

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GEORGES GIRAUD

**Généralisation d'un type de problèmes relatifs aux équations
aux dérivées partielles du type elliptique**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 7, n° 1
(1938), p. 25-71

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_1_25_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRALISATION D'UN TYPE DE PROBLÈMES RELATIFS AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE (1)

par GEORGES GIRAUD (Bonny-sur-Loire).

Le type de problèmes qui va être considéré ici, est désigné dans un ouvrage récent par le nom de *troisième type* (2). Il comprend comme cas particulier le *deuxième type* ou *type de Neumann*. Il s'agit ici d'amener la théorie du troisième type au point où la théorie du deuxième type a été poussée dans une publication récente (I, II, §§ 6 et suivants), où l'on établissait que, en posant les problèmes d'une certaine façon, les résultats essentiels restent valides dans le cas où certaines données sont affectées de certaines discontinuités. On établit ici que les mêmes

(1) Dans le cours de ce mémoire, il sera renvoyé aux travaux suivants, qui seront désignés par les lettres placées entre parenthèses avant chaque titre :

(B. A. G.) GUIDO ASCOLI, PIETRO BURGATTI e GEORGES GIRAUD: *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*. (« Pubblicazioni della R. Scuola normale superiore di Pisa », 1936-XIV).

(b). *Sur le problème de Dirichlet généralisé, deuxième mémoire*. (« Ann. scient. Ecole norm. sup. », 3^{me} série, t. 46, 1929, pp. 131-245).

(f). *Sur quelques problèmes de Dirichlet et de Neumann*. (« Journal de math. », 9^{me} série, t. 11, 1932, pp. 389-416).

(g). *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*. (« Bull. sciences math. », 2^{me} série, t. 56, 1932, pp. 248-272, 281-312, 316-352 et errata p. 384).

(h). *Problèmes de valeurs à la frontière, relatifs à certaines données discontinues*. (« Bull. Société math. », t. 61, 1933, pp. 1-54).

(i). *Equations à intégrales principales, étude suivie d'une application*. (« Ann. scient. Ecole norm. sup. », 3^{me} série, t. 51, 1934, pp. 251-372); rectification au chapitre III, § 9, dans le même recueil, t. 54, 1937, 4^{me} cahier.

(j). *Equations à intégrales principales d'ordre quelconque*. (« Ann. scient. Ecole norm. sup. », 3^{me} série, t. 53, 1936, pp. 1-40).

(k). *Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique*. (« Ann. Société polonaise de math. », t. 12, 1933, pp. 35-54).

(l). *Nouvelle généralisation des problèmes relatifs aux équations du type elliptique*. (« Ann. Société polonaise de math. », t. 14, 1935, pp. 74-115).

(2) B. A. G., 3^{me} partie, V. LEON LICHTENSTEIN: *Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*. (« Encyclopädie der math. Wiss. », II C 12) groupa dans son *troisième type* des problèmes que nous englobons dans notre *deuxième type*, car ils se traitent par la même méthode que le problème de NEUMANN.

sortes de discontinuités des mêmes données sont admissibles dans le cas du troisième type, c'est-à-dire que les résultats essentiels restent valides, moyennant un énoncé convenable du problème. Bien entendu cette conclusion n'est applicable qu'aux discontinuités effectivement étudiées. Les démonstrations sont analogues à celles qui ont été publiées pour le deuxième type.

L'étude de ce type de problèmes est ici poussée plus loin que nous n'avions fait pour le deuxième type. Un résultat (chap. II, § 15) interviendra dans la généralisation de certains *problèmes mixtes* ⁽³⁾, généralisation qui sera exposée dans un autre mémoire.

Pour alléger certaines démonstrations, nous groupons dans un premier chapitre quelques résultats relatifs à des limitations d'intégrales.

CHAPITRE I.

Limitations d'intégrales.

1. - **Théorème.** — *Soit E un ensemble borné et mesurable, situé dans l'espace euclidien à m dimensions, où l'on emploie des coordonnées cartésiennes rectangulaires (x_1, \dots, x_m) ; soit 2R sa plus grande corde (borne supérieure de la distance entre deux points qui varient dans E). Soient encore h un paramètre positif, et a une constante $\leq m$. L'intégrale*

$$I = \int_E^{(m)} (x_1^2 + \dots + x_m^2 + h^2)^{\frac{\alpha-m}{2}} dV,$$

où dV est l'élément euclidien, est inférieure à QR^α pour $0 < \alpha \leq m$, à $Q \log \left(1 + \frac{2R}{h}\right)$ pour $\alpha = 0$, et à Qh^α pour $\alpha < 0$, en désignant par Q une fonction de m et de α , indépendante de R et de h . Pour $\alpha < 0$, le résultat subsiste même quand E n'est pas borné ⁽⁴⁾.

Pour $\alpha > 0$, le remplacement de h par zéro augmente l'intégrale. L'intégrale étendue aux points de E situés dans le domaine $L(X, A) \leq R$ est moindre que

$$\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^R t^{\alpha-1} dt = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} R^\alpha.$$

⁽³⁾ B. A. G., 3^{me} partie, VI. Distinct de ces problèmes est celui qui a été traité sous le même nom par STANISLAS ZAREMBA: *Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace.* (« Bull. international Acad. de Cracovie », juillet 1910, pp. 313-344).

⁽⁴⁾ Ce théorème avait été énoncé dans une publication antérieure (l, I, § 1), mais les indications relatives à sa démonstration ne concernaient par mégarde qu'un cas particulier.

L'intégrale étendue à l'ensemble restant est $< \frac{\pi^{\frac{m}{2}} 2^m}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} R^\alpha$, car la mesure du champ est $< \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} (2R)^m$, et la fonction intégrée est $< R^{\alpha-m}$. Ces deux remarques permettent de vérifier l'énoncé dans ce cas; on peut prendre

$$Q = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{1}{a} + \frac{2^m}{m} \right), \quad (0 < a \leq m).$$

Une légère modification du raisonnement donnerait une meilleure valeur de Q (b , section I, note du théorème 1).

Pour $a < 0$, on augmente l'intégrale en l'étendant à tout l'espace, ce qui donne

$$I < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} dt}{(t^2 + h^2)^{\frac{m-\alpha}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} h^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{m-\alpha}{2}}} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{m-\alpha}{2})} h^\alpha;$$

on voit que ce résultat subsiste quand E n'est pas borné, sauf que, si E comprend tout l'espace, I est égal au dernier membre.

Enfin pour $a=0$, en désignant par l la borne inférieure de la distance entre l'origine des coordonnées et un point variable de E , on a

$$I < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_l^{l+2R} \frac{t^{m-1} dt}{(t^2 + h^2)^{\frac{m}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{1}{h} \int_{\frac{l}{h}}^{\frac{l+2R}{h}} \frac{t^{m-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{m}{2}}}.$$

La fonction intégrée est toujours $< t^{-1}$; si donc l est $\geq h$, on a

$$I < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \log \left(1 + \frac{2R}{l} \right) \leq \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \log \left(1 + \frac{2R}{h} \right), \quad (l \geq h).$$

Si l'on a $l < h$ et $2R \leq h$, on a, d'après le théorème de la moyenne,

$$I < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} Q_1 \frac{2R}{h},$$

où Q_1 désigne le maximum de $t^{m-1}(t^2+1)^{-\frac{m}{2}}$ dans l'intervalle $0 < t \leq 2$ (ce maximum est atteint pour $t = \sqrt{m-1}$ quand m est ≤ 5 , et pour $t=2$ quand m est > 5); mais la fonction $\log(1+x) - x \log 2$, qui s'annule pour $x=0$ et pour $x=1$,

et dont la dérivée seconde est négative, est donc positive pour $0 < x < 1$; donc nous avons dans ce cas

$$I < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}} Q_1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \log 2} \log\left(1 + \frac{2R}{h}\right), \quad (l < h, 2R \leq h).$$

Enfin si l'on a $l < h$ et $2R > h$, nous écrivons

$$I < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left[\int_0^1 \frac{t^{m-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{m}{2}}} + \int_1^{1 + \frac{2R}{h}} \frac{dt}{t} \right] < \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} Q_2 \log\left(1 + \frac{2R}{h}\right), \quad (l < h, 2R > h),$$

en posant

$$Q_2 = 1 + \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{t^{m-1} dt}{(t^2 + 1)^{\frac{m}{2}}}.$$

Notre théorème se vérifie donc encore pour $a=0$, à condition de prendre pour Q le produit de $\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$ par le plus grand des nombres $1, \frac{Q_1}{\log 2}$ et Q_2 , c'est-à-dire par Q_2 : en effet on a évidemment $Q_2 > 1$, et d'autre part Q_1 , qui est une fonction décroissante de m , prend pour $m=2$ la valeur $\frac{1}{2} < \log 2$, ce qui prouve bien que, pour $m \geq 2$, le plus grand nombre est Q_2 ; pour $m=1$, on a $Q_1=1$ et $Q_2 = 1 + \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\log 2}$, et comme l'inégalité évidente $2 + 2\sqrt{2} > e$ entraîne $Q_2 > \frac{1}{\log 2}$, le plus grand nombre est encore Q_2 . On peut donc toujours prendre

$$Q = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} Q_2, \quad (a=0).$$

Le théorème est démontré.

2. - Théorème. — Ainsi que nous ferons constamment dans la suite, nous allons désigner par X le point qui a les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_m ; d'une façon générale, les coordonnées d'un point désigné par une majuscule latine ou grecque se noteront par la minuscule correspondante, affectée des indices $1, 2, \dots, m$.

Dans l'énoncé qui suit, (x_1, x_2, \dots, x_m) est un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires. La notation $L(X, A)$, souvent employée dans la suite, signifie

$$L(X, A) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2};$$

c'est donc la distance entre les points X et A .

Supposons $m \geq 2$, et soient β et R des nombres positifs. L'intégrale

$$I = \int^{(m-1)} L^{1-\beta-m}(X, A) dS_A,$$

étendue à la région $L(X, A) > R$ de la variété $a_m = 0$, dont dS est l'élément euclidien, est $\leq QR^{-\beta}$, où Q dépend seulement de m et de β .

Démonstration. - Plaçons-nous d'abord dans le cas où l'on a $R \leq |x_m|$. Alors l'intégrale est étendue à toute la variété $a_m = 0$, et l'on a

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} (t^2 + x_m^2)^{\frac{1-\beta-m}{2}} t^{m-2} dt = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+\beta-1}{2}\right)} |x_m|^{-\beta},$$

$$I \leq \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+\beta-1}{2}\right)} R^{-\beta}, \quad (R \leq |x_m|).$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'on a $R \geq |x_m|$. On a alors

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_{\sqrt{R^2 - x_m^2}}^{+\infty} (t^2 + x_m^2)^{\frac{1-\beta-m}{2}} t^{m-2} dt.$$

En prenant $u = \sqrt{t^2 + x_m^2}$ comme nouvelle variable d'intégration, nous voyons que, si m est ≥ 3 , on a

$$I \leq \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_R^{+\infty} u^{-\beta-1} du = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \beta} R^{-\beta}, \quad (R \geq |x_m|, m \geq 3),$$

l'égalité ayant lieu pour $x_m = 0$ quel que soit m , et pour $m = 3$ quel que soit x_m . Il nous reste donc uniquement à traiter le cas où l'on a $R \geq |x_m|$ et $m = 2$; en posant $\sqrt{t^2 + x_m^2} = |x_m| u$, nous trouvons alors

$$I = 2 |x_m|^{-\beta} \int_{\frac{R}{|x_m|}}^{+\infty} \frac{u^{-\beta} du}{\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Mais on a

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \frac{u^{-\beta} du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int_{\lambda}^{+\infty} u^{-\beta-1} \left[1 + \frac{1}{2u^2} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} u^{-2n} + \dots \right] du, \quad (\lambda > 1);$$

le produit de cette intégrale par λ^β est donc une fonction décroissante de λ ; la borne supérieure de ce produit quand λ est ≥ 1 est donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{-\beta} du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-v)^{\frac{\beta-2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)},$$

valeur obtenue en posant $u = \frac{1}{\sqrt{1-v}}$. Nous avons donc

$$I \leq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} R^{-\beta}, \quad (R \geq |x_m|, m=2).$$

Le théorème se vérifie donc dans tous les cas. Pour $m=2$, on peut prendre

$$Q = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}, \quad (m=2).$$

Pour $m \geq 3$, en comparant les deux résultats obtenus pour $R = |x_m|$, et dont l'un est égal à I et l'autre est $\geq I$, on voit qu'on peut prendre

$$Q = \frac{\frac{m-1}{2}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \beta}, \quad (m \geq 3).$$

Quel que soit m , ces valeurs de Q sont les meilleures possible, car les limitations sont atteintes pour $R = |x_m|$ quand m est égal à 2, et pour $x_m = 0$ quand m est ≥ 3 .

3. - Théorème. — *Soit encore (x_1, \dots, x_m) un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires de X . En posant*

$$I = \int L^{1-m}(X, A) dS_A, \quad (m \geq 2),$$

où l'intégrale est étendue à la région $l < L(X, A) < R$ de la variété $\alpha_m = 0$ ($0 < l \leq R$), on a

$$I \leq \frac{\frac{m-1}{2}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \log \frac{R}{l}, \quad (m > 2),$$

$$I \leq 2 \log \frac{R + \sqrt{R^2 - l^2}}{l} < 2 \log \frac{2R}{l}, \quad (m=2).$$

Tout d'abord, le théorème se vérifie quand x_m est nul, car on a alors

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \log \frac{R}{l}.$$

Il se vérifie encore quand l est égal à R , car I est alors nul.

Considérons maintenant le cas où l'on a $R \leq |x_m|$: dans ce cas, I est nul, et l'énoncé se vérifie.

Supposons qu'on ait $l \leq |x_m| < R$. Dans ce cas, nous avons

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{R^2 - x_m^2}} \frac{t^{m-2} dt}{(t^2 + x_m^2)^{\frac{m-1}{2}}}.$$

En posant $\sqrt{t^2 + x_m^2} = |x_m| u$, nous trouvons

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_i^{\frac{R}{|x_m|}} \frac{(u^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}}}{u^{m-2}} du \leq \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_i^{\frac{R}{|x_m|}} \frac{du}{u} = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \log \frac{R}{|x_m|}, \quad (m > 2),$$

d'où résulte la limitation annoncée. Pour $m=2$, on a

$$I = 2 \int_i^{\frac{R}{|x_m|}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = 2 \log \frac{R + \sqrt{R^2 - x_m^2}}{|x_m|},$$

et l'énoncé se vérifie encore.

Il nous reste à considérer seulement le cas où l'on a $0 < |x_m| < l < R$. Nous trouvons alors

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_{\sqrt{l^2 - x_m^2}}^{\sqrt{R^2 - x_m^2}} \frac{t^{m-2} dt}{(t^2 + x_m^2)^{\frac{m-1}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_{\frac{|x_m|}{l}}^{\frac{R}{|x_m|}} \frac{(u^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}}}{u^{m-2}} du.$$

Si donc m est > 2 , cela entraîne

$$I \leq \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_{\frac{|x_m|}{l}}^{\frac{R}{|x_m|}} \frac{du}{u} = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \log \frac{R}{l}, \quad (m > 2).$$

Pour $m=2$, nous avons

$$I = 2 \int_{\frac{l}{|x_m|}}^{\frac{R}{|x_m|}} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = 2 \log \frac{R + \sqrt{R^2 - x_m^2}}{l + \sqrt{l^2 - x_m^2}} \leq 2 \log \frac{R + \sqrt{R^2 - l^2}}{l}, \quad (m=2),$$

et l'énoncé se vérifie encore.

Le théorème est ainsi démontré.

4. - **Théorème.** — Soit (x_1, \dots, x_m) un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires ($m \geq 2$). En posant

$$I = \int L^{\alpha+1-m}(X, A) dS_A, \quad (0 < \alpha \leq m-1),$$

où l'intégrale est étendue à la région $L(X, A) < R$ de la variété $\alpha_m = 0$, on a

$$I \leq \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}} R^\alpha}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)^\alpha}, \quad (R > 0).$$

En effet, si nous remplaçons X par sa projection X_1 sur $x_m = 0$, en remarquant qu'on a $L(X_1, A) \leq L(X, A)$, nous voyons que la nouvelle fonction intégrée est partout au moins égale à l'ancienne, et que le nouveau champ contient l'ancien. Or pour x_m nul, I est égal à la limitation annoncée. Le théorème en résulte.

5. - **Lemme.** — Soit (x_1, \dots, x_m) un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires. Posons $r(X) = \sqrt{x_{m-p+1}^2 + \dots + x_m^2}$ ($1 \leq p \leq m$). Soit E un ensemble mesurable variable, dont la plus grande corde reste $\leq 2R$. Enfin soit k un nombre positif donné $\leq p$. Alors l'intégrale

$$I = \int_E r^{k-p} dV, \quad (dV = \text{élément euclidien})$$

reste bornée quand E varie, et elle tend vers zéro avec la mesure η de E .

Nous renvoyons pour la démonstration à un travail antérieur (I, I, § 2). On trouve

$$I \leq QR^{m+k-p} \frac{k}{p} \eta^{\frac{k}{p}},$$

où Q ne dépend que de m , de k et de p .

6. - Lemme. — *En particulier, si l'ensemble E du paragraphe 5 est une hypersphère de rayon R, on a*

$$I < QR^{m+k-p},$$

où Q ne dépend que de m, de k et de p.

Une démonstration se trouve dans le travail cité (I, I, § 3), où l'on parvient à la valeur

$$Q = \frac{2^{k+1}\pi^{\frac{m}{2}}}{k\Gamma\left(\frac{m-p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}.$$

7. - Théorème. — *Soit (x_1, \dots, x_m) un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires ($m \geq 2$). Posons*

$$r(X) = \sqrt{x_{m-p}^2 + \dots + x_m^2} \quad (1 \leq p \leq m-1).$$

Soient h et k des constantes telles qu'on ait $0 < h \leq m-1$, $0 < k \leq p$, $h+k > p$. L'intégrale

$$I = \int_{\bar{E}}^{(m-1)} L^{h+1-m}(X, A) r^{k-p}(A) dS_A \quad (dS = \text{élément euclidien})$$

étendue à un ensemble E borné et mesurable, situé sur la variété $a_m=0$, reste bornée quand X et E varient de façon que la plus grande corde de E reste $\leq 2R$, et elle tend uniformément vers zéro avec la mesure η de E.

Soit

$$s = \int_{\bar{E}}^{(m-1)} r^{k-p} dS;$$

d'après le paragraphe 5, il nous suffit de prouver que I tend vers zéro quand s tend vers zéro.

Soit l une constante positive. Dans la région $L(X, A) \geq l$, nous avons une intégrale $\leq sl^{h+1-m}$. Dans la région $L(X, A) < l \leq r(A)$, notre intégrale est au plus égale à

$$l^{k-p} \int_{\bar{E}}^{(m-1)} L^{h+1-m}(X, A) dS_A \leq Q_1 l^{h+k-p},$$

où Q_1 désigne une certaine fonction de m et de h (voir § 1).

D'une façon générale, les lettres Q_n désigneront, quel que soit l'entier n, des quantités positives qui dépendent seulement de m, de p, de h et de k.

Passons à la région où l'on a simultanément $L(X, A) < l$ et $r(A) < l$. Si elle existe, nous avons

$$r(X) \leq L(X, A) + r(A) < 2l.$$

Posons

$$\varrho = \sqrt{(x_{m-p} - a_{m-p})^2 + \dots + (x_{m-1} - a_{m-1})^2 + x_m^2},$$

et intégrons par rapport à $a_1, a_2, \dots, a_{m-p-1}$, dans la région maintenant considérée. Suivant le cas, nous trouvons les limitations suivantes :

1) pour $h < p$:

$$Q_2 \int \varrho^{h-p} r^{k-p} d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1});$$

2) pour $h = p$:

$$Q_2 \int r^{k-p} \log \left(1 + \frac{l}{\varrho} \right) d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1});$$

3) pour $h > p$:

$$Q_2 l^{h-p} \int r^{k-p} d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1}).$$

Dans le premier cas ($h < p$), nous effectuons les p intégrations restantes d'abord dans la région où 2ϱ est $\leq r(X)$; alors $2r(A)$ est $\geq r(X)$, et, d'après le paragraphe 4, l'intégrale est $\leq Q_3 r^{h+k-p}(X) < 2^{h+k-p} Q_3 l^{h+k-p}$. Dans la région où $2r(A)$ est $\leq r(X)$, nous avons de même une intégrale inférieure à $Q_4 l^{h+k-p}$. Enfin dans la région restante, où l'on a à la fois $2r(A) > r(X)$ et $2\varrho > r(X)$, on a aussi

$$\frac{1}{3} < \frac{r(A)}{\varrho} < 3,$$

et par suite l'intégrale est $\leq 3^{p-h} Q_2 \int r^{h+k-2p}(A) d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1})$; d'après le paragraphe 4, ce résultat est $\leq Q_5 l^{h+k-p}$. Au total donc, quand h est $< p$, l'intégration dans la région où l'on a simultanément $L(X, A) < l$ et $r(A) < l$, donne un résultat $< Q_6 l^{h+k-p}$, avec $Q_6 = 2^{h+k-p} Q_3 + Q_4 + Q_5$.

Dans le deuxième cas ($h = p$), nous effectuons les p dernières intégrations successivement dans les trois mêmes régions que dans le premier cas. Dans la région où 2ϱ est $\leq r(X) < 2l$, nous remarquons qu'on a

$$2r(A) \geq r(X) \quad \text{et} \quad \log \left(1 + \frac{l}{\varrho} \right) < \log \frac{2l}{\varrho};$$

par suite cette intégrale est inférieure à

$$\begin{aligned} & 2^{p-k} Q_2 r^{k-p}(X) \int \log \frac{2l}{\varrho} d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1}) < \\ & < \frac{2^{p-k+1} \pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} Q_2 r^{k-p}(X) \int_0^{\frac{r(X)}{2}} t^{p-1} \log \frac{2l}{t} dt = \frac{2^{1-k} \pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)} Q_2 r^k(X) \left[\log \frac{4l}{r(X)} + \frac{1}{p} \right]; \end{aligned}$$

quand $r(X)$ varie de zéro à $2l$, cette expression a un maximum $Q_3 l^k$. Dans la région où $2r(A)$ est $\leq r(X)$, comme nous avons $\frac{r(X)}{2} \leq \rho \leq L(X, A) < l$, nous avons $\log\left(1 + \frac{l}{\rho}\right) < \log \frac{2l}{\rho} \leq \log \frac{4l}{r(X)}$; l'intégrale est donc moindre que

$$Q_2 \log \frac{4l}{r(X)} \int r^{k-p} d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1}) = \frac{2^{1-k} \pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)k} Q_2 r^k(X) \log \frac{4l}{r(X)},$$

et cette expression a un maximum $Q_4 l^k$ quand $r(X)$ varie de zéro à $2l$. Dans la région restante, l'intégrale est moindre que

$$Q_2 \int r^{k-p}(A) \log \frac{4l}{r(A)} d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1}),$$

où l'intégration est étendue à toute la région $r(A) < l$; cette dernière intégrale vaut $\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)k} \left(\log 4 + \frac{1}{k}\right) Q_2 l^k = Q_5 l^k$. Donc, quand on a $h=p$, l'intégration étendue à toute la région où l'on a $L(X, A) < l$ et $r(A) < l$, est moindre que $Q_6 l^{h+k-p}$ ($Q_6 = Q_3 + Q_4 + Q_5$).

Enfin dans le troisième cas ($h > p$), le résultat des p intégrations restantes est au plus égal à $Q_6 l^{h+k-p}$, avec

$$Q_6 = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)k} Q_2.$$

Dans tous les cas, nous avons donc, quel que soit l ,

$$I \leq s l^{h+1-m} + (Q_4 + Q_6) l^{h+k-p}.$$

La fonction de l qui est au second membre, atteint son minimum pour

$$(h+k-p)(Q_4 + Q_6) l^{m+k-p-1} = (m-h-1)s,$$

et l'on parvient ainsi à une inégalité

$$I \leq Q s^{\frac{h+k-p}{m+k-p-1}},$$

où Q ne dépend que de m , de p , de h et de k .

8. - Corollaire. — *En particulier, si l'ensemble E du paragraphe 7 est une hypersphère de rayon R , on a*

$$I \leq Q R^{h+k-p},$$

où Q ne dépend que de m , de p , de h et de k .

Cela résulte des paragraphes 6 et 7.

9. - **Théorème.** — Soit h une constante donnée, non nécessairement positive; p et r étant définis comme au paragraphe 7, soit k une constante telle qu'on ait $0 < k \leq p$, $h+k \leq p$. Considérons l'intégrale

$$I = \int_{l < L(X, A) < R} L^{h+1-m}(X, A) r^{k-p}(A) dS_A, \quad (a_m = 0),$$

où l et R sont des constantes positives données, telles qu'on ait $l < R$. Je dis qu'on a

$$\begin{aligned} I &< Q \log \frac{2R}{l}, & \text{pour } h+k=p, \\ I &< Q l^{h+k-p}, & \text{pour } h+k < p, \end{aligned}$$

Q ne dépendant que de m , de p , de h et de k ; quand $h+k$ est $< p$, l'inégalité subsiste pour R infini, ou bien elle se transforme en égalité.

L'intégrale étendue au champ partiel dans lequel on a $r(A) \geq L(X, A)$ est, d'après les paragraphes 2 et 3, $\leq Q_1 l^{h+k-p}$ ou $< Q_1 \log \frac{2R}{l}$, suivant qu'on a $h+k < p$ ou $h+k=p$ (même convention qu'au paragraphe 7 pour la notation Q_n). Dans le champ partiel $r(A) < l$, l'intégrale est, d'après le paragraphe 2, au plus égale à

$$Q_2 l^{h-p} \int^{(p)} r^{k-p}(A) d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1}),$$

où la nouvelle intégrale est étendue à tout le champ $r(A) < l$, car les inégalités $k > 0$ et $h+k \leq p$ entraînent $h < p$; ce résultat est évidemment $Q_3 l^{h+k-p}$. Il nous reste seulement le champ partiel où l'on a $l \leq r(A) < L(X, A)$; en intégrant dans ce champ, nous avons, d'après le paragraphe 2,

$$\int^{(m-p-1)} L^{h+1-m}(X, A) d(a_1, \dots, a_{m-p-1}) \leq Q_2 r^{h-p}(A),$$

et par suite notre partie de I est moindre que

$$Q_2 \int^{(p)} r^{h+k-p}(A) d(a_{m-p}, \dots, a_{m-1}) \begin{cases} < Q_4 l^{h+k-p}, & (h+k < p), \\ < Q_4 \log \frac{2R}{l}, & (h+k = p), \end{cases}$$

d'après les paragraphes 2 et 3 [on a $r(A) < R$ dans tout notre champ, car on a $r(A) < L(X, A) < R$].

Nous avons donc bien la limitation annoncée, avec

$$Q = \begin{cases} Q_1 + Q_3 + Q_4, & (h+k < p), \\ Q_1 + \frac{Q_3}{\log 2} + Q_4, & (h+k = p). \end{cases}$$

10. - **Théorème.** — Si $r(X)$ désigne la distance entre X et la variété définie par les équations simultanées

$$x_\alpha = 0, \quad (m-p \leq \alpha \leq m-1), \quad x_m = f(x_1, \dots, x_{m-p-1}), \quad (1 \leq p \leq m-1),$$

où f est une fonction continue donnée (pour $p = m-1$, f est une constante), et si l'on a

$$h > 0, \quad k > 0, \quad h + k < p,$$

on a

$$\int_{a_m=0}^{(m-1)} L^{h+1-m}(X, A) r^{k-p}(A) dS_A < Q r^{h+k-p}(X),$$

où Q ne dépend que de m , de p , de h et de k (et non de la fonction f).

$r(A)$ est le minimum de $\sqrt{\sum_{\alpha < m-p} (a_\alpha - b_\alpha)^2 + \sum_{m-p \leq \alpha < m} a_\alpha^2 + f^2(b_1, \dots, b_{m-p-1})}$ quand b_1, \dots, b_{m-p-1} varient (a_m est nul); ce minimum est évidemment $\geq \sqrt{\sum_{m-p \leq \alpha < m} a_\alpha^2} = r'(A)$, cette relation définissant $r'(A)$. La partie de notre intégrale qui vient de la région $2L(X, A) \geq r(X)$, est donc au plus égale à

$$\int^{(m-1)} L^{h+1-m}(X, A) r'^{k-p}(A) dS_A,$$

étendue à la même région; elle est donc $\leq Q_1 r^{h+k-p}(X)$, d'après le paragraphe 9 (même convention qu'au paragraphe 7 pour la notation Q_n). Dans la région $2L(X, A) < r(X)$, nous avons $2r(A) > r(X)$; l'intégrale est donc inférieure à

$$2^{p-k} r^{k-p}(X) \int^{(m-1)} L^{h+1-m}(X, A) dS_A \leq Q_2 r^{h+k-p}(X),$$

d'après le paragraphe 4. Le résultat annoncé en résulte, avec $Q = Q_1 + Q_2$.

CHAPITRE II.

Problèmes du troisième type.

1. - **Hypothèses sur le domaine et sur les variétés de discontinuité.** — Dans l'espace euclidien à m dimensions ($m \geq 2$), où (x_1, x_2, \dots, x_m) est un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, nous considérons des variétés \mathfrak{M}_n à $m-n$ dimensions ($n=1, 2, \dots, m-1$) et un ensemble \mathfrak{M}_m d'un nombre fini de points. Quand n est $< m$, nous supposons que \mathfrak{M}_n remplit les conditions suivantes :

1). \mathfrak{M}_n peut être recouvert par un nombre fini de régions fermées $R_{n,\nu}$, dans chacune desquelles les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_m d'un point courant peuvent

être regardées comme des fonctions continues de $m-n$ paramètres t_1, \dots, t_{m-n} , le champ de variation de ces paramètres étant borné et fermé.

2). Les dérivées de x_1, \dots, x_m par rapport à t_1, \dots, t_{m-n} existent en tout point intérieur à $R_{n, \nu}$, et chacune coïncide avec une fonction continue dans $R_{n, \nu}$ (frontière comprise; il a été supposé que l'ensemble $R_{n, \nu}$ est fermé). Si n est égal à 1, on suppose en outre que ces dérivées remplissent une condition de LIPSCHITZ avec un exposant h ($0 < h \leq 1$) ⁽⁵⁾.

3). Les $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ jacobiens d'ordre $m-n$ de x_1, x_2, \dots, x_m par rapport à t_1, \dots, t_{m-n} ne s'annulent simultanément en aucun point de $R_{n, \nu}$.

4). Chaque point de \mathfrak{M}_n est intérieur à au moins une région $R_{n, \nu}$.

Nous ne formons aucune autre hypothèse, et par suite nous n'excluons pas que les \mathfrak{M}_n aient des points multiples, ni que ces variétés ne soient pas orientables, ni qu'elles ne soient pas connexes. Toutefois, d'après ces hypothèses, ces variétés sont closes: d'après la quatrième hypothèse, tout point de la frontière de $R_{n, \nu}$ est intérieur à au moins une autre région $R_{n, \mu}$, et par suite il est évident que \mathfrak{M}_n n'a pas de point-frontière, et que tout ensemble d'une infinité de points de \mathfrak{M}_n a au moins un point d'accumulation intérieur à au moins un des $R_{n, \nu}$.

Nous désignons par $r_n(X)$ la distance entre le point X et la variété \mathfrak{M}_n .

Les variétés \mathfrak{M}_n sont l'ensemble des points où certaines données des questions que nous étudierons, peuvent être discontinues de certaines façons (voir ci-après, §§ 2 et 3), mais nous n'excluons pas le cas où toutes les données seraient continues en certains points de cet ensemble. Il est donc possible que les discontinuités effectives forment des variétés non closes, c'est-à-dire des variétés qui satisferaient aux trois premières hypothèses précédentes, mais non à la quatrième. Si l'on donne une telle variété non close, à $m-n$ dimensions, il y a des cas où l'on peut lui ajouter un ensemble tel que la somme soit une variété close, remplissant toutes nos hypothèses: cela arrive notamment si la frontière de notre variété non close remplit les conditions imposées aux variétés \mathfrak{M}_{n+1} , car alors il est possible de considérer cette variété non close comme formée de deux feuillets superposés, qui seront prolongés séparément au delà de cette frontière, et raccordés à peu de distance de celle-ci; de telles variétés non closes seront accessibles à nos considérations, à condition qu'elles soient d'abord prolongées en variétés closes.

Dans le même espace euclidien, nous considérons un domaine ⁽⁶⁾ borné \mathfrak{D} , dont la frontière \mathfrak{S} remplit les conditions imposées à \mathfrak{M}_1 et en outre les conditions suivantes:

⁽⁵⁾ Par définition, dire qu'une fonction $f(X)$ remplit une condition de LIPSCHITZ d'exposant h exprime que $[f(X) - f(Y)]L^{-h}(X, Y)$ reste borné quand X et Y varient de façon que leur distance $L(X, Y)$ reste bornée ($0 < h \leq 1$).

⁽⁶⁾ Le mot *domaine* signifie pour nous: *ensemble ouvert connexe* (il ne s'agit que de la connexion linéaire).

5). Dans la partie commune à deux régions $R_{1,\mu}$ et $R_{1,\nu}$, le jacobien des paramètres propres à $R_{1,\mu}$ par rapport aux paramètres propres à $R_{1,\nu}$ est positif.

6). \mathfrak{S} n'a pas de point multiple. Cela signifie que, d'une part, un point d'une région $R_{1,\nu}$ ne peut être donné par deux systèmes distincts de valeurs des paramètres propres à cette région, et d'autre part, si deux régions $R_{1,\mu}$ et $R_{1,\nu}$ ont un point commun, la frontière de l'ensemble des points communs à ces régions appartient à la somme des frontières de $R_{1,\mu}$ et de $R_{1,\nu}$.

La cinquième hypothèse est toujours réalisable pour \mathfrak{S} si les quatre premières (celles qui sont relatives à \mathfrak{M}_1) sont remplies, car la frontière d'un domaine est orientable.

Les \mathfrak{M}_n peuvent occuper des positions quelconques par rapport à \mathfrak{D} , et notamment nous n'excluons pas le cas où \mathfrak{S} ferait partie de \mathfrak{M}_1 .

2. - Hypothèses sur l'équation du type elliptique. — Dans l'ensemble fermé $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, qui remplit les conditions posées dans le paragraphe 1, nous considérons $m^2 + m + 2$ fonctions données $a_{\alpha,\beta}(X)$, $b_\alpha(X)$, $c(X)$ et $f(X)$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$), qui remplissent les conditions suivantes: les $a_{\alpha,\beta}$ remplissent des conditions de LIPSCHITZ avec l'exposant h , où h désigne le même nombre qu'au paragraphe 1, et nous supposons que, en tout point X de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, la forme quadratique $\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} z_\alpha z_\beta$ est définie et positive (il est ici essentiel de ne pas exclure le cas où $a_{\alpha,\beta}$ différerait de $a_{\beta,\alpha}$); les m fonctions b_1, b_2, \dots, b_m sont continues aux points de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \mathfrak{M}_1$, et valent $O(r_1^{h-1})$ (7); $c(X)$ est continu aux points de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$, et vaut $O(r_1^{h-1} + r_2^{h-2})$; enfin f est continu aux points de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \sum_n \mathfrak{M}_n$ et vaut $O(\sum_n r_n^{h-n})$.

Ces fonctions nous servent à former l'équation

$$(1) \quad \mathfrak{F}u = f,$$

où u est une fonction inconnue; \mathfrak{F} est une opération du type elliptique, qui, quand les dérivées secondes de u existent, est définie par l'identité

$$\mathfrak{F}u = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu;$$

cette définition est élargie de la façon connue (8) qui est applicable à certaines fonctions u dépourvues de dérivées secondes, à condition que le point variable X ne vienne pas sur $\mathfrak{S} + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$. Les fonctions u que nous chercherons, devront satisfaire à l'équation (1) en tout point de $\mathfrak{D} - \sum_n \mathfrak{M}_n$, leurs dérivées devront

(7) Les symboles O et o sont les symboles de LANDAU: $z = O(z)$ signifie que yz^{-1} est borné; $y = o(z)$ signifie que yz^{-1} tend vers zéro dans certaines conditions qu'il faut spécifier.

(8) Cette généralisation, dont le principe est dû à STANISLAS ZAREMBA, a été indiquée dans *B. A. G.*, 3^{me} partie, chap. I, § 3, et, d'une façon plus détaillée, dans *g*, chap. I.

exister et être continues en tout point de $\mathfrak{D} - \Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$, et ces fonctions u devront remplir la condition

$$(2) \quad \lim \frac{u}{\log(4R) - \log r_2 + \Sigma_{n \geq 3} r_n^{2-n}} = 0$$

quand le dénominateur de la fonction sous le signe limite augmente indéfiniment; $2R$ représente la longueur de la plus grande corde de \mathfrak{S} ; nous exprimerons l'ensemble de ces conditions en disant que u doit être une solution régulière de l'équation (1) dans le domaine \mathfrak{D} .

3. - **Hypothèses sur la condition à la frontière.** — Soit Y un point quelconque de \mathfrak{S} , et soient $\bar{\omega}_\alpha(Y)$ ($\alpha=1, 2, \dots, m$) les cosinus directeurs de la normale à \mathfrak{S} en Y , cette normale étant dirigée dans le sens sortant de \mathfrak{D} . Nous désignons par Y_t un point dont les coordonnées sont

$$y_\alpha - t \Sigma_\beta a_{\alpha, \beta} \bar{\omega}_\beta + o\left(\frac{t}{\log t}\right), \quad (t > 0; \alpha=1, 2, \dots, m),$$

où $o(\lambda)$ désigne une grandeur dont le quotient par λ est infiniment petit avec λ (les grandeurs ainsi désignées ne sont pas nécessairement les mêmes dans chacune des m coordonnées de Y_t). Soit encore $\psi(Y)$ une fonction donnée d'un point Y de \mathfrak{S} , continue en tout point de $\mathfrak{S} - \mathfrak{M}_2$ et valant $O(r_2^{h-1})$. Quand le nombre positif t est assez petit, le point Y_t appartient à \mathfrak{D} , car d'une part ce point est alors arbitrairement voisin de Y , et d'autre part le cosinus de l'angle entre la demi-droite YY_t et la demi-normale dirigée vers l'intérieur de \mathfrak{D} tend vers la limite positive

$$\frac{\Sigma_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} \bar{\omega}_\alpha \bar{\omega}_\beta}{\sqrt{\Sigma_\alpha (\Sigma_\beta a_{\alpha, \beta} \bar{\omega}_\beta)^2}}$$

quand t tend vers zéro. Posons alors

$$(3) \quad \Theta u(Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(Y) - u(Y_t)}{t} + \psi(Y)u(Y),$$

pourvu seulement que la fonction u soit telle que cette limite existe et soit indépendante des grandeurs $o\left(\frac{t}{\log t}\right)$ qui figurent dans les coordonnées de Y_t .

Soit maintenant $\varphi(Y)$ une fonction donnée d'un point Y de \mathfrak{S} , continue en tout point de $\mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$ et valant $O(\Sigma_{n \geq 2} r_n^{h+1-n})$. Les fonctions u que nous chercherons, devront être continues en tout point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$ et elles devront satisfaire en tout point de $\mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$ à la condition

$$(4) \quad \Theta u(Y) = \varphi(Y).$$

La recherche d'une fonction u qui remplisse à la fois les conditions expliquées dans le paragraphe 2 et dans le présent paragraphe, est ce que nous nommons

un problème du troisième type. Dans le cas particulier où l'on a en tout point de \mathfrak{S} toutes les identités $a_{\alpha, \beta} = a_{\beta, \alpha}$, le problème se réduit au second type, qui a déjà été traité avec le degré de généralité ici considéré (I, II, §§ 6 à 11). Si l'une des relations $a_{\alpha, \beta} = a_{\beta, \alpha}$ n'est pas satisfaite en un point de \mathfrak{S} , mais que les variétés \mathfrak{M}_n dont l'indice n est ≥ 2 soient sans point commun avec $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, notre problème du troisième type a déjà été traité (j, IV) ⁽⁹⁾.

On remarque que, si u est solution d'un problème du troisième type, toute fonction identique à u dans l'ensemble $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$ est aussi une solution du même problème. Nous ne considérerons comme distinctes que les solutions qui diffèrent en des points non situés sur l'ensemble $\Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$. Les valeurs prises par u sur ce dernier ensemble n'interviennent pas dans la question; il suffit donc de définir nos fonctions u dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$.

4. - **Théorème.** — *Outre les hypothèses des paragraphes 2 et 3, supposons que la fonction donnée c soit ≤ 0 dans tout \mathfrak{D} , et que la fonction donnée ψ soit ≥ 0 sur tout \mathfrak{S} . Supposons encore que c et ψ ne sont pas simultanément presque partout nuls (c'est-à-dire: supposons qu'une au moins de ces fonctions n'est pas nulle en un des points où, par hypothèse, elle est continue). Enfin supposons que les fonctions données f et φ sont identiquement nulles (nous considérons donc le problème homogène relatif aux opérations \mathfrak{J} et Θ). Alors l'inconnue u de notre problème est identiquement nulle dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 2} \mathfrak{M}_n$.*

La démonstration suivante est analogue à celle qui a été donnée pour les problèmes du second type (I, II, § 8).

Pour éviter des longueurs, nous remarquons que le cas de deux dimensions peut être ramené au cas de trois dimensions (voir plus loin, § 16). Nous supposons donc, dans la suite de ce paragraphe, qu'on a $m \geq 3$. Nous supposons aussi que tous les \mathfrak{M}_n d'indice $n \geq 2$ pénètrent dans \mathfrak{D} ; s'il n'en était pas ainsi, nous ajouterions des variétés \mathfrak{M}_n des indices manquants, et le théorème en résulterait *a fortiori*.

Soit χ une fonction ≤ 0 d'un point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et telle que $c - \chi$ soit continu et ≤ 0 dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$. Soit ω une fonction ≥ 0 d'un point de \mathfrak{S} , et telle que $\psi - \omega$ soit continu et ≥ 0 sur tout \mathfrak{S} . Nous faisons en sorte que $c - \chi$ et $\psi - \omega$ ne soient pas simultanément identiquement nuls. Désignons respectivement par $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et par $\Theta - \omega \times (\dots)$ les opérations qui, appliquées à une fonction quelconque λ , donnent les résultats $\mathfrak{J}\lambda - \chi\lambda$ et $\Theta\lambda - \omega\lambda$. Pour ces opérations, la variété \mathfrak{M}_2 n'inter-

⁽⁹⁾ En effet le vecteur qui a pour composantes les expressions $\Sigma_{\beta} (a_{\alpha, \beta} - a_{\beta, \alpha}) \bar{\omega}_{\beta}$, est perpendiculaire à la normale à \mathfrak{S} , et l'on peut, sans changer les sommes $a_{\alpha, \beta} + a_{\beta, \alpha}$, ni par suite l'opération \mathfrak{J} , choisir les différences $a_{\alpha, \beta} - a_{\beta, \alpha}$ de façon que ce vecteur ait des composantes données, pourvu que celles-ci remplissent la condition d'orthogonalité avec la normale. Les deux manières de poser le problème se ramènent donc l'une à l'autre.

vient pas; nous savons donc qu'une fonction de GREEN leur correspond (j , IV, § 3); soit $F(X, \mathcal{E})$ cette fonction de GREEN. Nous savons que

$$F(X, \mathcal{E})L^{m-2}(X, \mathcal{E})$$

est borné ($m > 2$) (i , IV, § 6 et j , IV) ⁽¹⁰⁾.

Je dis que la borne inférieure de cette même expression est positive. Pour le voir, nous remarquons d'abord que, quand X occupe sur \mathfrak{S} une position donnée et que \mathcal{E} varie dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, la partie positivement homogène et d'ordre $2 - m$ de F (pour $m > 2$) ne dépend que des valeurs prises en X par toutes les fonctions $a_{\alpha, \beta}$ et $\bar{\omega}_\alpha$; la différence entre F et cette partie a une limitation connue $O[L^{2+k-m}(X, \mathcal{E})]$ ($0 < k < 1$). Mais la partie positivement homogène et d'ordre $2 - m$ a une borne inférieure $2a_1L^{2-m}(X, \mathcal{E})$, où a_1 est positif (j , IV, § 4). Nous avons donc, quand X appartient à \mathfrak{S} ,

$$F(X, \mathcal{E}) > [2a_1 - QL^k(X, \mathcal{E})]L^{2-m}(X, \mathcal{E}) \quad (Q > 0).$$

Si donc L est assez petit pour qu'on ait $QL^k \leq a_1$, F est $> a_1L^{2-m}$. Supposons maintenant que X varie sur \mathfrak{S} , et \mathcal{E} dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, de façon qu'on ait $QL^k(X, \mathcal{E}) \geq a_1$; le champ ainsi défini est borné et fermé, et FL^{m-2} y est partout continu et positif; FL^{m-2} a donc dans ce champ une borne inférieure positive a_2 . Soit a_3 le plus petit des nombres positifs a_1 et a_2 ; nous avons

$$F(X, \mathcal{E}) \geq a_3L^{2-m}(X, \mathcal{E}) \quad (X \text{ sur } \mathfrak{S}).$$

Mais nous ne voulons pas nous borner au cas où X appartient à \mathfrak{S} . Prolongeons l'opération $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ dans tout l'espace, de façon qu'elle admette une solution fondamentale principale $G(X, \mathcal{E})$ (h , III, § 2) (on pourrait d'ailleurs faire jouer le rôle de G par d'autres fonctions, par exemple par les fonctions de GREEN de certains problèmes du second type). On sait que G admet une limitation

$$|G(X, \mathcal{E})| < Q_1L^{2-m}(X, \mathcal{E}) \quad (m > 2),$$

où Q_1 est une constante. Déterminons une constante a_4 par l'équation $a_4 = Q_1a_3$, et soit a_5 plus petit des nombres a_4 et $\frac{1}{2}$. Quel que soit \mathcal{E} , la fonction $F(X, \mathcal{E}) - a_5G(X, \mathcal{E})$ est > 0 quand X appartient à \mathfrak{S} . Mais si \mathcal{E} occupe une position donnée dans \mathfrak{D} ,

⁽¹⁰⁾ Dans i , IV, § 6, page 363, la limitation

$$F(X, \mathcal{E}) = O[L^{2-m}(X, \mathcal{E})]$$

n'est valable que pour $m > 2$. Pour $m = 2$, on a

$$F(X, \mathcal{E}) = O[\log(4R) - \log L(X, \mathcal{E})],$$

avec la notation du présent travail (voir plus loin, § 16).

cette même fonction est positive quand X appartient à un certain voisinage de \mathcal{E} . Quand X varie dans la partie de \mathfrak{D} extérieure à ce voisinage, cette même fonction est une solution régulière de l'équation $\mathbf{F} - \chi \times (\dots) = 0$, et par suite elle n'y peut atteindre aucun minimum ≤ 0 (h , II, §§ 14 et 15); la fonction étant positive à la frontière de ce champ, c'est-à-dire sur \mathfrak{S} et à la frontière du voisinage, elle est partout positive. Nous avons donc, quels que soient \mathcal{E} dans \mathfrak{D} et X dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$,

$$F(X, \mathcal{E}) > a_5 G(X, \mathcal{E}),$$

ce qui entraîne

$$F(X, \mathcal{E}) > a_6 L^{2-m}(X, \mathcal{E}) \quad (a_6 > 0),$$

car GL^{m-2} a une borne inférieure positive quand L est borné. Dans le cas-limite où \mathcal{E} vient sur \mathfrak{S} , l'inégalité peut tout au plus se changer en égalité. L'assertion du début de cet alinea est donc établie.

Il existe donc des constantes positives a et b , telles qu'on ait

$$(5) \quad aL^{2-m}(X, \mathcal{E}) < F(X, \mathcal{E}) < bL^{2-m}(X, \mathcal{E}),$$

quels que soient X et \mathcal{E} dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$.

Dans l'ensemble \mathfrak{SM}_n commun à \mathfrak{S} et à \mathfrak{M}_n ($n < m$), considérons l'ensemble des points où \mathfrak{M}_n est tangent à \mathfrak{S} ; si cet ensemble n'est pas vide, il est fermé. Chaque point Y de cet ensemble est intérieur à une région de \mathfrak{S} où une coordonnée x_m d'un point courant de \mathfrak{S} est une fonction continue et continûment dérivable des $m-1$ autres,

$$x_m = f_1(x_1, \dots, x_{m-1});$$

le même point Y est intérieur à une région de \mathfrak{M}_n où les coordonnées d'un point courant s'expriment par des fonctions continues et continûment dérivables de $m-n$ paramètres, et les jacobiens d'ordre $m-n$ de ces m fonctions ne s'annulent simultanément nulle part; donc les jacobiens d'ordre $m-n$ des m fonctions $x_1, \dots, x_{m-1}, x_m - f_1(x_1, \dots, x_{m-1})$, par rapport aux mêmes paramètres, ne s'annulent simultanément nulle part; par conséquent n de ces fonctions sont fonctions continues et continûment dérivables des $m-n$ autres; on doit remarquer que, d'après l'hypothèse du contact entre \mathfrak{S} et \mathfrak{M}_n , $x_m - f_1$ n'est pas au nombre des fonctions qui peuvent remplacer les paramètres; on a donc les relations

$$(6) \quad \begin{cases} x_a = g_a(x_1, \dots, x_{m-n}) & (n > 1; \quad m-n < a < m), \\ x_m - f_1(x_1, \dots, x_{m-1}) = g_m(x_1, \dots, x_{m-n}), \end{cases}$$

qui représentent \mathfrak{M}_n dans un certain voisinage de Y , et les dérivées de g_m sont nulles en Y . Tout point de l'ensemble fermé des points de contact entre \mathfrak{S} et \mathfrak{M}_n étant intérieur à une région où une telle représentation est valable, il en résulte qu'on peut choisir un nombre fini de ces représentations, de façon que tout point

de notre ensemble fermé soit intérieur à une région où une de ces représentations, en nombre fini, soit valable. Nous désignons par \mathfrak{N}_n l'ensemble fini des variétés

$$\begin{aligned} x_a &= g_a(x_1, \dots, x_{m-n}) & (m-n < a < m), \\ x_m &= f_1(x_1, \dots, x_{m-1}), \end{aligned}$$

prolongées en variétés closes, sans sortir de \mathfrak{S} .

Nous considérons alors la fonction

$$(7) \quad v(X) = \sum_{n \geq 2} \int_{\mathfrak{M}_n + \mathfrak{N}_n}^{(m-n)} F(X, A) dS_1^{(n)},$$

où $dS^{(n)}$ est l'élément euclidien de $\mathfrak{M}_n + \mathfrak{N}_n$; les intégrales sont étendues aux \mathfrak{N}_n et aux parties des \mathfrak{M}_n qui appartiennent à $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$; pour $n=m$, l'intégrale doit être remplacée par une somme ordinaire, étendue aux points A qui composent \mathfrak{M}_m . Nous voulons établir l'existence d'une constante positive μ , telle qu'on ait

$$(8) \quad v > \mu [\log(4R) - \log r_2 + \sum_{n \geq 3} r_n^{2-n}].$$

Il est d'abord évident que les termes relatifs à $n=m$ sont supérieurs au produit de r_m^{2-m} par une constante >0 . Pour $n < m$, d'après nos hypothèses sur les \mathfrak{M}_n , il existe un nombre positif ϱ , indépendant de n et du point X variable dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et tel qu'on puisse trouver un nombre fini de représentations paramétriques dont la réunion donne tous les points de \mathfrak{M}_n situés dans la région $L(X, A) \leq \varrho$, la frontière de chacune des régions de \mathfrak{M}_n où une de ces représentations est valable devant être tout entière située dans la région $L(X, A) > \varrho$. Nous faisons en sorte que ces représentations paramétriques consistent dans les expressions de n coordonnées cartésiennes au moyen de fonctions continues et continûment dérivables des $m-n$ autres coordonnées, et que la partie de \mathfrak{S} située dans $L(X, A) \leq \varrho$ soit, quel que soit X , représentable par l'expression d'une coordonnée α_a en fonction des $m-1$ autres. Plaçons-nous d'abord dans le cas où le point X est à une distance de \mathfrak{S} supérieure à ϱ . Soit, pour fixer les idées,

$$\alpha_a = h_a(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-n}) \quad (a > m-n)$$

une des représentations, en nombre fini, qui donnent \mathfrak{M}_n dans la région $L(X, A) \leq \varrho$; nous choisissons une des représentations qui donnent un point A dont la distance à X est $r_n(X)$. La transformation biunivoque

$$\begin{aligned} y'_a &= y_a \quad \text{pour } a \leq m-n, \\ y'_a &= y_a - h_a(y_1, \dots, y_{m-n}) \quad \text{pour } a > m-n, \end{aligned}$$

définit des coordonnées non cartésiennes y'_a pour tout point Y de la région

$L(X, Y) \leq \varrho$. Si a_1', \dots, a_m' sont les transformées des coordonnées cartésiennes a_1, \dots, a_m , il est clair que le rapport $\frac{\sum_a (y_a - a_a)^2}{\sum_a (y_a' - a_a')^2}$ oscille entre deux bornes positives quand Y et A varient dans la région $L(X, Y) \leq \varrho$: la borne inférieure est positive parce que les dérivées des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes, sont bornées; la borne supérieure est finie, parce qu'on peut écrire

$$y_a = y_a' \quad \text{pour } a \leq m - n,$$

$$y_a = y_a' + h_a(y_1', \dots, y_{m-n}') \quad \text{pour } a > m - n,$$

d'où résulte que les dérivées des anciennes coordonnées par rapport aux nouvelles, sont bornées. De même $dS_A^{(n)}$ est égal au produit de $d(a_1, \dots, a_{m-n})$ (que beaucoup d'auteurs écrivent $da_1 \dots da_{m-n}$) par une fonction dont les bornes sont positives. Donc la partie de $v(X)$ qui provient de la région considérée de \mathfrak{M}_n , est supérieure au produit d'une constante positive par

$$\int^{(m-n)} [(x_1' - a_1')^2 + \dots + (x_{m-n}' - a_{m-n}')^2 + x_{m-n+1}'^2 + \dots + x_m'^2]^{\frac{2-m}{2}} d(a_1', \dots, a_{m-n}'),$$

et l'intégrale doit être étendue à une région qui contient

$$(x_1' - a_1')^2 + \dots + (x_{m-n}' - a_{m-n}')^2 + x_{m-n+1}'^2 + \dots + x_m'^2 < q_1^2 \varrho^2,$$

où q_1 est positif et constant. Si n est > 2 , cette intégrale ne diffère que par une quantité bornée de l'intégrale étendue au champ illimité de toutes les valeurs de a_1', \dots, a_{m-n}' , et cette dernière est égale au produit de $(\sum_{m-n < a \leq m} x_a'^2)^{\frac{2-n}{2}}$ par une constante positive (le calcul est indiqué dans le paragraphe 1 du chapitre I). Mais $\sum_{m-n < a \leq m} x_a'^2$ est inférieur au produit de $r_n^2(X)$ par une constante. Cette partie de $v(X)$ est donc, si r_n est assez petit, supérieure au produit de $r_n^{2-n}(X)$ par une constante positive, et le reste de l'intégrale étendue à $\mathfrak{M}_n + \mathfrak{N}_n$ est positif. Si n est égal à deux, l'intégrale est égale à

$$\frac{2\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int_1^{\frac{q_1 \varrho}{\sqrt{x_{m-1}'^2 + x_m'^2}}} \frac{(u^2 - 1)^{\frac{m-4}{2}}}{u^{m-3}} du$$

(calcul inclus dans le chapitre I, § 3, cas où l'on a $l \leq |x_m| < R$); cette valeur surpasse

$$\frac{2\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \int_1^{\frac{q_2 \varrho}{r^2}} \frac{(u^2 - 1)^{\frac{m-4}{2}}}{u^{m-3}} du,$$

où q_2 est une constante positive; si m est égal à *trois* ou à *quatre*, le coefficient

de du , sous le signe d'intégration, est au moins égal à u^{-1} , et notre intégrale est au moins égale au produit de $\log \frac{q_2 \varrho}{r_2}$ par 2 ou par 2π ; si m est ≥ 5 , il nous suffit de considérer le cas où $2r_2$ est $< q_2 \varrho$, et alors l'intégrale surpasse

$$\frac{\frac{m-2}{2\pi} \frac{m-4}{2}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{m-4}{2}} \int_2^{\frac{q_2 \varrho}{r_2}} \frac{du}{u},$$

et par suite elle surpasse le produit de $\log \frac{q_2 \varrho}{2r_2}$ par une constante. Du reste nous pouvons écrire, dès que r_2 est assez petit,

$$\log \frac{q_2 \varrho}{2r_2} > \frac{1}{2} \log \frac{4R}{r_2}.$$

L'intégrale étendue à \mathfrak{M}_2 est donc supérieure au produit de $\log \frac{4R}{r_2}$ par une constante positive, dès que r_2 est assez petit.

Supposons maintenant que la région $L(X, A) \leq \varrho$ contienne des points de \mathfrak{S} . Soit, pour fixer les idées,

$$x_m = f_1(x_1, \dots, x_{m-1})$$

une représentation de \mathfrak{S} , valable dans toute la région $L(X, A) \leq \varrho$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où, dans la même région, \mathfrak{M}_n est susceptible de la représentation (6) [il s'agit d'une partie de \mathfrak{M}_n qui contienne un point A tel qu'on ait $L(X, A) = r_n(X)$]. Alors nous considérons, en même temps que cette partie de \mathfrak{M}_n , la partie de \mathfrak{N}_n formée par les points d'intersection de \mathfrak{S} avec les droites menées par les points de cette partie de \mathfrak{M}_n , parallèlement à l'axe de la coordonnée x_m . Nous devons considérer l'intégrale

$$a \int L^{(m-n)}(X, A) dS_A^{(n)},$$

étendue à la somme de cette partie de \mathfrak{N}_n et de la partie de \mathfrak{M}_n qui appartient à la fois à $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ et à la région $L(X, A) \leq \varrho$. Or le rapport de deux éléments correspondants du champ, pris sur \mathfrak{M}_n et sur \mathfrak{N}_n , est compris entre deux bornes positives, car chacun de ces éléments est le produit de $d(a_1, \dots, a_{m-1})$ par un facteur borné supérieur à un . En outre la distance de X à un point de \mathfrak{M}_n , situé dans la région $L(X, A) \leq \varrho$, mais non situé dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, est supérieure au produit de la distance de X au point correspondant de \mathfrak{N}_n , par une constante positive: cela se voit en passant par l'intermédiaire de la transformation biunivoque

$$y'_\alpha = y_\alpha (\alpha \leq m-1), \quad y'_m = y_m - f_1(y_1, \dots, y_{m-1}),$$

et en remarquant que, si x'_m et a'_m sont de signes opposés, on a

$$\sum_{\alpha=1}^m (x'_\alpha - a'_\alpha)^2 > \sum_{\alpha=1}^{m-1} (x'_\alpha - a'_\alpha)^2 + x'^2_m.$$

Donc la somme des intégrales étendues à ces parties de \mathfrak{M}_n et de \mathfrak{N}_n est supérieure au produit d'une constante positive par l'intégrale

$$\int^{(m-n)} L^{2-m}(X, A) dS_A^{(n)},$$

étendue à toute la partie de \mathfrak{M}_n située dans la région $L(X, A) \leq \rho$. Nous obtenons donc la même conclusion que quand la distance entre X et \mathfrak{S} surpasse ρ .

Si maintenant, dans la région $L(X, A) \leq \rho$, une partie de \mathfrak{M}_n qui contient un point A dont la distance à X est $r_n(X)$, n'est pas susceptible de la représentation (6), nous avons une représentation

$$(9) \quad \alpha_a = h_a[a_1, \dots, a_{m-n-1}, a_m - f_1(a_1, \dots, a_{m-1})] \quad (m-n \leq a < m).$$

Dans ce cas, nous changeons de coordonnées en posant

$$y'_\alpha = \begin{cases} y_\alpha & (\alpha < m-n), \\ y_\alpha - h_\alpha[y_1, \dots, y_{m-n-1}, y_m - f_1(y_1, \dots, y_{m-1})] & (m-n \leq \alpha < m), \\ y_m - f_1(y_1, \dots, y_{m-1}) & (\alpha = m); \end{cases}$$

ce changement est biunivoque, car il résulte des changements successifs

$$y''_\alpha = y_\alpha \quad (\alpha < m), \quad y''_m = y_m - f_1(y_1, \dots, y_{m-1}),$$

$$y'_\alpha = \begin{cases} y''_\alpha & (\alpha < m-n), \\ y''_\alpha - h_\alpha(y''_1, \dots, y''_{m-n-1}, y''_m) & (m-n \leq \alpha < m), \\ y''_m & (\alpha = m); \end{cases}$$

la même décomposition montre que le jacobien est un . D'après des raisonnements faits un peu plus haut, nous avons une intégrale supérieure au produit d'une constante positive par l'intégrale

$$(10) \quad \int^{(m-n)} [(x'_1 - \alpha'_1)^2 + \dots + (x'_{m-n-1} - \alpha'_{m-n-1})^2 + x'^2_{m-n} + \dots + x'^2_{m-1} + (x'_m - \alpha'_m)^2]^{\frac{2-n}{2}} d(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{m-n-1}, \alpha'_m)$$

étendue au champ défini par les inégalités simultanées

$$(11) \quad (x'_1 - \alpha'_1)^2 + \dots + (x'_{m-n-1} - \alpha'_{m-n-1})^2 + x'^2_{m-n} + \dots + x'^2_{m-1} + (x'_m - \alpha'_m)^2 < q_1 \varrho,$$

$$(12) \quad \alpha'_m > 0,$$

en supposant, pour fixer les idées, que la dernière inégalité définisse \mathfrak{D} dans notre région $L(X, A) \leq \rho$. Mais cette dernière intégrale est supérieure à la moitié de ce qu'elle deviendrait si on l'étendait au champ défini par la seule inégalité (11); en effet si, dans une solution de (11) et de l'inégalité $\alpha'_m < 0$, on remplace α'_m par son opposé, on a une solution des inégalités simultanées (11) et (12), car x'_m est

positif, et d'autre part ce changement augmente la fonction intégrée dans (10). Nous pouvons donc étendre l'intégrale (10) à tout le champ (11), à condition de diviser le résultat par *deux*: les inégalités visées subsisteront. Le raisonnement s'achève donc comme dans le premier cas.

Comme la borne supérieure de r_2 dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ est $\leq 2R$, nous avons donc établi l'inégalité (8). Cette inégalité subsiste même si l'on y remplace chaque r_n par r'_n , distance entre X et $\mathfrak{M}_n + \mathfrak{N}_n$, pourvu simplement qu'on choisisse convenablement la constante positive μ .

Mais alors, si u est une solution de notre problème homogène, $u + \lambda v$ a le signe de la constante λ dès que $\log(4R) - \log r'_2 + \sum_{n \geq 3} r_n'^{2-n}$ est assez grand. Or nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(u + \lambda v) &= \lambda \chi v && \text{dans } \mathfrak{D} - \sum_n (\mathfrak{M}_n + \mathfrak{N}_n), \\ \Theta(u + \lambda v) &= \lambda \omega v && \text{dans } \mathfrak{S} - \sum_{n \geq 2} (\mathfrak{M}_n + \mathfrak{N}_n). \end{aligned}$$

Comme v est positif, on en déduit que, si λ est positif, $u + \lambda v$ ne peut atteindre un minimum ≤ 0 en aucun point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \sum_{n \geq 2} (\mathfrak{M}_n + \mathfrak{N}_n)$ (*h*, II, §§ 14 et 15, et IV, § 3); donc $u + \lambda v$ est alors positif dans tout ce champ. De même, si λ est négatif, $u + \lambda v$ est négatif dans le même champ. Comme λ est arbitraire, u est nul dans tout ce champ, ce qu'il fallait démontrer.

Le lecteur a reconnu dans cette démonstration un type de raisonnement déjà employé par STANISLAS ZAREMBA ⁽¹¹⁾.

5. - Théorème. — *Si, outre les hypothèses des paragraphes 2 et 3, les fonctions c et $-\psi$ sont ≤ 0 sans être toutes deux presque partout nulles, le problème posé dans les paragraphes 2 et 3 admet une et une seule solution, quels que soient f et φ . Il est possible de définir la fonction u de façon qu'elle soit continue même aux points de $(\mathfrak{D} + \mathfrak{S})\mathfrak{M}_2 - \sum_{n \geq 3} \mathfrak{M}_n$, donc en tout point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \sum_{n \geq 3} \mathfrak{M}_n$; si la constante h des paragraphes 1 à 3 est < 1 , la fonction u ainsi définie vaut $O(\sum_{n \geq 3} r_n^{h+2-n})$.*

Tout d'abord, d'après le paragraphe précédent, il n'y a pas deux fonctions u . Soit maintenant $F^*(X, \mathfrak{E})$ la fonction de GREEN relative aux opérations $\mathfrak{F} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$ du paragraphe précédent. L'équation en u

$$\begin{aligned} (13) \quad u(X) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A) \chi(A) u(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X, B) \omega(B) u(B) dS_B = \\ = - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A) f(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X, B) \varphi(B) dS_B \end{aligned}$$

⁽¹¹⁾ STANISLAS ZAREMBA: *Sur l'unicité de la solution du problème de Dirichlet.* (« Bull. intern. Acad. sciences Cracovie », 5 avril 1909, pp. 561 à 563).

est une équation de FREDHOLM, à cause des limitations de F^* , de χ et de ω (même raisonnement que dans l'article f , chapitre I, § 8; les effets de l'itération se déduisent des propositions démontrées dans le chapitre I du présent travail, moyennant des changements de variables; voir h , I, § 4). Pour cette équation, on peut prendre $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 3} \mathfrak{M}_n$ comme champ où les deux membres doivent être égaux, et alors toute solution u est continue en tout point de ce champ, et admet la limitation de l'énoncé. Il en résulte tout de suite que toute solution de (13) est solution de notre problème du troisième type. Donc l'équation homogène correspondante n'a que la solution zéro (§ 4); notre énoncé en résulte.

6. - Théorème. — *Dans les hypothèses générales des paragraphes 1 à 3, le problème du troisième type peut toujours être ramené à une équation de Fredholm. Toute solution u peut être définie de façon à être continue en tout point du champ $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Sigma_{n \geq 3} \mathfrak{M}_n$, et alors elle vaut $O(\Sigma_{n \geq 3} r_n^{2+h-n})$, pourvu que la constante h des paragraphes 1 à 3 soit < 1 .*

Plaçons-nous d'abord dans le cas où les \mathfrak{M}_n dont l'indice n est ≥ 3 , n'existent pas. Alors si u est une solution de notre problème, et si χ et ω remplissent respectivement les mêmes conditions que c et ψ , χu et ωu remplissent respectivement les mêmes conditions que f et φ , à condition d'y remplacer h par un nombre positif donné $k < h$; car, en distinguant la région $r_1 > r_2$ de la région $r_1 \leq r_2$, on constate que le produit $[\log(4R) - \log r_2] (r_1^{h-1} + r_2^{h-2})$ admet une limitation $O(r_1^{k-1} + r_2^{k-2})$ ($0 < k < h$). Or les équations (1) et (4) s'écrivent aussi

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}u - \chi u &= f - \chi u, \\ \Theta u - \omega u &= \varphi - \omega u. \end{aligned}$$

Si donc χ et ω sont choisis de façon que $c - \chi$ et $\omega - \psi$ soient ≤ 0 sans être tous deux presque partout nuls, notre problème équivaut à l'équation (13), en désignant par F^* la fonction de GREEN relative aux opérations $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$. On vérifie ainsi l'énoncé dans ce cas.

Comme les \mathfrak{M}_n dont l'indice n est ≥ 3 , n'interviennent pas dans la formation des fonctions de GREEN, nous en concluons que, si le problème homogène relatif aux opérations \mathfrak{J} et Θ n'admet que la solution zéro, il existe pour ces opérations une fonction de GREEN $F(X, \mathfrak{E})$, et l'on a

$$(14) \quad \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A) \chi(A) F^*(A, \mathfrak{E}) dV_A - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X, B) \omega(B) F^*(B, \mathfrak{E}) dS_B = F(X, \mathfrak{E}) - F^*(X, \mathfrak{E}),$$

$$(15) \quad \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A) \chi(A) F(A, \mathfrak{E}) dV_A - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X, B) \omega(B) F(B, \mathfrak{E}) dS_B = F(X, \mathfrak{E}) - F^*(X, \mathfrak{E});$$

chacune de ces relations est une équation de FREDHOLM dont F est l'unique solution. Quand F est connu, la solution du problème du troisième type est

$$u(X) = - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A) f(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X, B) \varphi(B) dS_B.$$

Ne supposons plus que $c - \chi$ et $\Theta - \psi$ soient ≤ 0 , mais supposons que les deux problèmes homogènes relatifs l'un aux opérations \mathfrak{J} et Θ , l'autre aux opérations $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$, n'admettent que zéro comme solution. Alors ces deux systèmes d'opérations admettent respectivement des fonctions de GREEN F et F^* , et l'on a encore les identités (14) et (15), car si F_0 est la fonction de GREEN relative aux opérations $\mathfrak{J} - c \times (\dots)$ et $\Theta + (1 - \psi) \times (\dots)$, et si l'on écrit les identités analogues à (14) et à (15) qui existent d'une part entre F et F_0 , et d'autre part entre F^* et F_0 , on peut éliminer F_0 , et cela donne les relations (14) et (15).

Nous allons démontrer que si F est fonction de GREEN pour les opérations \mathfrak{J} et Θ , chacune des identités (14) et (15) est condition suffisante pour que F^* soit fonction de GREEN pour les opérations $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$; ce qui précède montre que ces conditions sont nécessaires. Nous montrerons en même temps que, quand un problème de ce type admet une fonction de GREEN, il n'en admet jamais deux.

Tout d'abord, si l'équation (14) en F^* admet au moins une solution, on vérifie, en appliquant les opérations \mathfrak{J} et Θ aux deux membres de cette équation, les identités

$$\mathfrak{J}F^*(X, \Xi) = \chi(X)F^*(X, \Xi), \quad \Theta F^*(X, \Xi) = \omega(X)F^*(X, \Xi);$$

comme on a aussi, d'après (14),

$$(16) \quad F^*(X, \Xi) - F(X, \Xi) = O[L^{2+k-m}(X, \Xi)], \quad (0 < k < 1) \quad \text{pour } m > 2$$

(pour $m = 2$, on trouvera, d'après le paragraphe 16, que cette différence est bornée, ce qui a les mêmes conséquences), F^* est une fonction de GREEN pour les opérations $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$, et le problème du troisième type relatif aux équations

$$\mathfrak{J}u - \chi u = f, \quad \Theta u - \omega u = \varphi,$$

admet la solution

$$u(X) = - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A) f(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X, B) \varphi(B) dS_B.$$

Or nous savons déjà que si un tel problème admet une solution quels que soient f et ω , il n'en admet qu'une; donc le problème homogène relatif à $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et à $\Theta - \omega \times (\dots)$ n'admet que la solution zéro.

Ne supposons plus rien sur l'équation (14), mais supposons que l'équation (15) en F^* admette au moins une solution. Le système homogène associé à (15) est

$$(17) \quad \begin{cases} u_1(X) + \chi(X) \left[\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A) u_1(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X, B) v_1(B) dS_B \right] = 0, \\ v_1(Y) - \omega(Y) \left[\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(Y, A) u_1(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(Y, B) v_1(B) dS_B \right] = 0, \end{cases}$$

où u_1 et v_1 sont les inconnues ; X varie dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et Y varie sur \mathfrak{S} . L'équation (15) étant compatible, nous avons, pour toute solution (u_1, v_1) de (17), l'identité

$$\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A) u_1(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X, B) v_1(B) dS_B = 0.$$

Comme les fonctions u_1 et v_1 sont continues, il suffit d'appliquer aux deux membres de cette identité les opérations \mathfrak{J} et Θ pour en déduire

$$u_1(X) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2, \quad v_1(Y) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathfrak{S} - \mathfrak{M}_2.$$

Donc l'équation (15) n'admet qu'une seule solution F^* . En formant, pour les deux membres de (15), l'expression dont la limite sert à définir l'opération $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ (g , chap. I), et en passant à la limite, nous trouvons que cette opération est applicable à F^* dans $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 - \mathfrak{E}$, et qu'on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} [\mathfrak{J} F^*(X, A) - \chi(X) F^*(X, A)] \chi(A) F(A, \mathfrak{E}) dV_A - \\ & \quad - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} [\mathfrak{J} F^*(X, B) - \chi(X) F^*(X, B)] \omega(B) F(B, \mathfrak{E}) dS_B = \\ & = - \mathfrak{J} F^*(X, \mathfrak{E}) + \chi(X) F^*(X, \mathfrak{E}); \end{aligned}$$

d'après ce que nous venons de voir, cela entraîne

$$\mathfrak{J} F^*(X, \mathfrak{E}) - \chi(X) F^*(X, \mathfrak{E}) = 0.$$

On établit de même l'identité

$$\Theta F^*(Y, \mathfrak{E}) - \omega(Y) F^*(Y, \mathfrak{E}) = 0.$$

Comme en outre $F^* - F$ admet la limitation (16), F^* est fonction de GREEN pour les opérations $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$.

Notre assertion relative au caractère nécessaire et suffisant de chacune des identités (14) et (15) est donc établie, et nous voyons aussi qu'aucune de ces identités ne peut avoir plus d'une solution F^* .

Si la fonction F de GREEN relative à \mathfrak{J} et à Θ existe, et si χ et ω varient en remplissant des conditions fixes

$$|\chi| < Q(r_1^{h-1} + r_2^{h-2}) \quad \text{et} \quad |\omega| < Qr_2^{h-1},$$

la fonction F^* existe en particulier quand $\chi(X)$ et $\omega(Y)$ ne diffèrent respectivement de zéro que dans certains voisinages de $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ et de \mathfrak{M}_2 . En effet, si l'on multiplie par un paramètre λ les intégrales qui figurent dans une quelconque des équations (14) et (15), on vérifie que le noyau résolvant est alors holomorphe par rapport à λ dans la région $|\lambda| \leq 1$.

Examinons maintenant le cas où il existe au moins un \mathfrak{M}_n , dont l'indice n soit ≥ 3 . Alors, d'après l'alinéa précédent, nous pouvons construire d'une part une fonction $\chi(X)$, continue dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, et identique à c hors d'un certain voisinage de $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$, et d'autre part une fonction $\omega(Y)$, continue sur \mathfrak{S} et identique à $\psi - 1$ hors d'un certain voisinage de \mathfrak{M}_2 , de façon que les opérations $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$ admettent une fonction de GREEN F^* . Comme $f - \chi u$ et $\varphi - \omega u$ doivent alors admettre des limitations des types respectifs exigés pour f et pour φ (car χ et ω sont continus), l'inconnue u est donnée par l'équation (13), ce qui permet d'achever (comme au paragraphe 5) la démonstration de notre théorème.

Remarque. - Cette démonstration met en évidence que, même lorsque les variétés \mathfrak{M}_n existent, la fonction de GREEN, supposée existante, peut être définie même aux points de ces variétés, de façon à ne cesser d'être continue que lorsque les points variables X et Ξ sont confondus. Cela se voit sur une quelconque des équations (14) et (15): il suffit de décider que les deux membres doivent être égaux toutes les fois que X et Ξ sont distincts; cela n'est pas incompatible avec les équations, car les fonctions intégrées sont alors toujours sommables. D'après les mêmes équations, ces fonctions de GREEN valent $O[L^{2-m}(X, \Xi)]$ ($m > 2$) quand X et Ξ varient dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$. On verra plus loin (§ 16) que, pour $m = 2$, cette limitation doit être remplacée par $O[\log(4R) - \log L(X, \Xi)]$.

7. - Remarque. — Dans la démonstration précédente, nous avons usé d'une équation du type (13), dans laquelle les fonctions χ et ω étaient choisies continues. Nous allons prouver maintenant que, quelles que soient les fonctions χ et ω continues ou non, si les opérations $\mathfrak{J} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$ remplissent les conditions des paragraphes 2 et 3 et admettent une fonction de Green F^* , notre problème du troisième type équivaut à l'équation (13), pour laquelle les théorèmes de FREDHOLM sont valables.

Nous allons d'abord établir que, pour tout entier $n > 2$, les fonctions $r_1^{h-1} r_n^{2+h-n}$ et $r_2^{h-2} r_n^{2+h-n}$ sont sommables dans toute région bornée de l'espace à m dimensions; comme n est toujours $\leq m$, cette démonstration n'intervient que pour $m \geq 3$. Or des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 4 permettent d'affirmer que,

si l'on désigne par \mathbb{R} un domaine borné qui contienne toute la variété close \mathbb{M}_n , et par a une certaine constante positive, on a

$$\int_{\mathbb{R}}^{(m)} L^{2-m}(X, A)r_n^{h-n}(A)dV_A > ar_n^{2+h-n}(X) \quad (0 < h < 1).$$

Mais les fonctions $r_1^{h-1}(X)L^{2-m}(X, A)r_n^{h-n}(A)$ et $r_2^{h-2}(X)L^{2-m}(X, A)r_n^{h-n}(A)$ sont sommables par rapport aux $2m$ coordonnées de X et de A , quel que soit le champ borné choisi; car ces fonctions sont positives, et si l'on intègre d'abord par rapport à X , il reste à intégrer le produit de $r_n^{h-n}(A)$ par une fonction bornée et continue (I, § 8). Donc on peut calculer les mêmes intégrales en commençant par intégrer relativement à A ; mais si l'on intègre par rapport à A dans \mathbb{R} , la dernière inégalité écrite entraîne aussitôt l'énoncé du début de l'alinéa.

De même, pour tout entier $n > 2$, la fonction $r_2^{h-1}r_n^{h+2-n}$ est sommable sur \mathfrak{S} . Pour le démontrer, nous remarquons qu'il suffit de considérer le cas où \mathbb{M}_2 et \mathbb{M}_n appartiennent à \mathfrak{S} (I, II, § 7). Or nous avons alors, en désignant par b un nombre positif,

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} L^{2-m}(X, A)r_n^{h+1-n}(A)dS_A > br_n^{2+h-n}(X);$$

cela se voit encore par des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 4. Le résultat annoncé s'en déduit par le raisonnement de l'alinéa précédent.

Pour terminer maintenant notre démonstration relative à l'équation (13), désignons par F_1 la fonction de GREEN relative à des opérations données $\mathfrak{J} - \chi_1 \times (\dots)$ et $\Theta - \omega_1 \times (\dots)$; on suppose qu'on a

$$\begin{aligned} (18) \quad u(X) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_1(X, A)\chi_1(A)u(A)dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_1(X, B)\omega_1(B)u(B)dS_B = \\ = - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_1(X, A)f(A)dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_1(X, B)\varphi(B)dS_B. \end{aligned}$$

Soit d'autre part F_2 la fonction de GREEN relative à d'autres opérations données $\mathfrak{J} - \chi_2 \times (\dots)$ et $\Theta - \omega_2 \times (\dots)$. On suppose que les conditions des paragraphes 2 et 3 sont remplies par ces opérations, et l'on ne suppose rien de plus (χ_1 et ω_1 pourraient, pour notre objet, être pris continus, mais cela n'interviendra pas). Il s'agit de prouver qu'on peut remplacer dans (18) tous les indices 1 par des indices 2. Or l'identité (14) s'écrit ici

$$\begin{aligned} F_1(X, \mathfrak{E}) = F_2(X, \mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_2(X, A)[\chi_1(A) - \chi_2(A)]F_1(A, \mathfrak{E})dV_A + \\ + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_2(X, B)[\omega_1(B) - \omega_2(B)]F_1(B, \mathfrak{E})dS_B. \end{aligned}$$

En remplaçant partout F_1 par le second membre de cette identité, le premier membre de (18) devient ⁽¹²⁾

$$\begin{aligned}
u(X) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_2(X, A) \chi_1(A) u(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_2(X, B) \omega_1(B) u(B) dS_B + \\
+ \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} \chi_1(\Xi) u(\Xi) \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_2(X, A) [\chi_1(A) - \chi_2(A)] F_1(A, \Xi) dV_A dV_\Xi - \\
- \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} \chi_1(\Xi) u(\Xi) \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_2(X, B) [\omega_1(B) - \omega_2(B)] F_1(B, \Xi) dS_B dV_\Xi - \\
- \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \omega_1(Y) u(Y) \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_2(X, A) [\chi_1(A) - \chi_2(A)] F_1(A, Y) dV_A dS_Y + \\
+ \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \omega_1(Y) u(Y) \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_2(X, B) [\omega_1(B) - \omega_2(B)] F_1(B, Y) dS_B dS_Y.
\end{aligned}$$

En changeant l'ordre des intégrations, qui portent toutes sur des fonctions sommables, et en tenant compte de (18), cela devient

$$\begin{aligned}
u(X) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_2(X, A) \chi_1(A) u(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_2(X, B) \omega_1(B) u(B) dS_B + \\
+ \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_2(X, A) [\chi_1(A) - \chi_2(A)] \left[u(A) + \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_1(A, \Xi) f(\Xi) dV_\Xi - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_1(A, Y) \varphi(Y) dS_Y \right] dV_A - \\
- \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_2(X, B) [\omega_1(B) - \omega_2(B)] \left[u(B) + \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F_1(B, \Xi) f(\Xi) dV_\Xi - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F_1(B, Y) \varphi(Y) dS_Y \right] dS_B.
\end{aligned}$$

Identifions cela avec le second membre de (18); en simplifiant et en tenant compte de la relation entre F_1 et F_2 , nous obtenons la relation qui se déduit de (18) en y remplaçant partout l'indice 1 par l'indice 2; cette relation est donc une conséquence de (18). Le calcul peut être repris à partir de la nouvelle relation, et nous obtenons alors (18). Les deux relations sont donc équivalentes, et cela démontre l'assertion qui fait l'objet de ce paragraphe.

⁽¹²⁾ Nous convenons d'écrire toujours l'élément de champ *après* la fonction intégrée, ou du moins après le numérateur, s'il y en a un. Cela fixe l'ordre des intégrations dans l'expression du texte.

8. - **Problème adjoint.** — Comme dans les travaux cités, le *problème adjoint* au problème donné est, par définition, de chercher une solution v de l'équation intégrale

$$(19) \quad v(\Xi) - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(A, \Xi) \chi(A) v(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(B, \Xi) \omega(B) v(B) dS_B = \\ = - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(A, \Xi) f_1(A) dV_A + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(B, \Xi) \varphi_1(B) dS_B,$$

où f_1 et φ_1 sont deux fonctions données, soumises aux mêmes conditions respectives que f et φ . On démontre que l'ensemble des fonctions v ne dépend pas des fonctions χ et ω , et que v est susceptible des mêmes types de limitations que u . On démontre de plus que, si u est une solution quelconque de (13) et v une solution quelconque de (19), on a la relation

$$(20) \quad \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} (vf - uf_1) dV = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} (v\varphi - u\varphi_1) dS,$$

que nous nommerons *formule de réciprocité*.

On démontre que si les coefficients qui figurent dans les opérations

$$\mathfrak{G}v = \Sigma_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(a_{\alpha, \beta} \frac{\partial v}{\partial x_\beta} \right) - \Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\left(b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha, \beta}}{\partial x_\beta} \right) v \right] + cv$$

et

$$Zv = \Sigma_{\alpha, \beta} \bar{\omega}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (a_{\beta, \alpha} v) + (\psi - \Sigma_\alpha b_\alpha \bar{\omega}_\alpha) v,$$

remplissent les mêmes conditions que les coefficients homologues dans les opérations \mathfrak{F} et Θ , le problème adjoint est identique à celui qu'on obtient en remplaçant \mathfrak{F} , Θ , f et φ respectivement par \mathfrak{G} , Z , f_1 et φ_1 . Comme pour le deuxième type (g , III, 4; h , III, 6), cela résulte de la relation

$$(21) \quad \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} (v\mathfrak{F}u - u\mathfrak{G}v) dV = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} (v\Theta u - uZv) ds,$$

que nous nommons aussi *formule de réciprocité*.

9. - **Cas où le point variable appartient à une variété autre que l'espace euclidien.** — On peut considérer des équations du type elliptique dont l'inconnue est fonction d'un point d'une région prise sur une variété autre que l'espace euclidien. Comme nous ne nous occupons que de régions bornées, la généralité n'est pas vraiment restreinte si nous supposons que la variété donnée est *close*: au cas

où il n'en serait pas immédiatement ainsi, il suffirait de remplacer la variété donnée par une variété close, qui eût en commun avec la variété donnée les points de la région donnée; une telle variété close peut toujours être trouvée dans les cas que nous considérons.

Définissons de façon précise les variétés considérées.

Par définition, la variété \mathbf{V} donnée peut être recouverte par un nombre fini de régions $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n$, telles que chaque point de \mathbf{V} soit *intérieur* à au moins une de ces régions. Tout point d'une région \mathbf{R}_ν est défini par m coordonnées x_1, \dots, x_m ; le lieu d'un point qui, dans un espace euclidien, aurait les mêmes nombres pour coordonnées cartésiennes orthogonales, est une région fermée et bornée. Un point commun à deux régions, \mathbf{R}_ν et \mathbf{R}_μ , admet des coordonnées (x_1, \dots, x_m) dans le système propre à la région \mathbf{R}_ν , et des coordonnées (t_1, \dots, t_m) dans le système propre à \mathbf{R}_μ ; quand ce point varie, on suppose que x_1, \dots, x_m sont des fonctions continues et deux fois continûment dérivables de t_1, \dots, t_m , et que le jacobien $\frac{d(x_1, \dots, x_m)}{d(t_1, \dots, t_m)}$ n'est jamais nul. Nous ajoutons l'hypothèse que ce jacobien est toujours *positif*, quelles que soient les régions \mathbf{R}_μ et \mathbf{R}_ν dont nous considérons les parties communes (s'il existe de telles parties): la variété \mathbf{V} est donc orientable. La variété \mathbf{V} est *close*, car nous avons supposé que tout point de \mathbf{V} est *intérieur* à une région \mathbf{R}_ν (voir § 1); cette variété n'a pas de point multiple (voir § 1).

Sur \mathbf{V} , on donne un tenseur double, covariant et symétrique $(g_{\alpha, \beta})$, tel que la forme quadratique de différentielles $\sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha, \beta} dx_\alpha dx_\beta$ soit partout définie et positive. On suppose que les $g_{\alpha, \beta}$ sont continûment dérivables. Ce tenseur $(g_{\alpha, \beta})$ est pris comme tenseur fondamental, pour former les dérivées covariantes de CHRISTOFFEL, qui seront notées par les symboles opératoires D_1, D_2, \dots, D_m .

L'opération \mathbf{J} du type elliptique coïncide, pour les fonctions u deux fois continûment dérivables, avec l'opération

$$\mathbf{J}u = \sum_{\alpha, \beta} a^{\alpha, \beta} D_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \sum_\alpha b^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu,$$

où les composantes des tenseurs contravariants donnés $(a^{\alpha, \beta})$ et (b^α) , ainsi que la fonction scalaire donnée c , remplissent dans chaque région \mathbf{R}_ν , par rapport aux coordonnées propres à \mathbf{R}_ν , les mêmes conditions que les coefficients correspondants remplissaient par rapport aux coordonnées cartésiennes (§ 2).

Il faut encore définir l'opération Θ . La frontière \mathbf{S} du domaine donné \mathbf{D} , pris sur la variété \mathbf{V} , remplit par hypothèse les mêmes conditions qu'au paragraphe 1, sauf le remplacement des coordonnées cartésiennes par les systèmes propres aux régions \mathbf{R}_ν . Nous supposons que les systèmes de paramètres (t_1, \dots, t_{m-1}) , dans toute région de \mathbf{S} , sont choisis de façon à correspondre à l'orientation que nous nommons *associée* à l'orientation que définissent pour \mathbf{D} les coordonnées (x_1, \dots, x_m) propres aux \mathbf{R}_ν ; autrement dit, traçons dans \mathbf{V} une courbe, qui passe par un point donné de \mathbf{S} et qui ne soit pas tangente à \mathbf{S} en ce point; les coordonnées

des points de cette courbe sont exprimées en fonctions d'un paramètre t_0 , de telle façon que le sens croissant de t_0 soit aussi le sens sortant de \mathfrak{D} au point donné; les paramètres t_1, \dots, t_{m-1} sont choisis de façon que le déterminant $\frac{d(x_1, x_2, \dots, x_m)}{d(t_0, t_1, \dots, t_{m-1})}$ soit toujours positif, quel que soit le point donné. Posons alors, en nommant Δ le déterminant des $g_{\alpha, \beta}$,

$$dS = \sqrt{\Delta \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{(m-1)(\alpha+\beta)} g^{\alpha, \beta} d(x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha-1}) d(x_{\beta+1}, \dots, x_{\beta-1})},$$

où $(x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha-1})$ désigne ce qu'on obtient en permutant circulairement (x_1, \dots, x_m) , de façon à amener x_α en tête, et en supprimant alors x_α ; dS se nomme *l'élément* de \mathfrak{S} ; dans la notation usuelle, on obtient dS en remplaçant ci-dessus les $d(x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha-1})$ par les jacobiens $\frac{d(x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha-1})}{d(t_1, \dots, t_{m-1})}$, et en multipliant le résultat par $d(t_1, \dots, t_{m-1})$. Ensuite nous posons

$$\bar{\omega}_\alpha dS = (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \sqrt{\Delta} d(x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha-1}),$$

où la notation $d(x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha-1})$ doit s'interpréter comme ci-dessus; les $\bar{\omega}_\alpha$ se nomment les *cosinus directeurs* de la normale à \mathfrak{S} , prise dans le sens sortant de \mathfrak{D} ; ce sont les composantes covariantes d'un tenseur. Avec la signification actuelle des $\bar{\omega}_\alpha$, l'opération Θ se définit comme au paragraphe 3, la fonction donnée ψ devant satisfaire aux conditions alors énoncées.

En introduisant enfin deux fonctions données f et φ , qui remplissent les conditions énoncées aux paragraphes 2 et 3, le problème du troisième type se pose comme dans ces paragraphes. La méthode pour le résoudre consiste à remplacer les solutions fondamentales principales, qui interviennent dans l'espace euclidien, par des fonctions de GREEN, relatives à la totalité de la variété close \mathfrak{V} , et qui ont été définies dans un autre travail (*k*, I, § 3).

Nous voulons terminer ce travail en indiquant des propriétés générales, relatives aux fonctions de GREEN des problèmes du troisième type, à leurs dérivées par rapport aux coordonnées du premier point, et aux dérivées de l'inconnue du problème général. Ces propriétés sont valables dans le cas des variétés closes comme dans le cas de l'espace euclidien; pour simplifier, nous ne parlerons que de l'espace euclidien. Nous établirons d'abord trois lemmes, dont deux avaient été énoncés ailleurs (*i*, IV, § 6), mais on n'avait donné alors que quelques indications sur leurs démonstrations, qui sont facilitées par le premier chapitre du présent travail. Après ces lemmes, nous nous occuperons de nos fonctions de GREEN, en supposant d'abord que le nombre m des dimensions de l'espace est ≥ 3 . Ensuite les résultats relatifs à deux dimensions seront déduits des précédents. Enfin nous nous occuperons des dérivées de l'inconnue du problème général.

10. - Lemme. — Supposons que la variété \mathfrak{M}_2 n'existe pas (ou du moins qu'elle n'ait aucun point commun avec $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$). Supposons en outre que c et $-\psi$ sont partout ≤ 0 , et qu'une au moins de ces fonctions n'est pas presque partout nulle. Enfin supposons que ψ remplit une condition de LIPSCHITZ, avec l'exposant h des paragraphes 1 à 3. Alors nous savons (*i*, IV, § 6, et *j*, IV) que la fonction de GREEN relative à \mathfrak{J} et à Θ existe, et que, si G est la solution fondamentale principale relative à une opération qui coïncide dans \mathfrak{D} avec \mathfrak{J} , la fonction F de GREEN s'obtient en posant, quand \mathfrak{E} appartient à \mathfrak{D} (et non à \mathfrak{S})

$$(22) \quad F(X, \mathfrak{E}) = G(X, \mathfrak{E}) + 2 \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, A) \sigma(A, \mathfrak{E}) dS_A,$$

où la fonction σ est l'unique solution de l'équation à intégrale principale

$$(23) \quad \sigma(X, \mathfrak{E}) + 2 \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta G(X, A) \sigma(A, \mathfrak{E}) dS_A = -\Theta G(X, \mathfrak{E}),$$

dans laquelle X varie sur \mathfrak{S} et \mathfrak{E} varie dans \mathfrak{D} . On a vu dans les travaux cités qu'on a

$$\sigma(X, \mathfrak{E}) = O[L^{1-m}(X, \mathfrak{E})].$$

Le lemme que nous avons en vue s'énonce ainsi :

Soit k un nombre positif $< h$; on a

$$(24) \quad \sigma(X, \mathfrak{E}) - \sigma(Y, \mathfrak{E}) = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, Y; \mathfrak{E})] \quad (0 < k < h),$$

où $l(X, Y; \mathfrak{E})$ désigne la plus courte distance entre \mathfrak{E} et le segment rectiligne XY .

D'après la théorie exposée dans les travaux cités, dont nous changeons un peu la notation, il existe une fonction $\Phi(X)$ d'un point X de \mathfrak{S} , fonction qui remplit une condition de LIPSCHITZ avec l'exposant h , et un noyau d'intégrale principale $N(X, A)$, tels que, quand \mathfrak{E} appartient à \mathfrak{D} , on ait

$$(25) \quad \sigma(X, \mathfrak{E}) = -\Phi(X)\Theta G(X, \mathfrak{E}) - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} N(X, A)\Theta G(A, \mathfrak{E}) dS_A;$$

pour le calcul de l'intégrale, nous pouvons modifier les domaines infiniment petits d'exclusion, qui doivent contenir le point X , à condition de déterminer convenablement la fonction Φ ; nous prendrons donc $L(X, A) < \eta$ comme famille des domaines d'exclusion, η étant infiniment petit; la fonction Φ conserve les propriétés déjà énoncées. Or on a (*i*, IV, § 3 et *j*, IV, § 2)

$$\Theta G(X, \mathfrak{E}) - \Theta G(Y, \mathfrak{E}) = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, Y; \mathfrak{E})] \quad (0 < k < h);$$

donc, dans notre expression (25) de la fonction σ , le premier terme jouit de la propriété qu'il s'agit d'établir pour σ .

Occupons-nous donc du second terme, et supposons d'abord qu'on ait

$$4L(X, Y) < L(X, \mathcal{E}).$$

Soient \mathfrak{S}_1 l'ensemble défini par l'inégalité $L(X, A) < 2L(X, Y)$, et \mathfrak{S}_2 l'ensemble défini par les inégalités $2L(X, Y) \leq L(X, A) < \frac{L(X, \mathcal{E})}{2}$. Quand A appartient à $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, $l(X, A; \mathcal{E})$ et $l(Y, A; \mathcal{E})$ sont, ainsi que $l(X, Y; \mathcal{E})$, compris entre $\frac{L(X, \mathcal{E})}{2}$ et $\frac{3L(X, \mathcal{E})}{2}$; cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Theta G(X, \mathcal{E}) - \Theta G(A, \mathcal{E}) &= O[L^k(X, A)^{\mu-k-m}(X, Y; \mathcal{E})], \\ \Theta G(Y, \mathcal{E}) - \Theta G(A, \mathcal{E}) &= O[L^k(Y, A)^{\mu-k-m}(X, Y; \mathcal{E})]. \end{aligned}$$

Nous avons donc, puisque $N(X, A)$ vaut $O[L^{\mu-m}(X, A)]$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{S}_1}^{(m-1)} N(X, A) [\Theta G(X, \mathcal{E}) - \Theta G(A, \mathcal{E})] dS_A &= O[L^k(X, Y)^{\mu-k-m}(X, Y; \mathcal{E})], \\ \int_{\mathfrak{S}_1}^{(m-1)} N(Y, A) [\Theta G(Y, \mathcal{E}) - \Theta G(A, \mathcal{E})] dS_A &= O[L^k(X, Y)^{\mu-k-m}(X, Y; \mathcal{E})]. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_{\mathfrak{S}_1}^{(m-1)} N(Y, A) dS_A$ est bornée quand X et Y varient, d'après les propriétés générales de ces noyaux; donc on a

$$[\Theta G(X, \mathcal{E}) - \Theta G(Y, \mathcal{E})] \int_{\mathfrak{S}_1}^{(m-1)} N(Y, A) dS_A = O[L^k(X, Y)^{\mu-k-m}(X, Y; \mathcal{E})].$$

Si nous remarquons que, quand A appartient à \mathfrak{S}_2 , nous avons

$$\frac{L(X, A)}{2} \leq l(X, Y; A) \leq \frac{3L(X, A)}{2},$$

nous en concluons, en désignant par \mathbf{k} un nombre donné, compris entre k et h ,

$$N(X, A) - N(Y, A) = O[L^{\mathbf{k}}(X, Y)L^{\mu-\mathbf{k}-m}(X, A)] \quad (k < \mathbf{k} < h),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{S}_2}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)] [\Theta G(X, \mathcal{E}) - \Theta G(A, \mathcal{E})] dS_A &= \\ &= O[L^{\mathbf{k}}(X, Y)^{\mu-k-m}(X, Y; \mathcal{E})] \int_{\mathfrak{S}_2}^{(m-1)} L^{k-\mathbf{k}+1-m}(X, A) dS_A = \\ &= O[L^{\mathbf{k}}(X, Y)^{\mu-k-m}(X, Y; \mathcal{E})L^{k-\mathbf{k}}(X, \mathcal{E})] = O[L^{\mathbf{k}}(X, Y)^{\mu-\mathbf{k}-m}(X, Y; \mathcal{E})]. \end{aligned}$$

Au total nous avons donc

$$\int_{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)][\Theta G(X, \mathfrak{E}) - \Theta G(A, \mathfrak{E})] dS_A = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, Y; \mathfrak{E})].$$

Evaluons maintenant $\int_{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)] dS_A$. Supposons d'abord $L(X, \mathfrak{E})$ assez

petit pour que $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$ appartienne entièrement à une seule des régions $R_{1, \nu}$, du paragraphe 1. Distinguons alors dans N la partie positivement homogène et d'ordre $1 - m$, que nous nommerons N_1 , et la partie restante $N_2 = N - N_1$. Nous désignerons par \mathfrak{S}^* une région contenue dans $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, et déterminée ainsi qu'il

suit: soit $\sum_{\alpha=1}^{m-1} \sum_{\beta=1}^{m-1} E_{\alpha, \beta}(t_1, \dots, t_{m-1}) dt_\alpha dt_\beta$ le carré de l'élément d'arc euclidien dans $R_{1, \nu}$, et soient $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ les paramètres de A ; la région \mathfrak{S}^* sera $\sum_{\alpha, \beta} E_{\alpha, \beta}(t_1, \dots, t_{m-1})(t_\alpha - \tau_\alpha)(t_\beta - \tau_\beta) < \varrho^2$, où ϱ a plus grande valeur telle que \mathfrak{S}^* appartienne à $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, d'où résulte qu'on a $\varrho = \frac{L(X, \mathfrak{E})}{2} + O[L^{1+h}(X, \mathfrak{E})]$. Alors on a

$$\int_{\mathfrak{S}^*}^{(m-1)} N_1(X, A) dS_A = 0$$

et

$$\int_{\mathfrak{S}^*}^{(m-1)} N_1(Y, A) dS_A = O \left[\log \frac{\varrho + L(X, Y) + aL^{1+h}(X, Y)}{\varrho - L(X, Y) - aL^{1+h}(X, Y)} \right] = O \left[\frac{L(X, Y)}{L(X, \mathfrak{E})} \right]$$

[ce calcul suppose $L(X, \mathfrak{E})$ assez petit]. En ayant égard aux limitations

$$N_2(X, A) = O[L^{1+k-m}(X, A)]$$

et

$$N_2(X, A) - N_2(Y, A) = O[L^k(X, Y)l^{1-m}(X, Y; A)],$$

nous trouvons qu'on a

$$\int_{\mathfrak{S}^*}^{(m-1)} [N_2(X, A) - N_2(Y, A)] dS_A = O[L^k(X, Y)l^{1-k}(X, \mathfrak{E})].$$

Enfin nous avons dans $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}^*$, si $L(X, \mathfrak{E})$ est assez petit,

$$N(X, A) - N(Y, A) = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, A)],$$

et par suite

$$\int_{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}^*}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)] dS_A = O[L^k(X, Y)L^{-k}(X, \mathcal{E})].$$

Au total, nous avons donc

$$\Theta G(X, \mathcal{E}) \int_{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)] dS_A = O[L^k(X, Y)L^{1-k-m}(X, \mathcal{E})],$$

et par conséquent

$$\int_{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)] \Theta G(A, \mathcal{E}) dS_A = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, Y; \mathcal{E})].$$

Si $L(X, \mathcal{E})$ est trop grand pour que ce calcul s'applique, mais si $L(X, Y)$ est inférieur à une certaine longueur, on trouve sans difficulté que l'intégrale du premier membre vaut $O[L^k(X, Y)]$, ce qui revient à la limitation ci-dessus, puisque $l(X, Y; \mathcal{E})$ est borné. Si enfin $L(X, Y)$ et $L(X, \mathcal{E})$ sont supérieurs à des bornes positives, le seul fait que le premier membre est borné, entraîne qu'il est limitable comme ci-dessus.

Soit maintenant \mathfrak{S}_3 l'ensemble défini par l'inégalité $2L(\mathcal{E}, A) < L(X, \mathcal{E})$. Nous avons dans \mathfrak{S}_3

$$N(X, A) - N(Y, A) - N(X, \mathcal{E}) + N(Y, \mathcal{E}) = \begin{cases} O[L^k(X, Y)L^{1-k-m}(X, \mathcal{E})], \\ O[L^k(\mathcal{E}, A)L^{1-k-m}(X, \mathcal{E})] \end{cases} \\ (k < k < h),$$

ce qui entraîne

$$N(X, A) - N(Y, A) - N(X, \mathcal{E}) + N(Y, \mathcal{E}) = O[L^k(X, Y)L^{k-k}(\mathcal{E}, A)L^{1-k-m}(X, \mathcal{E})],$$

et par suite, d'après le paragraphe 4 du chapitre I,

$$\int_{\mathfrak{S}_3}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A) - N(X, \mathcal{E}) + N(Y, \mathcal{E})] \Theta G(A, \mathcal{E}) dS_A = \\ = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, Y; \mathcal{E})]$$

(pour l'application du paragraphe 4 du chapitre I, on doit recourir à des changements de variables, ainsi qu'il a été fait dans des calculs analogues contenus dans

les travaux cités). D'autre part $\int_{\mathfrak{S}_3}^{(m-1)} \Theta G(A, \mathcal{E}) dS_A$ reste borné quand X, Y et \mathcal{E}

varient, et cela nous mène à la limitation

$$\int_{\mathfrak{S}_3}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)] \Theta G(A, \mathcal{E}) dS_A = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, Y; \mathcal{E})].$$

Soit enfin \mathfrak{S}_4 l'ensemble $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_3$. Nous écrivons dans \mathfrak{S}_4
 $N(X, A) - N(Y, A) = O[L^k(X, Y)L^{1-k-m}(X, A)], \quad \Theta G(A, \mathfrak{E}) = O[L^{1-m}(X, A)];$
 comme $1 - k - m$ est < 0 , cela entraîne, d'après le paragraphe 2 du chapitre I,

$$\int_{\mathfrak{S}_4}^{(m-1)} [N(X, A) - N(Y, A)] \Theta G(A, \mathfrak{E}) dS_A = O[L^k(X, Y)L^{1-k-m}(X, Y; \mathfrak{E})].$$

La limitation (24) est donc valable quand $4L(X, Y)$ est $< L(X, \mathfrak{E})$. Si au contraire $4L(X, Y)$ est $\geq L(X, \mathfrak{E})$, il nous suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \sigma(X, \mathfrak{E}) = O[L^{1-m}(X, \mathfrak{E})] &= O[L^k(X, Y)L^{1-k-m}(X, \mathfrak{E})] = \\ &= O[L^k(X, Y)L^{1-k-m}(X, Y; \mathfrak{E})] \end{aligned}$$

et les limitations analogues relatives à $\sigma(Y, \mathfrak{E})$, pour en déduire la limitation (24), qui est donc générale. Un passage à la limite montre que la limitation (24) a lieu même si \mathfrak{E} vient sur \mathfrak{S} .

11. - Lemme. — Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on a

$$(26) \quad \sigma(X, \mathfrak{E}) - \sigma(X, Y) = O[L^k(\mathfrak{E}, Y)L^{1-k-m}(\mathfrak{E}, Y; X)], \quad (0 < k < h),$$

quels que soient X sur \mathfrak{S} , et \mathfrak{E} et Y dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$.

En continuant à désigner par \mathfrak{S}_3 la région $2L(\mathfrak{E}, A) < L(X, \mathfrak{E})$, nous allons établir que lorsqu'on a

$$4L(\mathfrak{E}, Y) < L(X, \mathfrak{E}),$$

on a aussi

$$(27) \quad \int_{\mathfrak{S}_3}^{(m-1)} [\Theta G(A, \mathfrak{E}) - \Theta G(A, Y)] dS_A = O[L^k(\mathfrak{E}, Y)L^{-k}(X, \mathfrak{E})], \quad (0 < k < h);$$

quand ce sera établi, le reste de la démonstration de notre lemme sera, moyennant les propositions du chapitre I, si semblable aux raisonnements du paragraphe 10, qu'il suffira de renvoyer à ce paragraphe.

Cette limitation (27) ne sera établie qu'après la limitation

$$(28) \quad \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} [\Theta G(A, \mathfrak{E}) - \Theta G(A, Y)] dS_A = O[L^k(\mathfrak{E}, Y)],$$

où l'intégrale du premier membre est étendue à tout \mathfrak{S} . Désignons par $A_{\alpha, \beta}$ le mineur de $\frac{a_{\alpha, \beta} + a_{\beta, \alpha}}{2}$ dans le discriminant de la forme quadratique $\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} z_{\alpha} z_{\beta}$, de sorte qu'on a

$$\Sigma_{\gamma} A_{\alpha, \gamma} (a_{\beta, \gamma} + a_{\gamma, \beta}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha \neq \beta, \\ 2 & \text{pour } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Posons

$$H(X, \mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} [\Sigma_{\alpha, \beta} A_{\alpha, \beta}(\mathcal{E})(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)]^{\frac{2-m}{2}}, & (m \geq 3), \\ -\frac{1}{4\pi} \log \Sigma_{\alpha, \beta} A_{\alpha, \beta}(\mathcal{E})(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta), & (m = 2), \end{cases}$$

de sorte qu'on a

$$\Theta[G(A, \mathcal{E}) - H(A, \mathcal{E})] = O[L^{1+h-m}(A, \mathcal{E})], \quad (m \geq 2)$$

et (*i*, IV, § 3 et *j*, IV, § 2)

$$\begin{aligned} \Theta[G(A, \mathcal{E}) - H(A, \mathcal{E})] - \Theta[G(A, Y) - H(A, Y)] &= \\ &= O[L^k(\mathcal{E}, Y)l^{1-m}(\mathcal{E}, Y; A)], \quad (k < \mathbf{k} < h). \end{aligned}$$

Nous en déduisons, par des raisonnements semblables à ceux du travail cité (*i*, I, § 2; ces raisonnements s'appliqueraient exactement si \mathcal{E} et Y appartenait à \mathfrak{S} ; le chapitre I du présent travail légitime toute la démonstration pour le cas où \mathcal{E} et Y appartiennent à $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$),

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta[G(A, \mathcal{E}) - G(A, Y) - H(A, \mathcal{E}) + H(A, Y)] dS_A = O[L^k(\mathcal{E}, Y)].$$

Cela nous ramène à prouver que si l'on remplace G par H dans (28), la limitation ainsi écrite est vraie. Pour cela, nous allons évaluer $\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta H(A, \mathcal{E}) dS_A$, en supposant

que \mathcal{E} appartient à \mathfrak{D} (et non à \mathfrak{S}). Soient pour un instant \mathfrak{F}_1 et Θ_1 ce que deviennent respectivement les opérations \mathfrak{F} et Θ , quand on y remplace chaque $a_{\alpha, \beta}(X)$ par $a_{\alpha, \beta}(\mathcal{E})$, et chacune des fonctions b_α , c et ψ par zéro. Il est évident que

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} [\Theta H(A, \mathcal{E}) - \Theta_1 H(A, \mathcal{E})] dS_A$$

remplit une condition de LIPSCHITZ avec l'exposant k [même raisonnement que pour $\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta[G(A, \mathcal{E}) - H(A, \mathcal{E})] dS_A$]. Pour la suite du calcul, une transformation

linéaire nous ramène au cas où, en un point \mathcal{E} donné, on a $A_{\alpha, \alpha}(\mathcal{E}) = 1$ et $(\beta - \alpha)A_{\alpha, \beta}(\mathcal{E}) = 0$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, m$). Alors on a aussi $a_{\alpha, \alpha}(\mathcal{E}) = 1$ et

$$(\beta - \alpha)[a_{\alpha, \beta}(\mathcal{E}) + a_{\beta, \alpha}(\mathcal{E})] = 0.$$

Or on a évidemment alors, pour cette position de Ξ ,

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \bar{\omega}_\alpha(A) \frac{\partial H(A, \Xi)}{\partial a_\beta} dS_A = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \bar{\omega}_\beta(A) \frac{\partial H(A, \Xi)}{\partial a_\alpha} dS_A,$$

car, d'après la formule de GREEN, la différence entre les deux membres ne change pas si l'on remplace \mathfrak{S} par une hypersphère dont le centre est en Ξ . Donc

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta_1 H(A, \Xi) dS_A$$

est le même que si, en ce point Ξ , tous les $(\beta - \alpha)a_{\alpha, \beta}$ étaient nuls; cette intégrale est donc égale à -1 , d'après un calcul connu. De là résulte bien la limitation (28).

Pour passer à la limitation (27), nous remarquons que dans $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_3$ nous avons

$$\Theta G(A, \Xi) - \Theta G(A, Y) = O[L^k(\Xi, Y)L^{1-k-m}(\Xi, A)].$$

Par conséquent (I, § 2), nous avons

$$\int_{\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_3}^{(m-1)} [\Theta G(A, \Xi) - \Theta G(A, Y)] dS_A = O[L^k(\Xi, Y)L^{-k}(X, \Xi)].$$

En rapprochant cela de (28), nous obtenons bien (27).

Ainsi qu'il a été annoncé, la fin de la démonstration de notre lemme sera omise, parce qu'elle suit exactement la même marche que le paragraphe 10.

12. - Lemme. — Avec la même notation qu'au paragraphe 10, la fonction

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \sigma(A, \Xi) dS_A$$

remplit dans \mathfrak{D} une condition de Lipschitz

$$(29) \quad \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} [\sigma(A, \Xi) - \sigma(A, Y)] dS_A = O[L^k(\Xi, Y)], \quad (0 < k < h).$$

Notre démonstration suppose essentiellement que Ξ ne peut venir sur \mathfrak{S} (la fonction représentée par l'intégrale est discontinue quand Ξ vient sur \mathfrak{S} , au moins dans le cas particulier des problèmes du second type).

Reprenons la formule (25) (§ 10). La fonction $[\Phi(A) - \Phi(\Xi)]\Theta G(A, \Xi)$ vaut $O[L^{1+h-m}(A, \Xi)]$, et sa différence avec la valeur prise quand on remplace Ξ par Y vaut $O[L^h(\Xi, Y)L^{1-m}(\Xi, Y; A)]$, pourvu que le nombre h du paragraphe 1 soit < 1 ; cela suffit à entraîner que

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} [\Phi(A) - \Phi(\Xi)]\Theta G(A, \Xi) dS_A$$

remplit une condition de LIPSCHITZ avec l'exposant k . D'autre part, d'après la limitation (28) (§ 11), la fonction $\Phi(\Xi) \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta G(A, \Xi) dS_A$ remplit aussi une condition de LIPSCHITZ d'exposant k . Donc enfin la fonction

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Phi(A) \Theta G(A, \Xi) dS_A$$

remplit une condition de LIPSCHITZ d'exposant k .

Il nous reste donc seulement, d'après (25), à prouver que

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} N(X, A) \Theta G(A, \Xi) dS_A dS_X$$

remplit une condition de LIPSCHITZ d'exposant k . Or, Ξ appartenant à \mathfrak{D} , les deux intégrations, dont une seule est à prendre en valeur principale, sont permutable (*i*, I, § 9). La dernière fonction écrite devient ainsi

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta G(A, \Xi) \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} N(X, A) dS_X dS_A.$$

Soit \mathfrak{k} un nombre compris entre k et h , $k < \mathfrak{k} < h$. D'après les propriétés des noyaux d'intégrales principales (*i*, I, § 8), la fonction $\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} N(X, A) dS_X$ remplit une condition de LIPSCHITZ avec l'exposant \mathfrak{k} ; cela permet de la substituer à la fonction $\Phi(A)$, dans les raisonnements relatifs au premier terme du second membre de (25), et notre démonstration s'achève ainsi.

13. - Théorème. — *Si les opérations \mathfrak{J} et Θ , qui remplissent les conditions énoncées aux paragraphes 2 et 3, admettent une fonction de Green $F(X, \Xi)$, celle-ci remplit une condition*

$$(30) \quad |F(X, \Xi) - F(X, Y)| < QL^k(\Xi, Y) l^{z-k-m}(\Xi, Y; X) \quad (0 < k < h, m \geq 2),$$

où Q ne dépend pas des points X, Ξ et Y qui varient dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$.

Cette propriété est valable pour $m \geq 2$, mais nous ne la considérons dans ce paragraphe que pour $m \geq 3$; le cas de $m=2$ sera considéré plus loin (§ 16).

Pour $m \geq 3$, la démonstration s'appuie sur l'expression (22) de F , quand sont remplies les conditions où cette formule est valable (§ 10). Le premier terme du second membre de (22) remplit, nous le savons, une condition du type (30). Quant

au second terme du second membre de (22), nous pouvons lui appliquer des raisonnements semblables à ceux du paragraphe 11, la limitation (29) remplaçant (28), et la limitation (26) remplaçant la limitation analogue qui concerne $\Theta G(X, \Xi) - \Theta G(X, Y)$.

Pour passer au cas général (avec $m \geq 3$), il suffit de recourir à la formule (14), mise sous la forme

$$F(X, \Xi) = F^*(X, \Xi) + \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F(X, A)\chi(A)F^*(A, \Xi)dV_A - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F(X, B)\omega(B)F^*(B, \Xi)dS_B;$$

la proposition étant vraie pour $F^*(X, \Xi)$, des raisonnements semblables à ceux du paragraphe 11 peuvent être repris pour le deuxième et le troisième terme du second membre.

14. - Limitation des dérivées de la fonction de Green. — Il s'agit maintenant des seules dérivées de la fonction F dont nous soyons en mesure d'affirmer l'existence dans le cas général, c'est-à-dire les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x_a}(X, \Xi)$ par rapport aux coordonnées du premier point; ces dérivées existent quand X appartient à $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}_2 - \Xi$.

On a vu (*i*, IV, § 6 et *j*, IV) que, lorsque \mathfrak{M}_2 n'existe pas et que ψ remplit une condition de LIPSCHITZ, ces dérivées coïncident dans $\mathfrak{D} - \Xi$ avec des fonctions continues en tout point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S} - \Xi$, et l'on a

$$(31) \quad \frac{\partial F}{\partial x_a}(X, \Xi) = O[L^{1-m}(X, \Xi)], \quad (m \geq 2);$$

c'est d'ailleurs évident sur l'expression (22), quand elle est valable; l'équation (15), où ω sera considéré comme remplissant une condition de LIPSCHITZ, permet d'étendre le résultat à tous les cas indiqués. Mais cette limitation ne subsiste pas dans le cas général énoncé aux paragraphes 2 et 3. Nous allons traiter ce cas général en supposant $m \geq 3$; le cas de $m=2$ sera traité plus loin (§ 16).

Pour commencer, maintenons l'hypothèse que \mathfrak{M}_2 n'existe pas, mais ne restreignons pas davantage les hypothèses du cas général: en ce qui concerne ψ , nous ne supposons donc rien de plus que sa continuité. Nous choisissons une fonction χ d'un point de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ et une fonction ω d'un point de \mathfrak{S} , telles que $c - \chi$ et $\omega - \psi$ soient continus et ≤ 0 , et non simultanément identiquement nuls, et que $\omega - \psi$ remplisse une condition de LIPSCHITZ. Alors la fonction F^* de GREEN, relative aux opérations $\mathfrak{F} - \chi \times (\dots)$ et $\Theta - \omega \times (\dots)$, existe et jouit de la propriété (31). Ecrivons alors la formule (15) sous la forme

$$F(X, \Xi) = F^*(X, \Xi) + \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} F^*(X, A)\chi(A)F(A, \Xi)dV_A - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} F^*(X, B)\omega(B)F(B, \Xi)dS_B.$$

Dérivons les deux membres par rapport à x_a , en supposant que X appartient à $\mathfrak{D}-\mathfrak{E}$; d'après la formule (31), valable pour F^* , nous avons

$$(32) \quad \frac{\partial F}{\partial x_a}(X, \mathfrak{E}) = \frac{\partial F^*}{\partial x_a}(X, \mathfrak{E}) + \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial F^*}{\partial x_a}(X, A) \chi(A) F(A, \mathfrak{E}) dV_A - \\ - \int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial F^*}{\partial x_a}(X, B) \omega(B) F(B, \mathfrak{E}) dS_B.$$

Nous avons ici $\chi = O(r_1^{h-1})$. Dans ces conditions, en considérant séparément dans \mathfrak{D} la région \mathfrak{D}_1 définie par l'inégalité $L(X, A) < \frac{L(X, \mathfrak{E})}{2}$, la région \mathfrak{D}_2 définie par l'inégalité $L(\mathfrak{E}, A) < \frac{L(X, \mathfrak{E})}{2}$ et la région restante \mathfrak{D}_3 , et en limitant, par application des paragraphes 8 et 9 du chapitre I, les parties de l'intégrale d'ordre m qui proviennent de ces régions, nous trouvons que l'intégrale d'ordre m vaut $O[L^{2+h-m}(X, \mathfrak{E})]$ pour $m > h + 2$, et $O[\log(4R) - \log L(X, \mathfrak{E})]$ pour $m = h + 2$ (c'est-à-dire $m = 3, h = 1$), où $2R$ désigne la plus grande corde de \mathfrak{S} . Passons à l'intégrale d'ordre $m - 1$, et considérons séparément dans \mathfrak{S} la région \mathfrak{S}_1 définie par l'inégalité $L(X, B) < \frac{L(X, \mathfrak{E})}{2}$, la région \mathfrak{S}_2 définie par l'inégalité $L(\mathfrak{E}, B) < \frac{L(X, \mathfrak{E})}{2}$, et la région restante \mathfrak{S}_3 . Dans \mathfrak{S}_2 , la fonction intégrée vaut $O[L^{1-m}(X, \mathfrak{E})L^{2-m}(\mathfrak{E}, B)]$, et par suite cette partie d'intégrale vaut $O[L^{2-m}(X, \mathfrak{E})]$. Dans \mathfrak{S}_3 , la fonction intégrée vaut $O[L^{3-2m}(\mathfrak{E}, B)]$, et par suite cette partie d'intégrale vaut encore $O[L^{2-m}(X, \mathfrak{E})]$. Dans \mathfrak{S}_1 , la fonction intégrée vaut $O[L^{2-m}(X, \mathfrak{E})L^{1-m}(X, B)]$; en désignant par $s(X)$ la plus courte distance entre X et \mathfrak{S} , cette partie d'intégrale vaut donc $O\left[L^{2-m}(X, \mathfrak{E}) \log \frac{4R}{s(X)}\right]$. Au total nous avons dans ce cas

$$(33) \quad \frac{\partial F}{\partial x_a}(X, \mathfrak{E}) = O\left[L^{1-m}(X, \mathfrak{E}) + L^{2-m}(X, \mathfrak{E}) \log \frac{4R}{s(X)}\right].$$

Passons au cas tout à fait général des paragraphes 2 et 3: \mathfrak{M}_2 existe, et les fonctions χ et ω , choisies de façon que $c - \chi$ et $\omega - \psi$ aient les mêmes propriétés que ci-dessus, admettent les limitations

$$\chi = O(r_1^{h-1} + r_2^{h-2}), \quad \omega = O(r_2^{h-1}).$$

En reprenant la formule (32), et en décomposant comme ci-dessus les champs d'intégrations, nous trouvons que les intégrales partielles étendues à ces champs admettent les limitations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1: & O[L^{2+h-m}(X, \mathfrak{E}) + L^{2-m}(X, \mathfrak{E})r_2^{h-1}(X)] && \text{(voir I, § 8 et § 10);} \\ \mathfrak{D}_2: & O[L^{1+h-m}(X, \mathfrak{E})] && \text{(voir I, § 8);} \\ \mathfrak{D}_3: & O[L^{1+h-m}(X, \mathfrak{E})] && \text{(voir I, § 9);} \\ \mathfrak{S}_1: & O[L^{2-m}(X, \mathfrak{E})s^{h-1}(X)] && \text{(voir I, § 9);} \\ \mathfrak{S}_2: & O[L^{1+h-m}(X, \mathfrak{E})] && \text{(voir I, § 8);} \\ \mathfrak{S}_3: & O[L^{1+h-m}(X, \mathfrak{E})] && \text{(voir I, § 9).} \end{aligned}$$

La limitation correspondant à \mathfrak{S}_1 peut être modifiée: dans la partie de cette région où l'on a $2L(X, B) < r_2(X)$, on a à intégrer $O[r_2^{h-1}(X)L^{2-m}(X, \Xi)L^{1-m}(X, B)]$, ce qui, d'après le paragraphe 9 du chapitre I, donne $O\left[L^{2-m}(X, \Xi)r_2^{h-1}(X) \log \frac{4R}{s(X)}\right]$; la partie restante de \mathfrak{S}_1 donne $O[L^{2-m}(X, \Xi)r_2^{h-1}(X)]$, toujours d'après la même proposition.

Donc, dans le cas général des paragraphes 2 et 3, si la fonction F de Green existe, on a

$$(34) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) = O\left[L^{1-m}(X, \Xi) + L^{2-m}(X, \Xi)r_2^{h-1}(X) \log \frac{4R}{s(X)}\right], \quad (m \geq 3),$$

où $s(X)$ est la distance entre X et \mathfrak{S} . Nous verrons plus loin (§ 16), ce que devient cette formule pour $m=2$.

15. - Conditions remplies par les mêmes dérivées. — Dans les cas où nous avons établi la formule (22) (§ 10), on trouve, en raisonnant comme dans les paragraphes 10 et 11,

$$(35) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(Y, \Xi) = O[L^k(X, Y)l^{1-k-m}(X, Y; \Xi)], \quad (0 < k < h),$$

$$(36) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, Y) = O[L^k(\Xi, Y)l^{1-k-m}(\Xi, Y; X)];$$

le nombre positif $k < h$ peut être donné.

La formule

$$(37) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) = \frac{\partial F^*}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) + \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, A)\chi(A)F^*(A, \Xi)dV_A - \\ - \int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, B)\omega(B)F^*(B, \Xi)dS_B$$

nous servira à généraliser (36) pour le cas général des paragraphes 2 et 3; nous ne nous occuperons pas de généraliser (35). Sans entrer dans le détail des calculs, qui, après ce qui a été fait, ne présente aucune difficulté, nous écrivons la formule finale

$$(38) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, Y) = \\ = O[L^k(\Xi, Y)l^{1-k-m}(\Xi, Y; X)] \left[1 + l(\Xi, Y; X)r_2^{h-1}(X) \log \frac{4R}{s(X)} \right],$$

qui est valable dans le cas général des paragraphes 2 et 3; le nombre positif $k < h$ peut être donné; nous allons voir (§ 16) que cette formule, établie ici pour $m \geq 3$, est vraie aussi pour $m=2$.

16. - Cas de deux variables. — Les raisonnements des trois paragraphes précédents supposent $m \geq 3$. Mais nous pouvons en déduire les résultats relatifs à $m = 2$.

Pour cela, nous commençons par faire en sorte que le minimum atteint par la coordonnée x_2 sur \mathfrak{S} soit positif: un changement d'axes rectangulaires suffit. Ensuite nous prolongeons l'opération \mathfrak{F} hors de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, mais non de la façon habituelle: les fonctions $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$ et $a_{2,2}$ doivent remplir dans tout le demi-plan $x_2 > 0$ une condition de LIPSCHITZ, avec l'exposant h du paragraphe 1, et elles doivent être bornées, et la borne inférieure de $4 a_{1,1} a_{2,2} - (a_{1,2} + a_{2,1})^2$ doit être positive; mais de plus $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$ doivent être nuls hors d'un certain domaine borné D , dans lequel la borne inférieure de x_2 est positive; la fonction b_1 est continue et bornée hors de D ; la différence $b_2 - \frac{a_{2,2}}{x_2}$ est nulle hors de D ; enfin, hors de D , c est borné et sa borne supérieure est négative. Nous introduisons une variable auxiliaire θ , et nous considérons l'opération

$$\mathfrak{F}_1 v = \mathfrak{F} v + \frac{a_{2,2}}{x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2},$$

qui porte sur des fonctions $v(x_1, x_2, \theta)$, périodiques par rapport à θ avec la période 2π ; cette opération est du type elliptique. Le changement de variables

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = x_2 \cos \theta, \quad x_3^* = x_2 \sin \theta$$

transforme \mathfrak{F}_1 en une opération qui porte sur une fonction $v^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, et qui remplit toutes les conditions ordinaires: si la fonction $c - \chi$, identique à c hors d'un certain domaine borné, est partout ≤ 0 et ne possède de discontinuités que du type indiqué au paragraphe 2, l'opération $\mathfrak{F}_1 - \chi \times (\dots)$ admet une solution fondamentale principale: nous ferons en sorte que χ , exprimé au moyen de x_1 , de x_2 et de θ , ne dépende pas de θ ; alors cette solution fondamentale principale ne change pas si l'on fait subir aux deux points variables une même rotation autour de l'axe $x_2^* = x_3^* = 0$.

Dans l'espace (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , nous considérons le domaine \mathfrak{D}^* de révolution autour de l'axe $x_2^* = x_3^* = 0$, et qui provient des points (x_1, x_2) du domaine \mathfrak{D} . En tout point de la frontière \mathfrak{S}^* de \mathfrak{D}^* , la fonction ψ a, par définition, la même valeur qu'au point correspondant de \mathfrak{S} . Cela suffit pour définir l'opération Θ_1 , qui, lorsque la fonction à laquelle on l'applique dépend seulement de x_1 et de x_2 , est identique à Θ , et qui ne comporte aucune dérivation par rapport à θ .

La fonction donnée $f(x_1, x_2)$ peut être considérée comme fonction de x_1^* , de x_2^* et de x_3^* ; en chaque point de \mathfrak{S}^* , on définit la fonction φ comme égale à la valeur prise par la fonction donnée au point correspondant de \mathfrak{S} .

Il est clair ainsi que toute solution $u(x_1, x_2)$ du problème considéré, relatif aux conditions (1) et (4), est aussi solution du problème relatif aux conditions

$$(39) \quad \mathfrak{F}_1 u = f, \quad \Theta_1 u = \varphi,$$

où il y a trois variables indépendantes x_1 , x_2 et θ , ou x_1^* , x_2^* et x_3^* .

Réciproquement, supposons que le problème du troisième type défini par les conditions (39) ait une solution u . Si u est une fonction de x_1 et de x_2 , indépendante de θ , c'est une solution du problème relatif aux conditions (1) et (4). Si u dépend de θ , nous avons encore une solution en y changeant θ en $\theta + \theta_0$ ou en $\theta_0 - \theta$, quelle que soit la constante θ_0 . Par suite $\frac{1}{p} \sum_{n=0}^{p-1} u\left(x_1, x_2, \theta + \frac{2n\pi}{p}\right)$ est aussi solution ; mais, si (x_1, x_2) varie dans un ensemble fermé appartenant à $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$, ces sommes tendent uniformément vers $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t) dt$, et leurs dérivées par rapport à x_1 , à x_2 et à θ tendent uniformément vers les limites respectives $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) dt$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) dt$ et zéro : donc, dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$, la fonction

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t) dt$$

est aussi solution de l'équation $\mathfrak{F}_1 U = f$ (voir *g*, I, § 17), donc de $\mathfrak{F} U = f$. Du reste, cette fonction U est évidemment continue dans tout $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$, car il en est ainsi de u , puisque les données ne sont discontinues que sur les variétés \mathfrak{M}_1^* et \mathfrak{M}_2^* , qui proviennent respectivement de \mathfrak{M}_1 et de \mathfrak{M}_2 , et qui sont de révolution. Les dérivées de U sont continues en tout point de $\mathfrak{D} - \mathfrak{M}_2$, car celles de u sont continues en tout point de $\mathfrak{D}^* - \mathfrak{M}_2^*$. Enfin on peut démontrer que U remplit la condition $\Theta U = \varphi$ en tout point de $\mathfrak{S} - \mathfrak{M}_2$: la démonstration est analogue à celle qui concerne l'opération \mathfrak{F} (voir *g*, I, § 17). Donc si le problème relatif aux conditions (39) est compatible, il a toujours une solution indépendante de θ , et qui par suite est aussi solution du problème relatif aux conditions (1) et (4).

Si f et φ sont nuls, le problème *homogène* relatif aux opérations \mathfrak{F}_1 et Θ_1 peut admettre des solutions non identiquement nulles $u(x_1, x_2, \theta)$, qui se déduisent d'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes. On démontre alors comme plus haut que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t) dt, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, 0+t) \cos(nt) dt$$

et

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t-\theta) \cos(nt) dt$$

sont, quel que soit l'entier n , solutions du même problème homogène ; les deux

dernières fonctions écrites sont aussi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t) \cos [n(t-\theta)] dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t) \cos [n(t+\theta)] dt;$$

la somme et la différence sont aussi solutions, c'est-à-dire que

$$\frac{\cos(n\theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad \frac{\sin(n\theta)}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1, x_2, t) \sin(nt) dt$$

sont aussi solutions du problème homogène. Ces fonctions se réduisent à un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, et par suite il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquelles une au moins de ces fonctions n'est pas identiquement nulle. Toute solution $u(x_1, x_2) \cos(n\theta)$ ou $u(x_1, x_2) \sin(n\theta)$ de ce problème homogène vient d'une solution du problème homogène relatif aux conditions

$$\mathbf{J}u = n^2 a_{2,2} x_2^{-2} u, \quad \Theta u = 0,$$

où u ne doit dépendre que de x_1 et de x_2 ; et toute solution u de ce dernier problème fournit les solutions $u(x_1, x_2) \cos(n\theta)$ et $u(x_1, x_2) \sin(n\theta)$ du problème homogène relatif à \mathbf{J}_1 et à Θ_1 .

Si $F_1(X, \mathcal{E})$ est la fonction de GREEN relative à \mathbf{J}_1 et à Θ_1 (en supposant que cette fonction existe), on constate que la fonction F de GREEN, relative à \mathbf{J} et à Θ , s'obtient en annulant dans F_1 l'angle θ d'un des points X ou \mathcal{E} , et en intégrant par rapport à l'angle θ de l'autre point, de zéro à 2π . On en conclut les limitations suivantes, valables pour $m=2$, et dont la première est déduite du paragraphe 6 (remarque finale), et la seconde est déduite de (34),

$$(40) \quad F(X, \mathcal{E}) = O[\log(4R) - \log L(X, \mathcal{E})],$$

$$(41) \quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X, \mathcal{E}) = O\left[L^{-1}(X, \mathcal{E}) + \log \frac{4R}{L(X, \mathcal{E})} \cdot r_2^{h-1}(X) \log \frac{4R}{s(X)} \right];$$

de plus les limitations trouvées dans les paragraphes 13 et 15 sont valables pour $m=2$. Les formules (14) et (15) permettent de s'affranchir de l'hypothèse que F_1 existe: il suffit que F existe.

17. - Dérivées de la fonction inconnue. — Les formules (34) et (41), jointes à l'équation (13) où l'on peut supposer que χ et ω sont continus, nous donnent la limitation suivante

$$(42) \quad \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = O\left(\sum_{n \geq 2} r_n^{h+1-n} + \sum_{n \geq 3} r_n^{h+2-n} r_2^{h-1} \right) \log \frac{4R}{s},$$

qui, si les \mathfrak{M}_n dont l'indice n est ≥ 2 n'existent pas, devient

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = O\left(\log \frac{4R}{s} \right).$$