un $\sigma>0$, tale che sia

$$\sigma(x_1-x_0)(x_1-x_0+1)<\frac{1}{2} \tag{7}$$

e facciamo $Y=0$. Ne segue, per (2) e (3), che, in tutti i punti del campo C per i quali è $y\geqslant 0$, vale sempre la (3).

È perciò, in tutto (ξ_0, ξ_1),

$$y''(x)>-\sigma\{y(x)+y'(x)\}-\psi(x).$$

Integrando su (x, ξ_1), per ogni x di (ξ_0, ξ_1), ponendo

$$H=\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)dx \tag{8}$$

e indicando con $A(\geqslant 0)$ il massimo di $y'(x)$ in (ξ_0, ξ_1), abbiamo

$$y'(x)<\sigma\{y(\xi_1)(\xi_1-\xi_0)+A(\xi_1-\xi_0)\}+H$$

onde

$$A<\sigma\{y(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)+A(\xi_1-\xi_0)^2+A(\xi_1-\xi_0)\}+H,$$
$$A\{1-\sigma(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-\xi_0+1)\}<\sigma y(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)+H$$

e, per la (7),

$$A<y(\xi_0)+2H.$$

Dunque, per ogni x di (ξ_0, ξ_1), è

$$0\leqslant y'(x)<y(\xi_0)+2H$$

ed anche

$$0\leqslant y'(x)<y(x)+2H.$$

---

[5] Questa proposizione contiene evidentemente, come caso particolare, quella citata dello SCORZA-DRAGONI.

[6] A questo caso ci si riconduce sempre con una semplice trasformazione.

Analogamente, se la $y(x)$, soluzione della (1) in (ξ_0, ξ_1), è tale che sia

$$y'(\xi_0)=0$$
$$y(x)\geqslant 0 \quad \text{e} \quad y'(x)\leqslant 0, \quad \text{in tutto} \quad (\xi_0, \xi_1),$$

si ottiene, in tutto (ξ_0, ξ_1),

$$0\leqslant -y'(x)<y(x)+2H.$$

Ragionando in modo corrispondente se in (ξ_0, ξ_1) è sempre $y(x)\leqslant 0$, si ha, in definitiva, che, *se* $y(x)$ *verifica l'equazione* (1) *in un' intervallo* (ξ_0, ξ_1) (*con* $x_0\leqslant\xi_0<\xi_1\leqslant x_1$), *nel quale tanto la* $y(x)$ *quanto la* $y'(x)$ *non cambiano mai segno, e se in un estremo di questo intervallo la* $y'(x)$ *si annulla, in tutto* (ξ_0, ξ_1) *è*

(9) $$|y'(x)|<|y(x)|+2H,$$

dove H è dato dalla (8) (ed è quindi >0) nella quale la $\psi(x)$ è la funzione che figura nelle (2), (3), (4), quando si prenda σ soddisfacente alla (7) e $Y=0$.

b). Supponiamo ora che la funzione $y(x)$ verifichi l'equazione (1) in tutto (x_0, x_1) e che sia $y(x_0)=y(x_1)=0$. Allora, in tutto (x_0, x_1), vale sempre la (9) e si ha perciò, per una nota proposizione ([7]), in tutto l'intervallo detto,

$$|y(x)|\leqslant 2H(e^{x_1-x_0}-1)$$

e quindi anche, per la (9),

$$|y'(x)|<2He^{x_1-x_0}.$$

Dunque, *se* $y(x)$ *è un integrale della* (1) *in tutto* (x_0, x_1), *con* $y(x_0)=y(x_1)=0$, *in tutto l'intervallo detto è*

(10) $$|y(x)|<2He^{x_1-x_0}, \qquad |y'(x)|<2He^{x_1-x_0}.$$

c). Poniamo

$$2He^{x_1-x_0}+1=H_0$$

e consideriamo il nuovo campo

$$C_0:\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1, \qquad |y|\leqslant H_0, \qquad |y'|\leqslant H_0.$$

Poi supponiamo in un primo tempo che la $f(x, y, y')$ sia lipschitziana rispetto ad y e y' in ogni parte limitata del campo C ([8]).

Definiamo una nuova funzione, che indicheremo con $f_0(x, y, y')$, ponendola uguale

a $f(x, y, y')$ nel campo C_0,
a $f(x, y, H_0)$ per $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, $|y|\leqslant H_0$, $y'>H_0$,
a $f(x, y, -H_0)$ » » » $y'<-H_0$,
a $f_0(x, H_0, y')$ » » $y>H_0$, $|y'|<+\infty$,
a $f_0(x, -H_0, y')$ » » $y<-H_0$, $|y'|<+\infty$.

([7]) Cfr. E. KAMKE: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. (Lipsia, 1930), p. 93.

([8]) Questa ipotesi è ammessa esplicitamente nella proposizione dello SCORZA-DRAGONI riportata nell'introduzione.

Questa nuova funzione $f_0(x, y, y')$ risulta continua e *limitata* in tutto il campo C, restando in valore assoluto sempre minore o uguale del massimo di $|f(x, y, y')|$ in C_0. È, inoltre, lipschitziana rispetto ad y e y', e soddisfa come la $f(x, y, y')$ alle (2), (3), (4).

Per le proprietà indicate della $f_0(x, y, y')$, l'equazione

$$y''=f_0(x, y, y')$$

ammette, come si sa (e come si vede con un noto semplice ragionamento), in tutto l'intervallo (x_0, x_1) almeno un integrale $y_0(x)$ soddisfacente alle condizioni $y_0(x_0)=y_0(x_1)=0$. Questo integrale, in virtù delle (10), verifica in tutto (x_0, x_1) le

$$|y_0(x)|<2He^{x_1-x_0}<H_0, \qquad |y_0'(x)|<H_0,$$

ed è perciò anche un integrale dell'equazione (1). Con ciò il nostro teorema è dimostrato nell'ipotesi supplementare che la $f(x, y, y')$ sia lipschitziana rispetto a y e y' in ogni parte limitata del campo C.

d). Se abbandoniamo questa ipotesi supplementare, a partire dalle (10), e definiti ancora H_0 e C_0 come in *c*), possiamo procedere nel seguente modo.

Consideriamo una successione di polinomi $P_n(x, y, y')$ $(n=1, 2, \ldots)$ tale che, in tutto il campo C_0, sia

$$(11) \qquad |f(x, y, y')-P_n(x, y, y')|<\frac{1}{n};$$

e con $P_n(x, y, y')$ definiamo la funzione $f_n(x, y, y')$ nello stesso modo con cui mediante la $f(x, y, y')$ abbiamo in *c*) definito la $f_0(x, y, y')$. La $f_n(x, y, y')$ risulta continua e *limitata* in tutto il campo C, perchè detto M il massimo di $|f(x, y, y')|$ in C_0, è $|P_n(x, y, y')|<M+1$ in C_0 e perciò $|f_n(x, y, y')|<M+1$ in tutto C. Inoltre, la $f_n(x, y, y')$ è lipschitziana, rispetto a tutte le sue variabili, in tutto C, e mentre la $f(x, y, y')$ soddisfa alle (2), (3), (4), essa soddisfa alle

$$(2') \qquad |f_n(x, y, y')|<\sigma|y'|+\left\{\psi(x)+\frac{1}{n}\right\},$$

$$(3') \qquad f_n(x, y, y')>-\sigma\{|y|+|y'|\}-\left\{\psi(x)+\frac{1}{n}\right\},$$

$$(4') \qquad f_n(x, y, y')<\sigma\{|y|+|y'|\}+\left\{\psi(x)+\frac{1}{n}\right\}.$$

Ciò posto, l'equazione

$$(12) \qquad y''=f_n(x, y, y')$$

ammette, come si sa, in tutto (x_0, x_1), almeno un integrale $y_n(x)$ tale che $y_n(x_0)=y_n(x_1)=0$; e tutti questi integrali in virtù delle (10) (quando si sostituisca $\psi(x)$ con $\psi(x)+\frac{1}{n}$ e quindi H con $H+\frac{x_1-x_0}{n}$) soddisfano alle disuguaglianze

$$|y_n(x)|<2\left\{H+\frac{x_1-x_0}{n}\right\}e^{x_1-x_0}, \qquad |y_n'(x)|<2\left\{H+\frac{x_1-x_0}{n}\right\}e^{x_1-x_0}$$

e quindi, per ogni n maggiore di un certo n_0, alle

$$|y_n(x)|<H_0, \qquad |y_n'(x)|<H_0. \tag{13}$$

Ne segue che, per $n>n_0$, $y_n(x)$ è in tutto (x_0, x_1) anche un integrale dell'equazione

$$y''=P_n(x, y, y'),$$

con

$$|y_n''(x)|<M+1. \tag{14}$$

Dalle (13) e (14) si deduce che, per ogni $n>n_0$, le $y_n(x)$ e le $y_n'(x)$ sono ugualmente limitate ed ugualmente continue in tutto (x_0, x_1). Si può dunque ottenere una successione

$$y_{n_1}(x), \quad y_{n_2}(x), \ldots, \quad y_{n_m}(x), \ldots \quad (^9)$$

con $n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$ numeri interi crescenti, maggiori di n_0, in modo che, per $m\to\infty$, $y_{n_m}(x)$ e $y'_{n_m}(x)$ convergano uniformemente in tutto (x_0, x_1), verso due funzioni limiti $y_\infty(x)$, $y'_\infty(x)$, la seconda essendo la derivata della prima. Ed avendosi

$$y''_{n_m}(x)=P_{n_m}(x, y_{n_m}(x), y'_{n_m}(x)),$$

in virtù della (11) si ha che anche $y''_{n_m}(x)$ converge uniformemente in (x_0, x_1) verso $y''_\infty(x)$ e che è

$$y''_\infty(x)=f(x, y_\infty(x), y'_\infty(x)).$$

È poi evidentemente $y_\infty(x_0)=y_\infty(x_1)=0$, e il nostro teorema è completamente dimostrato [10].

2. - La dimostrazione del n.° 1 prova anche la seguente proposizione (che ammette un'immediata evidente estensione):

Se $f(x, y, y')$ *è finita e continua nel campo* C *e, preso ad arbitrio un* $\sigma>0$, *si può sempre trovare una* $\psi(x)$ *positiva e integrabile in* (x_0, x_1) *in modo da aversi in tutti i punti di* C

$$f(x, y, y')>-\sigma\{|y|+|y'|\}-\psi(x)$$

se è $y\geqslant 0$, *e*

$$f(x, y, y')<\sigma\{|y|+|y'|\}+\psi(x)$$

---

(9) L'applicazione del postulato di ZERMELO si può qui evitare nel modo noto. Ma si può anche fissare, per esempio, di considerare, per ogni dato n, quella soluzione della (12) per la quale $y_n'(x_0)$ ha il minimo valore.

(10) Un esempio in cui il teorema ora dimostrato è immediatamente applicabile è dato dall'equazione

$$y''=\frac{y'^2y(1+y^2)+1}{1+y^2+y'^2}.$$

se è $y \leq 0$; *allora esiste sempre in* (x_0, x_1) *almeno una soluzione dell'equazione* (1) *che si annulla in* x_0 *e in* x_1.

3. - Il ragionamento svolto nel n.° 1 si presta ad essere sfruttato anche per la dimostrazione di un teorema più generale che ora daremo.

Sia $f(x, y, y')$ *una funzione finita e continua nel campo* C *e tale che, preso ad arbitrio un* $Y \geq 0$, *si possano sempre trovare, in corrispondenza, tre funzioni* $\alpha(x)$, $\beta(x)$ *e* $\psi(x)$, *non negative e integrabili sull'intervallo* (x_0, x_1) *e soddisfacenti alla disuguaglianza*

$$\int_{x_0}^{x_1} \{(x_1 - x_0)\alpha(x) + \beta(x)\}\, dx < 1,$$

in modo che in tutti i punti del campo C *si abbia*

$$|f(x, y, y')| < \beta(x)|y'| + \psi(x) \tag{15}$$

se è $|y| \leq Y$,

$$f(x, y, y') > -\alpha(x)|y| - \beta(x)|y'| - \psi(x) \tag{16}$$

se è $y > Y$, *e*

$$f(x, y, y') < \alpha(x)|y| + \beta(x)|y'| + \psi(x) \tag{17}$$

se è $y < -Y$. *Allora, fissati comunque due numeri* y_0 *e* y_1, *esiste in tutto* (x_0, x_1) *almeno un integrale* $y(x)$ *della* (1) *tale che* $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ [11].

Possiamo anche qui supporre $y_0 = y_1 = 0$. Allora, se nell'intervallo (ξ_0, ξ_1), contenuto in (x_0, x_1), una soluzione $y(x)$ dell'equazione (1) soddisfa alle condizioni (6), considerate le funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$ e $\psi(x)$ corrispondenti a $Y=0$, in tutti i punti del campo C per i quali è $y \geq 0$ vale la (16). È perciò, in tutto (ξ_0, ξ_1),

$$y''(x) > -\alpha(x)y(x) - \beta(x)y'(x) - \psi(x),$$

da cui integrando (e conservando le notazioni del n.° 1)

$$A\left\{1 - (\xi_1 - \xi_0)\int_{\xi_0}^{\xi_1} \alpha(x)dx - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \beta(x)dx\right\} < y(\xi_0)\int_{\xi_0}^{\xi_1} \alpha(x)dx + H.$$

Ne segue, in tutto (ξ_0, ξ_1),

$$0 \leq y'(x) < k_0 y(x) + k_1,$$

---

[11] Questa proposizione contiene come casi particolari quella del n.° 1 e quella data da S. Cinquini nel n.° 4 della sua Memoria: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, S. II, Vol. VIII, fasc. I).

dove si è posto

$$k_0=\left[\int_{x_0}^{x_1} \alpha(x)dx\right] : \left[1-\int_{x_0}^{x_1}\{(x_1-x_0)\alpha(x)+\beta(x)\}\,dx\right]$$

$$k_1=H : \left[1-\int_{x_0}^{x_1}\{(x_1-x_0)\alpha(x)+\beta(x)\}\,dx\right];$$

e come nel n.° 1 si conclude che, se $y(x)$ è soluzione della (1) in un intervallo (ξ_0, ξ_1) (contenuto in (x_0, x_1)) nel quale tanto la $y(x)$ quanto la $y'(x)$ non cambiano mai segno, e se in un estremo di questo intervallo la $y'(x)$ si annulla, in tutto (ξ_0, ξ_1) è

$$|y'(x)|<k_0\,|y(x)|+k_1. \tag{18}$$

Di qui segue, analogamente a quanto si è detto nel n.° 1, che se $y(x)$ è in tutto (x_0, x_1) un integrale della (1), tale che sia $y(x_0)=y(x_1)=0$, in tutto l'intervallo detto è, se $k_0>0$,

$$|y(x)|\leqslant\frac{k_1}{k_0}\left(e^{k_0(x_1-x_0)}-1\right)$$

ed anche

$$|y'(x)|<k_1e^{k_0(x_1-x_0)},$$

e, se $k_0=0$,

$$|y'(x)|<k_1, \qquad |y(x)|<k_1(x_1-x_0).$$

Proseguendo ora in modo analogo a quanto si è fatto nel n.° 1, si conclude con la proposizione enunciata.

4. - Passiamo a dimostrare che:

Se $f(x, y, y')$ è finita e continua nel campo C e tale che:

1°) *ad ogni $Y>0$ si possano far corrispondere due funzioni $\psi_0(y)$ e $\psi_1(x)$, non negative e integrabili rispettivamente sugli intervalli $(-Y, Y)$ e (x_0, x_1), in modo che in ogni punto del campo C per il quale è $|y|\leqslant Y$ risulti*

$$|f(x, y, y')|\leqslant\psi_0(y)y'^2+\psi_1(x); \tag{19}$$

2°) *che esistano un $Y_0>0$ e tre funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$, non negative e integrabili sull'intervallo (x_0, x_1) e soddisfacenti alla disuguaglianza*

$$\int_{x_0}^{x_1}\{(x_1-x_0)\alpha(x)+\beta(x)\}\,dx<1,$$

in modo che in tutti i punti del campo C per i quali è $y\geqslant Y_0$ risulti

$$f(x, y, y')>-\alpha(x)|y|-\beta(x)|y'|-\psi(x),$$

e in tutti quelli per i quali è $y \leqslant -Y_0$ *risulti*

$$f(x, y, y') < \alpha(x)|y| + \beta(x)|y'| + \psi(x);$$

allora, fissati comunque due numeri y_0 *e* y_1*, esiste in tutto* (x_0, x_1) *almeno un integrale* $y(x)$ *della* (1) *tale che* $y(x_0)=y_0$*,* $y(x_1)=y_1$.

Scegliamo un numero $Y_1 \geqslant Y_0$ e tale che sia $Y_1 \geqslant |y_0|$, $Y_1 \geqslant |y_1|$, e supponiamo che la funzione $y(x)$ sia in tutto (x_0, x_1) un integrale dell'equazione (1) con $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$. In virtù della condizione 2°), i ragionamenti del n.° 1 mostrano che si può determinare in un certo modo una costante $k>0$ tale che ogni arco della curva $y=y(x)$ sul quale sia sempre $y(x) \geqslant Y_1$, oppure sempre $y \leqslant -Y_1$, verifichi le due disuguaglianze

$$(20) \qquad |y(x)|<k, \qquad |y'(x)|<k.$$

La condizione 1°), facendovi $Y=Y_1$, mostra poi che la costante k può esser scelta in modo che ogni arco della curva $y=y(x)$ tale che sopra di esso sia sempre $|y(x)| \leqslant Y_1$ verifichi ovunque le (20). Ed infatti, se è, in tutto (x_0, x_1), $|y(x)| \leqslant Y_1$, poichè esiste in (x_0, x_1) un $\bar{x}$ tale che

$$y'(\bar{x}) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

dalla condizione 1°) seguono [12] le (20), per una scelta opportuna di k.

Se poi non è sempre $|y(x)| \leqslant Y_1$, la curva $y=y(x)$ si può spezzare in archi su ciascuno dei quali vi è almeno un punto in cui è $|y(x)|=Y_1$ ed in cui perciò la $y'(x)$ risulta già inferiore in valore assoluto alla costante k determinata per gli archi che verificano la $|y(x)| \geqslant Y_1$. Allora su quegli archi sui quali è sempre $|y(x)| \leqslant Y_1$ e che contengono un punto per cui è $|y(x)|=Y_1$, la condizione 1°) dà ancora le (20), sempre per una scelta opportuna di k.

In conclusione, si può determinare in un certo modo $k>0$ così che le (20) risultino verificate ovunque in (x_0, x_1) da ogni integrale della (1) che assuma in x_0 e x_1 rispettivamente i valori y_0 e y_1.

Stabilito ciò, consideriamo il campo

$$C_1: \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad |y| \leqslant k+1, \qquad |y'| \leqslant k+1,$$

ed una successione di polinomi $P_n(x, y, y')$ $(n=1, 2, \ldots)$, tale che, in tutto C_1, sia

$$|f(x, y, y') - P_n(x, y, y')| < \frac{1}{n}.$$

([12]) Cfr. loc. cit. in ([11]), n.° 2, β).

Costruiamo poi la funzione $f_n(x, y, y')$ ([13]) ponendola uguale

$$
\begin{array}{llllll}
\text{a} & P_n(x, y, y') \text{ nel campo } C_1, & & & & \\
\text{a} & P_n(x, y, k+1) & \text{per } x_0 \leq x \leq x_1, & |y| \leq k+1, & & y' > k+1, \\
\text{a} & P_n(x, y, -k-1) & » & » & » & y' < -k-1, \\
\text{a} & -f_n(x, k+1, y') \cdot n\left(y-k-1-\frac{1}{n}\right) & » & » & k+1 < y \leq k+1+\frac{1}{n}, & |y'| < +\infty, \\
\text{a} & 0 & » & » & y > k+1+\frac{1}{n}, & » \\
\text{a} & f_n(x, -k-1, y') \cdot n\left(y+k+1+\frac{1}{n}\right) & » & » & -k-1 > y \geq -k-1-\frac{1}{n}, & » \\
\text{a} & 0 & » & » & y < -k-1-\frac{1}{n}, & »
\end{array}
$$

Considerata allora l'equazione

$$y''=f_n(x, y, y'), \tag{21}$$

e se $y_n(x)$ è un suo integrale in tutto (x_0, x_1), tale che $y_n(x_0)=y_0$, $y_n(x_1)=y_1$, per n maggiore di un certo $\bar{n}$ risultano soddisfatte in tutto (x_0, x_1) le

$$|y_n(x)| < k+1, \qquad |y_n'(x)| < k+1.$$

Da ciò segue nel modo solito la conclusione del nostro teorema.

OSSERVAZIONE I. - Se la condizione 1°) dell'enunciato vale, non per tutti gli Y positivi, ma soltanto per quelli non superiori al numero Y_0 della condizione 2°), allora la dimostrazione data prova il teorema con l'ipotesi supplementare $|y_0| \leq Y_0$, $|y_1| \leq Y_0$.

OSSERVAZIONE II. - Nella condizione 1°) del teorema dimostrato nel presente numero, alla disuguaglianza (19) si può sostituire l'altra

$$|f(x, y, y')| \leq \psi_0(y)\varphi(y'),$$

dove, ferma restando l'ipotesi già fatta sulla $\psi_0(y)$, la $\varphi(y')$ è una funzione continua e positiva per ogni y' e tale che sia

$$\int_0^{+\infty} \frac{z}{\varphi(z)}\, dz = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{z}{\varphi(z)}\, dz = -\infty;$$

si può anche alla (19) sostituire la disuguaglianza

$$|f(x, y, y')| \leq \psi_0(y)\varphi(y') + \psi_1(x),$$

sotto le ipotesi già dette per $\psi_0(y)$, $\varphi(y')$, $\psi_1(x)$, purchè in più si ammetta che esistano due costanti positive λ e μ tali che per tutti gli y' soddisfacenti alla

---

([13]) Supponendo, come è lecito, $k > Y_1$, la $f_n(x, y, y')$ può costruirsi nello stesso modo usato per la $f_n(x, y, y')$ del n.° 1. La variante qui introdotta serve per quello che diremo nel n.° 6.

$|y'|>\lambda$ sia $\varphi(y')\geqslant\mu|y'|$, oppure tali che gli intervalli costituiti dagli $y'\geqslant\lambda$ per i quali è $\varphi(y')<\mu y'$ abbiano una lunghezza complessiva infinita, e che altrettanto avvenga per quelli in cui è $y'\leqslant-\lambda$ e $\varphi(y')<-\mu y'$.

5. - La dimostrazione data nel numero precedente è essenzialmente fondata sui due fatti seguenti:

1°) che, corrispondentemente ad ogni $Y>0$, si possa determinare una funzione $F(z)$ non negativa per ogni $z\geqslant 0$ e tale che, se $y(x)$ è soluzione della equazione (1) in un intervallo (ξ_0, ξ_1), con $x_0\leqslant\xi_0<\xi_1\leqslant x_1$, ed è sempre, in (ξ_0, ξ_1), $|y(x)|\leqslant Y$, si abbia

$$|y'(x'')|\leqslant F(|y'(x')|)$$

qualunque siano i punti x' e x'' di (ξ_0, ξ_1) [14];

2°) che si possano determinare un $Y_0>0$ ed una funzione $\Phi(z)$, continua e positiva per ogni $z\geqslant 0$ e soddisfacente alla condizione

$$\int_{Y_0}^{+\infty}\frac{dz}{\Phi(z)}=+\infty,$$

in modo che, se $y(x)$ è soluzione dell'equazione (1) in un intervallo (ξ_0, ξ_1), con $x_0\leqslant\xi_0<\xi_1\leqslant x_1$ e $y(\xi_0)=y(\xi_1)$, ed è sempre, in (ξ_0, ξ_1), $y(x)\geqslant y(\xi_0)=y(\xi_1)\geqslant Y_0$, oppure sempre $y(x)\leqslant y(\xi_0)=y(\xi_1)\leqslant -Y_0$, si abbia, in tutto (ξ_0, ξ_1),

$$|y'(x)|<\Phi(|y(x)|) \quad [15]. \tag{22}$$

---

[14] Se la $F(z)$ risultasse indipendente da Y, non ci sarebbe bisogno di tener conto del fatto 2°).

[15] Dalla (22) segue facilmente, per la soluzione $y(x)$ considerata, una limitazione in dipendenza del valore $y(\xi_0)=y(\xi_1)$. Supposto, infatti, che in (ξ_0, ξ_1) sia sempre $y(x)\geqslant Y_0$, si consideri l'equazione differenziale

$$z'=\Phi(z),$$

che, posto $z_0=y(\xi_0)$, ammette come integrale particolare,

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\Phi(z)}=x-\xi_0.$$

Se $x=x(z)$ è la funzione di z definita da questa uguaglianza, e se $z=z(x)$ è la sua funzione inversa, si ha

$$z'(x)=\frac{1}{x'(z(x))}=\Phi(z(x)).$$

È poi $z(\xi_0)=z_0=y(\xi_0)$, $|y'(\xi_0)|<\Phi(y(\xi_0))=z'(\xi_0)$. Se esistesse un $\bar{x}$ tale che $\xi_0<\bar{x}\leqslant\xi_1$ $y(\bar{x})=z(\bar{x})$, si avrebbe allora, per il più piccolo di questi $\bar{x}$,

$$y'(\bar{x})\geqslant z'(\bar{x})=\Phi(z(\bar{x}))=\Phi(y(\bar{x}))>|y'(\bar{x})|,$$

ciò che è impossibile. È dunque sempre, in (ξ_0, ξ_1), $y(x)\leqslant z(x)\leqslant z(\xi_1)$. Analogamente, se fosse $y(x)\leqslant -Y_0$ su tutto (ξ_0, ξ_1).

La dimostrazione di cui si tratta richiede però che le condizioni rappresentate da 1°) e 2°) valgano, con le stesse $F(z)$ e $\Phi(z)$, anche per gli integrali dell'equazione (21), per tutti gli n maggiori di un certo $\bar{n}$. Tuttavia, relativamente alla condizione 1°), si può dire che per gli integrali della (21) (per $n>\bar{n}$) basta che essa valga con la stessa F soltanto per $|y'(x')|$ entro certi limiti.

6. - *a*). Il fatto 1°) indicato nel n.° 5 si presenta sicuramente *se ad ogni* $Y>0$ *si possono far corrispondere due funzioni* $\psi_1(x)$ *e* $\psi_2(x)$, *non negative e integrabili in* (x_0, x_1), *in modo che, in ogni punto del campo* C *per il quale sia* $|y|\leqq Y$, *risulti*

$$|f(x, y, y')|\leqq\psi_1(x)+\psi_2(x)|y'| \quad (^{16}).$$

b). Una nuova condizione sufficiente affinchè si presenti il fatto 2°) indicato nel n.° 5, è la seguente:

Esistano un $Y_0>0$ *e due funzioni non negative e integrabili in* (x_0, x_1), $\psi_1(x)$ *e* $\psi_2(x)$, *in modo che, in tutti i punti del campo* C *per i quali è* $y\geqq Y_0$, *risulti*

$$f(x, y, y')>-\psi_1(x)-\psi_2(x)|y'|,$$

e in tutti quelli per i quali è $y\leqq -Y_0$ *risulti*

$$f(x, y, y')<\psi_1(x)+\psi_2(x)|y'|.$$

Sia, infatti, $y(x)$ un integrale dell'equazione (1) in tutto un intervallo (ξ_0, ξ_1), contenuto in (x_0, x_1), e in (ξ_0, ξ_1) risulti sempre $y(x)\geqq Y_0$ e $y'(x)\geqq 1$. Allora, in tutto (ξ_0, ξ_1), è

$$y''(x)>-\psi_1(x)-\psi_2(x)y'(x),$$
$$\frac{y''(x)}{y'(x)}>-\psi_1(x)-\psi_2(x),$$

donde, posto

$$H=\int_{x_0}^{x_1}\{\psi_1(x)+\psi_2(x)\}\,dx,$$
$$y'(\xi_0)<e^H y'(\xi_1).$$

Ragionando analogamente se in (ξ_0, ξ_1) è sempre $y(x)\geqq Y_0$ e $y'(x)\leqq -1$, oppure sempre $y(x)\leqq -Y_0$ e $y'(x)\geqq 1$, oppure sempre $y(x)\leqq -Y_0$ e $y'(x)\leqq -1$, si ottiene che, se $y(x)$ è un integrale della (1) in un intervallo (ξ_0, ξ_1), con $x_0\leqq\xi_0<\xi_1\leqq x_1$ e $y(\xi_0)=y(\xi_1)$, ed è sempre, in (ξ_0, ξ_1), $y(x)\geqq y(\xi_0)=y(\xi_1)\geqq Y_0$, oppure sempre $y(x)\leqq y(\xi_0)=y(\xi_1)\leqq -Y_0$, in tutto l'intervallo detto risulta

$$|y'(x)|<e^H.$$

c). Un'altra condizione sufficiente affinchè si presenti il fatto 2°) indicato nel n.° 5, può enunciarsi come segue:

Esistano un $Y_0>0$ *e tre funzioni* $\psi(x)$, $\gamma(y)$ *e* $\varphi(y')$, *di cui le prime due*

---

(16) Cfr. CINQUINI, loc. cit., in (11), numeri 2 e 3.

siano non negative e integrabili rispettivamente su (x_0, x_1) *e su* $(-\infty, +\infty)$, *e la terza sia sempre positiva e continua e tale che*

$$\int_0^{+\infty} \frac{z}{\varphi(z)} dz = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{z}{\varphi(z)} dz = -\infty,$$

in modo che, in tutti i punti del campo C *per i quali è* $y \geqslant Y_0$, *risulti*

$$f(x, y, y') > -\psi(x) - \gamma(y)\varphi(y'),$$

e in tutti quelli per i quali è $y \leqslant -Y_0$ *risulti*

$$f(x, y, y') < \psi(x) + \gamma(y)\varphi(y');$$

intendendo che, ove non sia $\psi(x) \equiv 0$ *in tutto* (x_0, x_1), *esistano due costanti positive* λ e μ *in modo che, per tutti gli* y' *tali che* $|y'| > \lambda$ *sia sempre* $\varphi(y') \geqslant \mu |y'|$, *oppure in modo che gli intervalli costituiti dagli* $y' > \lambda$ *per i quali è* $\varphi(y') < \mu y'$ *abbiano lunghezza complessiva infinita e che altrettanto avvenga per quelli in cui è* $y' < -\lambda$ *e* $\varphi(y') < -\mu y'$.

Supponiamo che sia sempre, in (x_0, x_1), $\psi(x) = 0$, oppure che risulti sempre, per $|y'| > \lambda$, $\varphi(y') \geqslant \mu |y'|$. Il terzo caso considerato nell'enunciato si riconduce al secondo sostituendo alla funzione $\varphi(y')$ un'altra funzione $\overline{\varphi}(y')$ uguale alla $\varphi(y')$ ove è $\varphi(y') \geqslant \mu |y'|$ e uguale a $\mu |y'|$ altrove.

Sia $y(x)$ un integrale dell'equazione (1) in tutto un intervallo (ξ_0, ξ_1), contenuto in (x_0, x_1), e in (ξ_0, ξ_1) risulti sempre $y(x) \geqslant Y_0$ e $y'(x) \geqslant \lambda$ (il λ essendo $=1$ se è $\psi(x) \equiv 0$). Allora, in tutto (ξ_0, ξ_1), è

$$y''(x) > -\psi(x) - \gamma(x)\varphi(y'), \qquad \frac{y'(x)y''(x)}{\varphi(y'(x))} > -\frac{y'\psi(x)}{\varphi(y')} - \gamma(y)y'$$

$$\int_{y'(\xi_0)}^{y'(\xi_1)} \frac{y'dy'}{\varphi(y')} > -\frac{1}{\mu}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \psi(x)dx - \int_{y(\xi_0)}^{y(\xi_1)} \gamma(y)dy$$

ed anche, ponendo

$$A = \frac{1}{\mu}\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(y)dy, \qquad \int_{y'(\xi_0)}^{y'(\xi_1)} \frac{y'dy'}{\varphi(y')} > -A.$$

Dunque è o $\lambda \leqslant y'(\xi_0) \leqslant y'(\xi_1)$ oppure $\lambda \leqslant y'(\xi_1) < y'(\xi_0)$ e

$$0 < \int_{y'(\xi_1)}^{y'(\xi_0)} \frac{y'dy'}{\varphi(y')} < A.$$

Ragionando analogamente se in (ξ_0, ξ_1) è sempre $y(x) \geqslant Y_0$ e $y'(x) \leqslant -\lambda$, oppure sempre $y(x) \leqslant -Y_0$ e $y'(x) \geqslant \lambda$, oppure sempre $y(x) \leqslant -Y_0$ e $y'(x) \leqslant -\lambda$, si ottiene che, se $y(x)$ è un integrale della (1) in tutto (ξ_0, ξ_1), con $x_0 \leqslant \xi_0 < \xi_1 \leqslant x_1$ e $y(\xi_0) = y(\xi_1)$, ed è sempre in (ξ_0, ξ_1), $y(x) \geqslant y(\xi_0) = y(\xi_1) \geqslant Y_0$, oppure sempre

$y(x) \leqslant y(\xi_0) = y(\xi_1) \leqslant -Y_0$, in tutto l'intervallo detto risulta

$$|y'(x)| < K,$$

dove K è un numero qualunque maggiore di λ e tale che sia

$$\int_\lambda^K \frac{z dz}{\varphi(z)} > A, \qquad \int_{-K}^{-\lambda} \frac{z dz}{\varphi(z)} < -A.$$

7. - Termineremo osservando che il ragionamento fatto nel n.° 1, in a), prova che, se in un intervallo (x_0, x_1) una funzione $y(x)$ è continua insieme con le sue derivate $y'(x)$ e $y''(x)$ ([17]), ed è sempre $y(x) \geqslant 0$ e

$$y''(x) > -\sigma\{y(x) + |y'(x)|\}, \tag{23}$$

con $\sigma > 0$ e $y(x_0) = 0$, detto $\bar{x}$ il primo punto (se di tali punti ne esistono) soddisfacente alle $x_0 < \bar{x} \leqslant x_1$, $y'(\bar{x}) = 0$, si ha

$$(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{x} - x_0) - \frac{1}{\sigma} > 0. \tag{24}$$

Ed invero, dovrà essere $y'(x_0) \geqslant 0$, e se fosse $y'(x_0) = 0$ risulterebbe, da (23), $y''(x_0) > 0$. Dunque, per un δ positivo e sufficientemente piccolo, e per $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$, è $y'(x) > 0$. Ammesso che esista il punto $\bar{x}$, si ha, per ogni x tale che $x_0 \leqslant x < \bar{x}$,

$$y''(x) > -\sigma\{y(x) + y'(x)\}$$

e quindi, ragionando come nel n.° 1, a),

$$A\{1 - \sigma(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_0 + 1)\} < 0,$$

da cui la (24).

Analogamente, se fosse $y(x_1) = 0$ (ferme restando le altre ipotesi, tranne la $y(x_0) = 0$), detto x' l'ultimo punto (se di tali punti ne esistono) soddisfacente alle $x_0 \leqslant x' < x_1$, $y'(x') = 0$, si avrebbe

$$(x_1 - x')^2 + (x_1 - x') - \frac{1}{\sigma} > 0.$$

Se poi fosse, contemporaneamente, $y(x_0) = 0$ e $y(x_1) = 0$, ferme restando le altre ipotesi, *si avrebbe così il modo di determinare una limitazione inferiore, in funzione di* σ, *per la differenza* $x_1 - x_0$.

Analogamente, se in (x_0, x_1) fosse sempre $y(x) \leqslant 0$, con $y(x_0) = 0$, oppure $y(x_1) = 0$, e

$$y''(x) < \sigma\{|y(x)| + |y'(x)|\}. \tag{25}$$

In modo corrispondente si tratta il caso in cui in (23) e (25) valgano, rispettivamente, i segni $\geqslant$ e $\leqslant$, purchè la $y(x)$ non si annulli identicamente in (x_0, x_1) e la $y'(x)$ non possa avere infiniti zeri.

([17]) La continuità della $y''(x)$ non è indispensabile. Basterebbe che la $y'(x)$ fosse assolutamente continua.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 18 febbraio 1939-XVII.