ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO MAMBRIANI

Le successioni ad un numero finito di basi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 1 (1939), p. 23-40

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_23_0>

LE SUCCESSIONI AD UN NUMERO FINITO DI BASI

di ANTONIO MAMBRIANI (Bologna).

In questo lavoro, applicando la mia « Algebra delle successioni » (¹), inizio l'analisi diretta della struttura d'importanti successioni alle quali dò il nome di *successioni ad un numero finito di basi*: ogni simile successione $\{a_n\}=(a_0, a_1, a_2, ...)$ è caratterizzata dall'avere una decomposizione che pone in evidenza certe quantità q_k in numero finito e un uguale numero di certe nuove successioni appartenenti ad uno stesso tipo, più semplice di quello della $\{a_n\}$. S'imponeva di trovare dei nomi per queste quantità e queste nuove successioni: mi è parso logico — come risulterà dal seguito — l'assumere per le prime il nome di *basi* della successione $\{a_n\}$ considerata e per le seconde il nome di *componenti ologene* (ed anche, in altro caso, di *componenti ordinarie*) della $\{a_n\}$.

A una « successione con un numero finito di basi » si può fare corrispondere in più modi delle funzioni quasi-intere, cioè delle funzioni analitiche uniformi, con un numero finito di singolarità. Accenno qui, per ragioni di semplicità e importanza, ad una corrispondenza biunivoca fra le successioni $\{a_n\}$ ad un numero finito di basi e le funzioni $f(z)$ quasi-intere, regolari e nulle all'infinito: risulta che le basi q_k di una tale $\{a_n\}$ sono tutte e sole le singolarità della corrispondente $f(z)$, e che le componenti ologene (o le componenti ordinarie) di $\{a_n\}$ hanno unicamente l'ufficio d'individuare le diverse nature delle singolarità di $f(z)$. Determino fra l'altro, in modo semplicissimo, dei teoremi di composizione di tali basi, teoremi i cui corrispondenti per le singolarità delle dette $f(z)$, vengono chiamati *teorema di* HADAMARD e *teorema di* HURWITZ *e* PINCHERLE (questi ultimi teoremi, com'è ben noto, hanno un'applicazione più generale).

Tale investigazione diretta del comportamento asintotico delle successioni ha **fra i suoi scopi principali** quello di preparare il materiale neces-

(¹) *Sull'Algebra delle successioni* (Memoria I), « Annali di Matem. pura e appl. », s. 4, t. 8 (1930), pp. 103-139; *Idem* (Memoria II), « Annali di matem. pura e appl. », s. 4, t. 9 (1931), pp. 25-56. Queste due Memorie saranno richiamate, in questo scritto, con *Alg. succ.*, I; *Alg. succ.*, II.

sario ad approfondire — secondo una via molto naturale che indicherò prossimamente — lo studio dell'importantissima nozione di *funzione di una o più successioni*. Questa nozione porta poi logicamente ad applicare in modo sistematico, nel campo funzionale, tutta l'Algebra delle successioni. Viene così a prendere sviluppo ciò che denominerò concisamente l'*Analisi infinitesimale delle successioni*: essa trarrà il suo primo orientamento dai vari indirizzi funzionali ora esistenti, e porrà in luce — come, fra l'altro, mi pare fin d'ora — molti interessanti collegamenti.

Ad altri lavori rimando diversi completamenti e varie naturali estensioni.

§ I. - Le successioni ad una base.

1. - Definizione di successione ad una base.

Una successione di potenze

$$1, \quad q, \quad q^2, \quad q^3, \ldots, \quad q^n, \ldots$$

ha un comportamento che risulta completamente individuato dalla conoscenza della base q. In relazione a ciò, generalizzando le progressioni geometriche, pongo la seguente definizione:

Una successione $\{a_n\}=(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ non totalmente nulla (²) si dirà una *successione ad una base* se ha una decomposizione della forma (³)

$$a_n \equiv \alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n, \tag{1}$$

dove q è una quantità indipendente dalla variabile n ed $\{\alpha_n\}$ è una successione ologena cioè tale che sia

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\alpha_n}|=0. \tag{2}$$

La quantità q si dirà la *base* della $\{a_n\}$ e la successione $\{\alpha_n\}$ si dirà la *componente ologena* della $\{a_n\}$.

Ad esempio, la successione

$$a_n=\frac{1}{n!}\overset{n}{\cdot}1^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{1}{\nu!}, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

(²) Una successione si dice «totalmente nulla» se ha nulli tutti i suoi elementi (cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 105).

(³) Nell'Algebra delle successioni (cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 109) si pone brevemente:

$$\alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\alpha_\nu q^{n-\nu}.$$

è ad una base, precisamente di base 1 e di componente ologena $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$; la successione costante (e non totalmente nulla, per avere scelto $a \neq 0$)

$$a_n = a = a\varepsilon_n \overset{n}{\cdot} 1^n, \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

ha la base 1 e la componente ologena $\{a\varepsilon_n\} = (a, 0, 0, 0, ...)$; la successione

$$n = \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} 1^n, \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

ha la base 1 e la componente ologena $\{\varepsilon_{n-1}\} = (0, 1, 0, 0, 0, ...)$.

2. - Prime conseguenze.

Se in (1) si ha $q = 0$, risulta ([4]) $a_n \equiv \alpha_n$, cioè:

Le successioni ologene sono tutte ad una base, di base $q = 0$ *e di componente ologena la successione stessa*; è quindi equivalente dire « successione ologena » o « successione di base zero ». Particolari successioni di questo tipo sono, ad esempio, tutte *le successioni ultimamente nulle* ([5]).

Se in (1) si ha $\{\alpha_n\} = (1, 0, 0, 0, ...) = \{\varepsilon_n\}$, risulta $a_n \equiv q^n$; cioè:

Le progressioni geometriche $\{q^n\}$ *sono successioni ad una base, di base la ragione* q *e di componente ologena* $\{\varepsilon_n\}$.

Se in (1) si fa $\alpha_n \equiv 0$, risulta pure $a_n \equiv 0$ qualunque sia q, e viceversa; quindi:

La successione totalmente nulla si può ritenere come una successione ad una base, avente componente ologena pure totalmente nulla e base indeterminata.

Da (1) e (2) risulta

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = |q|. \tag{3}$$

Possiamo osservare che *se una successione* $\{a_n\}$ *ha una decomposizione della forma* (1), *ne ha una sola.* Invero, se oltre ad (1) si avesse

$$a_n \equiv \beta_n \overset{n}{\cdot} p^n \qquad \text{con} \qquad \lim_{n \to \infty} \left|\sqrt[n]{\beta_n}\right| = 0,$$

dovrebbe essere

$$\alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n \equiv \beta_n \overset{n}{\cdot} p^n,$$

da cui ([6])

$$\alpha_n \equiv \beta_n \overset{n}{\cdot} (p - q)^n.$$

([4]) Cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 122, annotazione ([1]), e pag. 109, n.° 5.

([5]) Una successione si dice « ultimamente nulla » se ha nulli tutti i suoi elementi a partire da un certo in poi (cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 105).

([6]) Cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 132, n.° 27; pag. 139, form. (20').

Prendendo qui la radice n^{esima} in ambo i membri e passando al limite per $n \to \infty$, s'ottiene

$$0 = p - q,$$

ossia $p = q$ e quindi anche $\beta_n \equiv \alpha_n$.

3. - Un' interpretazione trascendente.

Giova vedere subito un' interpretazione trascendente, particolarmente importante, della nozione di « base ». Dalle precedenti formule (1), (2), (3) risulta [7] che *la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

converge per $|z| > |q|$ *e definisce una funzione analitica (uniforme)* $f(z)$ *che ha l'unica singolarità* $z = q$ *e che è rappresentata dalla serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(z-q)^{n+1}};$$

inversamente, per ogni simile funzione uniforme (regolare e nulla all'infinito) la successione dei coefficienti della corrispondente serie di potenze di z^{-1} *è ad una base e ha per base proprio la singolarità.*

Ad esempio, nel caso della successione, considerata al n.° 1,

$$a_n = \frac{1}{n!} \overset{n}{\cdot} 1^n, \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(z-1)^{n+1}} = \frac{1}{z-1}\, e^{\frac{1}{z-1}}.$$

4. - Altra forma della definizione di successione ad una base e non ologena.

Le successioni $\{a_n\}$ *non ologene e ad una base si possono anche definire come quelle successioni per le quali è*

(4) $$a_n \equiv k_n q^n$$

con

(5) $$\lim_{n \to \infty} |\sqrt[n]{\Delta^n k_0}| = 0.$$

---

[7] Cfr. A. MAMBRIANI: *La moltiplicazione composta delle successioni e alcune applicazioni,* Parte II, form. (35) (in corso di stampa nelle « Memorie della Reale Accademia d'Italia »).

Invero, il secondo membro di (1) si può scrivere

$$\frac{\alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n}{q^n} q^n = \left(\frac{\alpha_n}{q^n} \overset{n}{\cdot} 1^n\right) q^n,$$

onde, posto

$$k_n = \frac{\alpha_n}{q^n} \overset{n}{\cdot} 1^n, \tag{6}$$

risulta la (4) e inoltre si ha

$$\Delta^n k_0 = k_n \overset{n}{\cdot} (-1)^n = \frac{\alpha_n}{q^n} \tag{7}$$

e quindi, per la (2), la (5).

Dirò che la successione $\{k_n\}$, data da (6), è la *componente ordinaria* di $\{a_n\}$. La (6) asserisce allora, tenendo presente la (2), che *le componenti ordinarie delle diverse successioni ad una base non nulla, non sono altro che le successioni ad una base e di base uguale all'unità.* In particolare, la progressione geometrica $\{q^n\}$ ha la componente ordinaria $\{1^n\}$. È utile sottolineare che *per le successioni ologene non ha senso parlare di componente ordinaria.*

Da (7) si ricava

$$\alpha_n = q^n \Delta^n k_0. \tag{8}$$

5. - Alcune proprietà delle successioni ologene.

I. *La somma di due successioni ologene è pure una successione ologena.*

Invero, se $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sono due successioni ologene, cioè tali che sia

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\alpha_n}| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\beta_n}| = 0,$$

è pure ologena la loro somma $\{\alpha_n + \beta_n\}$ in quanto si ha

$$|\sqrt[n]{\alpha_n + \beta_n}| \leq |\sqrt[n]{\alpha_n}| + |\sqrt[n]{\beta_n}|$$

(come si prova subito con innalzamento a potenza n^{esima}).

II. *Se $\{\alpha_n\}$ è una successione ologena e c è una costante rispetto ad n, anche la successione $\{c\alpha_n\}$ è ologena.*

OSSERVAZIONE. - Le proprietà I e II si possono riassumere dicendo che *l'insieme delle successioni ologene è* ***l i n e a r e***.

III. *Il prodotto isobarico e il prodotto binomiale di due successioni ologene, sono pure successioni ologene.*

Siano $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ due successioni ologene e dimostriamo che sono ologene

$$\{\alpha_n \underset{n}{\cdot} \beta_n\}, \qquad \{\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n\}.$$

Nel caso del prodotto isobarico una semplice considerazione trascendente porta subito a concludere col teorema: non mi sembra però inutile il fare in tale caso un ragionamento diretto che, con poche varianti, serve anche per l'altro caso. Anzitutto si ha:

$$|\alpha_n \underset{n}{\cdot} \beta_n| \leq |\alpha_n| \underset{n}{\cdot} |\beta_n|,$$

onde, prendendo la radice n^{esima} aritmetica in ambo i membri,

$$(9) \qquad |\sqrt[n]{\alpha_n \underset{n}{\cdot} \beta_n}| \leq |\sqrt[n]{|\alpha_n| \underset{n}{\cdot} |\beta_n|}|.$$

Preso poi ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, in quanto le successioni $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sono ologene, si può determinare un intero positivo n_0 e in corrispondenza ad n_0 un altro intero positivo n_1 in modo che si abbia

$$(10) \qquad |\alpha_n| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n, \qquad |\beta_n| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n, \qquad \text{per ogni } n > n_0,$$

e inoltre i $2n_0 + 2$ numeri

$$(11) \qquad \begin{cases} |\alpha_n \beta_0|, & |\alpha_{n-1}\beta_1|, \ldots, & |\alpha_{n-n_0}\beta_{n_0}|, \\ |\alpha_0 \beta_n|, & |\alpha_1\beta_{n-1}|, \ldots, & |\alpha_{n_0}\beta_{n-n_0}| \end{cases}$$

siano pure tutti $< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ per ogni $n > n_1$. Detto $\bar{n}$ il massimo dei due interi n_0, n_1, segue allora

$$|\alpha_n| \underset{n}{\cdot} |\beta_n| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \underset{n}{\cdot} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \qquad \text{per ogni } n > \bar{n},$$

ed essendo ([8])

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \underset{n}{\cdot} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = (n+1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n,$$

si conclude

$$|\sqrt[n]{|\alpha_n| \underset{n}{\cdot} |\beta_n|}| < |\sqrt[n]{n+1}| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } n > \bar{n}$$

ed anche, per la (9),

$$|\sqrt[n]{\alpha_n \underset{n}{\cdot} \beta_n}| < |\sqrt[n]{n+1}| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } n > \bar{n}.$$

E poichè $\lim\limits_{n\to\infty} |\sqrt[n]{n+1}| = 1$, esisterà un intero N tale che sia

$$|\sqrt[n]{\alpha_n \underset{n}{\cdot} \beta_n}| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n > N.$$

Ciò prova che $\{\alpha_n \underset{n}{\cdot} \beta_n\}$ è successione ologena.

([8]) Come risulta subito: cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 120, form. (39).

Analogamente, nel caso della successione $\{\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n\}$ si ha:

$$|\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n| \leqslant |\alpha_n| \overset{n}{\cdot} |\beta_n|$$

ed anche

$$\left|\sqrt[n]{\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n}\right| \leqslant \left|\sqrt[n]{|\alpha_n| \overset{n}{\cdot} |\beta_n|}\right|. \tag{12}$$

Preso poi ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esisterà un n_0 tale che valgano le (10) e un n_1 tale che i numeri (11) siano tutti $< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ per ogni $n > n_1$. Detto $\bar{n}$ il massimo dei due numeri n_0, n_1, segue allora

$$|\alpha_n| \overset{n}{\cdot} |\beta_n| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \overset{n}{\cdot} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

per ogni $n > \bar{n}$, ossia

$$|\alpha_n| \overset{n}{\cdot} |\beta_n| < \varepsilon^n \qquad \text{per ogni } n > \bar{n},$$

onde, per la (12),

$$\left|\sqrt[n]{\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n}\right| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n > \bar{n},$$

il che prova essere ologena la successione $\{\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n\}$.

IV. *Il rapporto isobarico e il rapporto binomiale — nell'ipotesi che tali rapporti abbiano senso* [9] *— di due successioni ologene non sono sempre delle successioni ologene.*

Il rapporto isobarico o il rapporto binomiale di due successioni ologene *può* essere ologeno: ciò segue subito dalla proprietà III precedente. Invero, se $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sono ologene, i prodotti

$$\alpha_n \underset{n}{\cdot} \beta_n = \gamma_n, \qquad \alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n = \Gamma_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots.)$$

sono pure ologeni; ne risulta

$$\alpha_n = \frac{\gamma_n}{\beta_n}{}_{|n}, \qquad \alpha_n = \frac{\Gamma_n}{\beta_n}{}^{|n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots.),$$

dove i rapporti isobarico e binomiale nei secondi membri sono uguali alla successione ologena $\{\alpha_n\}$.

---

(9) Cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 128.

Invece, ad esempio, da ([10])

$$\binom{1}{n} \underset{n}{\cdot} (-1)^n = \varepsilon_n$$

e da ([11])

$$\binom{1}{n} \overset{n}{\cdot} (-1)^n n! = \varepsilon_n$$

segue, rispettivamente,

$$\varepsilon_n \underset{n}{:} \binom{1}{n} = (-1)^n, \qquad \varepsilon_n \overset{n}{:} \binom{1}{n} = (-1)^n n!\,;$$

cioè le due successioni ologene $\{\varepsilon_n\}$, $\left\{\binom{1}{n}\right\}$ hanno per rapporto isobarico la successione ad una base $\{(-1)^n\}$ (di base -1) e per rapporto binomiale la successione $\{(-1)^n n!\}$ per la quale non si può parlare di basi nel senso sopra definito.

6. - Alcune proprietà delle successioni ad una base.

Le proprietà enunciate al numero precedente per le successioni ologene, cioè per le particolari successioni ad una base nulla, si estendono convenientemente a tutte le successioni ad una base, inoltre, altre proprietà si possono enunciare.

I. *Una successione ad una base e la sua componente ologena sono inizialmente nulle dello stesso ordine.*

Ciò discende subito dalla definizione di moltiplicazione binomiale (Cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 113, n.° 10).

$\mathrm{I_{bis}}$. *La somma di due successioni ad una base e della stessa base q, è una successione pure ad una base, la cui base è pure q e le cui componenti ologena e ordinaria sono, rispettivamente, la somma delle componenti ologene e la somma delle componenti ordinarie delle due successioni.*

Invero, da

$$a_n = \alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n, \qquad b_n = \beta_n \overset{n}{\cdot} q^n,$$

dove q è indipendente da n e $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sono successioni ologene, segue

$$a_n + b_n = \alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n + \beta_n \overset{n}{\cdot} q^n$$

da cui, per la proprietà distributiva della moltiplicazione binomiale rispetto all'addizione ([12]),

$$a_n + b_n = (\alpha_n + \beta_n) \overset{n}{\cdot} q^n,$$

([10]) Cfr. *Alg. succ.*, I, pag. 135, form. (15).

([11]) *Alg. succ.*, I, pag. 139, form. (21).

([12]) *Alg. succ.*, I, pag. 112, γ).

dove $\{\alpha_n+\beta_n\}$ è ologena come somma di due successioni ologene (n.° 5, proprietà I). Inoltre, qualora sia $q \neq 0$, la componente ordinaria della successione $\{a_n+b_n\}$ è data, per la (6), da

$$\frac{\alpha_n+\beta_n}{q^n} \overset{n}{\cdot} 1^n = \left(\frac{\alpha_n}{q^n}+\frac{\beta_n}{q^n}\right) \overset{n}{\cdot} 1^n = \left(\frac{\alpha_n}{q^n} \overset{n}{\cdot} 1^n\right) + \left(\frac{\beta_n}{q^n} \overset{n}{\cdot} 1^n\right).$$

La proprietà asserita è dunque completamente dimostrata.

II. *Se $\{a_n\}$ è una successione ad una base e di base q, e c è una costante rispetto ad n, anche la successione $\{ca_n\}$ è ad una base e di base q.*

Invero, da $a_n = \alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n$ segue $ca_n = c\alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n$.

OSSERVAZIONE. - Dalle proprietà $\mathrm{I_{bis}}$ e II risulta dunque che *il campo delle successioni ad una base ed aventi una stessa determinata base, è un insieme l i n e a r e.*

III. *Il prodotto binomiale di due successioni ad una base è una successione ad una base, la cui base è la somma delle basi delle date successioni e la cui componente ologena è il prodotto binomiale delle componenti ologene delle date successioni.*

Invero, da

$$a_n = \alpha_n \overset{n}{\cdot} p^n, \qquad b_n = \beta_n \overset{n}{\cdot} q^n,$$

dove p, q sono indipendenti da n e $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sono successioni ologene (non totalmente nulle), segue

$$a_n \overset{n}{\cdot} b_n = (\alpha_n \overset{n}{\cdot} p^n) \overset{n}{\cdot} (\beta_n \overset{n}{\cdot} q^n)$$

da cui, per la proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione binomiale ([13]),

$$a_n \overset{n}{\cdot} b_n = (\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n) \overset{n}{\cdot} (p^n \overset{n}{\cdot} q^n)$$

ed anche ([14])

$$a_n \overset{n}{\cdot} b_n = (\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n) \overset{n}{\cdot} (p+q)^n,$$

dove $\{\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n\}$ è ologena come prodotto binomiale di due successioni ologene (n.° 5, proprietà III). La proprietà enunciata è così stabilita.

OSSERVAZIONE. - Possiamo notare che, in virtù di (6), la componente ordinaria del prodotto binomiale $\{a_n \overset{n}{\cdot} b_n\}$ delle due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ precedenti, è data da

$$\left\{\frac{\alpha_n \overset{n}{\cdot} \beta_n}{(p+q)^n} \overset{n}{\cdot} 1^n\right\}_n.$$

([13]) *Alg. succ.*, I, pag. 111.

([14]) *Alg. succ.*, I, pag. 121, form. (41).

IV. *Il rapporto binomiale — nell'ipotesi che il rapporto stesso abbia senso* ([15]) *— di due successioni ad una base e a componenti ologene aventi rapporto binomiale ologeno, è una successione ad una base, la cui base è la differenza delle basi e la cui componente ologena è il rapporto binomiale delle componenti ologene delle date successioni.*

Invero, siano le due successioni di elementi generali

$$a_n = \alpha_n \overset{n}{\cdot} p^n, \qquad b_n = \beta_n \overset{n}{\cdot} q^n,$$

dove p, q sono indipendenti da n e $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ sono successioni ologene convenienti: precisamente la $\{\beta_n\}$ sia inizialmente nulla ([16]) d'ordine non maggiore dell'ordine analogo per $\{\alpha_n\}$, inoltre il rapporto $\{\alpha_n \overset{n}{:} \beta_n\}$ sia ologeno (n.° 5, proprietà IV). Allora si ha ([17])

$$\frac{a_{n\,|n}}{b_n} = \frac{\alpha_n \overset{n}{\cdot} p^n{}_{|n}}{\beta_n \overset{n}{\cdot} q^n} = \frac{\alpha_{n\,|n}}{\beta_n} \overset{n}{\cdot} \frac{p^n{}_{|n}}{q^n},$$

ossia

$$\frac{a_{n\,|n}}{b_n} = \frac{\alpha_{n\,|n}}{\beta_n} \overset{n}{\cdot} (p-q)^n.$$

La proprietà enunciata resta quindi conclusa.

V. *Il prodotto ordinario* (*o prodotto termine a termine*) *di due successioni ad una base è pure una successione ad una base, la cui base è il prodotto delle basi delle date successioni.* In particolare, *se una delle due successioni fattori è ologena, il prodotto ordinario è ologeno, se queste due successioni sono entrambe non ologene il loro prodotto termine a termine ha per componente ordinaria il prodotto termine a termine delle componenti ordinarie delle date successioni.*

Invero: 1°) Se una delle due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ è ologena, la conclusione enunciata risulta subito osservando che si ha

$$|\sqrt[n]{a_n b_n}| = |\sqrt[n]{a_n}| \cdot |\sqrt[n]{b_n}| \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty.$$

2°) Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ non sono ologene, sarà

$$a_n = h_n p^n, \qquad b_n = k_n q^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots.),$$

([15]) *Alg. succ.*, I, pag. 128.

([16]) *Alg. succ.*, I, pag. 105.

([17]) *Alg. succ.*, I, pag. 131.

dove p, q sono non nulli e indipendenti da n, e le $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ sono tali che sia

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\Delta^n h_0}|=0, \qquad \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\Delta^n k_0}|=0.$$

Segue

$$a_n b_n = h_n k_n (pq)^n,$$

il che prova la proprietà enunciata qualora si dimostri che è proprio

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\Delta^n (h_0 k_0)}|=0.$$

Rimando ad altra occasione una dimostrazione semplice e diretta della (14) nell'ipotesi data dalle (13), e indico ora una dimostrazione che si appoggia sulla teoria delle funzioni. A tale scopo, ricordiamo — come discende da considerazioni di FABER e LE ROY sulle singolarità delle funzioni analitiche — che « se per una successione $\{c_n\}=\{g(n)\}_n$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\Delta^n c_0}|=0,$$

allora $g(z)$ è una funzione intera che aumenta meno rapidamente di $e^{\varepsilon|z|}$, con $\varepsilon>0$ e arbitrariamente piccolo ([18]); inversamente da quest'ultima proprietà segue la prima ». Ora dalle (13), vere per ipotesi, segue che, posto

$$h_n = g_1(n), \qquad k_n = g_2(n),$$

le $g_1(z)$, $g_2(z)$ sono funzioni intere che crescono meno rapidamente di $e^{\varepsilon|z|}$ con $\varepsilon>0$ e arbitrariamente piccolo. Ne risulta

$$h_n k_n = g_1(n) g_2(n) = g_3(n),$$

dove $g_3(z)$ è una funzione intera che cresce meno rapidamente di $e^{2\varepsilon|z|}=e^{\eta|z|}$ con $\eta>0$ e arbitrariamente piccolo. Sarà quindi vera la (14), c. d. d..

OSSERVAZIONE. - La componente ologena della successione $\{a_n b_n\}$, dove $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono le due successioni precedenti, è data da

$$(pq)^n \cdot \Delta^n (h_0 k_0), \qquad (n=0, 1, 2,....).$$

VI. *La derivata isobarica e la derivata binomiale* ([19]) *di una successione ad una base q sono pure successioni ad una base e colla stessa base q.*

([18]) In termini più precisi, $g(z)$ è una funzione intera tale che, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, esiste un $\varrho_0>0$ in modo che sia

$$|g(z)|<e^{\varepsilon|z|} \qquad \text{per } |z|>\varrho_0.$$

([19]) *Alg. succ.*, II, pag. 37, n.° 47.

Sia la successione

$$a_n = \alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n, \qquad (n=0,\,1,\,2,\ldots),$$

dove q è indipendente da n e $\{\alpha_n\}$ è ologena. Poichè la derivata binomiale di $\{a_n\}$ non è altro che la successione $\{a_{n+1}\}_n$, si ha, per la regola di derivazione binomiale dei prodotti binomiali ([20]),

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} \overset{n+1}{\cdot} q^{n+1} = \alpha_{n+1} \overset{n}{\cdot} q^n + \alpha_n \overset{n}{\cdot} q^{n+1} = \alpha_{n+1} \overset{n}{\cdot} q^n + q\alpha_n \overset{n}{\cdot} q^n$$

ossia, per la proprietà distributiva della moltiplicazione binomiale rispetto all'addizione,

$$a_{n+1} = (\alpha_{n+1} + q\alpha_n) \overset{n}{\cdot} q^n, \tag{15}$$

dove $\{\alpha_{n+1} + q\alpha_n\}_n$ è una successione ologena come somma di due successioni ologene (n.° 5, proprietà I). Pertanto *la derivata binomiale* $\{a_{n+1}\}_n$ *della* $\{a_n\}$ *ha la stessa base* q *della* $\{a_n\}$ *e la componente ologena* $\{\alpha_{n+1} + q\alpha_n\}_n$.

La derivata isobarica di $\{a_n\}$ non è che la successione $\{(n+1)a_{n+1}\}_n$. Ora, in virtù di (15), si ha

$$(n+1)a_{n+1} = n[(\alpha_{n+1} + q\alpha_n) \overset{n}{\cdot} q^n] + (\alpha_{n+1} + q\alpha_n) \overset{n}{\cdot} q^n.$$

Ma è

$$\begin{aligned} n[(\alpha_{n+1} + q\alpha_n) \overset{n}{\cdot} q^n] &= \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} [(\alpha_{n+2} + q\alpha_{n+1}) \overset{n+1}{\cdot} q^{n+1}] \\ &= \varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} [(\alpha_{n+2} + q\alpha_{n+1}) \overset{n}{\cdot} q^n + (\alpha_{n+1} + q\alpha_n) \overset{n}{\cdot} q^{n+1}] \\ &= [\varepsilon_{n-1} \overset{n}{\cdot} (\alpha_{n+2} + 2q\alpha_{n+1} + q^2\alpha_n)] \overset{n}{\cdot} q^n \\ &= (n\alpha_{n+1} + 2qn\alpha_n + q^2 n\alpha_{n-1}) \overset{n}{\cdot} q^n\,; \end{aligned}$$

onde:

$$(n+1)a_{n+1} = [(n+1)\alpha_{n+1} + q(2n+1)\alpha_n + q^2 n\alpha_{n-1}] \overset{n}{\cdot} q^n,$$

dove nel secondo membro la parentesi quadra è l'elemento generale di una successione ologena, per la proprietà I del n.° 5. Dunque: *La derivata isobarica* $\{(n+1)a_{n+1}\}_n$ *della* $\{a_n\}$ *ha la stessa base* q *della* $\{a_n\}$ *e la componente ologena*

$$\{(n+1)\alpha_{n+1} + q(2n+1)\alpha_n + q^2 n\alpha_{n-1}\}_n\,.$$

([20]) *Alg. succ.*, II, pag. 38, form. (20).

§ II. - Le successioni ad un numero finito di basi.

7. - Definizione di successione a due basi.

Mi riferirò principalmente alle successioni a due basi, ma i ragionamenti seguenti si trasportano facilmente alle successioni con un numero finito qualunque di basi.

Si dirà una *successione a due basi* la somma di due successioni ad una base e di basi distinte. Precisamente, una successione $\{a_n\}$ si dirà una « successione a due basi » se ha una decomposizione della forma

$$a_n = \alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n + \alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n, \tag{1}$$

dove q_1, q_2 sono quantità diverse, indipendenti dalla variabile n, e $\{\alpha_{n,1}\}_n$, $\{\alpha_{n,2}\}_n$ sono successioni ologene, cioè tali che sia

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\alpha_{n,1}}| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\alpha_{n,2}}| = 0. \tag{2}$$

Le quantità q_1, q_2 si diranno le *basi* della $\{a_n\}$ e le successioni $\{\alpha_{n,1}\}$, $\{\alpha_{n,2}\}$ si diranno le *componenti ologene* della $\{a_n\}$.

Ad esempio, la successione

$$\left\{\frac{1^n+(-1)^n}{2}\, q^n\right\}_n \qquad (\text{con } q \neq 0)$$

è a due basi, precisamente le basi q, $-q$ e le componenti ologene uguali entrambe ad $\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_n\right\}$; una successione ultimamente costante, senza essere nè costante nè ultimamente nulla, è a due basi, precisamente le basi 1 e 0, in particolare la successione $a_0, a_1, a_2, a, a, a, a, \ldots$ (con $a_2 \neq a$ e con $a \neq 0$) ha le dette due basi e rispettivamente le componenti ologene $\{a\varepsilon_n\}$, $\{(a_0-a)\varepsilon_n + (a_1-a)\varepsilon_{n-1} + (a_2-a)\varepsilon_{n-2}\}$.

Dalle (1) e (2) risulta

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\sqrt[n]{a_n}| = |q|,$$

dove $|q|$ è il massimo dei due numeri $|q_1|$, $|q_2|$.

Si ha poi: *se una successione* $\{a_n\}$ *ha una decomposizione della forma* (1), *ne ha una sola* ([21]).

8. - Un'interpretazione trascendente.

Parallelamente a quanto si è fatto al n.º 3 relativamente alle successioni ad

([21]) Sulla dimostrazione diretta di ciò e su varie questioni affini rimando ad altro lavoro.

una base, indichiamo un'interpretazione trascendente particolarmente importante delle successioni a due basi. Dalla (1) risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\alpha_{n,1}} \cdot q_1^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{n}{\alpha_{n,2}} \cdot q_2^n}{z^{n+1}},$$

onde [22]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n,1}}{(z-q_1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n,2}}{(z-q_2)^{n+1}},$$

dove il secondo membro rappresenta la funzione definita dal primo membro: *tale funzione $f(z)$ ha, dunque, le due sole singolarità q_1, q_2; inversamente, per ogni simile funzione uniforme (regolare e nulla all'infinito) la successione dei coefficienti della corrispondente serie di potenze di z^{-1} è a due basi e ha per basi proprio le due singolarità.* Nel caso del primo esempio considerato al numero precedente, cioè della successione

$$a_n = \frac{1^n + (-1)^n}{2} q^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

con $q \neq 0$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(z-q)^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(z+q)^{n+1}}$$

ossia

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-q} + \frac{1}{z+q} \right) = \frac{z}{z^2 - q^2}.$$

Analoga interpretazione sussiste per le successioni ad un numero finito qualunque di basi.

9. - Altra forma della definizione di successione a due basi.

Una successione $\{a_n\}$ a due basi q_1, q_2, entrambe non nulle, si può anche definire come una successione della forma

$$a_n = k_{n,1} q_1^n + k_{n,2} q_2^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

dove si ha

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[n]{\Delta^n k_{0,1}} \right| = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[n]{\Delta^n k_{0,2}} \right| = 0. \tag{4}$$

---

[22] Cfr. loc. cit. in [7].

Ciò discende subito dal n.° 4, qualora si considerino separatamente le due successioni ad una base (non nulla)

$$\{\alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n\}, \qquad \{\alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n\}$$

che compongono la successione $\{a_n\}$.

Le successioni $\{k_{n,1}\}$, $\{k_{n,2}\}$ si diranno — analogamente a quanto si disse per le successioni ad una base — le *componenti ordinarie* della successione $\{a_n\}$. Risulta:

$$k_{n,1} = \frac{\alpha_{n,1}}{q_1^n} \overset{n}{\cdot} 1^n, \qquad k_{n,2} = \frac{\alpha_{n,2}}{q_2^n} \overset{n}{\cdot} 1^n \tag{5}$$

da cui

$$\alpha_{n,1} = q_1^n \Delta^n k_{0,1}, \qquad \alpha_{n,2} = q_2^n \Delta^n k_{0,2}. \tag{6}$$

Ed ancora, *se la successione $\{a_n\}$ a due basi ha una base q non nulla e l'altra nulla, si avrà per essa una decomposizione della forma*

$$a_n = k_n q^n + \alpha_n,$$

dove

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\Delta^n k_0}| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{\alpha_n}| = 0.$$

10. - Alcune proprietà delle successioni a due basi.

I. *La somma di due successioni a due basi, ed entrambe colle stesse due basi (distinte) q_1, q_2, è ancora una successione a due basi, le cui basi sono pure q_1, q_2 e le cui componenti ologene (o ordinarie) sono le somme delle coppie di componenti ologene (o ordinarie) corrispondenti nelle due date successioni* (essendo «corrispondenti» le componenti relative ad una stessa base).

Invero, se le due date successioni sono

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n + \alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n, \\ b_n &= \beta_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n + \beta_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n, \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

si ha subito

$$a_n + b_n = (\alpha_{n,1} + \beta_{n,1}) \overset{n}{\cdot} q_1^n + (\alpha_{n,2} + \beta_{n,2}) \overset{n}{\cdot} q_2^n,$$

dove $\{\alpha_{n,1} + \beta_{n,1}\}$, $\{\alpha_{n,2} + \beta_{n,2}\}$ sono successioni ologene come somme di successioni ologene (n.º 5, proprietà I). Inoltre, la componente ordinaria di $\{a_n+b_n\}$ relativamente a q_1, se $q_1 \neq 0$, è

$$\frac{\alpha_{n,1}+\beta_{n,1}}{q_1^n} \overset{n}{\cdot} 1^n = \left(\frac{\alpha_{n,1}}{q_1^n}+\frac{\beta_{n,1}}{q_1^n}\right) \overset{n}{\cdot} 1^n = \left(\frac{\alpha_{n,1}}{q_1^n} \overset{n}{\cdot} 1^n\right)+\left(\frac{\beta_{n,1}}{q_1^n} \overset{n}{\cdot} 1^n\right);$$

analogamente per q_2, se $q_2 \neq 0$.

È dunque provato quanto sopra si è asserito.

II. *Se $\{a_n\}$ è una successione a due basi, e di basi q_1, q_2, e c è una costante rispetto ad n, anche la successione $\{ca_n\}$ è a due basi e di basi q_1, q_2.*

Invero da

$$a_n = \alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n + \alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n$$

segue

$$ca_n = c\alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n + c\alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n.$$

OSSERVAZIONE. - Dalle proprietà I e II risulta che *il campo delle successioni a due basi e colle stesse due basi (distinte) q_1, q_2, è un insieme l i n e a r e.*

III. *Il prodotto binomiale di due successioni, ciascuna a due basi, è una successione a quattro basi oppure a tre basi o due basi: queste basi sono f r a le somme di una base della prima successione e di una base della seconda successione.*

Invero, sia

$$a_n = \alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} p_1^n + \alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} p_2^n,$$

$$b_n = \beta_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n + \beta_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n,$$

dove p_1, p_2, q_1, q_2 (con $p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$) sono indipendenti da n, e $\{\alpha_{n,1}\}$, $\{\alpha_{n,2}\}$, $\{\beta_{n,1}\}$, $\{\beta_{n,2}\}$ sono successioni ologene (non totalmente nulle). Segue, per la proprietà distributiva della moltiplicazione binomiale rispetto all'addizione ([23]),

$$\begin{aligned} a_n \overset{n}{\cdot} b_n &= (\alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} p_1^n + \alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} p_2^n) \overset{n}{\cdot} (\beta_{n,1} \overset{n}{\cdot} q_1^n + \beta_{n,2} \overset{n}{\cdot} q_2^n) = \\ &= (\alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,1}) \overset{n}{\cdot} (p_1+q_1)^n + (\alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,2}) \overset{n}{\cdot} (p_1+q_2)^n + \\ &+ (\alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,1}) \overset{n}{\cdot} (p_2+q_1)^n + (\alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,2}) \overset{n}{\cdot} (p_2+q_2)^n, \end{aligned}$$

ciò che prova (tenendo presente il n.º 5, III) l'asserzione fatta. Precisamente:

([23]) *Alg. succ.*, I, pag. 112, γ).

1°) se risulta $p_1+q_1 \neq p_2+q_2$, $p_1+q_2 \neq p_2+q_1$, e solo in questo caso, per la successione $\{a_n \overset{n}{\cdot} b_n\}$ si hanno *quattro* basi (date da p_1+q_1, p_1+q_2, p_2+q_1, p_2+q_2);

2°) se invece risulta $p_1+q_1=p_2+q_2$ (ed allora sarà necessariamente $p_1+q_2 \neq p_2+q_1$) si hanno *due* basi (date da p_1+q_2, p_2+q_1) oppure *tre* basi (date da p_1+q_1, p_1+q_2, p_2+q_1) a seconda che, rispettivamente, la somma $\alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,1} + \alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,2}$ è identicamente nulla oppure no;

3°) se infine risulta $p_1+q_2=p_2+q_1$ (ed allora sarà necessariamente $p_1+q_1 \neq p_2+q_2$) si hanno *due* basi (date da p_1+q_1, p_2+q_2) oppure *tre* basi (date da p_1+q_1, p_1+q_2, p_2+q_2) a seconda che, rispettivamente, la somma $\alpha_{n,1} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,2} + \alpha_{n,2} \overset{n}{\cdot} \beta_{n,1}$ è identicamente nulla oppure no.

Si comprende l'estensione di questa proposizione qualora si moltiplichino binomialmente due successioni di tipo più generale: la prima ad un certo numero m di basi e la seconda ad un altro numero μ di basi. Nell'interpretazione trascendente, di cui al n.° 8, questa proprietà esprime — limitatamente per ora alla categoria delle funzioni quasi-intere (cioè funzioni uniformi con un numero finito di singolarità) — la nota proposizione sulla somma delle singolarità detta *teorema di* HURWITZ *e* PINCHERLE.

IV. *Il prodotto ordinario* (*o prodotto termine a termine*) *di due successioni, ciascuna a due basi, è una successione a quattro basi oppure a tre basi o due basi o anche una base: queste basi sono fra i prodotti di una base della prima successione e di una base della seconda successione.*

Invero, siano le due successioni

$$a_n=a_{n,1}+a_{n,2}, \quad b_n=b_{n,1}+b_{n,2}, \qquad (n=0, 1, 2,\ldots),$$

con $\{a_{n,1}\}$, $\{a_{n,2}\}$, $\{b_{n,1}\}$, $\{b_{n,2}\}$ successioni ad una base e di basi rispettivamente p_1, p_2, q_1, q_2, basi eventualmente nulle in parte, purchè sia $p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$. Risulta

$$a_n b_n = a_{n,1}b_{n,1}+a_{n,1}b_{n,2}+a_{n,2}b_{n,1}+a_{n,2}b_{n,2},$$

dove (in virtù del n.° 6, V) i termini del secondo membro sono gli elementi generali di successioni ad una base e di basi ordinatamente i prodotti

$$p_1q_1, \quad p_1q_2, \quad p_2q_1, \quad p_2q_2. \tag{7}$$

Da ciò discende la proposizione enunciata.

In particolare: Se i numeri (7) sono tutti diversi (cioè se $p_1q_1 \neq p_2q_2$, $p_1q_2 \neq p_2q_1$), e soltanto in questo caso, la successione $\{a_nb_n\}$ ha *quattro* basi (date da (7)); se invece è, ad esempio,

$$a_n = p^n + \varepsilon_n, \qquad b_n = 2q^n - \varepsilon_n$$

(con $p \neq 0$, $q \neq 0$) risulta

$$a_n b_n = 2(pq)^n,$$

cioè la successione $\{a_n b_n\}$ ha la sola base pq.

Questa proposizione ora dimostrata si estende, con qualche opportuno mutamento, al caso in cui le due successioni che si moltiplicano siano ad un numero finito qualunque di basi, numero non necessariamente lo stesso per ciascuna delle due successioni. Secondo l'interpretazione trascendente, di cui al n.° 8, questa proprietà esprime — limitatamente per ora alla categoria delle funzioni quasi-intere — la nota proposizione sul prodotto delle singolarità detta *teorema di* HADAMARD.

OSSERVAZIONE. - Sulle precedenti proposizioni III e IV mi riservo di tornare per dare maggiori precisazioni.