Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Antonio Mambriani

Determinazione della soluzione polinomiale dell'equazione $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 7, nº 3-4 (1938), p. 189-194

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_189_0>

DETERMINAZIONE DELLA SOLUZIONE POLINOMIALE DELL'EQUAZIONE $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$

di ANTONIO MAMBRIANI (Bologna).

Consideriamo l'equazione differenziale

$$(E) \qquad (a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0,$$

con a_0, a_1, b_0, b_1 costanti date, a_0 e a_1 non contemporaneamente nulle, $b_1 \neq 0$ ed n intero non negativo: una tale equazione ha fra le sue soluzioni un polinomio $y_n(x)$ di grado n.

Nel caso a_0, a_1, b_0, b_1 costanti *reali*, il prof. P. BURGATTI, nel Vol. I di questi « Annali » (1), si è occupato della realità degli zeri del polinomio $y_n(x)$ e poi, contemporaneamente e indipendentemente, i proff. B. LEVI, nello stesso Vol. I di questi « Annali » (2), e G. SANSONE, nei « Rend. dei Lincei » (3), hanno completato i risultati del BURGATTI. Le acute analisi di questi Autori sono fatte tutte senza conoscere un'espressione di $y_n(x)$.

Nel presente lavoro, applicando un procedimento già da me indicato (4) per la risoluzione di equazioni differenziali lineari, determino rapidamente per la soluzione polinomiale $y_n(x)$, di (E), la seguente espressione

$$(1) \qquad y_n(x)=(b_1x+b_0)^n+\binom{n}{2}a_0b_1(b_1x+b_0)^{n-2}+ \\ +\binom{n}{4}1\cdot3(a_0b_1)^2(b_1x+b_0)^{n-4}+\binom{n}{6}1\cdot3\cdot5(a_0b_1)^3(b_1x+b_0)^{n-6}+ \ldots.$$

---

(1) P. BURGATTI: *Sull'equazione $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$ e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di $y_n(x)=0$.* Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, S. II, Vol. I (1932), pp. 165-172.

(2) B. LEVI: *Determinazione della natura delle radici della soluzione polinomia dell'equazione differenziale $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$.* Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, S. II, Vol. I (1932), pp. 255-261.

(3) G. SANSONE: *Sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione $(a_1x+a_0)y''+$ $+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$.* Nota I. Rend. R. Accad. Naz. Lincei, S. VI, Vol. XV (1932), pp. 125-130. — *Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-$ $-nb_1y=0$.* Nota II. Idem, pp. 194-197.

(4) A. MAMBRIANI: *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari.* Atti I° Congresso Naz. dei Matematici di Firenze, aprile 1937 (in corso di stampa).

nel caso $a_1=0$, la seguente altra

$$
(2) \qquad \begin{aligned} y_n(x) = {} & b_1^n(a_1x+a_0)^n + n(\delta+(n-1)a_1^2)b_1^{n-1}(a_1x+a_0)^{n-1} + \\ & + \binom{n}{2}(\delta+(n-1)a_1^2)(\delta+(n-2)a_1^2)b_1^{n-2}(a_1x+a_0)^{n-2} + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \binom{n}{n-1}(\delta+(n-1)a_1^2)(\delta+(n-2)a_1^2)\dots(\delta+a_1^2)b_1(a_1x+a_0) + \\ & + \binom{n}{n}(\delta+(n-1)a_1^2)(\delta+(n-2)a_1^2)\dots(\delta+a_1^2)\delta \end{aligned}
$$

nel caso $a_1 \neq 0$, avendo posto col BURGATTI $\delta = a_1b_0 - a_0b_1$. Possiamo notare subito che la (2) si può anche scrivere (indicando con D la derivazione rispetto ad x):

$$
(2') \qquad y_n(x) = a_1^n(a_1x+a_0)^{1-\frac{\delta}{a_1^2}} e^{-\frac{b_1}{a_1}x} D^n \left\{ (a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}+n-1} e^{\frac{b_1}{a_1}x} \right\},
$$

ed ancora, quando sia in particolare $\delta = \nu a_1^2$ ($\nu = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$),

$$
(3) \qquad y_n(x) = a_1^{n+\nu-1} b_1^{-\nu+1} e^{-\frac{b_1}{a_1}x} D^{n+\nu-1} \left\{ (a_1x+a_0)^n e^{\frac{b_1}{a_1}x} \right\},
$$

qualora si precisi D^{-1} ponendo $D^{-1} e^{\frac{b_1}{a_1}x} = \frac{a_1}{b_1} e^{\frac{b_1}{a_1}x}$.

Il polinomio $y_n(x)$ è dunque un *polinomio di* APPELL ([5]) o ha molte analogie con un simile polinomio; in particolare, quando è $a_0=0$, $a_1=1$, $b_0=\alpha+1$, $b_1=-1$ esso è il noto *polinomio di* TCHEBYCHEFF-LAGUERRE, quando è $a_0=1$, $a_1=0$, $b_0=0$, $b_1=-1$ esso è il noto *polinomio di* HERMITE.

La conoscenza delle eleganti espressioni precedenti di $y_n(x)$ permette poi, fra l'altro, di giungere con facilità alle sopra accennate conclusioni del BURGATTI, del LEVI e del SANSONE ([6]).

([5]) Con denominazione introdotta dal PINCHERLE, si chiamano *polinomi di Appell* in una variabile t e relativi ad una successione a_0, a_1, a_2,.... i polinomi

$$
a_0t^n + na_1t^{n-1} + \binom{n}{2}a_2t^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}a_{n-1}t + \binom{n}{n}a_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).
$$

([6]) Nel periodo dalla presentazione del manoscritto di questo lavoro per la stampa alla correzione delle bozze, il ch.^{mo} prof. B. LEVI e l'amico prof. L. ONOFRI mi hanno osservato, molto gentilmente, che la risoluzione dell'equazione, anche più generale di (E), $(a_2x^2+a_1x+a_0)y''+ +(b_1x+b_0)y'+cy=0$ era già stata fatta in antico. Si confronti, ad esempio:

J. DIENGER: *Die Differential-und Integralrechnung*, Bd. II, Stuttgart, 1868; in particolare, pp. 119-122.

HJ. HOLMGREN: *Sur l'intégration de l'équation différentielle* $(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1+b_1x)\frac{dy}{dx} + a_0y = 0$. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handingar, Bd. 7, n. 9 (1869), pp. 1-58.

Questi autori, però, — seguendo vie che mi sembrano avere poco i caratteri di procedimento di ricerca — non dànno pel polinomio $y_n(x)$ espressioni di forma semplice quale, ad esempio, si richiede ora per rispondere ai quesiti posti dal BURGATTI.

Rimando ad altro lavoro la deduzione di conclusioni di carattere più generale che discendono dal metodo qui seguito.

1. - Trasformazione dell'equazione (E).

Incominciamo coll'osservare che, essendo a_0, a_1 delle costanti ($a_1 \neq 0$), si ha [7]:

$$\underline{(a_1x+a_0)^{n+1}D(a_1x+a_0)^{-n}}y=(a_1x+a_0)y'-na_1y. \tag{4}$$

Consideriamo dapprima il caso — più semplice — in cui nella (E) sia $a_1=0$, cioè il caso dell'equazione

$$a_0y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0, \qquad (a_0\neq 0,\ b_1\neq 0). \tag{E_0}$$

In virtù di (4) quest'equazione si può scrivere:

$$a_0D^2y+\underline{(b_1x+b_0)^{n+1}D(b_1x+b_0)^{n}}y=0. \tag{E_0'}$$

Di qua nel numero seguente dedurremo la (1).

Nel caso $a_1\neq 0$ osserviamo che (E) si può scrivere:

$$(a_1x+a_0)y''+\left\{\frac{b_1}{a_1}(a_1x+a_0)+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{a_1}\right\}y'-nb_1y=0$$

od anche, ponendo col BURGATTI $a_1b_0-a_0b_1=\delta$,

$$\left\{(a_1x+a_0)y''+\frac{\delta}{a_1}y'\right\}+\frac{b_1}{a_1}\{(a_1x+a_0)y'-na_1y\}=0.$$

Quest'equazione, tenendo presente la (4), si può quindi scrivere nella forma

$$\underline{(a_1x+a_0)^{1-\frac{\delta}{a_1^2}}D(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}}}y'+\frac{b_1}{a_1}\underline{(a_1x+a_0)^{n+1}D(a_1x+a_0)^{-n}}y=0$$

od anche

$$\underline{(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}}D(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}}D}y+\frac{b_1}{a_1}\underline{(a_1x+a_0)^{n}D(a_1x+a_0)^{-n}}y=0. \tag{E'}$$

Di qua nel numero seguente dedurremo la (2).

2. - Determinazione della soluzione $y_n(x)$.

1°). Partiamo da (E_0') ed applichiamo ad ambo i membri di essa un'operazione inversa di $\underline{(b_1x+b_0)^{n+1}D(b_1x+b_0)^{-n}}$ quale $\underline{(b_1x+b_0)^{n}I(b_1x+b_0)^{-n-1}}$, dove I

---

[7] Sul significato — del resto molto naturale — della scrittura nel primo membro di (4) e di altre analoghe, si confronti loc. cit. in [4].

indica « determinazione di una primitiva particolare ». S'ottiene:

$$\underline{a_0(b_1x+b_0)^n I(b_1x+b_0)^{-n-1} D^2} y + y = c(b_1x+b_0)^n \tag{5}$$

con c costante arbitraria. Quest'equazione ha la *soluzione formale*

$$y = c \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_0^\nu \{ \underline{(b_1x+b_0)^n I(b_1x+b_0)^{-n-1} D^2} \}^\nu (b_1x+b_0)^n. \tag{6}$$

Se ora precisiamo I ponendo $I(b_1x+b_0) = \frac{1}{2b_1}(b_1x+b_0)^2$, si vede facilmente, eseguendo i semplici calcoli indicati nel secondo membro di (6), che la (6) ci dà una *soluzione effettiva* in quanto la serie precedente si riduce ai suoi primi $n+1$ termini, essendo nulli tutti gli altri. Calcolando successivamente questi termini non nulli e facendo, in (6), $c=1$ si ottiene proprio l'espressione di $y_n(x)$ data da (1).

2°). Partiamo ora dalla (E′) ed applichiamo ad ambo i membri di essa un'operazione inversa di $\underline{\frac{b_1}{a_1}(a_1x+a_0)^n D(a_1x+a_0)^{-n}}$ quale $\underline{\frac{a_1}{b_1}(a_1x+a_0)^n I(a_1x+a_0)^{-n}}$. Risulta:

$$\underline{\frac{a_1}{b_1}(a_1x+a_0)^n I(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n} D(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}}} Dy + y = c(a_1x+a_0)^n \tag{7}$$

con c costante arbitraria. Quest'equazione ha la *soluzione formale*

$$y = c \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{a_1^\nu}{b_1^\nu} \{ \underline{(a_1x+a_0)^n I(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n} D(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}} D} \}^\nu (a_1x+a_0)^n. \tag{8}$$

Se ora precisiamo I ponendo $I(a_1x+a_0) = \frac{1}{2a_1}(a_1x+a_0)^2$, si vede facilmente, eseguendo i semplici calcoli indicati nel secondo membro di (8), che la (8) ci dà una *soluzione effettiva* in quanto la serie precedente si riduce ai suoi primi $n+1$ termini, essendo nulli tutti gli altri. Calcolando successivamente questi termini non nulli e facendo, in (8), $c=1$ si ottiene proprio l'espressione di $y_n(x)$ data da (2).

3. - Osservazioni.

1ª). In modo del tutto analogo alla (E_0) si tratta l'equazione

$$a_0 y^{(m)} + (b_1x+b_0)y' - nb_1 y = 0, \qquad (m>2).$$

Così pure, in modo del tutto analogo alla (E) con $a_1 \neq 0$ si tratta l'equazione

$$(a_1x+a_0)y^{(m)} + hy^{(m-1)} + k\cdot(a_1x+a_0)y' - nka_1 = 0,$$

con h, k costanti $(k \neq 0)$. Si possono però fare delle generalizzazioni molto più estese ed interessanti, come indicherò in altro lavoro.

2ª). Circa l'altra soluzione $Y(x)$ di (E), linearmente indipendente da $y_n(x)$, risulta quindi la seguente espressione:

$$Y(x)=y_n(x)\int_{x_0}^{x} y_n^{-2}(t)e^{-\frac{t}{a_0}\left(\frac{b_1}{2}t+b_0\right)}dt$$

nel caso $a_1=0$, la seguente altra

$$Y(x)=y_n(x)\int_{x_0}^{x} y_n^{-2}(t)(a_1t+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}}e^{-\frac{b_1}{a_1}t}dt$$

nel caso $a_1\neq 0$. Si può anche osservare [8] che, derivando n volte la (E) e risolvendo l'equazione così ottenuta, si ha:

$$Y^{(n+1)}(x)=Ae^{-\frac{x}{a_0}\left(\frac{b_1}{2}x+b_0\right)} \tag{9}$$

nel caso $a_1=0$ e

$$Y^{(n+1)}(x)=B\cdot(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n}e^{-\frac{b_1}{a_1}x} \tag{10}$$

nel caso $a_1\neq 0$, dove A e B sono costanti convenienti se si vuole proprio la $Y(x)$ precedente. Ne segue, nel caso $a_1=0$,

$$Y(x)=\frac{A}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n e^{-\frac{t}{a_0}\left(\frac{b_1}{2}t+b_0\right)}dt$$

ossia

$$Y(x)=\frac{A}{n!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}x^{n-\nu}\int_{x_0}^{x}t^\nu e^{-\frac{t}{a_0}\left(\frac{b_1}{2}t+b_0\right)}dt$$

e, nel caso $a_1\neq 0$,

$$Y(x)=\frac{B}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n(a_1t+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n}e^{-\frac{b_1}{a_1}t}dt$$

ossia

$$Y(x)=\frac{B}{n!\,a_1^n}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(a_1x+a_0)^\nu\int_{x_0}^{x}(a_1t+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-\nu}e^{-\frac{b_1}{a_1}t}dt.$$

Per la determinazione in forma di serie di $Y(x)$ servono le (9) e (10) ed

---

[8] Cfr. loc. cit. in [1], pp. 171-172.

anche egregiamente le (E_0'), (E') precedenti; ed utile è notare che la (E) nel caso $a_1 \neq 0$ si può anche scrivere:

$$(E'') \qquad \underline{(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}} D(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}} D}\left(e^{\frac{b_1}{a_1}x} y\right) - \frac{b_1}{a_1}\underline{(a_1x+a_0)^{-\frac{\delta}{a_1^2}-n} D(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}+n}}\left(e^{\frac{b_1}{a_1}x} y\right)=0,$$

da cui discende un'interessante espressione asintotica di $Y(x)$; ma su ciò non indugiamo per non uscire dall'argomento del presente lavoro.