ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUIGI MERLI

Sulle serie di Laguerre

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 3-4 (1937), p. 293-314

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_3-4_293_0>

SULLE SERIE DI LAGUERRE (*)

di LUIGI MERLI (Firenze).

Introduzione.

a). I polinomi $L_n^{(a)}(x)$ di TCHEBYCHEFF-LAGUERRE ([1])

$$(-1)^n L_n^{(a)}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{\Gamma(n+a+1)x^{n-m}}{n!\,(n-m)!\,\Gamma(n+a-m+1)}, \qquad (a > -1)$$

soddisfano l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\left[x^{a+1}e^{-x}\frac{dL_n^{(a)}(x)}{dx}\right] + e^{-x}x^a n L_n^{(a)}(x) = 0 \tag{1}$$

e tra essi sussiste anche la seguente relazione differenziale:

$$\frac{d}{dx}L_n^{(a)}(x) = -L_{n-1}^{(a+1)}(x). \tag{2}$$

Questi polinomi sono ortogonali rispetto alla funzione *peso* $x^a e^{-x}$ e il fattore di normalizzazione si deduce dalla relazione:

$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-x} L_n^{2(a)}(x)\,dx = \Gamma(n+a+1) : n!. \tag{3}$$

Sussistono per gli $L_n^{(a)}(x)$ le limitazioni:

$$|L_n^{(a)}(x)| < A_1 n^a \tag{4}$$

con A_1 costante ed $a > -\frac{1}{2}$, valevole per $0 \leqq x \leqq h$;

$$L_n^{(a)}(x) = x^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} n^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}} \left[\pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{a\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{R_1(n,x)}{\sqrt{n}}\right], \tag{5}$$

dove $|R_1(n,x)| \leqq R_1$, con R_1 costante, valevole per $0 < a \leqq x \leqq b$ ([2]).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

([1]) Cfr. G. VITALI e G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte II, Bologna 1935-XIV ed anche I. CHOKHATE: *Theorie générale des polynomes ortogonaux de Tchebycheff*, Memorial des Sciences Mathematiques [Paris, 1934].

([2]) Cfr. L. FÉJER: *Ueber die Bestimmung asymptotischer Werke*, Mathem. és termeszettundományi, 27 (1909), pp. 1-33.

Posto

$$l_n^{(a)}(x) = \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+a+1)} L_n^{(a)}(x), \tag{6}$$

si hanno le limitazioni che si deducono dalle (4) e (5) tenuto conto della (6):

$$\left| l_n^{(a)}(x) \right| < A n^{\frac{a}{2}}, \tag{4_1}$$

con A costante ed $a > -\frac{1}{2}$, valevole per $0 \leqslant x$;

$$\left| l_n^{(a)}(x) \right| \leqslant \frac{R(n, x)}{\sqrt[4]{n}}, \tag{5_1}$$

con $R(n, x)$ limitato indipendentemente da n per $0 < a \leqslant x \leqslant b$.

b). Tenendo presente la (6), essendo il sistema

$$\left\{ x^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{x}{2}} l_n^{(a)}(x) \right\}$$

ortogonale e normalizzato, lo sviluppo formale di una funzione $F(x)$ per i polinomi di LAGUERRE ha l'espressione:

$$F(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k l_k^{(a)}(x) \tag{7}$$

con

$$a_k = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} F(x) l_k^{(a)}(x) dx. \tag{8}$$

Nella Iª parte di questo lavoro dò un nuovo criterio di convergenza della serie di LAGUERRE nel caso $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$; la IIª parte è invece destinata allo studio delle serie lacunari di polinomi di LAGUERRE dal doppio punto di vista di RIEMANN e di FOURIER. Dal punto di vista riemanniano trovo che la convergenza di una serie lacunare in un intervallo (a, b) interno a $(0, +\infty)$, implica la sua convergenza assoluta in (a, b). Dal punto di vista di FOURIER provo che per ritrovare i classici teoremi di convergenza delle serie lacunari relative a funzioni sommabili occorre imporre qualche condizione sul comportamento della funzione all'infinito.

PARTE I.

Un teorema sulla convergenza delle serie di Laguerre.

TEOREMA. - *Sia per* $x>0$ $F(x)=F(1)+\int_1^x f(x)dx$, *ed* $f(x)=f(1)+\int_1^x \varphi(x)dx$, *con*

$$\varphi(x)=0\left(\frac{1}{x^{\alpha+2-\varepsilon}}\right) \quad per \quad x\to 0 \ (\varepsilon>0), \tag{9_1}$$

ed

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x}f^2(x)dx=H_2^2, \qquad \int_1^{+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x}\varphi^2(x)dx=K_2^2; \tag{9_2}$$

vogliamo dimostrare che in queste ipotesi la serie di Laguerre della funzione $F(x)$:

$$F(x)\sim\sum a_n l_n^{(\alpha)}(x), \tag{7}$$

risulta, per $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, *assolutamente ed uniformemente convergente in qualunque intervallo* (a, b) *interno a* $(0, +\infty)$ (³).

1. - *Sussiste per i coefficienti* a_n *la limitazione*:

$$|a_n|<\frac{A[(\alpha+2)H_1+K_1]}{n^{-\frac{\alpha}{2}+1}}+\frac{(\alpha+2)H_2+K_2}{n}. \tag{10}$$

a). Notiamo in primo luogo che le (9_2) permettono di dedurre una limitazione per la funzione $F(x)$ e per la sua derivata $f(x)$ quando sia $x\geqslant 1$. Precisamente essendo

$$F(x)=F(1)+\int_1^x f(x)dx,$$

(³) Il prof. PICONE (Giornale Ist. It. degli Attuari, Trattazione elementare della approssimazione lineare, ecc., V (1934), pp. 155-195) pone in luogo delle (9_1) e (9_2) le seguenti condizioni per $F(x)$ e $f(x)$:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}F^2(x)dx=K^2 \qquad \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}f^2(x)dx=H^2.$$

Le nostre si riferiscono invece ad $f(x)$ e $\varphi(x)$ e richiedono la integrabilità dei quadrati di $x^{\frac{\alpha}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}}f(x)$ ed $x^{\frac{\alpha}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}}\varphi(x)$ in $(1, +\infty)$, od anche in $(a, +\infty)$ con $a>0$, anziche in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$.

si ha:

$$|F(x)| \leq |F(1)| + \left| \int_1^x f(x)dx \right| = |F(1)| + \left| \int_1^x x^{-\frac{\alpha+2}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha+2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} f(x) dx \right|.$$

Applicando la disuguaglianza di SCHWARZ, si ha:

$$|F(x)| \leq |F(1)| + \left| \left(\int_1^x x^{-(\alpha+2)} e^x dx \int_1^x x^{\alpha+2} e^{-x} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq$$

$$\leq |F(1)| + H_2 \left| \left(\int_1^x x^{-(\alpha+2)} e^x dx \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq |F(1)| + K e^{\frac{x}{2}} \left[\frac{x^{-(\alpha+1)}}{-(\alpha+1)} + \frac{1}{\alpha+1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Quindi per $x \geq 1$ esisterà una costante M per cui si avrà:

$$(11_1) \qquad |F(x)| \leq M e^{\frac{x}{2}}.$$

Analogamente, tenuto conto della seconda delle (9_2), si ha:

$$(11_2) \qquad |f(x)| \leq N e^{\frac{x}{2}}.$$

b). Premesso questo, osserviamo che dalla equazione differenziale dei polinomi di LAGUERRE

$$(11) \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dl_n^{(\alpha)}(x)}{dx} \right] + e^{-x} x^\alpha n l_n^{(\alpha)}(x) = 0,$$

si ha:

$$e^{-x} x^\alpha l_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{n} \frac{d}{dx} \left[x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dl_n^{(\alpha)}(x)}{dx} \right];$$

dalla espressione dei coefficienti a_n, abbiamo:

$$|a_n| = \left| \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} F(x) l_n^{(\alpha)}(x) dx \right|,$$

perciò, sostituendo sotto il segno di integrale in questa l'espressione ultima trovata:

$$|a_n| = \frac{1}{n} \left| \int_0^{+\infty} F(x) \frac{d}{dx} \left[x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dl_n^{(\alpha)}(x)}{dx} \right] dx \right|,$$

ed integrando per parti, otteniamo:

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \left| \left[F(x) x^{\alpha+1} e^{-x} \frac{dl_n^{(\alpha)}(x)}{dx} \right]_{x=0}^{x=+\infty} \right| + \frac{1}{n} \left| \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) \frac{dl_n^{(\alpha)}(x)}{dx} dx \right|,$$

e siccome per le ipotesi del teorema e per la (11_2) che se ne deduce, il primo termine del secondo membro è nullo, avremo:

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \left| \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) \frac{dl_n^{(\alpha)}(x)}{dx} dx \right|.$$

Integriamo ancora per parti, si ha:

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \left| [x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) l_n^{(\alpha)}(x)]_0^{+\infty} \right| + \frac{1}{n} \left| \int_0^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) d[x^{\alpha+1} e^{-x} f(x)] \right|;$$

ma è ancor qui $[x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) l_n^{(\alpha)}(x)]_0^{+\infty} = 0$; per cui

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} \left| \int_0^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) d[x^{\alpha+1} e^{-x} f(x)] \right| \leq \frac{\alpha+1}{n} \left| \int_0^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx \right| +$$
$$+ \frac{1}{n} \left| \int_0^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) dx \right| + \frac{1}{n} \left| \int_0^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} \varphi(x) dx \right|.$$

Possiamo anche scrivere:

$$|a_n| \leq \frac{\alpha+1}{n} \left| \int_0^1 l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx \right| + \frac{\alpha+1}{n} \left| \int_1^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx \right| +$$
$$+ \frac{1}{n} \left| \int_0^1 l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) dx \right| + \frac{1}{n} \left| \int_1^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) dx \right| +$$
$$+ \frac{1}{n} \left| \int_0^1 l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} \varphi(x) dx \right| + \frac{1}{n} \left| \int_1^{+\infty} l_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} \varphi(x) dx \right|,$$

od anche, brevemente:

$$|a_n| \leq \frac{\alpha+1}{n} I_1 + \frac{1}{n} I_2 + \frac{1}{n} I_3 + \frac{\alpha+1}{n} I_4 + \frac{1}{n} I_5 + \frac{1}{n} I_6. \tag{12}$$

Essendo per la (4_1) $|l_n^{(\alpha)}(x)| < A n^{\frac{\alpha}{2}}$, valevole per $\alpha > -\frac{1}{2}$ ed $x \geq 0$, si ha tenendo conto della (9_1):

$$\left\{ \begin{aligned} & I_1 \leq A n^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 x^{\alpha} e^{-x} |f(x)| dx \leq A H_1 n^{\frac{\alpha}{2}} \\ & I_2 \leq A n^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 x^{\alpha+1} e^{-x} |f(x)| dx \leq A n^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 x^{\alpha} |f(x)| dx = A H_1 n^{\frac{\alpha}{2}} \\ & I_3 \leq A n^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^1 x^{\alpha+1} e^{-x} |\varphi(x)| dx \leq A K_1 n^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \right. \tag{12_1}$$

Notiamo che per $x \geqslant 1$, essendo $x^{\alpha+2} \geqslant x^\alpha$, ed anche

$$x^{\alpha+2}e^{-x}f^2(x) \geqslant x^\alpha e^{-x}f^2(x),$$

si ha:

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f^2(x)dx \leqslant \int_1^{+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x}f^2(x)dx = H_2^2.$$

Tenuto conto di quest'ultima disuguaglianza e delle (9_2), ed osservando che per le (3) e (6)

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_n^{2(\alpha)}(x)dx = 1,$$

$$(12_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} I_4 &\leqslant \left(\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f^2(x)dx \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_n^{2(\alpha)}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant H_2 \\ I_5 &\leqslant \left(\int_1^{+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x}f^2(x)dx \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_n^{2(\alpha)}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant H_2 \\ I_6 &\leqslant \left(\int_1^{+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x}\varphi^2(x)dx \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_n^{2(\alpha)}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K_2. \end{aligned} \right.$$

Dalla (12), tenuto conto delle (12_1) e (12_2) abbiamo allora:

$$|a_n| \leqslant \frac{(\alpha+1)AH_1 n^{\frac{\alpha}{2}}}{n} + \frac{AH_1 n^{\frac{\alpha}{2}}}{n} + \frac{AK_1 n^{\frac{\alpha}{2}}}{n} + \frac{(\alpha+1)H_2}{n} + \frac{H_2}{n} + \frac{K_2}{n},$$

cioè:

$$(10) \qquad |a_n| \leqslant \frac{A[(\alpha+2)H_1 + K_1]}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{(\alpha+2)H_2 + K_2}{n}.$$

2. - Maggiorazione dei termini della serie (7).

Essendo per la (5_1):

$$|l_n^{(\alpha)}(x)| < \frac{R(n,x)}{\sqrt[4]{n}},$$

con $R(n, x)$ limitata per $0 < a \leqslant x \leqslant b$, si ha tenuto conto della (10):

$$|a_n l_n^{(\alpha)}(x)| < \left\{ \frac{A[(\alpha+2)H_1 + K_1]}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{(\alpha+2)H_2 + K_2}{n} \right\} \frac{R(n,x)}{\sqrt[4]{n}}.$$

Posto

$$A[(\alpha+2)H_1 + K_1]R(n, x) = T_1(n, x), \qquad [(\alpha+2)H_2 + K_2]R(n, x) = T_2(n, x),$$

le quantità $T_1(n, x)$ e $T_2(n, x)$ risulteranno limitate per $0 < a \leqslant x \leqslant b$, ed avremo:

$$(10_1) \qquad |a_n l_n^{(\alpha)}(x)| < \frac{T_1(n, x)}{n^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + \frac{T_2(n, x)}{n^{\frac{5}{4}}}, \qquad \left(\alpha > -\frac{1}{2}\right).$$

3. - Dimostrazione del teorema enunciato.

Si ha tenendo conto della (10_1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n l_n^{(\alpha)}(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_1(n, x)}{n^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_2(n, x)}{n^{\frac{5}{4}}},$$

ed essendo per $0 < a \leqslant x \leqslant b$, $T_1(n, x) < B_1$, $T_2(n, x) < B_2$, con B_1 e B_2 costanti indipendenti da n, si avrà la limitazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n l_n^{(\alpha)}(x)| < B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + B_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}.$$

La seconda di queste serie è sempre convergente; e la prima per $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ risulta pure convergente, e pertanto la serie

$$(7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n^{(\alpha)}(x),$$

risulta *assolutamente ed uniformemente convergente in qualsiasi intervallo* (a, b) *interno a* $(0, +\infty)$.

PARTE II.

§ 1. - Estensione alle serie lacunari di polinomi di Laguerre di un teorema di Zygmund [4] sulle serie trigonometriche lacunari.

1. - Data la successione di polinomi di LAGUERRE $l_n^{(\alpha)}(x)$, chiamasi serie *lacunare* di polinomi di LAGUERRE una serie del tipo

$$(7_1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x),$$

con

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1,$$

essendo $\{a_k\}$ una successione reale a termini costanti.

[4] Cfr. A. ZYGMUND, Studia Mathematica, T. III (1931), pp. 76-83.

2. - **Lemma.** — *Se una serie lacunare di polinomi di Laguerre è convergente in tutti i punti di un insieme E_1 di misura positiva interno a* $(0, +\infty)$, *deve essere necessariamente*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\sqrt[4]{n_k}} = 0.$$

Dimostrazione. - *a*). Facciamo vedere in primo luogo che posto

$$T_{M,N}(x) = \sum_{k=M}^{N} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x),$$

ed assegnato un insieme E, contenuto in $(0, +\infty)$, e di misura $e > 0$, si può trovare un intero M_0, tale che valga la disuguaglianza:

$$\int_E |T_{M,N}(x)|\, dx > C \sqrt{\sum_{k=M}^{N} \left(\frac{a_k}{\sqrt[4]{n_k}}\right)^2}, \qquad N > M \geqslant M_0, \tag{13}$$

con C costante positiva dipendente soltanto da q e da e. Si ha infatti facendo uso della formula di approssimazione asintotica (5) per i polinomi di LAGUERRE:

$$T_{M,N}(x) = \sum_{k=M}^{N} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=M}^{N} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cdot$$
$$\cdot \left[\pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}}\right],$$

e da questa integrando in un insieme E, contenuto in un intervallo interno a $(0, +\infty)$ e di misura $e > 0$;

$$\int_E |T_{M,N}(x)|\, dx =$$
$$= \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left[\pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}}\right] \right| dx \leqslant$$
$$\geqslant 2 \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\sqrt{x} -$$
$$- \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}} \right| dx,$$

ed anche, tenuto conto che in E sarà $x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} > A$ con A costante, si avrà:

$$\int_E |T_{M,N}(x)|\, dx \geqslant \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} a_k \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\sqrt{x} - \tag{14}$$

$$- \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} a_k \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}} \right| dx = S_1 - S_2.$$

Posto:

$$a_k' = a_k \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}},$$

si ha:

$$S_1 = \left| \sum_{k=M}^{N} a_k \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=M}^{N} a_k' \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=M}^{N} \left[a_k' \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\sqrt{n_k x} + a_k' \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} 2\sqrt{n_k x} \right] \right|;$$

e posto ancora:

$$a_k' \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \alpha_k, \qquad a_k' \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \beta_k,$$

$$\sqrt{x} = \gamma, \qquad 2\sqrt{n_k} = m_k$$

essendo

$$\frac{m_{k+1}}{m_k} = \frac{2\sqrt{n_{k+1}}}{2\sqrt{n_k}} = \sqrt{\frac{n_{k+1}}{n_k}} \geqslant \sqrt{q} > 1,$$

otterremo per S_1 la serie trigonometrica lacunare:

$$S_1 = \left| \sum_{k=M}^{N} (\alpha_k \cos m_k\gamma + \beta_k \operatorname{sen} m_k\gamma) \right|,$$

e si ha allora, per un teorema di SZIDON ([5]) sulle serie trigometriche lacunari,

---

([5]) Cfr. S. SZIDON, Journal von Crelle, Bd. 163, 4 (1932), pp. 251-252 ed anche: G. SESTINI: *Un teorema sugli sviluppi, ecc.*, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere, vol LXVI, fasc. VI-X.

che si può trovare un M_0 tale che per tutti gli $M \geqslant M_0$,

$$\frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} (\alpha_k \cos m_k \gamma + \beta_k \operatorname{sen} m_k \gamma) \right| > C_1 \sqrt{\sum_{k=M}^{N} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}, \qquad N > M \geqslant M_0,$$

dove C_1 è una costante *indipendente da M.*

È

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 = a_k^{2\prime} = \frac{\Gamma(n_k+1)}{\Gamma(n_k+\alpha+1)} n_k^{2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)} a_k^2,$$

ed essendo:

$$\frac{\Gamma(n_k+1)}{\Gamma(n_k+\alpha+1)} n_k^{\alpha-\frac{1}{2}} > \frac{C_2}{\sqrt{n_k}}, \qquad \text{con } C_2 \text{ costante assoluta,}$$

sarà

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 > \frac{C_2 a_k^2}{\sqrt{n_k}},$$

ed avremo infine:

$$(15) \qquad S_1 = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} a_k \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\sqrt{x} >$$

$$> C' \sqrt{\sum_{k=M}^{N} \frac{a_k^2}{\sqrt{n_k}}}, \qquad N > M \geqslant M_0,$$

e C' *costante indipendente* da M.

Consideriamo ora il secondo termine S_2 del secondo membro della (14).

Essendo in E $x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} |R(n_k, x)| \leqslant B$, ed avendosi $\dfrac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant L$, con B ed L costanti indipendenti da n_k, otterremo:

$$S_2 \leqslant ABeL \sum_{k=M}^{N} \frac{|a_k|}{\sqrt[4]{n_k}} \frac{1}{\sqrt{n_k}},$$

ed applicando la disuguaglianza di LAGRANGE:

$$(16) \qquad S_2 \leqslant ABeL \left(\sum_{k=M}^{N} \frac{a_k^2}{\sqrt{n_k}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=M}^{N} \frac{1}{n_k}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant ABeL \left(\frac{1}{n_M} \frac{q}{q-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=M}^{N} \frac{a_k^2}{\sqrt{n_k}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Scelto adesso $M_1 > M_0$ in modo che valga la (15) e sia contemporaneamente

$$C' > ABeL \left(\frac{1}{n_M} \frac{q}{q-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dalla (14), per le (15) e (16), per $N > M_1$, si ha:

$$\int_E |T_{M,N}(x)|\,dx > C' \sqrt{\sum_{k=M}^{N} \frac{a_k^2}{\sqrt{n_k}}} - ABeL\left(\frac{1}{n_{M_1}} \frac{q}{q-1}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{k=M}^{N} \frac{a_k^2}{\sqrt{n_k}}},$$

e posto

$$C' - ABeL\left(\frac{1}{n_{M_1}} \frac{q}{q-1}\right)^{\frac{1}{2}} = C > 0,$$

otterremo infine:

$$\int_E |T_{M,N}(x)|\,dx > C \sqrt{\sum_{k=M}^{N} \frac{a_k^2}{\sqrt{n_k}}} \tag{17}$$

con *C costante positiva dipendente soltanto da q e da e*, come dovevasi far vedere.

b). Avendo supposto la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \tag{7_1}$$

convergente in tutti i punti di un insieme E_1 di misura e_1 positiva, la dimostrazione del lemma è ora immediata.

Infatti se la serie (7_1) è convergente in E_1, per un teorema di EGOROFF ([6]) si possono determinare una costante L ed un numero $\eta < e_1$ tale che, escludendo dall'insieme E_1 un sottoinsieme di misura inferiore ad η, in tutto l'insieme E rimanente, pure di misura $e > e_1 - \eta > 0$, qualunque sia N, si abbia

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \right| < L$$

e da questa si ha:

$$\left| \sum_{k=M}^{N} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \right| < 2L = Q, \qquad N = M,\ M+1, \ldots.$$

Tenuto conto della (17), si ha allora che esiste un numero M_1 tale che, per $M > M_1$ e qualunque sia N, si ha:

$$Qe > \int_E \left| \sum_{k=M}^{N} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \right| dx > C \sqrt{\sum_{k=M}^{N} \frac{a_k^2}{\sqrt{n_k}}}, \qquad N > M \geqslant M_1$$

([6]) Cfr. EGOROFF, Comptes Rendus, vol. 152 (1911), pp. 244-246.

e quindi

$$\sum_{k=M}^{N}\left(\frac{a_k}{\sqrt[4]{n_k}}\right)^2<\frac{Q^2e^2}{C^2},$$

e da questa segue la convergenza di

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{\sqrt[4]{n_k}}\right)^2$$

e perciò

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{\sqrt[4]{n_k}}=0.$$

OSSERVAZIONE. - Il procedimento usato per la dimostrazione di questo lemma è stato largamente applicato allo studio delle serie lacunari di FOURIER di varie classi di funzioni $\{\varphi_k(x)\}$ ortogonali e normalizzate (serie *trigonometriche*, serie di STURM-LIOUVILLE, serie di LEGENDRE) e permette sempre di dimostrare che se una serie di dette funzioni

$$(a) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$$

risulta convergente in un insieme di punti contenuto nel loro campo di definizione, risulta pure convergente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, cioè la (a) è serie di FOURIER di una funzione di quadrato sommabile [7]. Questo non avviene per i polinomi di LAGUERRE. Consideriamo infatti, per esempio, la serie lacunare

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_{n_k}^{(a)}(x);$$

essa risulta convergente in qualsiasi intervallo finito, mentre avendosi qualunque sia l'indice k, $a_k=1$, non è $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ convergente.

3. - Possiamo ora estendere alle serie lacunari di LAGUERRE, un teorema di ZYGMUND sulle serie trigonometriche lacunari. Si ha infatti il

TEOREMA. - *Se una serie lacunare di Laguerre risulta convergente in un intervallo* (a, b) *interno a* $(0, +\infty)$, *essa è in* (a, b) *assolutamente convergente.*

---

(7) Cfr. G. SESTINI: *Sulle serie lacunari di polinomi di Legendre.* Rendiconti del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere vol. LXVI. Fasc. XI-XV, e dello stesso autore cfr. op. cit. nota (5).

Dimostrazione. - Si ha infatti applicando la formula di approssimazione asintotica (5):

$$(18)\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(2\sqrt{n_k x} - \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}}.$$

Si ha ora

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}} \right| =$$
$$= x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \right|.$$

Per il lemma precedente si ha che essendo la serie $\sum_{k-1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x)$ convergente, è $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\sqrt[4]{n_k}} = 0$, cioè, qualunque sia k, esiste una costante D tale che

$$\left| \frac{a_k}{\sqrt[4]{n_k}} \right| < D;$$

è inoltre in (a, b) interno a $(0, +\infty)$ $x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} |R(n_k, x)| < M$; ed è pure

$$\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} < An^{-\frac{\alpha}{2}};$$

si avrà allora:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{R(n_k, x)}{\sqrt{n_k}} \right| < AMD \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k}},$$

ed essendo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_k}}$ convergente, la seconda serie del secondo membro della (18) risulta assolutamente convergente.

Essendo per ipotesi convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x),$$

risulterà pure convergente la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} \cos\left(2\sqrt{n_k x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{n_k x}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Con le stesse posizioni fatte nel lemma precedente, questa ultima serie può essere messa nella forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos m_k\gamma + \beta_k \operatorname{sen} m_k\gamma),$$

che risulta una serie trigonometrica lacunare convergente in tutti i punti di un intervallo (a, b); applicando allora un teorema di ZYGMUND ([8]), si può assicurare che essa risulta ivi assolutamente convergente.

Dalla (18) per l'assoluta convergenza in (a, b) delle due serie del secondo membro, segue l'assoluta convergenza in (a, b) della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x).$$

§ 2.

Per alcune classi di funzioni che ammettono uno sviluppo in serie lacunare di polinomi di LAGUERRE, possiamo dimostrare i seguenti teoremi.

1. - *a*). TEOREMA. — *Se $\{n_k\}$ è una successione di numeri interi positivi, soddisfacenti alla condizione*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1,$$

e se rispetto al sistema di polinomi di Laguerre $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$ i coefficienti di Fourier di una funzione $F(x)$ sono tutti nulli eccentuati quelli di indice n_k, nella ipotesi che sia:

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} F^2(x)\, dx = K^2, \tag{19}$$

([8]) Cfr. nota ([14]).

la serie di Fourier della $F(x)$, rispetto al sistema $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$,

$$(7_1) \qquad F(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x), \qquad (\alpha > -1)$$

con

$$(8_1) \qquad a_k = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{(\alpha)}(x) F(x)\, dx,$$

risulta assolutamente ed uniformemente convergente in ogni intervallo (a, b) interno a $(0, +\infty)$.

Dimostrazione. - Si ha infatti:

$$|a_k| = \left| \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{(\alpha)}(x) F(x)\, dx \right|,$$

ed applicando la disuguaglianza di SCHWARZ e tenuto conto della (19), si ha:

$$|a_k| \leq \left(\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{(\alpha)}(x)\, dx \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} F^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = K.$$

Tenuto conto che in ogni intervallo (a, b) di $(0, +\infty)$,

$$|l_{n_k}^{(\alpha)}(x)| < \frac{R(n_k, x)}{\sqrt[4]{n_k}}, \qquad \text{con } R(n_k, x) < R,$$

si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x)| \leq KR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n_k}},$$

ed essendo quest'ultima serie convergente, la serie (7_1) risulta assolutamente ed uniformemente convergente per $0 < a \leq x \leq b$.

b). Nel punto $x = 0$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x)| \leq KAR \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad \left(\alpha > -\frac{1}{2}\right)$$

e pertanto per $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, la serie *risulta convergente anche per* $x = 0$.

2. - Si può generalizzare il precedente teorema nel caso in cui sia $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. Si ha infatti il

TEOREMA. - *Se $\{n_k\}$ è una successione di numeri interi positivi soddisfacenti alla condizione*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1,$$

e se rispetto al sistema di polinomi $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$, *con* $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, *i coefficienti di Fourier di una funzione* $F(x)$ *sono tutti nulli eccettuati quelli di ordine* n_k, *nella ipotesi che sia:*

$$\text{(20)} \qquad \int_0^c x^\alpha |F(x)|\, dx = B_1, \qquad \int_c^{+\infty} x^\alpha e^{-x} F^2(x)\, dx = B_2^2,$$

allora la serie di Fourier, rispetto al sistema $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$, *della* $F(x)$, *risulta assolutamente ed uniformemente convergente in ogni intervallo* (a, b) *interno a* $(0, +\infty)$ (9).

Dimostrazione. - *a*). *Si ha infatti*:

$$|a_k| \leqslant \left| \int_0^c x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{(\alpha)}(x) F(x)\, dx \right| + \left| \int_c^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{(\alpha)}(x) F(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^c x^\alpha \,|\, l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \,|\,|\, F(x) \,|\, dx + \left(\int_c^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{(\alpha)}(x)\, dx \int_c^{+\infty} x^\alpha e^{-x} F^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}};$$

essendo

$$|\, l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \,| < A n_k^{\frac{\alpha}{2}}, \qquad \text{per } x \geqslant 0 \text{ ed } \alpha > -\frac{1}{2},$$

ed

$$\int_c^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{2(\alpha)}(x)\, dx \leqslant 1,$$

tenuto conto delle (20) otteniamo:

$$|a_k| \leqslant A B_1 n_k^{\frac{\alpha}{2}} + B_2;$$

si ha allora:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \,| \leqslant A B_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(n_k, x)}{n_k^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + B_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(n_k, x)}{\sqrt[4]{n_k}},$$

ed essendo per $0 < a \leqslant x \leqslant b$ $R(n_k, x) < R$, con R costante indipendente da n_k, si avrà:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) \,| \leqslant A R B_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}} + R B_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n_k}},$$

e pertanto per $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ si ha la convergenza.

b). Al solito si avrà anche la convergenza nel punto $x = 0$ per $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

(9) In questo caso imponiamo l'integrabilità del quadrato di $x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} F(x)$ anzichè in $(0, +\infty)$ in $(c, +\infty)$ con c comunque grande.

3. - TEOREMA. — *Se* $\{n_k\}$ *è una successione di numeri interi positivi, soddisfacenti alla condizione*:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1,$$

e se rispetto al sistema di polinomi di Laguerre $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$ *i coefficienti di Fourier di una funzione* $F(x)$ *sono tutti nulli eccettuati quelli di indice* n_k, *nella ipotesi che sia*:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(x)dx \quad \text{ed} \quad \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}f^2(x)dx = K^2, \tag{21}$$

la serie di Fourier, rispetto al sistema $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$, $(\alpha > -1)$, *della* $F(x)$, *risulta assolutamente ed uniformemente convergente verso* $F(x)$ *in ogni intervallo* (a, b) *interno a* $(0, +\infty)$.

Dimostrazione. - a). Sussiste per i coefficienti a_k *la limitazione*:

$$|a_k| \leqslant \frac{K}{\sqrt{n_k}}. \tag{22}$$

Si ha infatti dalla equazione differenziale (1) dei polinomi di LAGUERRE:

$$e^{-x}x^\alpha l_{n_k}^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{n_k}\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dl_{n_k}^{(\alpha)}(x)}{dx}\right],$$

e sostituendo nella espressione dei coefficienti a_k

$$|a_k| = \left|\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} l_{n_k}^{(\alpha)}(x)F(x)dx\right|,$$

si ha:

$$|a_k| = \frac{1}{n_k}\left|\int_0^{+\infty} F(x)\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{dl_{n_k}^{(\alpha)}(x)}{dx}\right]dx\right|,$$

da cui integrando per parti e tenuto conto che per le ipotesi si ha per $x \leqslant 1$ $|F(x)| \leqslant He^{\frac{x}{2}}$ [10]:

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{n_k}\left|\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}f(x)\frac{dl_{n_k}^{(\alpha)}(x)}{dx}dx\right|. \tag{23}$$

---

[10] Basta ripetere il ragionamento fatto in principio alla dimostrazione del teorema della parte I.

Ma si ha per la (2):

$$\frac{dL_{n_k}^{(\alpha)}(x)}{dx} = - L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

od anche

$$\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \frac{dL_{n_k}^{(\alpha)}(x)}{dx} = - \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

cioè

$$\frac{dl_{n_k}^{(\alpha)}(x)}{dx} = - \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x);$$

e sostituendo nella (23), si ha:

$$(23_1) \qquad |a_k| \leq \frac{1}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \left| \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} f(x) L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x) dx \right|.$$

Applicando al solito la disuguaglianza di SCHWARZ e tenuto conto che per la (3) si ha:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} L_{n_k-1}^{2(\alpha+1)}(x) dx = \frac{\Gamma(n_k+\alpha+1)}{\Gamma(n_k)},$$

otteniamo:

$$|a_k| \leq \frac{1}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} f^2(x) dx \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} L_{n_k-1}^{2(\alpha+1)}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{K}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k)} = \frac{K}{\sqrt{n_k}},$$

cioè la (22).

b). Dalla limitazione (22) otteniamo l'altra:

$$a_k^2 \leq \frac{K^2}{n_k},$$

e pertanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ essendo minorante della serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$, risulta convergente, da cui segue che la funzione

$$x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} F(x)$$

risulta di quadrato sommabile; si ha cioè:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} F^2(x)\,dx = H^2 \quad (^{11}). \tag{24}$$

Ora le (21) unite alla (24) danno le condizioni per le quali è applicabile il teorema di PICONE sulle serie di LAGUERRE ([12]), e pertanto la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x)$$

risulta assolutamente ed uniformemente convergente verso $F(x)$, in ogni intervallo (a, b) interno a $(0, +\infty)$; possiamo cioè scrivere per ogni $x > 0$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x).$$

4. - Quando si consideri $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ possiamo generalizzare il precedente teorema. Si ha infatti:

TEOREMA. - *Se* $\{n_k\}$ *è una successione di numeri interi positivi, soddisfacenti la condizione*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1,$$

e se rispetto al sistema di polinomi di Laguerre $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$, *i coefficienti di Fourier di una funzione* $F(x)$ *sono tutti nulli eccettuati quelli di indice* $\{n_k\}$, *nella ipotesi che sia per* $x > 0$

$$F(x) = F(1) + \int_1^x f(x)\,dx, \qquad \text{con} \quad \int_1^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} f^2(x)\,dx = K^2 \tag{25}$$

e *per* $x \to 0$

$$f(x) = 0\left(\frac{1}{x^{\alpha+2-\varepsilon}}\right) \qquad \text{con} \quad \varepsilon > 0,$$

la serie di Fourier della $F(x)$, *rispetto al sistema* $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$ *risulta assolutamente ed uniformemente convergente in ogni intervallo* (a, b) *interno a* $(0, +\infty)$ ([13]).

([11]) Cfr. G. SANSONE: *Sul teorema di Parseval in intervalli infiniti.* Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), IV (1935), pp. 35-42.

([12]) Cfr. nota ([3]).

([13]) In questo teorema imponiamo l'integrabilità del quadrato di $x^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} f(x)$ anzichè in $(0, +\infty)$ in $(1, +\infty)$ od anche in $(c, +\infty)$ con c grande a piacere.

Dimostrazione. - *a*). Nelle ipotesi del teorema precedente abbiamo ottenuto la limitazione (23_1):

$$(23_1) \qquad |a_k| \leqslant \frac{1}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \left| \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}f(x)L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x)dx \right| ;$$

esso è evidentemente valevole anche nelle condizioni di questo teorema ([14]). Tale limitazione può essere scritta nel seguente modo:

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \left| \int_0^{1} x^{\alpha+1}e^{-x}f(x)L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x)dx \right| +$$
$$+ \frac{1}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \left| \int_1^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}f(x)L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x)dx \right| .$$

Ma si ha per la (4):

$$|L_{n_k-1}^{(\alpha+1)}(x)| < A_1(n_k-1)^{\alpha+1} = A_1\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{\alpha+1} n_k^{\alpha+1} \leqslant A_1 n_k^{\alpha+1} \qquad (n_1 \geqslant 2)$$

ed è inoltre

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}L_{n_k-1}^{2(\alpha+1)}(x)dx \leqslant \frac{\Gamma(n_k+\alpha+1)}{\Gamma(n_k)},$$

per cui, tenuto conto delle (25) si ha:

$$|a_k| \leqslant \frac{A_1}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} n_k^{\alpha+1} \int_0^1 |f(x)|\, x^{\alpha+1}dx +$$
$$+ \frac{1}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \left| \left(\int_1^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}f^2(x)dx \int_1^{+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}L_{n_k-1}^{2(\alpha+1)}(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A_1 H \Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1) n_k^{\alpha+1}}{n_k \Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} + \frac{K}{n_k} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k)},$$

e ricordando che si ha

$$\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+1)}{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n_k+\alpha+1)} \leqslant B n_k^{-\frac{\alpha}{2}},$$

otteniamo:

$$(26) \qquad |a_k| \leqslant C n_k^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{K}{\sqrt{n_k}} \qquad (\alpha > -1).$$

([14]) Basta riferirsi al teorema della parte I.

b). Ripetendo allora il solito ragionamento, essendo per $0<a\leqslant x\leqslant b$

$$|l_{n_k}^{(\alpha)}(x)|<\frac{R}{\sqrt[4]{n_k}},$$

otterremo, tenendo conto della (26):

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x)|\leqslant RC\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}+KR\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-\frac{3}{4}},$$

e quindi per $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ si ha la convergenza ed il teorema è così dimostrato.

c). Al solito, nel punto $x=0$ si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x)|\leqslant RC\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{\alpha}+KR\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

e quindi per $-1<\alpha<0$ si ha la convergenza anche per $x=0$.

5. - Vogliamo infine dare un criterio di convergenza, nel quale, anzichè imporre delle condizioni sull'integrabilità della funzione o della sua derivata, imponiamo una limitazione alla funzione in $(0, +\infty)$. Si ha il

TEOREMA. - *Se* $\{n_i\}$ *è una successione di numeri interi positivi soddisfacenti alla condizione*

$$\frac{n_{i+1}}{n_i}\geqslant q>1,$$

e se rispetto a $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$ *i coefficienti di Fourier di una funzione* $F(x)$ *sono tutti nulli eccettuati quelli di ordine* n_i, *nella ipotesi che sia*

$$F(x)=0\left(e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha+\varepsilon}{2}}\right)$$

con $1<\varepsilon<2+\alpha$, *allora la serie di Fourier della* $F(x)$, *rispetto al sistema* $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}$ *risulta assolutamente ed uniformemente convergente in ogni intervallo* (a, b) *interno a* $(0, +\infty)$, *per* $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$.

Dimostrazione. - a). *È*:

$$|a_k|=\left|\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}F(x)l_{n_k}^{(\alpha)}(x)dx\right|\leqslant L\int_0^{+\infty}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}e^{-\frac{x}{2}}|l_{n_k}^{(\alpha)}(x)|dx\leqslant$$

$$\leqslant L\int_0^{c}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}e^{-\frac{x}{2}}|l_{n_k}^{(\alpha)}(x)|dx+L\int_c^{+\infty}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}e^{-\frac{x}{2}}|l_{n_k}^{(\alpha)}(x)|dx\leqslant$$

$$\leqslant LAn_k^{\frac{\alpha}{2}}\int_0^{c}x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}dx+L\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-x}l_{n_k}^{(\alpha)2}(x)dx\int_0^{+\infty}x^{-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

ma essendo per ipotesi $\varepsilon < \alpha + 2$, è $\frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{2} > -1$, si ha cioè:

$$\int_0^c x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\, dx = A_1\,;$$

ed essendo $\varepsilon > 1$:

$$\int_c^{+\infty} x^{-\varepsilon} dx = A_2,$$

per cui:

$$|a_k| \leq LAA_1 n_k^{\frac{\alpha}{2}} + LA_2 \qquad \left(\alpha > -\frac{1}{2}\right).$$

b). Ripetendo allora il solito ragionamento, otterremo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k l_{n_k}^{(\alpha)}(x) | \leq RLAA_1 \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} + RLA_2 \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-\frac{1}{4}}$$

e quindi per $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ si ha la convergenza, c. v. d.

c). Analogamente a quanto si è fatto nei teoremi precedenti, si ha la convergenza anche nel punto $x = 0$ per $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.