ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ORAZIO LAZZARINO

Teoria sintetica dell'equivalenza fra i sistemi di equazioni differenziali di Euler-Poisson e di Hess-Schiff nella teoria dei giroscopi rigidi pesanti e studio dei casi singolari per i quali l'equivalenza non sussiste (parte seconda)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 7, nº 2 (1938), p. 109-136

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_2_109_0>

TEORIA SINTETICA DELL'EQUIVALENZA FRA I SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EULER-POISSON E DI HESS-SCHIFF NELLA TEORIA DEI GIROSCOPI RIGIDI PESANTI E STUDIO DEI CASI SINGOLARI PER I QUALI L'EQUIVALENZA NON SUSSISTE

(PARTE SECONDA)

di ORAZIO LAZZARINO (Pisa).

PARTE II.

Studio dei casi singolari.

12. - Quadro riassuntivo delle formule e dei risultati fondamentali.

Per maggiore comodità del lettore, riteniamo opportuno riunire in un solo paragrafo le formole ed i risultati, già stabiliti, che sarà necessario tener presenti nello studio dei casi singolari.

Per meglio distinguere queste formole dalle altre, le indicheremo con numeri romani.

1°). *Forma vettoriale delle equazioni di Euler-Poisson*:

$$(a\Omega)^{\cdot} \equiv a\dot{\Omega} + \Omega \wedge a\Omega = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \tag{I}$$

$$\dot{\mathbf{k}}_1 = 0 \tag{II}$$

dove, rispetto al punto fisso O, Ω è il vettore della rotazione istantanea ed a l'omografia d'inerzia (dilatazione) del giroscopio rigido pesante di cui, per comodità, si suppone unitario il peso. Inoltre, essendo G il baricentro del giroscopio, è $\mathbf{g} = G - O$; $\mathbf{k}_1$ è un versore verticale rivolto allo zenit di O; i puntini soprasegnati indicano le derivate temporali.

2°). *Invarianti di Hess o invarianti principali*:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} a) & S = a\Omega \times \mathbf{g} \\ b) & 2T = a\Omega \times \Omega \\ c) & 2U = a\Omega \times a\Omega. \end{cases}$$

Le grandezze scalari S, T, U sono invarianti nel senso che non dipendono da eventuali sistemi di assi di riferimento, pur potendo essere, come effettivamente sono in generale, funzioni del tempo; T rappresenta l'energia cinetica, $a\Omega$ il momento cinetico del giroscopio. Le (III) esprimono che « *S, T, U sono rispettivamente proporzionali alle componenti del momento cinetico secondo l'asse baricentrale $O\mathbf{g}$, l'asse di rotazione $O\Omega$ e l'asse dell'impulso $Oa\Omega$* ».

3°). *Equazioni differenziali di Hess sotto due diverse forme*:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} a) & \dot{S} = a\dot{\Omega} \times \mathbf{g} \\ b) & \dot{T} = a\dot{\Omega} \times \Omega \\ c) & \dot{U} = a\dot{\Omega} \times a\Omega; \end{cases} \qquad \text{(IV}'\text{)} \quad \begin{cases} a) & \dot{S} = a\Omega \times \Omega \wedge \mathbf{g} \\ b) & \dot{T} = \Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \\ c) & \dot{U} = a\Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}. \end{cases}$$

4°). *Equazioni differenziali di Schiff*:

(V) $(2\mathbf{g}^2 U - S^2) \cdot \mathbf{k}_1 = (h-T)(2U \cdot \mathbf{g} - S \cdot a\Omega) + k(\mathbf{g}^2 \cdot a\Omega - S\mathbf{g}) + \dot{U} \cdot \mathbf{g} \wedge a\Omega$

oppure

(V₁) $(\mathbf{g} \wedge a\Omega)^2 \cdot \mathbf{k}_1 = (h-T)(a\Omega \wedge \mathbf{g}) \wedge a\Omega + k(\mathbf{g} \wedge a\Omega) \wedge \mathbf{g} + \dot{U} \cdot \mathbf{g} \wedge a\Omega$ [9];

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} a) & \dot{S} = a\Omega \times \Omega \wedge \mathbf{g} \\ b) & (2\mathbf{g}^2 U - S^2)\dot{T} = [(h-T)S - k\mathbf{g}^2]\dot{S} + [2T\mathbf{g}^2 - \Omega \times \mathbf{g} \cdot S]\dot{U} \\ c) & \dot{U}^2 = (2U - k^2)\mathbf{g}^2 - S^2 + 2kS(h-T) - 2U(h-T)^2 \end{cases}$$

dove

$$\text{(VII)} \qquad 2\mathbf{g}^2 U - S^2 = (\mathbf{g} \wedge a\Omega)^2$$

e le costanti h, k sono rispettivamente quelle degli integrali del moto:

(VIII) $\mathbf{g} \times \mathbf{k}_1 = h - T$ (integrale delle forze vive)

(IX) $a\Omega \times \mathbf{k}_1 = k$ (integrale delle aree).

5°). *Alcuni teoremi fondamentali*:

a). « *Quando U ed S sono funzioni del tempo, sussiste necessariamente l'equivalenza fra le equazioni di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson* ».

b). « *Se due qualunque dei tre invarianti U, S, T sono indipendenti dal tempo, sarà tale anche il rimanente ed i moti del giroscopio sono rotazioni permanenti* ».

c). « *Esistono i due casi singolari:* U=costante, S=costante [*ossia:* $\dot{U}=0$, $\dot{S}=0$] *per i quali la detta equivalenza non sussiste* ».

Esame del caso singolare: U=costante.

13. - Proprietà cinematiche del giroscopio.

Sia U_0 il valore costante di U, la (III$_c$) porge

$$(1) \qquad (a\Omega)^2 = 2U_0$$

cioè « *il momento cinetico si mantiene costante, in grandezza, durante il moto* ».

Posto $Q = O + a\Omega$, il punto Q descrive nello spazio fisso la *prima curva d'impulso*. Dalla (1) e dalla (IX), la quale esprime che la *proiezione verticale del momento cinetico è costante*, si deduce che « *la prima curva d'impulso*

---

[9] Sviluppando i doppi prodotti scalari e vettoriali della (V₁) e tenendo conto delle (III), si vede subito che la (V₁) e la (V) sono fra loro equivalenti.

è una circonferenza orizzontale col centro sulla verticale passante per il punto fisso ».

Inoltre, essendo $\dot{U}=0$, dalla (IV_c') si ha

$$\mathbf{g}\wedge a\Omega\times\mathbf{k}_1=0 \tag{2}$$

cioè « *durante il moto del giroscopio, i vettori* $\mathbf{g}$ *ed* $a\Omega$ *devono mantenersi complanari con* $\mathbf{k}_1$ *e quindi l'asse baricentrale* $O\mathbf{g}$ *e l'asse dell'impulso* $Oa\Omega$ *devono muoversi in modo da trovarsi, in ogni istante, sopra uno stesso piano verticale passante per l'asse* $O\mathbf{k}_1$ ».

In particolare, se anche l'energia cinetica del giroscopio si conservasse costante, dalla (VIII) risulterebbe costante anche la proiezione verticale del vettore $\mathbf{g}=G-0$ e quindi « anche il *baricentro* G *del giroscopio descriverebbe una circonferenza orizzontale col centro sull'asse verticale* $O\mathbf{k}_1$ *ed, inoltre, per il teorema* [5°, *b*)], *la rotazione sarebbe permanente* ».

14. - Comportamento delle equazioni di Hess-Schiff.

Essendo $\dot{U}=0$, la (V) diviene

$$(2\mathbf{g}^2U_0-S^2)\mathbf{k}_1=(h-T)(2U_0\cdot\mathbf{g}-S\cdot a\Omega)+k(\mathbf{g}^2\cdot a\Omega-S\mathbf{g}) \tag{V$'$}$$

e dalla (V_1), risoluta rispetto a $\mathbf{k}_1$, si deduce

$$\mathbf{k}_1=(\mathbf{g}\wedge a\Omega)^{-2}[(h-T)(a\Omega\wedge\mathbf{g})\wedge a\Omega+k(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\wedge\mathbf{g}]. \tag{V$_1'$}$$

Inoltre, la (VI_a) permette di esprimere il tempo t in funzione di S, cioè

$$t=t_0+\int\frac{dS}{\mathbf{g}\wedge a\Omega\times\Omega} \tag{VI$_a'$}$$

e la (VI_c) porge, fra S e T, la relazione algebrica

$$(2U_0-k^2)\mathbf{g}^2-S^2+2kS(h-T)-2U_0(h-T)^2=0 \tag{VI$_c'$}$$

la quale permette di esprimere S in funzione di T e viceversa.

Ma la (VI_b) dà ora una *relazione che non è più indipendente dalle altre,* perchè può dedursi dalla (VI_c'). Infatti, essendo $\dot{U}=0$, la (VI_b) dà

$$(2\mathbf{g}^2U_0-S^2)\dot{T}=[(h-T)S-k\mathbf{g}^2]\dot{S} \tag{VI$_b'$}$$

e, ponendo in questa l'espressione di $\mathbf{g}^2$ dedotta dalla (VI_c'), si ricava

$$[kS-2U_0(h-T)]\dot{T}=[k(h-T)-S]\dot{S}. \tag{3}$$

Ora la (3) può ottenersi anche direttamente da (VI_c'): infatti, derivando (VI_c') rispetto al tempo, si ha

$$-S\dot{S}+k(h-T)\dot{S}-kS\dot{T}+2U_0(h-T)\dot{T}=0$$

e da qui, mettendo in evidenza $\dot{S}$, $\dot{T}$, si riottiene la (3). c. d. d.

Si può dunque concludere che «*nel caso U=costante, una delle equazioni del sistema di Hess-Schiff è conseguenza delle altre*».

Da ciò nasce la necessità della ricerca di una nuova equazione, *indipendente dalle altre*, che chiameremo «*equazione ausiliaria*».

15. - Ricerca dell'equazione ausiliaria.

Osserviamo che, nel caso in esame, essendo S funzione del tempo, sussiste certamente l'equivalenza fra le equazioni di HESS-SCHIFF e quella di EULER, ma è dubbio che sussista anche l'equivalenza con l'equazione di POISSON. Dimostriamo che «*se alle equazioni*

$$(4) \qquad \dot{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{g} = 0, \qquad \dot{\mathbf{k}}_1 \times \alpha\Omega = 0,$$

dedotte da quelle di Hess-Schiff [§ 9, (25')], *si associa la condizione*

$$(\mathrm{X}) \qquad \dot{\mathbf{k}}_1 \times \Omega = 0,$$

si ha un sistema che ammette, come conseguenza necessaria, l'equazione (II) *di Poisson*». Infatti, risolvendo rispetto a $\dot{\mathbf{k}}_1$ il sistema (X) (4), si ha

$$\Omega \times \mathbf{g} \wedge \alpha\Omega \cdot \dot{\mathbf{k}}_1 = 0.$$

Poichè il coefficiente di $\dot{\mathbf{k}}_1$ coincide con l'espressione (IV_a') di $\dot{S}$ e si ha per ipotesi

$$(5) \qquad \dot{S} = \Omega \times \mathbf{g} \wedge \alpha\Omega \neq 0,$$

risulta necessariamente $\dot{\mathbf{k}}_1 = 0$, cioè la (II). c. d. d.

La (X) è, come vedremo, indipendente dalle altre equazioni di HESS-SCHIFF e può assumersi come *equazione ausiliaria*, perchè importa l'equivalenza anche con l'equazione di POISSON. Quindi: «*nel caso U=costante, per ristabilire l'equivalenza completa fra le equazioni di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson, basta sostituire alla* (VI_b) *l'equazione* (X)».

16. - Espressione dell'equazione ausiliaria in funzione degli invarianti principali.

a). Deriviamo la (V') rispetto al tempo. Tenendo presente che è valida la (I) e che $\mathbf{g}^2$=cost., $\dot{\mathbf{g}} = \Omega \wedge \mathbf{g}$, si ha, tenendo conto anche della (VII),

$$\begin{aligned}(2\mathbf{g}^2 U_0 - S^2)\dot{\mathbf{k}}_1 = 2S\dot{S}\mathbf{k}_1 - \dot{T}(2U_0 \cdot \mathbf{g} - S \cdot \alpha\Omega) + {} \\ + (h-T)(2U_0 \cdot \Omega \wedge \mathbf{g} - \dot{S} \cdot \alpha\Omega - S \cdot \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}) + {} \\ + k(\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} - \dot{S}\mathbf{g} - S \cdot \Omega \wedge \mathbf{g}).\end{aligned}$$

Operando con $\Omega \times$, tenendo conto delle (III) e (IV') e ponendo in evidenza $\dot{S}$, $\dot{T}$, si ha

$$\begin{aligned}(a) \quad (2\mathbf{g}^2 U_0 - S^2)\Omega \times \dot{\mathbf{k}}_1 = [2S \cdot \Omega \times \mathbf{k}_1 - 2(h-T)T - k \cdot \Omega \times \mathbf{g}]\dot{S} - {} \\ - [2U_0 \cdot \Omega \times \mathbf{g} - 2ST + (h-T)S - k\mathbf{g}^2]\dot{T}.\end{aligned}$$

D'altra parte, da (V') e (VI_b') si ricava rispettivamente, tenendo conto anche delle (III),

$$\Omega\times\mathbf{k}_1=[(h-T)(2U_0\cdot\Omega\times\mathbf{g}-2ST)+k(2\mathbf{g}^2T-S\cdot\Omega\times\mathbf{g}]/(2\mathbf{g}^2U_0-S^2)$$
$$\dot T=[S(h-T)-k\mathbf{g}^2]\dot S/(2\mathbf{g}^2U_0-S^2).$$

Sostituendo nella (a) queste espressioni di $\Omega\times\mathbf{k}_1$, $\dot T$ e riducendo, si ottiene

$$(2\mathbf{g}^2U_0-S^2)^2\cdot\Omega\times\dot{\mathbf{k}}_1=$$
$$=\{[2U_0(h-T)-kS]\cdot[\Omega\times\mathbf{g}\cdot S-2\mathbf{g}^2T]-[S(h-T)-k\mathbf{g}^2]^2\}\dot S.$$

Osservando che $\dot S\neq 0$ e supponendo

$$2\mathbf{g}^2U_0-S^2=(\mathbf{g}\wedge a\Omega)^2\neq 0,$$

si ha la condizione (X) espressa in funzione degli invarianti S, T, U_0, cioè

$$(X_1)\qquad [2U_0(h-T)-kS]\cdot[\Omega\times\mathbf{g}\cdot S-2\mathbf{g}^2\cdot T]-[S(h-T)-k\mathbf{g}^2]^2=0.$$

b). Conviene dare alla (X_1) una *nuova forma particolarmente notevole.*
Tenendo conto delle (III), (VIII) e (IX), la (X_1) può scriversi

$$(X_2)\qquad (a\Omega\wedge\mathbf{g})\times(a\Omega\wedge\mathbf{k}_1)\cdot(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\times(\Omega\wedge\mathbf{g})-[(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\times(\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{g})]^2=0$$

e da qui risulta immediatamente che, nell'ipotesi

$$(\mathbf{g}\wedge a\Omega)^2=2\mathbf{g}^2U_0-S^2=0,$$

l'equazione ausiliaria diviene una *identità.* Da ciò segue che « *i casi caratterizzati dalla condizione*

$$\mathbf{g}\wedge a\Omega=0$$

devono, per ora, essere esclusi dalle nostre considerazioni ».

Tali casi, di cui si è già fatto cenno nella prima parte [§ 6], saranno dettagliatamente trattati in seguito.

17. - Moti giroscopici possibili nel caso U=costante.

a). Dimostriamo anzitutto che « *l'equazione ausiliaria* (X) *non è, in generale, conseguenza della* (VI_c') ».

Basta mostrare che esiste qualche caso in cui la (X) e la (VI_c') sono fra loro indipendenti. Consideriamo, per ciò, un *giroscopio assiale* il cui asse baricentrale $O\mathbf{g}$ coincida con uno degli assi principali di inerzia relativi al punto fisso O. Se $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ è la *terna fondamentale* (10) parallela a detti assi ed A, B, C

(10) Chiamiamo « *terna fondamentale* » ogni terna di vettori unitari, ortogonali due a due e formanti terna oraria.

sono i rispettivi momenti principali d'inerzia, si può supporre l'asse $O\mathbf{g}$ coincidente con $O\mathbf{i}$ ed inoltre, per comodità di scrittura, $\mathbf{i}=\mathbf{g}$. Allora si ha successivamente

$$S=a\Omega\times\mathbf{g}=\Omega\times a\mathbf{g}=\Omega\times A\mathbf{g}=A\cdot\Omega\times\mathbf{g},$$

tenendo anche presente che a è dilatazione, e quindi si deduce

$$\Omega\times\mathbf{g}=S/A.$$

Sostituendo in (VI_c') e (X_1) e osservando che è $\mathbf{g}^2=1$, per la fatta ipotesi, si ha

$$2U_0-k^2-S^2+2kS(h-T)-2U_0(h-T)^2=0 \tag{6}$$

$$[2U_0(h-T)-kS][S^2-2AT]-A[S(h-T)-k]^2=0. \tag{7}$$

Ora, comunque si scelgano i valori delle costanti h, k, U_0, le equazioni (6) e (7), di 2° grado in $(h-T)$, risultano sempre fra loro indipendenti.

Basta osservare che la loro risultante è funzione razionale intera di ottavo grado in S e che il coefficiente di S^8 è A^2, cioè una quantità essenzialmente positiva ed indipendente dalle predette costanti.

Il ragionamento è valido anche nelle ipotesi di $O\mathbf{g}$ coincidente con $O\mathbf{j}$ o con $O\mathbf{k}$, quindi per i giroscopi assiali considerati la (X) è certamente indipendente dalla (VI_c').

b). Ciò premesso, osserviamo che, essendo (6) e (7) due relazioni indipendenti fra S e T, la loro coesistenza importa che S e T sono indipendenti dal tempo e quindi, per il teorema *b*) del § 12, i moti del giroscopio sono rotazioni permanenti.

Dunque « *la condizione $U=$cost. conduce, in generale, a rotazioni permanenti* » [11].

c). Dimostriamo ora che «*per $U=$cost. non esistono neppure casi particolari in cui i moti del giroscopio non siano rotazioni permanenti* ».

Infatti, tenendo conto delle (III_a), (VII), (VIII) e (IX), la (VI_b'), valida per $U=$cost., può assumere la forma

$$(\mathbf{g}\wedge a\Omega)^2\dot{T}=(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\times(\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{g})\cdot\dot{S}. \tag{VI_b''}$$

Nell'ipotesi

$$\mathbf{g}\wedge a\Omega\neq 0, \tag{8}$$

i possibili casi di moto sarebbero rispettivamente caratterizzati dalle condizioni

$$\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{g}=0 \tag{9}$$

$$(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\times(\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{g})=0 \tag{10}$$

$$(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\times(\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{g})\neq 0. \tag{11}$$

---

[11] Un caso particolare di questo teorema fu dimostrato da HESS (vedi Bibliografia n.° 1) il quale trovò che « nei giroscopi assiali, per $U=$costante e nell'ipotesi che sia nulla la costante k dell'integrale delle aree, risulta costante anche l'invariante S ».

Per $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$ (asse baricentrico verticale), la (VI$_b''$) dà $T=$cost. e quindi, per il teorema *b*) ora citato, risulta anche $S=$cost. e la rotazione del giroscopio è permanente.

La condizione (10) è *incompatibile* con l'ipotesi $U=$cost., perchè la (10) esprime che i due vettori $(\mathbf{g} \wedge a\Omega)$ e $(\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g})$, per ipotesi non nulli, sono fra loro *perpendicolari*, mentre dalla $\dot{U} = a\Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$ segue anche

$$(\mathbf{g} \wedge a\Omega) \wedge (\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}) = -a\Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = 0$$

e da qui, dovendo escludersi il caso $\mathbf{g}=0$ per cui le equazioni di HESS-SCHIFF non sono valide, risulta che i due predetti vettori dovrebbero essere invece *fra loro paralleli.*

La condizione (11) rientra nel caso generale per il quale, come si è già dimostrato, le rotazioni sono permanenti.

Considerando ora l'altra ipotesi possibile

$$\mathbf{g} \wedge a\Omega = 0, \tag{12}$$

si ha che la (VI$_b''$) diviene una identità, ma la (VI$_a$) porge, in tale ipotesi,

$$\dot{S} = \mathbf{g} \wedge a\Omega \times \Omega = 0\,; \tag{VI$_a''$}$$

risulta quindi $S=$cost. e, per il solito teorema *b*), la rotazione è ancora permanente.

Si può dunque concludere che « *quando il modulo U del momento cinetico aΩ è indipendente dal tempo, i soli moti possibili del giroscopio sono le rotazioni permanenti* ».

18. - Particolarità del giroscopio il cui asse baricentrico si mantiene verticale.

a). Se alla condizione $U=$cost. si associa $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$, l'equazione (I) del moto diviene $(a\Omega)^{\cdot} = 0$ ed ammette l'integrale, dove $\mathbf{K}$ è *vettore costante d'integrazione*,

$$a\Omega = \mathbf{K}, \tag{13}$$

cioè « *nel caso in esame, il momento cinetico aΩ si mantiene costante, non solo in grandezza, ma anche in direzione e verso* ».

Inoltre, essendo i soli moti possibili rotazioni permanenti, si ha $\dot{\Omega}=0$ e da (I) e (13) risulta

$$\Omega \wedge a\Omega = \Omega \wedge \mathbf{K} = 0 \tag{14}$$

cioè « *il giroscopio deve ruotare con moto uniforme attorno all'asse costante O*$\mathbf{K}$.

b). Nell'ulteriore ipotesi che l'ellissoide d'inerzia del giroscopio sia *simmetrico* rispetto ad un asse $O\mathbf{k}$, l'omografia a d'inerzia può scriversi $a = A + aH(\mathbf{k}, \mathbf{k})$, dove A, a sono numeri reali *positivi* (12) ed H è diade. Allora la (14) diviene

$$(14') \qquad a \cdot \Omega \times \mathbf{k} \cdot \Omega \wedge \mathbf{k} = 0$$

ed ammette, per $\Omega \neq 0$, una delle due soluzioni:

$$(15) \qquad \Omega \times \mathbf{k} = 0, \qquad \Omega \wedge \mathbf{k} = 0$$

cioè « *la rotazione può aver luogo attorno ad assi paralleli o normali all'asse di simmetria dell'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso del giroscopio* ».

c). In particolare, se il detto ellissoide si riducesse ad una sfera, di centro O, l'omografia a sarebbe un numero reale (omotetia vettoriale) e la (14) risulterebbe identicamente soddisfatta per qualunque Ω, cioè « *ogni raggio della stella di centro O, solidale col corpo, potrebbe divenire un asse permanente di rotazione* ».

Esame del caso singolare: S = costante.

19. - Proprietà caratteristiche del giroscopio.

Indicando con S_0 il valore *costante* di S, la (III_a) porge

$$(16) \qquad a\Omega \times \mathbf{g} = S_0 \quad (^{13})$$

cioè « *la proiezione del momento cinetico sull'asse baricentrale si conserva costante* ».

Il punto $Q = O + a\Omega$ descrive nel corpo, durante il moto, la *seconda curva d'impulso* e la (16) esprime che « *per S = cost. la seconda curva d'impulso giace in un piano solidale col corpo e normale all'asse baricentrico* ».

In particolare, « *per $S_0 = 0$* (14), *la seconda curva d'impulso giace nel piano normale ad Og, che passa per il punto fisso* ».

20. - Due diversi sottocasi di moto.

Consideriamo le equazioni (III) e (VI_a) che, per $S = S_0$, si scrivono:

$$(\mathrm{XI}) \qquad \begin{cases} a) & a\Omega \times \Omega = 2T \\ b) & a\Omega \times a\Omega = 2U \\ c) & a\Omega \times \mathbf{g} = S_0 \\ d) & \dot{S} = a\Omega \wedge \Omega \times \mathbf{g} = 0. \end{cases}$$

---

(12) O. LAZZARINO: *Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione, nel quale sussistano dei moti interni variabili.* [Rend. della R. Accad. dei Lincei, Roma, 2° sem. 1917].

(13) Quando si consideri S_0 come *costante d'integrazione,* cioè determinabile mediante le condizioni iniziali del moto, la (16) rappresenta il quarto integrale del caso di LAGRANGE.

(14) Per S_0 costante d'integrazione, il caso $S_0 = 0$ corrisponde al noto caso di HESS.

La (XI_c) è, come si è già visto, l'equazione del piano in cui giace la seconda curva d'impulso, la (XI_d) è l'equazione del *cono di Staude*. Secondo che le dette equazioni sono, oppur no, fra loro indipendenti, cioè secondo che il detto piano *taglia* il cono, o ne è un *elemento costitutivo* (cono degenere), si hanno due *diversi sottocasi* che conviene trattare separatamente.

Escludiamo per ora il caso, anche notevolissimo, $S_0=0$ che sarà trattato dopo.

A. - Il piano $S=S_0$ taglia il cono di Staude.

21. - Comportamento delle equazioni di Hess-Schiff.

Dimostriamo che « *nel caso in esame, la* (VI_b) *è conseguenza della* (VI_a) ».

Osserviamo anzitutto che, per $\dot{S}=0$, la (VI_b) può scriversi

$$\frac{dT}{dU}=\frac{2T\mathbf{g}^2-\Omega\times\mathbf{g}\cdot S_0}{2\mathbf{g}^2U-S_0^2} \tag{17}$$

od anche, per le (XI),

$$\frac{dT}{dU}=\frac{\mathbf{g}^2\cdot\Omega\times\alpha\Omega-\Omega\times\mathbf{g}\cdot\alpha\Omega\times\mathbf{g}}{\mathbf{g}^2(\alpha\Omega)^2-(\mathbf{g}\times\alpha\Omega)^2}. \tag{17'}$$

D'altra parte, l'espressione di dT/dU può anche ricavarsi direttamente dalle (XI).

Infatti, derivando rispetto ad U le (XI) e ricordando che α è dilatazione indipendente da U, si ha

$$\text{(XII)}\qquad\left\{\begin{array}{ll} a) & \alpha\Omega\times(d\Omega/dU)=dT/dU \\ b) & \alpha^2\Omega\times(d\Omega/dU)=1 \\ c) & \alpha\mathbf{g}\times(d\Omega/dU)=0 \\ d) & K\gamma\mathbf{g}\times(d\Omega/dU)=0 \end{array}\right.$$

dove

$$K\gamma=-(\alpha\Omega)\wedge+\alpha\cdot\Omega\wedge \tag{18}$$

è la coniugata dell'omografia

$$\gamma=(\alpha\Omega)\wedge-\Omega\wedge\cdot\alpha. \tag{19}$$

Ora, risolvendo rispetto a $d\Omega/dU$ i sistemi (XII_b), (XII_c), (XII_d) e (XII_a), (XII_c), (XII_d), si ha

$$\begin{gathered}\alpha^2\Omega\times\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}\cdot(d\Omega/dU)=\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}\\ \alpha\Omega\times\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}\cdot(d\Omega/dU)=(dT/dU)\cdot\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}.\end{gathered}$$

Dividendo membro a membro e risolvendo rispetto a (dT/dU), si ottiene

$$\frac{dT}{dU}=\frac{\alpha\Omega\times\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}}{\alpha^2\Omega\times\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}}. \tag{20}$$

Per dimostrare che (17′) e (20), considerate come funzioni della U, sono identiche, basta far vedere che sussiste l'identità

$$(21)\quad \alpha\Omega\times\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}\cdot[(\alpha\Omega)^2\mathbf{g}^2-(\mathbf{g}\times\alpha\Omega)^2]- \\ -\alpha^2\Omega\times\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}\cdot[\Omega\times\alpha\Omega\cdot\mathbf{g}^2-\mathbf{g}\times\Omega\cdot\mathbf{g}\times\alpha\Omega]=0.$$

Per tale scopo osserviamo che il primo membro della (21) può scriversi

$$\alpha\Omega\times(\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g})\cdot[(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega)\wedge\mathbf{g}]\times\alpha\Omega- \\ -\alpha^2\Omega\times(\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g})\cdot[(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega)\wedge\mathbf{g}]\times\Omega$$

e, ponendo, per comodità di scrittura,

$$(22)\qquad \alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}=\mathbf{u},\qquad(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega)\wedge\mathbf{g}=\mathbf{v},$$

si ha successivamente, tenendo anche presente che α è dilatazione,

$$(21')\quad \alpha\Omega\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\alpha\Omega-\alpha^2\Omega\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\Omega= \\ =\Omega\times\alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\alpha\Omega-\alpha\Omega\times\alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\Omega=(\alpha\Omega\wedge\Omega)\times(\mathbf{v}\wedge\alpha\mathbf{u}).$$

Ora, tenendo conto delle (22), risulta identicamente

$$(\mathbf{v}\wedge\alpha\mathbf{u})\wedge\mathbf{g}=\mathbf{v}\times\mathbf{g}\cdot\alpha\mathbf{u}-\alpha\mathbf{u}\times\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}= \\ =(\mathbf{g}\wedge\alpha\Omega)\wedge\mathbf{g}\times\mathbf{g}\cdot\alpha\mathbf{u}-\alpha\mathbf{g}\wedge K\gamma\mathbf{g}\times\alpha\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}=0$$

cioè « *il vettore* $\mathbf{v}\wedge\alpha\mathbf{u}$ *è parallelo a* $\mathbf{g}$ *e, quindi, esiste un numero reale* m *non nullo tale che* $\mathbf{v}\wedge\alpha\mathbf{u}=m\mathbf{g}$ ». Allora il primo membro della (21) può, per la (21′), scriversi: $m\cdot\alpha\Omega\wedge\Omega\times\mathbf{g}$ e risulta *identicamente nullo* quando è soddisfatta la (XI_d) che, per $\dot{S}=0$, coincide con la (VI_a).

Possiamo dunque concludere che « *per* $S=$*costante, ossia per* $\dot{S}=0$, *l'equazione* (VI_a) *del sistema di Schiff diviene la* (XI_d) *e importa, per l'esistenza dell'identità* (21), *che la* (20) *s'identifica con la* (17) *equivalente alla* (VI_b). *In altri termini, per* $S=$*costante la* (VI_b) *diviene conseguenza della* (VI_a) *e, quindi, è necessario sostituire alla* (VI_b) *una nuova equazione, indipendente dalle* (VI), *che chiameremo equazione ausiliaria* ».

22. - Ricerca dell' equazione ausiliaria.

Ricordiamo che, avendo posto

$$(23)\qquad \mathbf{a}=\alpha\dot{\Omega}+\Omega\wedge\alpha\Omega+\mathbf{g}\wedge\mathbf{k}_1$$

si son dedotte, come conseguenza delle equazioni di HESS-SCHIFF, le relazioni

$$(24)\qquad \mathbf{g}\times\mathbf{a}=0,\qquad \alpha\Omega\times\mathbf{a}=0\qquad [\S\ 8,\ (20)].$$

Dimostriamo che « *associando alle* (24) *la condizione*

$$(25)\qquad \mathbf{k}_1\times\mathbf{a}=0$$

si ha un sistema di equazioni che conduce necessariamente all'equazione (I) *di Euler* ». Infatti, da tale sistema si deduce l'equazione

$$\mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{a} = 0 \tag{26}$$

la quale, essendo per ipotesi $\dot{U} = \mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \mathbf{k}_1 \neq 0$, importa necessariamente $\mathbf{a} = 0$, ossia, per la (23), la (I). c. d. d.

Ricordando ancora che per $\dot{U} \neq 0$ sussiste l'equivalenza fra le equazioni ridotte e la (II) di POISSON, si conclude che « *nel caso $S = cost.$, basta introdurre l'equazione ausiliaria* (25) *per ristabilire l'equivalenza fra le equazioni di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson* ».

23. - Espressione dell'equazione ausiliaria in funzione degl'invarianti principali.

Sostituendo nella (25) al vettore $\mathbf{a}$ la sua espressione (23), si ha

$$\mathbf{k}_1 \times \alpha\dot{\Omega} + \mathbf{k}_1 \times \Omega \wedge \alpha\Omega = 0.$$

Sostituendo poi in questa, nell'ipotesi $\mathbf{g} \wedge \alpha\Omega \neq 0$, l'espressione (V) di $\mathbf{k}_1$ e tenendo conto delle (III), (IV), (IV′), si ottiene, dopo semplici riduzioni,

$$[\mathbf{k}\mathbf{g}^2 - (h + T)S_0 + 2U \cdot \mathbf{g} \times \Omega + \mathbf{g} \wedge \alpha\Omega \times \alpha\dot{\Omega}]\,\dot{U} = 0, \tag{25′}$$

ossia, poichè è $\dot{U} \neq 0$,

$$\mathbf{k}\mathbf{g}^2 - (h + T)S_0 + 2U \cdot \mathbf{g} \times \Omega + \mathbf{g} \wedge \alpha\Omega \times \alpha\dot{\Omega} = 0. \tag{25″}$$

24. - Espressione del vettore $\dot{\Omega}$.

Derivando (XI_a), (XI_c), (XI_d) rispetto al tempo, tenendo conto delle (I), (IV_b') e ricordando che α è dilatazione e $\dot{\mathbf{g}} = \Omega \wedge \mathbf{g}$, si ottengono le equazioni

$$\alpha\Omega \times \dot{\Omega} = \dot{T}, \qquad \alpha\mathbf{g} \times \dot{\Omega} = 0, \qquad K\gamma\mathbf{g} \times \dot{\Omega} = 0 \quad (^{15}), \tag{27}$$

essendo $K\gamma$ l'omografia definita dalla (18).

Risolvendo rispetto ad $\dot{\Omega}$ le (27), si ha

$$\dot{\Omega} = (\dot{T}/\alpha\Omega \times \alpha\mathbf{g} \wedge K\gamma\mathbf{g}) \cdot \alpha\mathbf{g} \wedge K\gamma\mathbf{g}. \tag{28}$$

---

[15] Infatti, eseguendo quanto si è detto, dalle (XI_a), (XI_c), (XI_d) si deduce rispettivamente e successivamente:

$$2\dot{T} = (\alpha\Omega)^{\cdot} \times \Omega + \alpha\Omega \times \dot{\Omega} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \times \Omega + \alpha\Omega \times \dot{\Omega} = \dot{T} + \alpha\Omega \times \dot{\Omega};$$

$$0 = (\alpha\Omega)^{\cdot} \times \mathbf{g} + \alpha\Omega \times \dot{\mathbf{g}} = \alpha\dot{\Omega} \times \mathbf{g} + \Omega \wedge \alpha\Omega \times \mathbf{g} + \alpha\Omega \times \Omega \wedge \mathbf{g} = \alpha\dot{\Omega} \times \mathbf{g} = \alpha\mathbf{g} \times \dot{\Omega};$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha\Omega)^{\cdot} \times \Omega \wedge \mathbf{g} + \alpha\Omega \times \dot{\Omega} \wedge \mathbf{g} + \alpha\Omega \wedge \Omega \times \dot{\mathbf{g}} = \\ &= \alpha\dot{\Omega} \times \Omega \wedge \mathbf{g} + (\Omega \wedge \alpha\Omega) \times (\Omega \wedge \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \dot{\Omega} + (\alpha\Omega \wedge \Omega) \times (\Omega \wedge \mathbf{g}) = \\ &= \mathbf{g} \times [(\alpha\Omega) \wedge - \Omega \wedge \cdot\, \alpha]\dot{\Omega} = \mathbf{g} \times \gamma\dot{\Omega} = K\gamma\mathbf{g} \times \dot{\Omega}. \end{aligned}$$

Il vettore $\dot{\Omega}$ risulta *determinato* quando è soddisfatta la condizione

$$a\Omega \times a\mathbf{g} \wedge K\gamma\mathbf{g} \neq 0 \tag{29}$$

cioè « *quando i vettori* $a\Omega$, $a\mathbf{g}$, $K\gamma\mathbf{g}$ *non sono complanari* ».

Dimostriamo che « *la* (29) *è soddisfatta per i giroscopi asimmetrici assiali, mentre non lo è per i giroscopi simmetrici* ».

Sia, infatti, $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una terna fondamentale, solidale col corpo, parallela agli assi principali d'inerzia relativi al *punto fisso* O, e con l'asse $O\mathbf{i}$ parallelo all'asse baricentrale $O\mathbf{g}$ del giroscopio. Assumiamo, per comodità di scrittura, come unità di misura per le lunghezze, la distanza del baricentro G da O, poniamo cioè $\mathbf{g} = G - O = \mathbf{i}$.

Se, rispetto ad $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, sono A, B, C i momenti d'inerzia del giroscopio e p, q, r le componenti della rotazione Ω, si ha

$$a\Omega = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k}, \qquad a\mathbf{g} = a\mathbf{i} = A\mathbf{i}$$
$$K\gamma\mathbf{g} = K\gamma\mathbf{i} = \mathbf{i} \wedge a\Omega + a(\Omega \wedge \mathbf{i}) = (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) \wedge a\Omega + a[\Omega \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k})].$$

Sviluppando quest'ultima e ricordando che $a\mathbf{i} = A\mathbf{i}$, $a\mathbf{j} = B\mathbf{j}$, $a\mathbf{k} = C\mathbf{k}$, si ottiene

$$K\gamma\mathbf{g} = (B - C)(r\mathbf{j} + q\mathbf{k}).$$

Sostituendo ora nel 1° membro della (29) queste espressioni di $a\Omega$, $a\mathbf{g}$, $K\gamma\mathbf{g}$, si ha

$$a\Omega \wedge a\mathbf{g} \times K\gamma\mathbf{g} = A(B - C)(Cr^2 - Bq^2). \tag{30}$$

La (30) mostra, senz'altro, che la (29) è soddisfatta per $B \neq C$, cioè per i giroscopi asimmetrici, mentre non lo è per $B = C$, cioè per i giroscopi simmetrici. c. d. d.

25. - Discussione dei casi possibili di moto.

Risolvendo rispetto ad $a\Omega$ il sistema (XI_a), (XI_b), (XI_c), si ottiene

$$\Omega \times a\Omega \wedge \mathbf{g} \cdot a\Omega = 2T \cdot a\Omega \wedge \mathbf{g} + 2U \cdot \mathbf{g} \wedge \Omega + S_0 \cdot \Omega \wedge a\Omega$$

ossia, tenendo conto della (XI_d),

$$2T \cdot a\Omega \wedge \mathbf{g} + 2U \cdot \mathbf{g} \wedge \Omega = S_0 \cdot a\Omega \wedge \Omega. \tag{31}$$

È questa una *relazione lineare* fra gli invarianti principali T ed U.

Un'altra relazione lineare fra gli stessi invarianti è data dall'equazione ausiliaria (25″), che conviene scrivere nel seguente modo

$$-S_0 \cdot T + 2\mathbf{g} \times \Omega \cdot U = hS_0 - k\mathbf{g}^2 + a\Omega \times \mathbf{g} \wedge a\dot{\Omega}. \tag{32}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le (31) e (32) siano fra loro indipendenti è che il determinante $\mathbf{d}$ dei coefficienti di T e di U sia diverso da zero, che cioè si abbia

$$\mathbf{d} = 4\mathbf{g} \times \Omega \cdot a\Omega \wedge \mathbf{g} + 2S_0 \cdot \mathbf{g} \wedge \Omega \neq 0. \tag{33}$$

Dimostriamo che, fatta esclusione del caso $S_0=0$ che sarà trattato dettagliatamente in seguito, sussiste il seguente notevole teorema: « *Per* $S_0 \neq 0$ *la condizione* (33) *è soddisfatta, qualunque siano i valori delle costanti* h, k, S_0, *per i giroscopi rigidi asimmetrici e per quelli eventualmente simmetrici rispetto ad un asse* $O\mathbf{s}$ *che non sia parallelo ad* $O\mathbf{g}$ ».

Osserviamo anzitutto che nella (33) non figurano le costanti h, k e quindi il vettore $\mathbf{d}$ è indipendente da esse. Inoltre, la (33) mostra che $\mathbf{d}$ risulta nullo quando, e solo quando, sia identicamente soddisfatta la relazione

$$2\mathbf{g}\times\Omega \cdot \alpha\Omega\wedge\mathbf{g}=S_0 \cdot \Omega\wedge\mathbf{g}. \tag{34}$$

Ora per $S_0 \neq 0$, fatta esclusione delle ipotesi: $\mathbf{g}=0$ (caso di Euler), $\Omega=0$ (caso del riposo), la (34) è soddisfatta identicamente, cioè per qualunque valore di Ω, quando sussista almeno un gruppo delle seguenti condizioni:

$$\mathbf{g}\times\Omega=0, \qquad \Omega\wedge\mathbf{g}=0 \tag{35}$$

$$(\alpha\Omega\wedge\mathbf{g})\wedge(\Omega\wedge\mathbf{g})=0 \tag{36}$$

$$\alpha\Omega\wedge\mathbf{g}=0, \qquad \Omega\wedge\mathbf{g}=0. \tag{37}$$

L'esame di queste condizioni permette di precisare i casi in cui le (31) e (32) non sono fra loro indipendenti.

Intanto è ovvio che le (35) non sono fra loro compatibili. La (36) è soddisfatta per α numero reale (omotetia vettoriale), cioè quando l'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso O si riduce ad una sfera di centro O. Ma la (36) è anche soddisfatta quando l'ellissoide d'inerzia è *simmetrico* rispetto all'asse baricentrale $O\mathbf{g}$. Si ha, infatti, in tale ipotesi, che α assume la forma

$$\alpha=A+aH(\mathbf{g},\mathbf{g}) \quad (^{16})$$

essendo A, a numeri reali non nulli. Allora si ha $\alpha\Omega\wedge\mathbf{g}=A\Omega\wedge\mathbf{g}$ e la (36) è identicamente soddisfatta. Ma è necessario osservare che ciò non ha più luogo quando il detto ellissoide è, invece, simmetrico rispetto ad un asse $O\mathbf{s}$ non parallelo ad $O\mathbf{g}$. Si ha, infatti, in tal caso, $\alpha=A+aH(\mathbf{s},\mathbf{s})$ e quindi

$$\alpha\Omega\wedge\mathbf{g}=A\Omega\wedge\mathbf{g}+a\cdot\Omega\times\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}\wedge\mathbf{g}$$

e la (36) non è più valida per qualunque valore di Ω ma soltanto per $\Omega\times\mathbf{s}=0$ cioè soltanto per i vettori Ω normali all'asse $O\mathbf{s}$ di simmetria.

Quanto alle (37) è ovvio che non possono sussistere per qualunque Ω.

Si può dunque concludere che « *Nei giroscopi il cui ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso* O *è simmetrico rispetto ad* O *oppure rispetto all'asse baricentrale* $O\mathbf{g}$, *il vettore* $\mathbf{d}$ *risulta nullo, cioè le* (31) *e* (32) *non*

---

(16) Vedi nota (12).

sono fra loro indipendenti. Negli altri casi le (31) *e* (32) *sono fra loro indipendenti, qualunque siano i valori delle costanti* h, k, S_0, *purchè sia* $S_0 \neq 0$ ».

Ora, quando (31) e (32) sono fra loro indipendenti, gl'invarianti T ed U risultano indipendenti dal tempo e, per un teorema precedentemente dimostrato [§ 12; 5°, *b*], i moti giroscopici sono necessariamente rotazioni permanenti.

Si conclude perciò che « *Nei giroscopi asimmetrici ed in quelli il cui ellissoide d'inerzia rispetto al punto fisso è simmetrico rispetto ad un asse non parallelo al baricentrale, quando l'invariante* S *è indipendente dal tempo, ma non nullo, soltanto le rotazioni permanenti sono possibili, qualunque siano i valori delle costanti* h, k, S_0 ».

B. - Il cono di Staude degenera in una coppia di piani.

26. - Condizioni perchè il cono degeneri per qualunque Ω.

Cominciamo con l'osservare che la (XI_c) è l'equazione del piano in cui giace la *seconda curva d'impulso* e la (XI_d) è l'*equazione del cono di Staude.*

Riferendo il sistema alla terna fondamentale $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ solidale col corpo e parallela alla terna delle direzioni unite dell'omografia α d'inerzia relativa al punto fisso O, poniamo $\Omega = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $\alpha\Omega = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, $\mathbf{g} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$, allora le (XI_c) e (XI_d) assumono rispettivamente la forma

$$(XI_c{}') \qquad A\xi \cdot p + B\eta \cdot q + C\zeta \cdot r = S_0$$

$$(XI_d{}') \qquad (B-C)\xi \cdot qr + (C-A)\eta \cdot rp + (A-B)\zeta \cdot pq = 0.$$

Dalla $(XI_d{}')$ risulta immediatamente che, affinchè il cono degeneri in due piani, qualunque siano i valori p, q, r, è necessario e basta che sia soddisfatta una qualunque delle condizioni:

$$(a) \qquad B-C=0, \qquad C-A=0, \qquad A-B=0$$

$$(b) \qquad \xi=0, \qquad \eta=0, \qquad \zeta=0.$$

Le (*a*) esprimono che l'ellissoide d'inerzia del giroscopio è *simmetrico* rispetto ad uno degli assi principali d'inerzia relativi ad O, e le (*b*) che l'asse baricentrale si mantiene, durante il moto, in uno dei piani principali d'inerzia.

Dunque « *affinchè il cono degeneri è necessario e basta che l'ellissoide d'inerzia del giroscopio, relativo al punto fisso, sia di rivoluzione, oppure che l'asse baricentrale si muova in uno dei piani principali d'inerzia* ». Questo piano lo chiameremo « *primo piano di Staude* ».

Nell'ipotesi che $\zeta = 0$ sia l'equazione del *primo piano di Staude,* le $(XI_c{}')$ e $(XI_d{}')$ dànno

$$(38) \qquad A\xi \cdot p + B\eta \cdot q = S_0$$

$$(39) \qquad r[(C-A)\eta \cdot p + (B-C)\xi \cdot q] = 0.$$

Se $\zeta = 0$ è uno dei piani in cui si spezza il cono, l'altro piano avrà in generale, dovendo r essere qualunque, l'equazione

$$(40) \qquad (C-A)\eta \cdot p + (B-C)\xi \cdot q = 0$$

e questo lo chiameremo « *secondo piano di Staude* ».

27. - Condizione perchè il secondo piano di Staude coincida col piano $S = S_0$. Tale condizione si ottiene ponendo eguale a zero il determinante dei coefficienti delle variabili p, q delle (38) e (40). Si ha

$$(41) \qquad A(B-C)\xi^2 - B(C-A)\eta^2 = 0.$$

In particolare, per $S_0 = 0$, le (38), (40), (41) caratterizzano il *caso di Hess* [cfr. §§ 28, 29, 30] e si può quindi dire che « *nel giroscopio di Hess, l'asse baricentrale* Og *si mantiene, durante il moto, in uno dei piani principali d'inerzia relativi al punto fisso O ed il cono di Staude degenera in due piani, di cui uno è quello che contiene l'asse baricentrale e l'altro coincide col piano $S = S_0$ sul quale giace la seconda curva d'impulso. Quest'ultimo piano passa per O ed è normale all'asse baricentrale* ».

C. - L'invariante principale S è una costante nulla ($S_0 = 0$).

28. - Moti di Hess, di Staude e moti alla Mlodzjejowski.

L'esame dell'ipotesi particolare $S_0 = 0$ ha un interesse particolarmente notevole perchè permette di studiare, da un nuovo ed unico punto di vista, i così detti *moti di Hess, di Staude e di Mlodzjejowski* e conduce anche ad una esauriente discussione dei *moti pendolari* considerati da KLEIN e SOMMERFELD. Poichè questi *moti pendolari* sono del tipo di quelli considerati da MLODZJEJOWSKI, l'ingloberemo nella denominazione di « *moti alla Mlodzjejowski* » e dimostreremo, come *conclusione generale* di questo esame, che « *tutti i moti che i giroscopi rigidi pesanti, simmetrici ed asimmetrici, possono compiere, nell'ipotesi $S_0 = 0$, sono o moti di Hess, o moti di Staude, o moti alla Mlodzjejowski* ».

Diremo che « *un giroscopio è planare* » quando il suo asse baricentrale si muove in uno dei piani principali d'inerzia relativi al punto fisso. Chiameremo « *giroscopio di Hess* » ogni giroscopio planare che soddisfa anche ad una relazione del tipo (41). Ogni altro giroscopio che non soddisfa ad alcuna delle due predette condizioni lo chiameremo « *giroscopio generale* ».

Nei giroscopi planari, il cono di STAUDE, o cono degli assi permanenti di rotazione, degenera in una coppia di piani che chiameremo « *piani di Staude* » e precisamente « *primo piano di Staude* » quello che contiene l'asse baricentrale e « *secondo piano di Staude* » l'altro. Tenendo conto del significato della relazione (41), possiamo dire che « *il giroscopio di Hess è un giroscopio planare il cui secondo piano di Staude coincide col piano* $S_0=0$ ».

Escluderemo *sistematicamente* dalle nostre considerazioni il *caso* $\mathbf{g}=0$ (*caso di Euler*) ed il caso $\Omega=0$ (caso del riposo).

29. - Casi possibili di moto nell'ipotesi $S_0=0$.

Per $S_0=0$, le (XI_c) e (XI_d) divengono

$$a\Omega\times\mathbf{g}=0 \tag{42}$$

$$a\Omega\wedge\Omega\times\mathbf{g}=0 \tag{43}$$

e rappresentano rispettivamente, come si è già rilevato, il piano per O, normale all'asse baricentrale $O\mathbf{g}$, ed il cono di STAUDE col vertice nel punto fisso O. Inoltre, la (42) esprime che « *la seconda curva d'impulso, descritta, durante il moto, dal punto* $Q=O+a\Omega$, *giace in detto piano solidale col giroscopio* ».

Per precisare i casi possibili di moto, basta considerare le due ipotesi possibili: « *le* (42) *e* (43) *sono indipendenti fra loro, oppure non lo sono* ».

Nella prima ipotesi può accadere: o che il piano $S_0=0$ tocchi il cono nel solo vertice (punto fisso), o che lo tagli secondo due generatrici, o che gli sia tangente lungo una generatrice. Nel 1° caso, si ha il riposo; nel 2°, il giroscopio è planare; nel 3°, l'asse $O\Omega$ di rotazione coincide con la generatrice di contatto e risulta fisso nel corpo. In quest'ultimo caso si possono avere, come vedremo in seguito, moti diversi, secondo che la velocità angolare del giroscopio è costante o funzione del tempo.

Nella seconda ipotesi, il piano $S_0=0$ è un *elemento costitutivo del cono degenere di Staude.* L'altro piano contiene, durante il moto, l'asse baricentrale e coincide, come si è già rilevato, con uno dei piani principali di inerzia relativi al punto fisso. Si può quindi dire che « *quando le* (42) *e* (43) *non sono indipendenti fra loro, si ha un giroscopio di Hess* ».

30. - Comportamento delle equazioni di Hess-Schiff nel caso del giroscopio di Hess.

Essendo $S_0=0$, $\dot{S}_0=0$, la (VI_a) si riduce alla (43) e la (VI_b) diviene

$$U\dot{T}=\dot{U}T,$$

ossia, integrando ed indicando con l la costante d'integrazione,

$$T=lU. \tag{44}$$

Essendo l costante arbitraria, la (VI_b) non è conseguenza della (VI_a) e, quindi, non occorre alcuna equazione ausiliaria. Inoltre, tenendo conto della (44), la (VI_c) assume la forma

$$\dot{U}^2=(2U-k^2)\mathbf{g}^2-2U(h-lU)^2$$

e da qui si ricava

$$dt = \pm\, dU / \sqrt{(2U - k^2)\mathbf{g}^2 - 2U(h - lU)^2} \tag{45}$$

cioè « *nel caso di Hess, il tempo è espresso da un integrale ellittico di prima specie in U e, reciprocamente, l'invariante U è funzione ellittica del tempo* ».

31. - Equazioni caratteristiche del moto nel caso in cui il piano $S_0 = 0$ è tangente al cono di Staude.

Anzitutto si ha che « *nel caso in esame, l'asse OΩ di rotazione ha direzione costante non solo nel corpo rotante (spazio mobile), ma anche nello spazio fisso* ».

Basta, infatti, osservare che, riducendosi in tal caso ad una retta il cono della poloide, sarà una retta fissa anche il cono dell'erpoloide ([17]). Posto, quindi,

$$\Omega = \omega \mathbf{u}, \tag{46}$$

dove $\omega = \bmod \Omega$ è in generale *funzione del tempo* ed il versore $\mathbf{u}$ di Ω è vettore *costante*, il sistema (I), (II) di EULER-POISSON può assumere la forma

$$\dot{\omega} \cdot \alpha\mathbf{u} + \omega^2 \cdot \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \tag{47}$$

$$\dot{\mathbf{k}}_1 = 0. \tag{48}$$

Operando su (47) con $\mathbf{k}_1 \times$ e $\mathbf{g} \times$, si ha rispettivamente

$$\dot{\omega} \cdot \mathbf{k}_1 \times \alpha\mathbf{u} + \omega^2 \cdot \mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0 \tag{47$_1$}$$

$$\dot{\omega} \cdot \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} + \omega^2 \cdot \mathbf{g} \times \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0. \tag{47$_2$}$$

Eliminando da (47_1), (47_2) $\dot{\omega}$, risulta, per $\omega \neq 0$,

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{u}_1 = 0, \tag{XIII}$$

avendo posto

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} \cdot \alpha\mathbf{u} - \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}. \tag{49}$$

La (XIII) è una delle *equazioni caratteristiche* cercate. Si può trovarne un'altra operando con $\mathbf{u} \times$ su (48). Tenendo anche conto che $\mathbf{u}$ è vettore costante, si ha

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{k}_1)^{\cdot} = 0. \tag{XIV}$$

Le (XIII) e (XIV) son da considerarsi come *equazioni caratteristiche del moto* perchè, come si vedrà, secondo che esse sono, oppur no, fra loro indipendenti, si hanno moti giroscopici diversi.

([17]) Cfr. R. MARCOLONGO: *Meccanica razionale.* [2ª ediz. Hoepli, vol. I, p. 180; vol. II, p. 280].

32. - Equazioni caratteristiche fra loro indipendenti. Moti di Staude.

Supposto non nullo il vettore $\mathbf{u}_1$ definito dalla (49), l'asse $O\mathbf{u}_1$ risulta *fisso nel corpo*. Essendo tale anche l'asse $O\mathbf{u}$, l'indipendenza delle (XIII) e (XIV) importa che deve risultare *fisso*, anche nel corpo, l'asse verticale $O\mathbf{k}_1$. Allora, indicando con $(\dot{\mathbf{k}}_1)$ la velocità di $\mathbf{k}_1$ rispetto al corpo (velocità relativa), si ha $(\dot{\mathbf{k}}_1)=0$ e la (48) ci dà per $\omega \neq 0$, ricordando che $\dot{\mathbf{k}}_1=(\dot{\mathbf{k}}_1)+\omega\mathbf{u}\wedge\mathbf{k}_1$, la relazione

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{k}_1=0 \tag{50}$$

la quale esprime che « *l'asse $O\mathbf{u}$ di rotazione del giroscopio si mantiene verticale* ».

Tenendo ora conto della (50), che può anche scriversi $\mathbf{u}=\pm\mathbf{k}_1$, essendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{k}_1$ vettori unitari, la (47_1) diviene

$$\dot{\omega}\cdot\mathbf{u}\times a\mathbf{u}=0 \tag{$47_1'$}$$

e questa equazione ammette due soluzioni:

$$\dot{\omega}=0, \qquad \mathbf{u}\times a\mathbf{u}=0. \tag{51}$$

È facile mostrare che per $\omega\neq 0$ risulta necessariamente $\mathbf{u}\times a\mathbf{u}\neq 0$. Basta, infatti, osservare che per $\mathbf{u}\times a\mathbf{u}=0$ si annullerebbe l'energia cinetica T del giroscopio, essendo $2T=\Omega\times a\Omega=\omega^2\mathbf{u}\times a\mathbf{u}$.

Segue, quindi, che per $\omega\neq 0$ l'unica soluzione è $\dot{\omega}=0$, ossia

$$\omega=\text{costante} \tag{52}$$

cioè «*il giroscopio deve rotare, con velocità costante, attorno alla verticale $O\mathbf{k}_1$*».

Poichè tali rotazioni sono i così detti « *moti o rotazioni permanenti di Staude* » [18] si conclude che « *quando le equazioni caratteristiche del moto sono fra loro indipendenti, i soli moti possibili del giroscopio sono le rotazioni permanenti di Staude* ».

33. - Equazioni caratteristiche fra loro dipendenti.

Integrando la (XIV), si ha $\mathbf{u}\times\mathbf{k}=c$ ed, essendo c costante arbitraria, la (XIV) non può essere identità. La (XIII) può essere conseguenza della (XIV), oppure *identità*. Nella prima ipotesi si ha $\mathbf{u}_1=m\mathbf{u}$, essendo m numero reale non nullo, ossia, tenendo conto della (49),

$$\mathbf{u}\wedge a\mathbf{u}\times\mathbf{g}\cdot a\mathbf{u}-\mathbf{g}\times a\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\wedge a\mathbf{u}=m\mathbf{u}. \tag{53}$$

Operando su (53) con $(\mathbf{u}\wedge a\mathbf{u})\times$, si ottiene

$$\mathbf{g}\times a\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\wedge a\mathbf{u})^2=0. \tag{54}$$

---

[18] Journ. für Mathem., 113, p. 318, a. 1894.

La (54) è soddisfatta quando sussiste almeno una delle due condizioni:

$$(55) \qquad \mathbf{g}\times\alpha\mathbf{u}=0, \qquad \mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}=0.$$

Dimostriamo che « *in ambo i casi, risulta* $m=0$ *e quindi la* (XIII), *non potendo essere conseguenza della* (XIV), *è identità* ».

Infatti, per $\mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}=0$ si annullano ambo i termini del primo membro della (53) e quindi, essendo $\mathbf{u}\neq 0$, risulta $m=0$. Per $\mathbf{g}\times\alpha\mathbf{u}=0$, la ($47_2$) dà, essendo $\omega\neq 0$, $\mathbf{g}\times\mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}=0$ e, dalla (53), risulta ancora $m=0$, c. d. d. Dal fatto che la (XIII) è identità, che deve cioè essere soddisfatta per qualunque $\mathbf{u}_1$, segue necessariamente $\mathbf{u}_1=0$, e quindi, per la (49), si ha identicamente

$$(56) \qquad \mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}\times\mathbf{g}\cdot\alpha\mathbf{u}=\mathbf{g}\times\alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}.$$

La (56) può considerarsi come « *l'equazione caratteristica dei moti possibili, quando le* (XIII) *e* (XIV) *non sono fra loro indipendenti* ».

Non potendo $\alpha\mathbf{u}$ essere parallelo al vettore $\mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}$, la (56) può essere soddisfatta solo quando coesistano le due condizioni:

$$(57) \qquad \mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}\times\mathbf{g}=0, \qquad \mathbf{g}\times\alpha\mathbf{u}=0.$$

Si può, quindi, concludere che « *le* (57) *sono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di moti giroscopici nel caso in cui le equazioni caratteristiche* (XIII) *e* (XIV) *non sono fra loro indipendenti* ».

34. - Moti alla Mlodzjejowski.

Si vede subito che le condizioni (57) risultano soddisfatte supponendo

$$(58) \qquad \mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{u}=0, \qquad \dot{\omega}\neq 0.$$

La prima è, infatti, identicamente soddisfatta; quanto alla seconda delle (57) osserviamo che, per le (58), la (47_2) diviene $\dot{\omega}\cdot\mathbf{g}\times\alpha\mathbf{u}=0$ e quindi, per $\dot{\omega}\neq 0$, si ha $\mathbf{g}\times\alpha\mathbf{u}=0$. Dal punto di vista meccanico, le (58) esprimono che « *il giroscopio ruota attorno ad uno dei suoi assi principali d'inerzia, relativi al punto fisso, con velocità angolare variabile col tempo* ».

Se n è numero reale non nullo, le (58) possono anche scriversi

$$(58_1) \qquad \alpha\mathbf{u}=n\mathbf{u}, \qquad \dot{\omega}\neq 0.$$

Per *giroscopi asimmetrici pesanti*, si può evidentemente soddisfare alle (58_1) ponendo

$$(59) \qquad \mathbf{u}=\mathbf{k}, \qquad n=C, \qquad \dot{\omega}\neq 0$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore unitario parallelo ad una qualunque delle direzioni unite di α; C è il momento d'inerzia del giroscopio rispetto all'asse $O\mathbf{k}$.

Ora le condizioni (59) definiscono i *moti alla Mlodzjejowski* ([19]) e permettono di scrivere l'equazione (47) di EULER nella forma

$$\dot{\omega} \cdot C\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \tag{60}$$

dalla quale risulta immediatamente che « *nei moti alla Mlodzjejowski l'asse* $O\mathbf{k}$ *di rotazione si mantiene normale all'asse verticale* $O\mathbf{k}_1$ *ed il baricentro* $G = O + \mathbf{g}$ *oscilla in un piano verticale; cioè il giroscopio si muove attorno ad un asse orizzontale come un pendolo fisico* ».

Giova rilevare che, nell'ipotesi $\dot{\omega} = 0$, si avrebbe dalla (60) $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$, cioè « *il baricentro G resterebbe, durante il moto, sulla verticale* $O\mathbf{k}_1$ *attorno alla quale ruoterebbe con moto uniforme il giroscopio; si ricadrebbe quindi nel caso di Staude precedentemente studiato* ».

Nel caso di *giroscopi pesanti simmetrici rispetto ad un asse*, due dei tre momenti principali d'inerzia (A, B, C), relativi al punto fisso, risultano eguali fra loro. Se, ad esempio, $O\mathbf{k}$ è l'asse di simmetria e C il corrispondente momento d'inerzia, si ha $B = A$ e si può soddisfare alle (58_1) supponendo

$$\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0, \qquad n = A, \qquad \dot{\omega} \neq 0. \tag{61}$$

Infatti, osservando che, in tal caso, α assume la forma: $\alpha = A + aH(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ [l. c. ([12])] si ha, tenendo conto anche della prima delle (61), $\alpha\mathbf{u} = A\mathbf{u}$, cioè: anche in questo caso, l'asse $O\mathbf{u}$ di rotazione risulta *parallelo* ad uno degli *assi principali d'inerzia*, relativi al punto fisso O, e *sussiste* perciò il ragionamento fatto già per i *giroscopi asimmetrici*. Si conclude, quindi, che « *Nelle ipotesi* (61), *anche i giroscopi simmetrici rispetto ad un asse, compiono moti pendolari* ».

Bisogna però rilevare che la condizione $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0$ permette che l'asse $O\mathbf{u}$ di rotazione possa coincidere con una qualunque delle rette, passanti per O, del piano degli assi uguali d'inerzia, quindi « *per i giroscopi pesanti simmetrici rispetto ad un asse, gli assi di oscillazione dei moti pendolari formano un fascio, di centro O, nel piano degli assi uguali d'inerzia* ».

Poichè per ciascuno degli assi di oscillazione il giroscopio è *planare*, anche questi moti possono rientrare nella categoria dei *moti alla Mlodzjejowski*.

Concludendo, si può dire che « *quando le equazioni caratteristiche del moto non sono fra loro indipendenti, fra i moti giroscopici possibili vi sono certamente i moti alla Mlodzjejowski* ».

35. - Asse di oscillazione nei moti alla Mlodzjejowski.

Associando alle (57) l'equazione $\mathbf{u}^2 = 1$ e ricordando che α è dilatazione, si ha il sistema

$$\alpha\mathbf{g} \times \mathbf{u} = 0, \qquad (\alpha\mathbf{u} \wedge \mathbf{g}) \times \mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 1 \tag{62}$$

([19]) Cfr. Bibliografia (2).

che, risoluto rispetto ad $\mathbf{u}$, dà

$$\mathbf{u}=[a\mathbf{g}\wedge(a\mathbf{u}\wedge\mathbf{g}]/[a\mathbf{g}\times(a\mathbf{u}\wedge\mathbf{g})\wedge\mathbf{u}]. \tag{63}$$

Essendo le (62) fra loro indipendenti, si ha in generale

$$a\mathbf{g}\times(a\mathbf{u}\wedge\mathbf{g})\wedge\mathbf{u}\neq 0 \tag{64}$$

e quindi « *l'asse* $O\mathbf{u}$ *di oscillazione risulta, in generale, determinato dalla* (63) ».

Supponendo, *in particolare,*

$$a\mathbf{u}\wedge\mathbf{g}=0, \tag{65}$$

la (64) non è soddisfatta; ma c'è da osservare che la (65) è *incompatibile* con la seconda delle (57) $a\mathbf{u}\times\mathbf{g}=0$, che è *condizione necessaria,* come si è dimostrato, per l'esistenza di moti giroscopici quando le equazioni caratteristiche non sono fra loro indipendenti e, quindi, di moti alla MLODZJEJOWSKI. Si ha, dunque, questo altro notevole risultato che « *nell'ipotesi* (65), *quando, cioè, il momento cinetico è parallelo all'asse baricentrale, i moti alla Mlodzjejowski non sono possibili* ».

Non è escluso però che per un *giroscopio generale* possano, anche in questo caso, aver luogo delle rotazioni permanenti attorno alla retta, di equazione (65), che appartiene al cono di STAUDE.

36. - Ricerca di tutti i moti possibili quando le equazioni caratteristiche del moto non sono fra loro indipendenti.

Poichè in questa ipotesi i moti possibili sono caratterizzati dalle condizioni (57), la ricerca consiste sostanzialmente nel precisare a quali moti possa condurre la coesistenza delle (57).

Giova ricordare che nel caso S=costante l'equivalenza fra i sistemi di HESS-SCHIFF e di EULER-POISSON si può ristabilire associando al primo l'equazione ausiliaria $\mathbf{k}_1\times a=0$ che, per $S=0$, può scriversi

$$k\mathbf{g}^2+2U\cdot\mathbf{g}\times\Omega+\mathbf{g}\wedge a\Omega\times a\dot{\Omega}=0 \tag{66}$$

dove

$$k=a\Omega\times\mathbf{k}_1 \tag{67}$$

è la costante dell'integrale delle aree. Poichè, per la posizione (46), è $a\dot{\Omega}=\dot{\omega}\cdot a\mathbf{u}$, l'ultimo termine di (66) si annulla. Inoltre, posto per comodità di scrittura,

$$a\mathbf{u}\times a\mathbf{u}=b^2\neq 0, \tag{68}$$

dove b^2 è costante positiva, la (III_c) può scriversi

$$2U=b^2\omega^2. \tag{69}$$

Allora la (66) assume la forma

$$(66_1) \qquad k\mathbf{g}^2 + b^2 \cdot \mathbf{g} \times \mathbf{u} \cdot \omega^3 = 0.$$

Essendo, nel caso in esame, gli assi $O\mathbf{g}$, $O\mathbf{u}$ fissi nel corpo, si ha $\mathbf{g} \times \mathbf{u} =$ costante e, quindi, dalla (66_1) risulta che la *velocità angolare* ω *del giroscopio è costante.*

Affinchè tale velocità possa essere *funzione del tempo*, come è richiesto per la seconda delle (58), è necessario che coesistano le due condizioni

$$(70) \qquad k = \alpha\Omega \times \mathbf{k}_1 = 0$$

$$(71) \qquad \mathbf{g} \times \mathbf{u} = 0$$

perchè, avendo escluso a priori il caso di EULER, è $\mathbf{g}^2 \neq 0$.

Le (70) e (71) esprimono rispettivamente che « *durante il moto, l'asse dell'impulso deve mantenersi orizzontale e quello di rotazione normale al baricentrico* ». D'altra parte, essendo α dilatazione, la seconda delle (57) può scriversi

$$(72) \qquad \alpha\mathbf{g} \times \mathbf{u} = 0$$

e dalle (71) (72) si deduce, se l è numero reale non nullo,

$$(73) \qquad \mathbf{u} = l \cdot \mathbf{g} \wedge \alpha\mathbf{g}$$

cioè « il vettore $\mathbf{u}$ risulta parallelo al vettore $\mathbf{g} \wedge \alpha\mathbf{g}$ ».

Operando con α su (73), si ha successivamente ([20])

$$(74) \qquad \alpha\mathbf{u} = l \cdot \alpha(\mathbf{g} \wedge \alpha\mathbf{g}) = l \cdot (I_1\alpha \cdot \mathbf{g} \wedge \alpha\mathbf{g} - \mathbf{g} \wedge \alpha^2\mathbf{g}).$$

Allora la prima delle (57) può assumere la forma

$$(75) \qquad l^2\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{g} \wedge \alpha\mathbf{g} \times \alpha^2\mathbf{g} = 0.$$

Se, rispetto alla terna fondamentale $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, parallela alla terna delle direzioni unite di α, sono A, B, C i momenti principali d'inerzia e ξ, η, ζ le componenti di $\mathbf{g}$, la (75) può scriversi

$$(75_1) \qquad l^2\mathbf{g}^2(B-C)(C-A)(A-B) \cdot \xi\eta\zeta = 0$$

e, sotto questa forma, mostra chiaramente che, essendo l^2, $\mathbf{g}^2$ quantità essenzialmente positive, essa è soddisfatta soltanto quando è verificata almeno una delle sei condizioni

$$(76) \qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0$$

$$(77) \qquad B = C, \qquad C = A, \qquad A = B$$

cioè soltanto quando *il giroscopio è planare oppure simmetrico.*

([20]) Cfr. BURALI FORTI e MARCOLONGO: *Analisi Vettoriale Generale.* Vol. I, p. 68 (9). Ediz. Zanichelli, Bologna, 1929.

Per un *giroscopio planare*, caratterizzato ad esempio da $\zeta=0$, si ha, anche per le (57) e (71), che l'asse baricentrale Og deve soddisfare in ogni sua posizione alle condizioni

$$\zeta=\mathbf{g}\times\mathbf{k}=0, \qquad \mathbf{g}\times\alpha\mathbf{u}=0, \qquad \mathbf{g}\times\mathbf{u}=0 \tag{78}$$

dalle quali scaturiscono, come conseguenza necessaria, le relazioni:

$$\mathbf{u}=\mathbf{k}, \qquad \alpha\mathbf{u}=n\mathbf{u} \tag{78_1}$$

essendo n numero reale non nullo. Associando alle (78_1) l'ipotesi $\dot{\omega}\neq 0$, si hanno le condizioni (58_1) che definiscono i moti alla MLODZJEJOWSKI.

Se si considera, invece, un *giroscopio simmetrico rispetto ad un asse*, ad esempio $O\mathbf{k}$, si ha $B=A$ e, ricordando che in questo caso $\alpha=A+aH(\mathbf{k},\mathbf{k})$, si ottiene

$$\alpha\mathbf{u}=A\mathbf{u}+a\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}. \tag{79}$$

Allora la seconda delle condizioni (57) può assumere la forma

$$A\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{g}+a\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\times\mathbf{g}=0. \tag{57_1}$$

Essendo $\mathbf{u}\times\mathbf{g}=0$, per la (71), ed $a\neq 0$, perchè la (57_1) risulti soddisfatta è necessario che si verifichi una delle due condizioni:

$$\mathbf{k}\times\mathbf{g}=0, \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{k}=0. \tag{80}$$

Per $\mathbf{k}\times\mathbf{g}=\zeta=0$, vale il ragionamento precedente. Per $\mathbf{u}\times\mathbf{k}=0$, si osserva che tale condizione coincide con la prima delle (61) e che, inoltre, riducendosi ora la (79) ad $\alpha\mathbf{u}=A\mathbf{u}$, risulta $A=n$ e quindi, per $\dot{\omega}\neq 0$, risultano soddisfatte tutte le condizioni (61). Si è dunque condotti, anche in questo caso, ai moti alla MLODZJEJOWSKI.

Giova ben rilevare che, supponendo, invece, $\dot{\omega}=0$, si hanno i moti di STAUDE.

Concludendo, si può dire che «*Quando l'invariante principale S si mantiene costantemente nullo e le equazioni caratteristiche del moto* (XIII) e (XIV) *non sono fra loro indipendenti, i moti giroscopici possibili sono moti alla Mlodzjejowski, quando la velocità angolare ω del giroscopio è funzione del tempo; sono, invece, moti di Staude, quando ω è costante. Nei moti alla Mlodzjejowski, il cono di Staude* (cono degli assi permanenti di rotazione) *degenera in una coppia di piani, uno dei quali contiene il baricentro del giroscopio* (primo piano di STAUDE) *e l'altro, a differenza di quanto accade nel giroscopio di Hess, non coincide col piano $S_0=0$* ».

37. - Sintesi generale dei risultati più notevoli.

Riassumendo i risultati più notevoli della teoria esposta, si può affermare quanto segue:

1. - Nella teoria dei giroscopi rigidi pesanti, *non esiste in generale l'equivalenza fra le equazioni differenziali* di HESS-SCHIFF e quelle di EULER-POISSON. Perchè l'equivalenza sussista basta che dei *tre invarianti principali* T, S, U *di Hess*, S *ed* U *siano funzioni del tempo* ([21]).

2. - Se due qualunque dei detti invarianti sono indipendenti dal tempo, risulta tale anche il rimanente ed i moti del giroscopio sono rotazioni permanenti.

3. - Se uno soltanto dei due invarianti S ed U è costante, l'equivalenza non sussiste e si hanno i *casi singolari*: $S=$costante, $U=$costante.

4. - Nel caso $U=$costante la prima curva d'impulso è una circonfereuza giacente nel piano orizzontale passante per il punto fisso del giroscopio; l'asse baricentrale e l'asse dell'impulso devono trovarsi, in ogni istante, in uno stesso piano verticale del fascio di asse $O\mathbf{k}_1$, essendo $\mathbf{k}_1$ un versore verticale rivolto allo zenit di 0.

Inoltre, una delle equazioni di HESS-SCHIFF diviene conseguenza delle altre, ma può essere sostituita da una nuova equazione indipendente (equazione ausiliaria).

I moti giroscopici possibili sono le rotazioni permanenti. In particolare, se l'asse baricentrico si mantiene verticale, il giroscopio ruota con moto uniforme attorno ad esso. Se l'ellissoide d'inerzia del giroscopio, rispetto ad O, è di rivoluzione, la rotazione uniforme può aver luogo attorno all'asse di simmetria, o attorno ad assi a questo normali. Se il detto ellissoide si riduce ad una sfera di centro O, ogni raggio della stella di centro O può essere un asse permanente di rotazione.

5. - Nel caso singolare $S=S_0$, essendo S_0 costante, mà diverso da zero, è necessario distinguere i due sotto casi: *A*) *Il piano* $S=S_0$ *taglia il cono di Staude* (cono degli assi permanenti di rotazione); *B*) *il cono di Staude degenera in una coppia di piani.* Nel caso *A*), una delle equazioni di HESS-SCHIFF diviene conseguenza delle altre, ma si può ristabilire l'equivalenza introducendo un'equazione ausiliaria indipendente. I moti giroscopici possibili sono le rotazioni permanenti. Nel caso *B*), le condizioni necessarie e sufficienti perchè il cono di STAUDE degeneri in una coppia di piani sono o che il detto ellissoide d'inerzia sia di rivoluzione, o che l'asse baricentrale si muova in *uno dei piani principali d'inerzia* ed, in tal caso, il giroscopio dicesi «*planare*». Questo piano suol chiamarsi «*primo piano di Staude*» e l'altro «*secondo piano di Staude*». Risulta definita la condizione perchè il secondo piano di STAUDE coincida col piano $S=S_0$.

6. - È particolarmente importante il caso $S_0=0$, cioè il caso in cui l'invariante S *si mantiene costantemente nullo*, perchè esso comprende, come casi particolari, i *notevoli moti di Hess, di Staude e di Mlodzjejowski.*

Per $S_0=0$, la seconda curva d'impulso giace nel piano, per O, normale all'asse baricentrico. Il piano $S_0=0$ può toccare il *cono di Staude* nel solo vertice O

([21]) Le grandezze scalari T, S, U sono *invarianti* nel senso che *non dipendono* da *eventuali assi* di *riferimento*.

(caso del riposo), o tagliarlo secondo due generatrici (giroscopio planare), o essergli tangente lungo una generatrice, o essere un elemento costitutivo del cono stesso. In quest'ultimo caso, si ha un *giroscopio di Hess*, cioè un giroscopio planare i cui secondo piano di STAUDE coincide col piano $S_0 = 0$. Per tale giroscopio l'invariante U è funzione ellittica del tempo.

Nel caso in cui il *piano* $S_0 = 0$ *risulta tangente al cono di Staude*, si hanno moti giroscopici diversi, secondo che la *velocità angolare è costante o funzione del tempo*. Il moto risulta determinato da due particolari *equazioni caratteristiche*. Se queste sono *fra loro indipendenti*, i soli moti giroscopici possibili sono le *rotazioni permanenti di Staude*. Se, invece, le equazioni caratteristiche *non sono indipendenti fra loro*, si stabiliscono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di moti giroscopici e si trova, inoltre, che tali condizioni risultano soddisfatte dai « *moti alla Mlodzjejowski* », nella quale denominazione vanno compresi anche i *moti pendolari* considerati da KLEIN e SOMMERFELD. Nei moti alla MLODZJEJOWSKI, il cono di STAUDE si spezza in una coppia di piani, in uno dei quali si muove il baricentro del giroscopio (primo piano di STAUDE) e l'altro, a differenza di quanto accade nel giroscopio di HESS, non coincide col piano $S_0 = 0$.

Una ricerca generale di tutti i moti giroscopici possibili, quando le equazioni caratteristiche non sono fra loro indipendenti, conduce alla conclusione che: tali moti sono *moti alla Mlodzjejowski*, quando la velocità angolare è funzione del tempo; sono *moti di Staude* quando la velocità angolare è costante.

Si ha dunque, in ultima analisi, che « *per* $S_0 = 0$, *i moti giroscopici possibili sono o moti di Hess, o moti di Staude, o moti alla Mlodzjejowski* ».

BIBLIOGRAFIA

1. W. HESS: *Ueber das Problem der Rotation.* [Mathem. Annalen, Bd. 20, pp. 461-470, a. 1882]. — *Ueber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und ihre singulären Lösungen.* [Programm des Lyceums zu Bamberg, a. 1889]. — *Ueber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.* [Mathem. Ann., Bd. 37, pp. 153-181, a. 1890].

2. B. K. MLODZJEJOWSKI: *Arbeiter der Phys. Section der Freunde der Naturkunde in Moskau.* [Bd. 7, a. 1894].

3. P. A. SCHIFF: *Sulle equazioni differenziali del moto di un corpo rigido pesante attorno ad un punto fisso*, (in russo). [Raccolta matematica di Mosca, vol. 24, pp. 169-177; a. 1903].

4. P. STÄECKEL: *Die reduzierten Differentialgleichungen der Bewegung des schweren unsymmetrischen Kreisels.* [Mathem. Ann., Bd. 67, pp. 339-432, a. 1909].

5. O. LAZZARINO: *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* [Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXVIII, Ser. V, a. 1919 (2 Note)]. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* [Id., vol. XXVIII, Ser. V, 2° sem. 1919 (3 Note)]. — *Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo.* [Id., fasc. 11°, 12°, a. 1919 (2 Note)].

INDICE

PARTE PRIMA: *Teoria sintetica dell'equivalenza.*

PARTE SECONDA: *Studio dei casi singolari.*

B. - Il cono di Staude degenera in una coppia di piani.

C. - L'invariante principale S è una costante nulla.