ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI RICCI

Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann (seconda memoria)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 2 (1937), p. 91-116

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_2_91_0>

SU LA CONGETTURA DI GOLDBACH E LA COSTANTE DI SCHNIRELMANN

(SECONDA MEMORIA)

di GIOVANNI RICCI (Pisa).

PARTE II.

Il metodo di Viggo Brun.

§ 1. - Strumenti combinatorî.

11\. - Siano assegnati r $(r>0)$ oggetti distinti che possiamo denotare coi numeri

$$r_0, \quad r_0-1, \quad r_0-2, \ldots, \quad r_0-r+1$$

e consideriamo le combinazioni (semplici) γ che si possono formare con questi oggetti, compresa la combinazione vuota che denoteremo con 0 ([1]).

Diciamo (per introdurre una locuzione adatta pel seguito) che una combinazione γ *divide* un'altra combinazione β (e anche che β è divisibile per γ), e scriveremo $\gamma|\beta$, quando tutti gli elementi di γ sono in β.

Diciamo che una combinazione è *pari* o *dispari* secondochè è pari o dispari il numero degli elementi che la compongono.

Così, in particolare, la combinazione 0 divide qualunque combinazione, è divisibile soltanto per se stessa, ed è pari.

È ben noto che per $r>0$ il numero delle combinazioni pari è uguale a quello delle combinazioni dispari: infatti, dallo sviluppo di $(1-x)^r$ per $x=1$ si ricava l'uguaglianza

$$\binom{r}{0}+\binom{r}{2}+\binom{r}{4}+\ldots=\binom{r}{1}+\binom{r}{3}+\binom{r}{5}+\ldots$$

Per la stessa ragione, se γ non è vuota $(\gamma \neq 0)$ le combinazioni pari che dividono γ sono tante quante le dispari.

L'osservazione base per la geniale applicazione di VIGGO BRUN si può presentare come segue

Definizioni. - Fissiamo gl'interi

$$r_0>r_1>r_2>\ldots>r_l>r_{l+1} \quad (=r_0-r) \tag{11.1}$$

(*) *Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann.* Prima memoria. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, s. II, vol. VI, pp. 71-90.

([1]) Risultando sempre chiaro nel seguito quando il simbolo 0 rappresenta la combinazione vuota e quando esso rappresenta lo zero, non v'è pericolo di equivoco.

e consideriamo i due complessi Γ e $\bar{\Gamma}$ di combinazioni definiti simbolicamente al modo seguente

$$(11.2)\quad \begin{cases} \Gamma \equiv 0 + \sum (s_1, s_2, \ldots, s_i) \\ s_1 > s_2 > \ldots > s_i, \qquad s_j \leqq r_{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \quad (j=1, 2, \ldots, i); \quad i=1, 2, \ldots, 2l+2 \end{cases}$$

$$(11.3)\quad \begin{cases} \bar{\Gamma} \equiv 0 + \sum (s_1, s_2, \ldots, s_i) \\ s_1 > s_2 > \ldots > s_i, \qquad s_j \leqq r_{\left[\frac{j+1}{2}\right]} \quad (j=1, 2, \ldots, i); \quad i=1, 2, \ldots, 2l+1. \end{cases}$$

Lemma 1.° (VIGGO BRUN). - *Sia γ non vuota;*

nel complesso delle combinazioni di Γ che dividono γ, il numero di quelle dispari non supera il numero di quelle pari;

nel complesso delle combinazioni di $\bar{\Gamma}$ che dividono γ, il numero di quelle pari non supera il numero di quelle dispari.

Volendo esprimere ciò in simboli, denotiamo con c, $b, \ldots$, x, $y, \ldots$ il numero degli elementi che compongono rispettivamente γ, $\beta, \ldots$, ξ, $\eta, \ldots$ Mentre l'ovvia osservazione fatta sopra ci dice

$$(11.4)\qquad \sum_{\xi \mid \gamma} (-1)^x = \begin{cases} 1 & \text{per } \gamma = 0 \\ 0 & \text{per } \gamma \neq 0, \end{cases}$$

il lemma enunciato asserisce

$$(11.5)\qquad \sum_{\xi \mid \gamma,\, \xi \text{ in } \Gamma} (-1)^x \geqq 0, \qquad \sum_{\xi \mid \gamma,\, \xi \text{ in } \bar{\Gamma}} (-1)^x \leqq 0, \qquad (\gamma \neq 0).$$

Dimostrazione. - La proposizione è vera per $c=1$: infatti, in tal caso è $\xi=0$ e $\xi=\gamma$ (le quali sono sempre contenute, per (11.2) e (11.3), tanto in Γ quanto in $\bar{\Gamma}$), e si ha

$$\sum_{\xi \mid \gamma,\, \xi \text{ in } \Gamma} (-1)^x = \sum_{\xi \mid \gamma,\, \xi \text{ in } \bar{\Gamma}} (-1)^x = \sum_{\xi \mid \gamma} (-1)^x = (-1)^0 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0,$$

e le (11.5) sono ambedue vere.

Per passare da $c-1$ a c $(c \geqq 2)$ premettiamo una semplice ispezione sulle definizioni (11.2), (11.3) la quale ci prova la verità delle seguenti asserzioni:

1°) togliendo l'elemento minimo da una combinazione non vuota di Γ si ottiene ancora una combinazione (eventualmente vuota) di Γ; lo stesso vale per $\bar{\Gamma}$;

2°) supponiamo $\xi \mid \gamma$, x dispari $\leqq 2l+1$ e inoltre ξ non contenga il minimo elemento di γ; detto ν un qualunque elemento di γ minore di tutti gli elementi di ξ, la combinazione $(\xi\nu)$ divide γ e appartiene a Γ tutte le volte che vi appartiene ξ; per x pari questa affermazione non è vera;

3°) supponiamo $\xi \mid \gamma$, x pari $\leqq 2l$, e inoltre ξ non contenga il minimo elemento di γ; detto ν un qualunque elemento di γ minore di tutti gli elementi di ξ, la combinazione $(\xi\nu)$ divide γ e appartiene a $\overline{\Gamma}$ tutte le volte che vi appartiene ξ; per x dispari questa affermazione non è vera.

Sia $c \geqq 2$ e consideriamo la combinazione β ottenuta togliendo da γ l'elemento minimo ν; risulta $b=c-1$ e β non vuota. In base alle osservazioni che precedono abbiamo:

1°) da $\xi|\beta$, ξ in Γ segue $\xi|\gamma$, ξ in Γ; anzi le combinazioni ξ per le quali $\xi|\beta$, ξ in Γ sono tutte e sole quelle che non contengono ν e per le quali $\xi|\gamma$, ξ in Γ;

2°) le combinazioni ξ, contenenti ν e per le quali $\xi|\gamma$, ξ in Γ, hanno tutte la forma $(\eta\nu)$ dove $\eta|\beta$, η in Γ; ma può accadere che esse non esauriscano tutte le combinazioni della forma $(\eta\nu)$;

queste due asserzioni valgono anche per $\overline{\Gamma}$.

Dunque abbiamo

$$\sum_{\xi|\gamma,\, \xi \text{ in } \Gamma} (-1)^x = \sum_{\eta|\beta,\, \eta \text{ in } \Gamma} (-1)^y + \sum_{(\eta\nu)}{}' (-1)^{y+1},$$

dove la somma $\sum'$ si intende estesa a tutte le combinazioni ξ con $\xi|\gamma$, ξ in Γ aventi la forma $(\eta\nu)$ con $\eta|\beta$, η in Γ. Si tratta di dimostrare

$$\sum_{\eta|\beta,\, \eta \text{ in } \Gamma} (-1)^y + \sum_{(\eta\nu)}{}' (-1)^{y+1} \geqq 0. \tag{11.6}$$

Adesso osserviamo che se y è dispari, è anche $(\eta\nu)|\gamma$, $(\eta\nu)$ in Γ e risulta $(-1)^{y+1}=+1$; se y è pari non si può asserire che $(\eta\nu)$ sia in Γ. Dunque i termini $+1$ della somma $\sum'$ sono in corrispondenza biunivoca con quelli -1 della prima somma, mentre quelli -1 della somma $\sum'$ sono in corrispondenza biunivoca con una parte di quelli $+1$ della prima somma. Poichè ammettiamo

$$\sum_{\eta|\beta,\, \eta \text{ in } \Gamma} (-1)^y \geqq 0$$

ne segue evidentemente la (11.6), e con questa la prima delle (11.5).

In modo analogo si procede per dimostrare la seconda delle (11.5).

12. - *Definizioni.* — Denotiamo con Γ_0 la combinazione vuota e con Γ_a $(1 \leqq a \leqq l+1)$ quella parte di Γ costituita dalle combinazioni i cui elementi sono tutti maggiori di r_a (compresa la combinazione vuota). In simboli

$$\tag{12.1} \begin{cases} \Gamma_0 \equiv 0, \\ \Gamma_a \equiv 0 + \sum (s_1, s_2, \ldots, s_i) \\ s_1 > s_2 > \ldots > s_i > r_a, \qquad s_j \leqq r_{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \quad (j=1, 2, \ldots, i); \quad i=1, 2, \ldots, 2l+2 \\ \qquad\qquad (1 \leqq a \leqq l+1). \end{cases}$$

(Evidentemente: per ogni combinazione di Γ_a è $i \leqq 2a$ poichè per $0 \leqq 2a < i \leqq 2l+2$

è anche $a<\frac{i}{2}$ e quindi $a\leqq\left[\frac{i-1}{2}\right]$, $r_a\geqq r_{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\geqq s_i$ contro la condizione $s_i>r_a$; Γ_{l+1} coincide con Γ).

Denotiamo con $\Gamma_a^{(i)}$ $(0\leqq a\leqq l+1,\ 0\leqq i\leqq 2a)$ quella parte di Γ_a costituita dalle combinazioni di i elementi. In simboli

$$(12.2)\quad \begin{cases} \Gamma_a^{(0)}\equiv 0, \\ \Gamma_a^{(i)}\equiv\sum(s_1,\, s_2,\ldots,\, s_i) \\ \text{con } s_1>s_2>\ldots>s_i>r_a, \qquad s_j\leqq r_{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \quad (j=1,2,\ldots,i); \quad 1\leqq i\leqq 2a, \\ \Gamma_a^{(i)} \text{ vuoto per } i>2a. \end{cases}$$

(Per estensione, e in accordo con l'osservazione su Γ_a, definiamo come vuoto ogni complesso $\Gamma_a^{(i)}$ con $i>2a$).

Introduciamo le definizioni analoghe relative a $\overline{\Gamma}$

$$(12.3)\quad \begin{cases} \overline{\Gamma}_0\equiv 0 \\ \overline{\Gamma}_a\equiv 0+\sum(s_1,\, s_2,\ldots,\, s_i) \\ s_1>s_2>\ldots>s_i>r_a, \qquad s_j\leqq r_{\left[\frac{j+1}{2}\right]} \quad (j=1,2,\ldots,i); \quad i=1,2,\ldots,2l+1 \\ \qquad\qquad (1\leqq a\leqq l+1). \end{cases}$$

$$(12.4)\quad \begin{cases} \overline{\Gamma}_a^{(0)}\equiv 0 \\ \overline{\Gamma}_a^{(i)}\equiv\sum(s_1,\, s_2,\ldots,\, s_i) \\ \text{con } s_1>s_2>\ldots>s_i>r_a, \qquad s_j\leqq r_{\left[\frac{j+1}{2}\right]} \quad (j=1,2,\ldots,i); \quad 1\leqq i\leqq 2a-1 \\ \overline{\Gamma}_a^{(i)} \text{ vuoto per } a\geqq 1, \quad i>2a-1. \end{cases}$$

Dalle definizioni precedenti seguono le relazioni simboliche:

$$(12.5)\qquad \Gamma_{l+1}\equiv\Gamma, \qquad \overline{\Gamma}_{l+1}\equiv\overline{\Gamma}$$

$$(12.6)\qquad \Gamma_a\equiv\sum_{i=0}^{2a}\Gamma_a^{(i)}\equiv\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma_a^{(i)}, \qquad \overline{\Gamma}_a\equiv\sum_{i=0}^{2a-1}\overline{\Gamma}_a^{(i)}\equiv\sum_{i=0}^{\infty}\overline{\Gamma}_a^{(i)}.$$

§ 2. - Strumenti algebrici.

13. - Lemma 2.° — *Sia* $r>0$, $\xi_i\geqq 0$ $(1\leqq i\leqq r)$

$$S^{(n)}=S^{(n)}(\xi_1,\, \xi_2,\ldots,\, \xi_r)=\begin{cases} 1 \ \textit{per}\ n=0, \\ \textit{la funzione simmetrica elementare di grado } n \\ \quad \textit{degli } r \textit{ numeri } \xi_i \textit{ per } 1\leqq n\leqq r, \\ 0 \ \textit{per}\ n<0 \textit{ e per } n>r. \end{cases}$$

1. *Risulta*

$$(13.1)\qquad S^{(n)}\leqq\frac{(S^{(1)})^n}{n!} \quad \textit{per } n=0,1,2,\ldots \qquad (0!=1).$$

2. *Tutte le volte che* $S^{(1)} \leqq 1$, *risulta anche*

$$1 = S^{(0)} \geqq S^{(1)} \geqq S^{(2)} \geqq .... \geqq S^{(r)} \geqq S^{(r+1)} = S^{(r+2)} = ... = 0. \tag{13.2}$$

3. *Tutte le volte che* $0 \leqq \xi_i \leqq 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$, *risulta anche*

$$S^{(n)} \geqq \frac{(S^{(1)})^n}{n!} - \frac{1}{n} \exp(2S^{(1)}) \sum_{i=1}^{r} \xi_i^2 \quad per \ n = 1, 2, ... \tag{13.3}$$

Dimostrazione 1. La (13.1) è evidentemente vera per $n=0$, $n=1$, $n>r$; per $2 \leqq n \leqq r$ basta osservare che nello sviluppo $(S^{(1)})^n = (\xi_1 + ... + \xi_r)^n$ composto di termini tutti non negativi, compariscono tutti i termini di $S^{(n)}$ ciascuno col coefficiente numerico $n!$.

2. La (13.2) è evidente per $r=1$; procediamo per induzione da $r-1$ a r, con $r \geqq 2$. Poniamo $s^{(n)} = S^{(n)}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{r-1})$ risulta $s^{(1)} \leqq S^{(1)} \leqq 1$ e per $1 \leqq h \leqq r-1$ anche

$$S^{(h)} = s^{(h)} + \xi_r s^{(h-1)}, \qquad S^{(h+1)} = s^{(h+1)} + \xi_r s^{(h)}$$

e da $s^{(h-1)} \geqq s^{(h)} \geqq s^{(h+1)}$ segue $S^{(h)} \geqq S^{(h+1)}$.

3. La (13.3) è vera per $n=1$; procediamo per induzione da $n-1$ a n, con $n \geqq 2$. Poichè

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (n-1-j)!\,(S^{(1)})^j &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(S^{(1)})^j}{(n-1)....(n-j)} \\ &\leqq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(S^{(1)})^j}{j!} \\ &\leqq \frac{1}{n} \exp(S^{(1)}),\end{aligned}$$

basterà dimostrare per induzione da $n-1$ a n la limitazione

$$S^{(n)} \geqq \frac{(S^{(1)})^n}{n!} - \exp(S^{(1)}) \sum_{i=1}^{r} \xi_i^2 \cdot \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (n-1-j)!\,(S^{(1)})^j. \tag{13.4}$$

Posto per brevità $\sigma_k = \sum_{i=1}^{r} \xi^k$ $(k=1, 2, ...)$, per l'ipotesi è evidentemente

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3 \geqq ....$$

e dalla classica formula di Girard-Newton

$$nS^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sigma_i S^{(n-i)}$$

ricaviamo

$$nS^{(n)} \geqq \sigma_1 S^{(n-1)} - \sum_{i=2}^{n} \sigma_i S^{(n-i)} \geqq \sigma_1 S^{(n-1)} - \sigma_2 \sum_{i=2}^{n} S^{(n-i)}.$$

Essendo $S^{(1)}=\sigma_1$, in base a (13.1) e a (13.4) valevole per $n-1$ ricaviamo

$$\begin{aligned} S^{(n)} &\geqq \frac{1}{n} S^{(1)} S^{(n-1)} - \frac{1}{n} \sigma_2 \sum_{i=2}^{n} \frac{(S^{(1)})^{n-i}}{(n-i)!} \\ &\geqq \frac{(S^{(1)})^n}{n!} - \sigma_2 \exp(S^{(1)}) \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-2} (n-2-j)!\,(S^{(1)})^{j+1} - \frac{1}{n} \sigma_2 \exp(S^{(1)}) \\ &\geqq \frac{(S^{(1)})^n}{n!} - \sigma_2 \exp(S^{(1)}) \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{j=0}^{n-2} (n-2-j)!\,(S^{(1)})^{j+1} + (n-1)! \right\}, \end{aligned}$$

e questa coincide con la (13.4).

14. - *Definizioni.* — Sia

$$r_0 > r_1 > \ldots. > r_l > r_{l+1}, \tag{11.1}$$

$$0 \leqq a_s < 1 \quad \text{per} \quad r_{l+1} < s \leqq r_0.$$

$$S_a^{(j)} = S^{(j)}(a_{r_a+1}, a_{r_a+2}, \ldots., a_{r_{a-1}}), \qquad (a = 1, 2, \ldots., l+1) \tag{14.1}$$

(quindi $S_a^{(j)}=1$ per $j=0$, $S_a^{(j)}=0$ per $j<0$ e per $j>r_{a-1}-r_a$)

$$\pi_a = \prod_{r_a < s \leqq r_{a-1}} (1-a_s), \qquad (a = 1, 2, \ldots., l+1) \tag{14.2}$$

(notiamo la relazione evidente

$$\pi_a = \sum_{0 \leqq j \leqq r_{a-1}-r_a} (-1)^j S_a^{(j)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j S_a^{(j)}). \tag{14.3}$$

Detta γ una combinazione 0 (vuota) oppure $(s_1, s_2, \ldots., s_c)$, denotiamo con a_γ il prodotto ad essa relativo, cioè

$$a_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad \gamma \equiv 0 \\ a_{s_1} a_{s_2} \ldots. a_{s_c} & \text{per} \quad \gamma \equiv (s_1, s_2, \ldots., s_c). \end{cases} \tag{14.4}$$

$$E_a^{(i)} = \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma_a^{(i)}} a_\gamma \left(= \sum a_{s_1} a_{s_2} \ldots. a_{s_i}\right) \qquad (0 \leqq a \leqq l+1,\ i \geqq 0). \tag{14.5}$$

(Osserviamo $E_a^{(i)}=1$ per $i=0$, $E_a^{(i)}=0$ per $i>2a$).

$$E_a = \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma_a} (-1)^c a_\gamma \left(= 1 + \sum (-1)^c a_{s_1} a_{s_2} \ldots. a_{s_c}\right) \qquad (0 \leqq a \leqq l+1). \tag{14.6}$$

(Osserviamo $E_0=1$).

$$E = E_{l+1} = \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma} a_\gamma. \tag{14.7}$$

E, analogamente

(14.8) $$\bar{E}_a^{(i)}=\sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}_a^{(i)}} a_\gamma (=\sum a_{s_1}a_{s_2}\dots a_{s_i}) \qquad (0\leqq a\leqq l+1,\ i\geqq 0),$$

(14.9) $$\bar{E}_a=\sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}_a} (-1)^c a_\gamma (=1+\sum (-1)^c a_{s_1}a_{s_2}\dots a_{s_c}) \qquad (0\leqq a\leqq l+1).$$

(Osserviamo $\bar{E}_a^{(i)}=1$ per $i=0$, $\bar{E}_a^{(i)}=0$ per $i>2a-1$, $\bar{E}_0=1$).

(14.10) $$\bar{E}=\bar{E}_{l+1}=\sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} a_\gamma .$$

15. - Come immediata conseguenza delle definizioni poste ai n.[i] 11, 12, 14 ricaviamo le relazioni enunciate nel seguente

Lemma 3.°

(15.1) $$E=(1-\sum_{s_1\leqq r_0} a_{s_1})(1-\sum_{s_2\leqq r_0-1} a_{s_2})(1-\sum_{s_3\leqq r_1} a_{s_3})(1-\sum_{s_4\leqq r_1-1} a_{s_4})\dots$$
$$\dots(1-\sum_{s_{2l+1}\leqq r_l} a_{s_{2l+1}})(1-\sum_{s_{2l+2}\leqq r_l-1} a_{s_{2l+2}})$$

(15.2) $$\bar{E}=(1-\sum_{s_1\leqq r_0} a_{s_1})(1-\sum_{s_2\leqq r_1} a_{s_2})(1-\sum_{s_3\leqq r_1-1} a_{s_3})\dots$$
$$\dots(1-\sum_{s_{2l}\leqq r_l} a_{s_{2l}})(1-\sum_{s_{2l+1}\leqq r_l-1} a_{s_{2l+1}}),$$

essendo ambedue gli sviluppi a destra limitati al termine 1 *e a tutti e soli i termini* $(-1)^c a_{s_1}a_{s_2}\dots a_{s_c}$ *pei quali è*

(15.3) $$s_1>s_2>\dots>s_c.$$

(Conseguenza delle definizioni (11.2), (11.3) dei campi Γ e $\bar{\Gamma}$, e delle definizioni (14.7) e (14.10) di E e $\bar{E}$).

(15.4) $$E_a=\sum_{i=0}^{2a}(-1)^i E_a^{(i)}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i E_a^{(i)}, \qquad (a=0, 1,\dots, l+1)$$

(15.5) $$\bar{E}_a=\sum_{i=0}^{2a-1}(-1)^i \bar{E}_a^{(i)}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \bar{E}_a^{(i)} \qquad (a=0, 1,\dots, l+1).$$

(Conseguenza delle definizioni (14.5), (14.6), (14.8), (14.9) e delle relazioni (12.5) e (12.6))

(15.6) $$E_{a+1}^{(i)}=\sum_{j=0}^{\infty} S_{a+1}^{(i-j)} E_a^{(j)} \qquad (i=0, 1,\dots, 2a+2)$$

(15.7) $$\bar{E}_{a+1}^{(i)}=\sum_{j=0}^{\infty} S_{a+1}^{(i-j)} \bar{E}_a^{(j)} \qquad (i=0, 1,\dots, 2a+1).$$

(Per $i=0$ sono evidenti. Sia $i>0$ e dimostriamo la prima: per $j>i$ è $S_{a+1}^{(i-j)}E_a^{(j)}=0$, quindi la (15.6) si può scrivere

$$E_{a+1}^{(i)}=\sum_{j=0}^{i} S_{a+1}^{(i-j)}E_a^{(j)};$$

questa risulta evidente quando si rifletta che, in base a (14.5) e (14.1), tutti e soli i termini di $E_{a+1}^{(i)}$ contenenti j fattori $(0\leqq j\leqq i)$ con indici s maggiori di r_a sono quelli ottenuti sviluppando il prodotto $S_{a+1}^{(i-j)}E_a^{(j)}$).

16. - Lemma 4.°

$$\text{(16.1)}\qquad \left\{\begin{aligned} &E_{a+1}=E_a\pi_{a+1}-\sum_{i=2a+3}^{\infty}(-1)^i\Psi_a^{(i)}\\ &\Psi_a^{(i)}=\sum_{j=0}^{\infty} S_{a+1}^{(i-j)}E_a^{(j)} \end{aligned}\right. \qquad (a=0, 1,...., l),$$

$$\text{(16.2)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{E}_{a+1}=\overline{E}_a\pi_{a+1}-\sum_{i=2a+2}^{\infty}(-1)^i\overline{\Psi}_a^{(i)}\\ &\overline{\Psi}_a^{(i)}=\sum_{j=0}^{\infty} S_{a+1}^{(i-j)}E_a^{(j)} \end{aligned}\right. \qquad (a=0, 1,...., l).$$

Dimostriamo la prima; per la seconda si procede in modo analogo. Da (15.4) e (15.6) ricaviamo

$$E_{a+1}=\sum_{i=0}^{2a+2}(-1)^iE_{a+1}^{(i)}=\sum_{i=0}^{2a+2}(-1)^i\sum_{j=0}^{\infty}S_{a+1}^{(i-j)}E_a^{(j)}.$$

Da (14.3) e (15.4), tenendo conto di questa e del fatto che le serie con le quali trattiamo hanno al più un numero finito di termini non nulli (si ricordi che $E_a^{(j)}=0$ per $j>a$):

$$\begin{aligned} E_a\pi_{a+1}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jE_a^{(j)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kS_{a+1}^{(k)}\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i-j}S_{a+1}^{(i-j)}(-1)^jE_a^{(j)}\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\sum_{j=0}^{\infty}S_{a+1}^{(i-j)}E_a^{(j)}\\ &=\sum_{i=0}^{2a+2}....+\sum_{i=2a+3}^{\infty}....\\ &=E_{a+1}+\sum_{i=2a+3}^{\infty}(-1)^i\Psi_a^{(i)}, \end{aligned}$$

d'onde l'asserto.

17. - Lemma 5.° — *Sia* $0 \leqq a \leqq l$. *Poniamo*

$$\Phi_{a+1} = \Psi_a^{(2a+3)} = S_{a+1}^{(2a+3)} E_a^{(0)} + S_{a+1}^{(2a+2)} E_a^{(1)} + \dots + S_{a+1}^{(3)} E_a^{(2a)} \tag{17.1}$$
$$\overline{\Phi}_{a+1} = \overline{\Psi}_a^{(2a+2)} = S_{a+1}^{(2a+2)} \overline{E}_a^{(0)} + S_{a+1}^{(2a+1)} \overline{E}_a^{(1)} + \dots + S_{a+1}^{(3)} \overline{E}_a^{(2a-1)}. \tag{17.2}$$

Da

$$S_{a+1}^{(1)} \leqq 1 \tag{17.3}$$

segue

$$E_{a+1} \leqq E_a \pi_{a+1} + \Phi_{a+1}, \qquad \overline{E}_{a+1} \geqq \overline{E}_a \pi_{a+1} - \overline{\Phi}_{a+1}. \tag{17.4}$$

Dimostrazione. - Da (17.3), per (13.2) del Lemma 2.°, abbiamo

$$1 = S_{a+1}^0 \geqq S_{a+1}^{(1)} \geqq S_{a+1}^{(2)} \geqq \dots$$

e quindi

$$\Psi_a^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} S_{a+1}^{(i-j)} E_a^{(j)} \geqq \sum_{j=0}^{\infty} S_{a+1}^{(i-j+1)} E_a^{(j)} = \Psi_a^{(i+1)}; \tag{17.5}$$

concludiamo

$$-\sum_{i=2a+3}^{\infty} (-1)^i \Psi_a^{(i)} \leqq \Psi_a^{(2a+3)} = \Phi_{a+1}$$

e, in base a (16.1), da questa segue la prima in (17.4).

Per dimostrare la seconda in (17.4) si procede in modo analogo.

18. - Lemma 6.° — *Se*

$$S_b^{(1)} \leqq 1 \quad \textit{per } b = a+1,\, a+2, \dots, l+1 \qquad (0 \leqq a \leqq l) \tag{18.1}$$

valgono le limitazioni

$$E \leqq \pi_{a+1}\pi_{a+2} \dots \pi_{l+1} \left(E_a + \frac{\Phi_{a+1}}{\pi_{a+1}} + \frac{\Phi_{a+2}}{\pi_{a+1}\pi_{a+2}} + \dots + \frac{\Phi_{l+1}}{\pi_{a+1} \dots \pi_{l+1}} \right), \tag{18.2}$$
$$\overline{E} \geqq \pi_{a+1}\pi_{a+2} \dots \pi_{l+1} \left(\overline{E}_a - \frac{\overline{\Phi}_{a+1}}{\pi_{a+1}} - \frac{\overline{\Phi}_{a+2}}{\pi_{a+1}\pi_{a+2}} - \dots - \frac{\overline{\Phi}_{l+1}}{\pi_{a+1} \dots \pi_{l+1}} \right). \tag{18.3}$$

Dimostrazione. - Ricordiamo $E = E_{l+1}$, $\overline{E} = \overline{E}_{l+1}$ (vedi (14.7) e (14.10)); pertanto queste limitazioni per $a = l$ sono vere, poichè in tale caso rientrano in (17.4); si passa ovviamente da $a+1$ ad a $(a \leqq l-1)$.

19. - *Osservazione. - Se*

$$e^\theta \left(\frac{\theta e}{2}\right)^2 < 1 < e^\theta \qquad (\text{quindi } \theta < 1) \tag{19.1}$$
$$\pi_a > e^{-\theta} \quad \textit{per } 1 \leqq a \leqq l+1 \tag{19.2}$$

esistono due numeri $\gamma(\theta)$, $\overline{\gamma}(\theta)$, *dipendenti soltanto da* θ, *per i quali*

$$E < \gamma(\theta)\pi_1\pi_2 \dots \pi_{l+1}, \qquad \overline{E} > \overline{\gamma}(\theta)\pi_1\pi_2 \dots \pi_{l+1}. \tag{19.3}$$

Per dimostrare questo, consideriamo (18.2) e (18.3) per $a=0$; tenendo conto di (19.2) otteniamo

$$(19.4)\qquad E\leqq \pi_1\pi_2\ldots.\pi_{l+1}\Big(1+\sum_{k=1}^{l+1} e^{k\theta}\Phi_k\Big),\qquad \overline{E}\geqq \pi_1\pi_2\ldots.\pi_{l+1}\Big(1-\sum_{k=1}^{l+1} e^{k\theta}\overline{\Phi}_k\Big).$$

Per (14.2) e (19.2) è

$$(19.5)\qquad S_a^{(1)}=\sum_{r_a<s\leqq r_{a-1}} a_s < -\log \pi_a < \theta < 1.$$

Per (14.5), (14.8) e (19.5) è

$$E_a^{(0)}=\overline{E}_a^{(0)}=1,\qquad E_a^{(1)}=\overline{E}_a^{(1)}=\sum_{r_a<s\leqq r_0} a_s = S_a^{(1)}+S_{a-1}^{(1)}+\ldots.+S_1^{(1)}<a\theta.$$

$E_a^{(i)}$ e $\overline{E}_a^{(i)}$ sono non negative e non superano la i-esima funzione simmetrica elementare dei numeri a_s $(r_a<s\leqq r_0)$; dunque per il Lemma 2.° (13.1) abbiamo

$$S_{a+1}^{(i)}\leqq \frac{(S_{a+1}^{(1)})^i}{i!},\qquad E_a^{(i)}\leqq \frac{(E_a^{(1)})^i}{i!},\qquad \overline{E}_a^{(i)}\leqq \frac{(\overline{E}_a^{(1)})^i}{i!}\qquad (i\geqq 0).$$

Per (17.1) è

$$\Phi_{a+1}=\sum_{j=0}^{2a} S_{a+1}^{(2a+3-j)}E_a^{(j)}\leqq \sum_{j=0}^{2a}\frac{(S_{a+1}^{(1)})^{2a+3-j}}{(2a+3-j)!}\,\frac{(E_a^{(1)})^j}{j!}\leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(2a+3)!}\sum_{j=0}^{2a+3}\binom{2a+3}{j}(S_{a+1}^{(1)})^{2a+3-j}(E_a^{(1)})^j\leqq \frac{(S_{a+1}^{(1)}+E_a^{(1)})^{2a+3}}{(2a+3)!}\leqq$$

$$\leqq \frac{\{(a+1)\theta\}^{2a+3}}{(2a+3)!}\leqq \frac{(a+1)^{2a+2}\theta^{2a+3}e^{2a+2}}{2\{2(a+1)\}^{2a+2}}\leqq \frac{1}{e}\Big(\frac{\theta e}{2}\Big)^{2a+3}.$$

Questa limitazione ci dimostra la prima di (19.3): infatti nella prima di (19.4)

$$1+\sum_{k=1}^{l+1} e^{k\theta}\Phi_k\leqq 1+\sum_{k=1}^{l+1} e^{k\theta}\,\frac{1}{e}\Big(\frac{\theta e}{2}\Big)^{2k+1}\leqq 1+\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\theta^2e^{2+\theta}}{4}\Big)^k\leqq 1+\frac{\theta^3e^{2+\theta}}{8-2\theta^2e^{2+\theta}}=\gamma(\theta).$$

Procedendo analogamente per dimostrare la seconda di (19.3) otteniamo:

$$\overline{\Phi}_{a+1}\leqq\Big(\frac{\theta e}{2}\Big)^{2a+2},\qquad 1-\sum_{k=1}^{l+1} e^{k\theta}\overline{\Phi}_k\geqq \frac{4-2\theta^2e^{2+\theta}}{4-\theta^2e^{2+\theta}}=\overline{\gamma}(\theta).$$

La dimostrazione dell'esistenza delle due costanti $\gamma(\theta)$, $\overline{\gamma}(\theta)$ è un primo passo, e ci potrà essere utile tutte le volte che faremo uso del metodo di V. Brun per confrontare ordini di grandezza; tuttavia, quando interessi il valore di tali costanti, conviene raffinare il procedimento per avere dei valori più convenienti: a questo scopo sono destinati i n.[i] 20-23 che seguono.

20. - Dobbiamo, prima di tutto, fornirci nuove espressioni per le funzioni

$$E_a^{(i)}, \qquad \overline{E}_a^{(i)}, \qquad \Phi_b, \qquad \overline{\Phi}_b$$

e a questo provvede il seguente

Lemma 7.° - *I numeri j sono tutti* $\geqq 0$; $0 \leqq a \leqq l+1$; $1 \leqq b \leqq l+1$

$$E_a^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{per } a=0,\ i=0 \\ \sum\limits_{J(a,i)} S_1^{(j_1)} S_2^{(j_2)} \ldots S_a^{(j_a)} & \text{per } a>0,\ 0 \leqq i \leqq 2a, \end{cases} \tag{20.1}$$

$$\left(J(a,i) \equiv \begin{cases} j_1+j_2+\ldots+j_a = i \\ j_1+j_2+\ldots+j_r \leqq 2r & \text{per } 1 \leqq r < a \end{cases} \right)$$

$$\overline{E}_a^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{per } a=0,\ i=0 \\ \sum\limits_{\overline{J}(a,i)} S_1^{(j_1)} S_2^{(j_2)} \ldots S_a^{(j_a)} & \text{per } a>0,\ 0 \leqq i \leqq 2a-1, \end{cases} \tag{20.2}$$

$$\left(\overline{J}(a,i) \equiv \begin{cases} j_1+j_2+\ldots+j_a = i \\ j_1+j_2+\ldots+j_r \leqq 2r-1 & \text{per } 1 \leqq r < a \end{cases} \right)$$

$$\Phi_b = \sum_{I(b)} S_1^{(j_1)} S_2^{(j_2)} \ldots S_b^{(j_b)} \tag{20.3}$$

$$\left(I(b) \equiv \begin{cases} j_1+j_2+\ldots+j_b = 2b+1 \\ j_1+j_2+\ldots+j_r \leqq 2r & \text{per } 1 \leqq r < b \end{cases} \right)$$

$$\overline{\Phi}_b = \sum_{\overline{I}(b)} S_1^{(j_1)} S_2^{(j_2)} \ldots S_b^{(j_b)} \tag{20.4}$$

$$\left(\overline{I}(b) \equiv \begin{cases} j_1+j_2+\ldots+j_b = 2b \\ j_1+j_2+\ldots+j_r \leqq 2r-1 & \text{per } 1 \leqq r < b \end{cases} \right).$$

Dimostrazione. - Dimostriamo (20.1). Per $i=0$ essa è vera, poichè, quando $a>0$, $J(a,0)$ contiene la sola combinazione $(0, 0, \ldots, 0)$ e la somma $\sum\limits_{J(a,0)}$ contiene un solo termine $=1=E_a^{(0)}$. Dunque, per (14.5) e (15.6), la (20.1) è vera per $a=0$ e per $a=1$ (essendo per definizione

$$E_0^{(0)}=1, \qquad E_1^{(0)}=1, \qquad E_1^{(1)}=S_1^{(1)}, \qquad E_1^{(2)}=S_1^{(2)}).$$

Procediamo da $a-1$ ad a $(a>1)$. Poniamo $M=\mathrm{Min}\,(i, 2(a-1))$; da (15.6) otteniamo

$$E_a^{(i)} = \sum_{t=0}^{\infty} S_a^{(i-t)} E_{a-1}^{(t)} = \sum_{t=0}^{M} S_a^{(i-t)} E_{a-1}^{(t)} = \sum_{t=0}^{M} S_a^{(i-t)} \sum_{J(a-1,t)} S_1^{(j_1)} S_2^{(j_2)} \ldots S_{a-1}^{(j_{a-1})} =$$

$$= \sum_{J(a-1,t)} \sum_{t=0}^{M} S_1^{(j_1)} S_2^{(j_2)} \ldots S_{a-1}^{(j_{a-1})} S_a^{(i-t)}.$$

Ponendo $j_a = i-t$, la condizione $0 \leqq t \leqq M$ diventa

$$\left.\begin{matrix} 0 \\ i-2(a-1) \end{matrix}\right\} \leqq j_a \leqq i\,;$$

si ricava

$$j_1+j_2+\ldots.+j_{a-1}+j_a=i,\qquad j_1+j_2+\ldots.+j_r\leqq 2r\quad\text{per } 1\leqq r<a-1$$
$$j_1+j_2+\ldots.+j_{a-1}=i-j_a\leqq i-\{i-2(a-1)\}=2(a-1)$$

e si conclude che le due somme

$$\sum_{J(a-1,t)}\sum_{t=0}^{M},\qquad \sum_{J(a,i)}$$

coincidono; (20.1) risulta dimostrata.

Per dimostrare (20.2) si procede in modo perfettamente analogo.

Dimostriamo (20.3). Partiamo dalla definizione (17.1) e vediamo subito che (20.3) è vera per $b=1$: infatti

$$\Phi_1=S_1^{(3)}E_0^{(0)}=S_1^{(3)}.$$

Per il caso $b>1$ teniamo conto di (20.1); così ricaviamo

$$\Phi_b=\sum_{i=0}^{2b-2}E_{b-1}^{(i)}S_b^{(2b+1-i)}=\sum_{i=0}^{2b-2}\sum_{J(b-1,i)}S_1^{(j_1)}S_2^{(j_2)}\ldots.S_{b-1}^{(j_{b-1})}S_b^{(2b+1-i)}.$$

Ponendo $j_b=2b+1-i$, la condizione $0\leqq i\leqq 2b-2$ diventa $3\leqq j_b\leqq 2b+1$; le condizioni alle quali deve soddisfare il complesso $(j_1, j_2,\ldots., j_b)$ risultano

$$j_1+j_2+\ldots.+j_b=2b+1,\qquad j_1+j_2+\ldots.+j_r\leqq 2r\quad\text{per } 1\leqq r<b-1$$
$$j_1+j_2+\ldots.+j_{b-1}=2b+1-j_b\leqq 2b+1-3=2(b-1),$$

e si conclude che le due somme

$$\sum_{i=0}^{2b-2}\sum_{J(b-1,i)},\qquad \sum_{I(b)}$$

coincidono; (20.3) risulta dimostrata.

Per dimostrare (20.4) si procede in modo perfettamente analogo.

21. - Lemma 8.° — *Poniamo, per* $b>0$,

$$T(b)=\sum_{I(b)}\frac{(2b+1)!}{j_1!j_2!\ldots.j_b!}\qquad\left(I(b)\equiv\begin{cases}j_1+j_2+\ldots.+j_b=2b+1\\ j_1+j_2+\ldots.+j_r\leqq 2r\qquad\text{per } 1\leqq r<b\end{cases}\right)$$
$$\overline{T}(b)=\sum_{\overline{I}(b)}\frac{(2b)!}{j_1!j_2!\ldots.j_b!}\qquad\left(\overline{I}(b)\equiv\begin{cases}j_1+j_2+\ldots.+j_b=2b\\ j_1+j_2+\ldots.+j_r\leqq 2r-1\qquad\text{per } 1\leqq r<b\end{cases}\right).$$

Allora risulta

(21.1) $$T(b)\leqq b^{2b},$$

(21.2) $$\overline{T}(b)\leqq b^{2b-1}-\frac{(2b)!}{2^b}\left\{\frac{1}{b}+\frac{5}{6}(b-2)+\frac{7}{20}(b-2)(b-3)\right\}\quad\text{per } b>1$$
$$\overline{T}(1)=1.$$

Dimostrazione. - Dimostriamo (21.1) ([2]). Definiamo j_l per ogni l secondo (mod. b). Per $1 \leqq k \leqq b$ denotiamo con $T_k(b)$ l'espressione ottenuta da $T(b)$ sostituendo ogni j_l con j_{l+k-1}; così $T_1(b)$ coincide con $T(b)$; $T_k(b)$ differisce da $T(b)$ soltanto per le notazioni degl'indici di sommazione poichè si passa da $T(b)$ a $T_k(b)$ sostituendo $(j_1, j_2, \ldots, j_b)$ con $(j_k, j_{k+1}, \ldots, j_{b+k-1})$, quindi $T_k(b) = T(b)$ $(k = 1, 2, \ldots, b)$.

Basta dimostrare

$$\sum_{k=1}^{b} T_k \leqq \sum_{j_1+j_2+\ldots+j_b=2b+1} \frac{(2b+1)!}{j_1!\,j_2!\ldots j_b!} \tag{21.3}$$

poichè il primo membro è $= bT$, mentre il secondo membro è

$$\left(\sum_{l=1}^{b} 1\right)^{2b+1} = b^{2b+1}.$$

Per dimostrare (21.3) procediamo nel modo seguente. Poichè ogni termine, tanto a sinistra quanto a destra, è positivo e inoltre ogni termine di T_k $(1 \leqq k \leqq b)$ figura a destra, basterà dimostrare che ogni complesso $(j_1, j_2, \ldots, j_b)$ che figura in T_h non figura in T_k se $k \neq h$. Per ragioni di simmetria basta dimostrare che ogni complesso $(j_1, j_2, \ldots, j_b)$ che figura in T_1 non figura in T_k $(2 \leqq k \leqq b)$; infatti per un tale complesso è $\sum_{1}^{k-1} j_l \leqq 2(k-1)$ e, poichè $\sum_{1}^{b} j_l = 2b+1 > 2b$, anche $\sum_{k}^{b} j_l > 2(b-k+1)$; mentre se figurasse in T_k sarebbe $\sum_{k}^{b} j_l \leqq 2(b-k+1)$.

Per dimostrare (21.2), con $b > 1$, si procede in modo analogo; le disuguaglianze con le quali si conclude che $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_b$ non hanno termini in comune sono le seguenti

$$\sum_{1}^{k-1} j_l \leqq 2(k-1)-1, \qquad \sum_{1}^{b} j_l = 2b > 2b-1,$$
$$\sum_{k}^{b} j_l > 2(b-k+1), \qquad \sum_{k}^{b} j_l \leqq 2(b-k+1)-1;$$

dunque

$$\sum_{k=1}^{b} \overline{T}_k = \left(\sum_{l=1}^{b} 1\right)^{2b} - \sum^{*} \frac{(2b)!}{j_1!\,j_2!\ldots j_b!}, \tag{21.4}$$

dove la somma $\sum^{*}$ è estesa a tutti i termini dello sviluppo $\left(\sum_{l=1}^{b} 1\right)^{2b}$ che non figurano al primo membro.

([2]) Questa elegante dimostrazione si trova in H. Heilbronn - E. Landau - P. Scherk [5], p. 130.

Veniamo a stabilire una valutazione per $\overset{*}{\sum}$. Dalla definizione di $\bar{I}(b)$ segue che ogni termine della somma $\sum \bar{T}_k$ corrisponde a un complesso $(j_1, j_2, ..., j_b)$ nel quale esiste un elemento (almeno) $j_l \geqq 3$ seguito immediatamente dall'elemento $j_{l+1} \leqq 1$ (dove $l+1$ è da sostituire con 1 per $l=b$). Ne segue che della somma $\overset{*}{\sum}$ fanno parte i termini corrispondenti ai complessi che indichiamo qui sotto schematicamente (e definiti a meno di una sostituzione ciclica) denotando con i puntini allineamenti (eventualmente vuoti) di cifre 2:

2.... 2	un complesso
32.... 1....	$b(b-2)$ complessi
42.... 0....	$b(b-2)$ complessi
3.... 32.... 0....	$b\binom{b-2}{2}$ complessi
42.... 1.... 1....	$b\binom{b-2}{2}$ complessi
52.... 1.... 0...., 52.... 0.... 1....	$b(b-2)(b-3)$ complessi
62.... 0.... 0....	$b\binom{b-2}{2}$ complessi.

I contributi di ciascuna categoria di termini sono $\frac{(2b)!}{(2!)^{b-3}}\, a$, essendo a rispettivamente

$$\frac{1}{(2!)^3}, \quad \frac{b(b-2)}{2!1!3!}, \quad \frac{b(b-2)}{2!0!4!}, \quad \binom{b-2}{2}\frac{b}{0!3!3!},$$

$$\binom{b-2}{2}\frac{b}{1!1!4!}, \quad \frac{b(b-2)(b-3)}{0!1!5!}, \quad \binom{b-2}{2}\frac{b}{0!0!6!},$$

e la loro somma è

$$\frac{(2b)!}{2^b}\left\{1+\frac{5}{6}\,b(b-2)+\frac{7}{20}\,b(b-2)(b-3)\right\}$$

e non supera $\overset{*}{\sum}$; tenendo conto che $\bar{T}=\bar{T}_1= .... =\bar{T}_b$ da (21.4) segue (21.2) per $b>1$.

22. - **Lemma 9.°** — *Sia* $0 \leqq a < b \leqq l+1$,

$$\theta_1 \geqq \theta_2 \geqq .... \geqq \theta_a \geqq \theta_{a+1} = \theta_{a+2} = ... = \theta > 0, \tag{22.1}$$

$$\pi_k \geqq e^{-\theta_k} \quad (1 \leqq k \leqq l+1). \tag{22.2}$$

Allora risulta

$$\Phi_b \leqq \frac{\theta_1^2\theta_2^2 .... \theta_a^2}{\theta^{2a}} \cdot \frac{\theta\beta_b}{e^{b\theta}}, \qquad \bar{\Phi}_b \leqq \frac{\theta_1\theta_2^2 .... \theta_{a-1}^2\theta_a^2}{\theta^{2a-1}} \cdot \frac{\bar{\beta}_b}{e^{b\theta}} \tag{22.3}$$

essendo β_b *e* $\bar{\beta}_b$ *definiti in* (1.10) *e* (1.11).

Dimostrazione. - Dalle definizioni (14.1) (14.2) otteniamo (proprio come in (19.5))

$$S_k^{(1)} \leqq \theta_k \qquad (1 \leqq k \leqq l+1),$$

e per il Lemma 2.° (13.1) abbiamo

$$S_k^{(j)} \leqq \frac{(S_k^{(1)})^j}{j!} \leqq \frac{\theta_k^j}{j!} \qquad (j \geqq 0,\ 1 \leqq k \leqq l+1).$$

Per il Lemma 7° (20.3)

$$\Phi_b \leqq \sum_{I(b)} \frac{\theta_1^{j_1}}{j_1!} \frac{\theta_2^{j_2}}{j_2!} \cdots \frac{\theta_b^{j_b}}{j_b!} = \sum_{I(b)} \frac{\theta_1^{j_1} \cdots \theta_a^{j_a}}{\theta^{j_1+\cdots+j_a}} \frac{\theta^{2b+1}}{(2b+1)!} \frac{(2b+1)!}{j_1!\,j_2! \cdots j_b!} \leqq \tag{22.4}$$

$$\leqq \sum_{I(b)} \frac{\theta_1^2\theta_2^2 \cdots \theta_a^2}{\theta^{2a}} \frac{\theta^{2b+1}}{(2b+1)!} \frac{(2b+1)!}{j_1!\,j_2! \cdots j_b!} \leqq \frac{\theta_1^2\theta_2^2 \cdots \theta_a^2}{\theta^{2a}} \cdot \frac{\theta^{2b+1}}{(2b+1)!}\, T(b),$$

e dal Lemma 8.° (n.° 21), tenendo conto della definizione di β_b in (1.10), segue la prima in (22.3).

Per dimostrare la seconda in (22.3) si procede in modo analogo.

23. - Lemma 10.° — *Sia* $0 \leqq a \leqq l+1$. *Allora, nelle ipotesi del Lemma 9.° risulta*

$$E \leqq \pi_1\pi_2 \cdots \pi_{l+1} e^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_a} \left\{ E_a + \frac{\theta_1^2\theta_2^2 \cdots \theta_a^2}{\theta^{2a-1}e^{a\theta}} \sum_{b=a+1}^{\infty} \beta_b \right\} \tag{23.1}$$

$$\overline{E} \geqq \pi_1\pi_2 \cdots \pi_{l+1} \lambda e^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_a} \left\{ \overline{E}_a - \frac{\theta_1\theta_2^2 \cdots \theta_a^2}{\theta^{2a-1}e^{a\theta}} \sum_{b=a+1}^{\infty} \overline{\beta}_b \right\} \tag{23.2}$$

$$\left(\lambda = \frac{e^{-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_a)}}{\pi_1\pi_2 \cdots \pi_a} \right).$$

Dimostrazione. - Questa proposizione è conseguenza immediata dei Lemmi 6.° e 9°. Infatti, consideriamo (18.2) e teniamo conto che per (22.2) e (22.3) abbiamo

$$\frac{\Phi_b}{\pi_{a+1}\pi_{a+2} \cdots \pi_b} \leqq \frac{\theta_1^2\theta_2^2 \cdots \theta_a^2}{\theta^{2a}} \frac{\theta\beta_b}{e^{b\theta}} \cdot e^{(b-a)\theta}$$

$$\leqq \frac{\theta_1^2\theta_2^2 \cdots \theta_a^2}{\theta^{2a-1}e^{a\theta}} \beta_b,$$

e da questa segue

$$\sum_{b=a+1}^{l+1} \frac{\Phi_b}{\pi_{a+1}\pi_{a+2} \cdots \pi_b} \leqq \frac{\theta_1^2\theta_2^2 \cdots \theta_a^2}{\theta^{2a-1}e^{a\theta}} \sum_{b=a+1}^{\infty} \beta_b.$$

D'altronde è

$$\pi_1\pi_2 \cdots \pi_a e^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_a} \geqq 1.$$

Mediante queste due ultime disuguaglianze da (18.2) segue (23.1).

Per dimostrare (23.2) si procede in modo analogo.

§ 3. - Strumenti aritmetici.

24. - Definizioni. — Sia

$$r>0$$

$$\left\{\begin{array}{lll} m_s>0 & (1\leqq s\leqq r) & r \text{ interi primi tra loro a due a due} \\ F_s(x) & (1\leqq s\leqq r) & r \text{ polinomi a valori interi} \end{array}\right. \tag{24.1}$$

Per ciascuna delle congruenze

$$F_s(x)\equiv 0 \pmod{m_s} \qquad (1\leqq s\leqq r) \tag{24.2}$$

denotiamo con h_s il numero delle soluzioni secondo $(\mathrm{mod}\, m_s)$ (quindi

$$0\leqq h_s\leqq m_s).$$

Detta γ una combinazione (semplice) non vuota degl'interi $u+1$, $u+2, \ldots, r$ $(0\leqq u\leqq r)$ contenente c elementi (vedi n.° 11), consideriamo il sistema di congruenze

$$F_s(x)\equiv 0 \pmod{m_s} \qquad (s \text{ in } \gamma). \tag{24.3}$$

Poniamo

$$m_\gamma=\prod_{s \text{ in } \gamma} m_s, \qquad m_0=1\,; \qquad h_\gamma=\prod_{s \text{ in } \gamma} h_s, \qquad h_0=1. \tag{24.4}$$

(Il numero delle soluzioni $(\mathrm{mod}\, m_\gamma)$ del sistema (24.3) è h_γ).

Sia $\xi>0$. Denotiamo con $C_\gamma(\xi)$ il numero degl'interi x con $z<x\leqq z+\xi$ che soddisfano al sistema (24.3), convenendo di porre (relativamente alla combinazione vuota 0) $C_0(\xi)=[\xi]$.

Denotiamo con $A(z, \xi)$ il numero degli interi x pei quali

$$\left\{\begin{array}{ll} z<x\leqq z+\xi & \\ F(x)\not\equiv 0 \pmod{m_s} & (u<s\leqq r). \end{array}\right.$$

Osservazione Iª.

$$C_\gamma(\xi)=h_\gamma\left(\frac{\xi}{m_\gamma}+\theta_\gamma\right)=\prod_{s \text{ in } \gamma} h_s\left(\frac{\xi}{\prod\limits_{s \text{ in } \gamma} m_s}+\theta_\gamma\right) \qquad (|\theta_\gamma|<1) \tag{24.5}$$

Infatti $C_\gamma(\xi)$, pel suo significato, soddisfa evidentemente alle disuguaglianze

$$h_\gamma\left[\frac{\xi}{m_\gamma}\right]\leqq C_\gamma(\xi)\leqq h_\gamma\left[\frac{\xi}{m_\gamma}\right]+h_\gamma.$$

Osservazione IIª.

$$A(z, \xi)=\sum_\gamma (-1)^c C_\gamma(\xi), \qquad (c=c(\gamma)). \tag{24.6}$$

Infatti ogni intero x computato in $A(z, \xi)$ si trova computato al secondo membro una ed una sola volta e precisamente nel termine $(-1)^0 C_0(\xi)$. Ogni intero y, con $z < y \leqq z + \xi$, non computato in $A(z, \xi)$ soddisfa ad alcune congruenze (almeno una) del sistema $F(x) \equiv 0 \pmod{m_s}$ $(u < s \leqq r)$ e diciamo β la combinazione degl'indici s di tutte e sole le congruenze di questo sistema soddisfatte da y; per ogni $\gamma | \beta$ y soddisfa (24.3) ed è computato in $(-1)^c C_\gamma(\xi)$; dunque y è computato al secondo membro di (24.5) un numero di volte dato dall'espressione $\sum_{\gamma|\beta} (-1)^c = 0$, essendo β non vuota (vedi n.° 11).

25\. - **Lemma 11.°** — *Poniamo*

per $u=0$ $\quad M=1, \quad \mathfrak{A}=1,$

per $u>0$ $\quad M=m_1 m_2 \ldots m_u, \quad \mathfrak{A}=$ *numero secondo* $(\mathrm{mod}\, M)$ *degl'interi* x *pei quali* $F_s(x) \not\equiv 0 \pmod{m_s}$ $(1 \leqq s \leqq u)$.

Risulta

$$\mathfrak{A} = M \prod_{s=1}^{u} \left(1 - \frac{h_s}{m_s}\right) = \prod_{s=1}^{u} (m_s - h_s). \tag{25.1}$$

Dimostrazione. - Per $u=0$ è vero. Sia $u>0$; osserviamo che (detta β una qualunque combinazione degl'interi $1, 2, \ldots, u$ e assegnato a m_β, h_β, $C_\beta(\xi)$, $A(z, \xi)$, i significati analoghi a quelli definiti al numero precedente) $\mathfrak{A} = A(0, M)$. In base alle Osservazioni I^a^ e II^a^ del numero precedente, tenendo conto che adesso $\xi = M$ è multiplo di ogni m_β (quindi $\theta_\beta = 0$) otteniamo

$$\mathfrak{A} = \sum_\beta (-1)^b C_\beta(M) = \sum_\beta (-1)^b \frac{h_\beta M}{m_\beta} = M \sum_\beta (-1)^b \prod_{s \text{ in } \beta} \frac{h_s}{m_s} = M \prod_{s=1}^{n} \left(1 - \frac{h_s}{m_s}\right).$$

26\. - **Lemma 12.°** — *Definiamo i complessi Γ e $\bar{\Gamma}$ come al* n.° 11 *col porre $r_{l+1} = u$. Poniamo*

$$E = \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma} (-1)^c \frac{h_\gamma}{m_\gamma}, \qquad H = \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma} h_\gamma \tag{26.1}$$

$$\bar{E} = \sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} (-1)^c \frac{h_\gamma}{m_\gamma}, \qquad \bar{H} = \sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} h_\gamma. \tag{26.2}$$

Allora risulta

$$\bar{E}\xi - \bar{H} \leqq A(z, \xi) \leqq E\xi + H. \tag{26.3}$$

Osservazione I. - È notevole come in questa limitazione i membri estremi siano indipendenti da z.

Osservazione II. - In base al Lemma 3.° (n.° 15) le espressioni di E e $\bar{E}$ si ottengono ponendo in (15.1) e (15.2)

$$a_s = \frac{h_s}{m_s};$$

e analogamente abbiamo:

$$H = (1+\sum_{s_1 \leqq r_0} h_{s_1})(1+\sum_{s_2 < r_0} h_{s_2})(1+\sum_{s_3 \leqq r_1} h_{s_3})(1+\sum_{s_4 < r_1} h_{s_4}) \ldots \ldots (1+\sum_{s_{2l+1} \leqq r_l} h_{s_{2l+1}})(1+\sum_{s_{2l+2} < r_l} h_{s_{2l+2}}) \tag{26.4}$$

$$\bar{H} = (1+\sum_{s_1 \leqq r_0} h_{s_1})(1+\sum_{s_2 \leqq r_1} h_{s_2})(1+\sum_{s_3 < r_1} h_{s_3}) \ldots \ldots (1+\sum_{s_{2l} \leqq r_l} h_{s_{2l}})(1+\sum_{s_{2l+1} < r_l} h_{s_{2l+1}}), \tag{26.5}$$

essendo ambedue gli sviluppi a destra limitati al termine 1 e a tutti e soli i termini $h_{s_1} h_{s_2} \ldots h_{s_c}$ pei quali è

$$s_1 > s_2 > \ldots > s_c.$$

Osservazione III. - Nelle ipotesi dei Lemmi 9° e 10°, (26.3) vale a maggior ragione se in luogo di E ed $\bar{E}$ si sostituiscono i secondi membri di (23.1) e (23.2). Eseguita questa sostituzione, (26.3) viene a costituire *il risultato finale a cui conduce il metodo di* V. BRUN.

Dimostrazione. - Con un ragionamento analogo a quello svolto nell'Osservazione II del n.° 24 per stabilire la (24.6) e tenendo conto che per il Lemma 1° (n.° 11) è

$$\sum_{\gamma | \beta, \gamma \text{ in } \Gamma} (-1)^c \geqq 0, \qquad \sum_{\gamma | \beta, \gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} (-1)^c \leqq 0 \qquad (\beta \neq 0)$$

si giunge a concludere

$$\sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} (-1)^c C_\gamma(\xi) \leqq A(z, \xi) \leqq \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma} (-1)^c C_\gamma(\xi)$$

e, per (24.5),

$$\sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} (-1)^c h_\gamma \left(\frac{\xi}{m_\gamma} + \theta_\gamma\right) \leqq A(z, \xi) \leqq \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma} (-1)^c h_\gamma \left(\frac{\xi}{m_\gamma} + \theta_\gamma\right) \qquad (|\theta_\gamma| < 1)$$

e a maggior ragione

$$\xi \cdot \sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} (-1)^c \frac{h_\gamma}{m_\gamma} - \sum_{\gamma \text{ in } \bar{\Gamma}} h_\gamma \leqq A(z, \xi) \leqq \xi \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma} (-1)^c \frac{h_\gamma}{m_\gamma} + \sum_{\gamma \text{ in } \Gamma} h_\gamma$$

cioè l'asserto.

PARTE III.

§ 1. - Dimostrazione del Teorema I.

27. - Cominciamo col ricordare alcune note proposizioni alle quali faremo ricorso nella dimostrazione. Teniamo presenti le notazioni introdotte al n.° 1.

Sia $c>0$, $\Delta \neq 0$; *allora*

$$h(p^c) \begin{cases} =h(p) \leqq g & \textit{se } p \textit{ non divide } \Delta \\ \leqq g\Delta^2 & \textit{in ogni caso } (\text{T. NAGEL } (^3)) \end{cases} \tag{27.1}$$

È ben noto che

$$\prod_{p \leqq \xi} \left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log \xi}, \qquad \text{per } \xi \to +\infty \tag{27.2}$$

più in generale si ha

$$\prod_{p \leqq \xi} \left(1-\frac{h(p)}{p}\right) \sim \frac{\mu_F}{\log^f \xi} \qquad (\mu_F \text{ indipendente da } \xi) \text{ per } \xi \to +\infty. \tag{27.3}$$

Questa relazione, si deve essenzialmente a T. NAGEL: da (4)

$$\sum_{p \leqq \xi} \frac{h(p)}{p} \log p = f \log \xi + O(1)$$

mediante un noto procedimento (5), come ha già osservato H. RADEMACHER (6), otteniamo

$$\sum_{p \leqq \xi} \frac{h(p)}{p} = f \log\log \xi + \varrho_F + o(1), \qquad \text{per } \xi \to +\infty.$$

Adesso osserviamo che la serie $\sum \left(\frac{h(p)}{p}\right)^2$ converge, come minorante della serie $\sum \frac{g^2\Delta^4}{n^2}$, e per noti teoremi esiste finito e non nullo il limite per $\xi \to +\infty$ del prodotto

$$\prod_{p \leqq \xi} \left(1-\frac{h(p)}{p}\right) \cdot \exp\left(\sum_{p \leqq \xi} \frac{h(p)}{p}\right);$$

detto λ questo limite, ricaviamo la (27.3) con $\mu_F = \lambda e^{-\varrho_F}$.

28. - Sia $u \geqq 0$ il minimo intero per il quale si ha

$$p_s > g, \qquad 1-\frac{h(p_s)}{p_s} \geqq e^{-\theta} \quad \text{per } s > u. \tag{28.1}$$

(3) T. NAGEL [9] pp. 346-349.
(4) T. NAGEL [9] p. 352.
(5) Vedi per esempio E. LANDAU [6] pp. 100-102.
(6) H. RADEMACHER [10] p. 27.

Sia

(28.2) $$0 \leqq u < t \leqq r$$

e poniamo in (24.1)

(28.3) $$m_1 = p_1, \quad m_2 = p_2, \dots, \quad m_t = p_t, \quad m_{t+1} = p_{t+1}^2, \dots, \quad m_r = p_r^2$$

(convenendo di tralasciare $m_{t+1} = p_{t+1}^2, \dots, m_r = p_r^2$ quando sia $t = r$).

Per accordarci con le ipotesi (22.2) del Lemma 9.° determiniamo i minimi interi

(28.4) $$r_0 = r, \quad r_1, \quad r_2, \dots, \quad r_{l+1} = u$$

in guisa da avere

(28.5) $$\pi_k = \prod_{r_k < s \leqq r_{k-1}} \left(1 - \frac{h(m_s)}{m_s}\right) \geqq e^{-\theta_k} \qquad (1 \leqq k \leqq l+1)$$

quindi

$$\pi_k \cdot \left(1 - \frac{h(m_{r_k})}{m_{r_k}}\right) < e^{-\theta_k} \qquad (1 \leqq k \leqq l)$$

(28.6) $$\pi_k = e^{-\theta_k}\left(1 + O\left(\frac{1}{p_{r_k}}\right)\right).$$

Supponiamo t abbastanza grande da avere

$$p_t \geqq \Delta, \qquad l \geqq a.$$

Osserviamo ovviamente che da (27.1) segue

(28.7) $$\prod_{t < s \leqq r} \left(1 - \frac{h(p_s^2)}{p_s^2}\right) \to 1, \qquad \sum_{t < s \leqq r} \frac{h(p_s^2)}{p_s^2} \to 0 \quad \text{per } t \to +\infty.$$

Per definizione (vedi n.[i] 13, 14 e anche (19.5))

$$S_k^{(1)} = \sum_{r_a < s \leqq r_{a-1}} \frac{h_s}{m_s} < -\log \pi_k \leqq \theta_k \qquad (1 \leqq k \leqq l+1);$$

e poichè, per l'osservazione alla fine del numero precedente

$$\prod_{\xi < p \leqq \eta} \left(1 - \frac{h(p)}{p}\right) \cdot \exp\left(\sum_{\xi < p \leqq \eta} \frac{h(p)}{p}\right) \to 1 \quad \text{per } \xi \to +\infty,$$

tenendo conto di (28.6), ricaviamo

$$\pi_k \exp(S_k^{(1)}) = e^{-\theta_k}\left(1 + O\left(\frac{1}{p_{r_k}}\right)\right) \exp(S_k^{(1)}) \to 1 \quad \text{per } r_k \to +\infty$$

e quindi

(28.8) $$\theta_k + o(1) = S_k^{(1)} \leqq \theta_k \quad \text{per } r_k \to +\infty.$$

Applicando il Lemma 2.°, (13.1) e (13.3), ricaviamo

$$\frac{(S_k^{(1)})^n}{n!} - \frac{1}{n} \exp (2S_k^{(1)}) \sum_{r_k < s \leqq r_{k-1}} \left(\frac{h(m_s)}{m_s}\right)^2 \leqq S_k^{(n)} \leqq \frac{(S_k^{(1)})^n}{n!} \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

e poichè (vedi (27.1))

$$\sum_{s>r_k} \left(\frac{h(m_s)}{m_s}\right)^2 < g^2 \Delta^4 \sum_{s>r_k} \frac{1}{p_s^2} \to 0 \quad \text{per } r_k \to \infty,$$

applicando (28.8) si ricava subito (includendo anche il caso ovvio $n=0$)

$$\text{(28.9)} \qquad \frac{\theta_k^n}{n!} + o(1) \leqq S_k^{(n)} \leqq \frac{\theta_k^n}{n!} \quad \text{per } n \geqq 0,\ k \text{ fissi},\ r_k \to +\infty.$$

In base a questa limitazione calcoliamo i valori delle due espressioni E_a, $\bar{E}_a$ assegnati da (15.4), (15.5), (20.1), (20.2), espressioni che figurano nelle limitazioni fondamentali (23.1), (23.2) e che servono a concludere con la (26.3). Vediamo subito

$$\text{(28.10)} \qquad E_a = \begin{cases} 1 & \text{per } a=0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{2a} (-1)^i \sum_{J(a,\,i)} \frac{\theta_1^{j_1}\theta_2^{j_2} \ldots \theta_a^{j_a}}{j_1!\, j_2! \ldots j_a!} + o(1) & \text{per } a>0,\ r_a \to +\infty \end{cases}$$

$$\text{(28.11)} \qquad \bar{E}_a = \begin{cases} 1 & \text{per } a=0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{2a} (-1)^i \sum_{\bar{J}(a,i)} \frac{\theta_1^{j_1}\theta_2^{j_2} \ldots \theta_a^{j_a}}{j_1!\, j_2! \ldots j_a!} + o(1) & \text{per } a>0,\ r_a \to +\infty. \end{cases}$$

Infatti, per $a>0$ è

$$E_a = \sum_{i=0}^{2a} (-1)^i E_a^{(i)} = \sum_{i=0}^{2a} (-1)^i \sum_{J(a,\,i)} S_1^{(j_1)} S_2^{(j_2)} \ldots S_a^{(j_a)}$$

e da questa, tenendo conto di (28.8) e (28.9) segue (28.10); analogamente per (28.11).

29. - Poniamo

$$\text{(29.1)} \qquad P = \begin{cases} 1 \\ p_1 p_2 \ldots p_u \end{cases} \qquad \mathfrak{A} = \begin{cases} 1 & \text{per } u=0 \\ P \displaystyle\prod_{s=1}^{u} \left(1 - \frac{h(p_s)}{p_s}\right) & \text{per } u>0 \end{cases}$$

e (tenendo presente il Lemma 11.°) siano $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathfrak{A}}$ gl'interi x pei quali

$$F(x) \not\equiv 0 \pmod{p_s} \quad (s=1, 2, \ldots, u), \qquad -P < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\mathfrak{A}} \leqq 0$$

(convenendo di porre $x_1=0$ per $u=0$). Ciascuno degli $\mathfrak{A}$ polinomi

$$\text{(29.2)} \qquad G_i(y) = F(x_i + Py) \qquad (i=1, 2, \ldots, \mathfrak{A})$$

ammette la decomposizione in fattori irriducibili analoga a quella di $F(x)$; i valori di $G_i(y)$ $(1 \leqq i \leqq \mathfrak{A})$ risultano primi con P, e, poichè $p_{u+1} > g$, il divisore fisso di $G_i(y)$ non può essere >1. Inoltre è evidente che per ogni m primo con P le congruenze

$$F(x) \equiv 0 \pmod{m}, \qquad G_i(y) \equiv 0 \pmod{m} \quad (1 \leqq i \leqq \mathfrak{A})$$

hanno lo stesso numero $h(m)$ di radici distinte.

Applichiamo il procedimento di V. Brun a ciascuno dei polinomi $G_i(y)$ $(1 \leqq i \leqq \mathfrak{A})$: detto $A_i(v, \eta)$ il numero degl'interi y pei quali

$$v < y \leqq v + \eta, \qquad G_i(y) \not\equiv 0 \pmod{m_s} \qquad (u < s \leqq r)$$

dal Lemma 12.° (n.° 26) risulta

$$\overline{E}\eta - \overline{H} \leqq A_i(v, \eta) \leqq E\eta + H \qquad (1 \leqq i \leqq \mathfrak{A}). \tag{29.3}$$

Per le posizioni (28.3) il numero $A(z, \xi)$ che figura nel Teorema I (n.° 3) è il numero degl'interi x pei quali

$$z < x \leqq z + \xi, \qquad F(x) \not\equiv 0 \pmod{m_s} \qquad (1 \leqq s \leqq r),$$

quindi, scelti v e η in guisa da avere

$$P(v-1) < z \leqq Pv, \qquad \xi = P\eta,$$

risulta evidentemente

$$A(z, \xi) = \sum_{i=1}^{\mathfrak{A}} A_i(v, \eta) + \lambda P \qquad (|\lambda| \leqq 1).$$

Per somma, dalle (29.3), ricaviamo

$$\frac{\mathfrak{A}}{P}\overline{E}\xi - \mathfrak{A}\overline{H} - P \leqq A(z, \xi) \leqq \frac{\mathfrak{A}}{P} E\xi + \mathfrak{A}H + P. \tag{29.4}$$

30. - Siamo dunque ridotti allo studio di questa limitazione (29.4). Per (25.1) e (23.1) abbiamo

$$\frac{\mathfrak{A}}{P} E \leqq \prod_{i=1}^{t}\left(1 - \frac{h(p_i)}{p_i}\right) \cdot \prod_{i=t+1}^{r}\left(1 - \frac{h(p_i)}{p_i^2}\right) \cdot e^{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_a}\left\{E_a + \frac{\theta_1^2\theta_2^2\dots\theta_a^2}{\theta^{2a+1}e^{a\theta}}\sum_{b=a+1}^{\infty}\beta_b\right\},$$

e per (27.3), (28.7), (28.10), (1.10) (osservando che per $t \to +\infty$ è $r_a \to +\infty$)

$$\frac{\mathfrak{A}}{P} E \leqq (1 + o(1))\sigma(a, \Theta)\frac{\mu_F}{\log^f p_t} \quad \text{per } t \to +\infty. \tag{30.1}$$

In modo del tutto analogo si ricava

$$\frac{\mathfrak{A}}{P}\overline{E} \geqq (1 + o(1))\overline{\sigma}(a, \Theta)\frac{\mu_F}{\log^f p_t} \quad \text{per } t \to +\infty. \tag{30.2}$$

31. - Rimane da maggiorare le due espressioni

$$\mathfrak{A}H+P, \qquad \mathfrak{A}\overline{H}+P$$

che entrano in (29.4).

Da (26.4) e (26.5), pel fatto che $h_s=h(p_s)\leqq g$, otteniamo

$$H\leqq(1+gr_0)^2\cdot(1+gr_1)^2 \dots (1+gr_l)^2, \qquad \overline{H}\leqq(1+gr_0)(1+gr_1)^2\dots(1+gr_l)^2.$$

Poichè 1°) $p_s>1+gs$ per s abbastanza grande,

2°) $r_0=O\left(\frac{p_{r_0}}{\log p_{r_0}}\right)$,

3°) $\mathfrak{A}$ e P dipendono soltanto da F, Θ (sono limitati per $t\to+\infty$),

è evidente che si può determinare $r^*=r^*(F,\Theta)$ in guisa che per $(r=)r_0\geqq r^*$ risulti

$$\mathfrak{A}H+P<p_{r_0}^2p_{r_1}^2\dots p_{r_l}^2, \qquad \mathfrak{A}\overline{H}+P<p_{r_0}p_{r_1}^2\dots p_{r_l}^2. \tag{31.1}$$

Siamo dunque ridotti a maggiorare il prodotto $p_{r_1}p_{r_2}\dots p_{r_l}$.

Assegnato $\varepsilon'>0$ arbitrario si può determinare in conseguenza $w=w(\varepsilon',F,\Theta)$ in guisa che per ogni $\eta\geqq w$ sia

$$\prod_{\log\eta<\log p\leqq\exp\left(\frac{\theta_i}{f}-\varepsilon'\right)\log\eta}\left(1-\frac{h(p)}{p}\right)>e^{-\theta_i} \qquad (i=1,2,3,\dots). \tag{31.2}$$

Questo è una conseguenza immediata di (27.3) e del fatto che nella successione (Θ) (vedi n.° 1) i numeri distinti sono in numero finito (al più $a+1$).

Da (31.2) e (28.5) ricaviamo, riguardo ai fattori $p_{r_2}, p_{r_3},\dots, p_{r_l}$

$$\log p_{r_k}<\exp\left(-\frac{\theta_k}{f}+\varepsilon'\right)\log p_{r_{k-1}} \qquad (k=2,3,\dots,\ p_{r_k}>w); \tag{31.3}$$

riguardo al fattore p_{r_1}, essendo

$$\pi_1=\prod_{r_1<s\leqq t}\left(1-\frac{h(p_s)}{p_s}\right)\cdot\prod_{t<s\leqq r}\left(1-\frac{h(p_s)}{p_s^2}\right)\geqq e^{-\theta_1},$$

cioè

$$\prod_{r_1<s\leqq t}\left(1-\frac{h(p_s)}{p_s}\right)\geqq e^{-\theta_1}(1+o(1)) \quad \text{per } t\to+\infty,$$

si può supporre t abbastanza grande da avere

$$\log p_{r_1}<\exp\left(-\frac{\theta_1}{f}+2\varepsilon'\right)\log p_t. \tag{31.4}$$

Da (31.3), (31.4) ricaviamo

$$\log(p_{r_1}^2p_{r_2}^2\dots p_{r_l}^2)<2\log p_t\cdot e^{\varepsilon'}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_k}{f}\right)\exp(k\varepsilon').$$

Poichè la serie

$$\tau(f,\,\Theta)=\sum_{k-1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\theta_1+\theta_2+\ldots.+\theta_k}{f}\right)$$

è minorante rispetto ad una serie geometrica convergente risulta

$$\log\,(p_{r_1}^2 p_{r_2}^2\ldots.\,p_{r_l}^2)<(2\tau(f,\,\Theta)+\varepsilon)\log p_t$$

con $\varepsilon\to 0$ per $\varepsilon'\to 0$. Tenendo conto di questa in (31.1) otteniamo

$$\mathfrak{A}H+P<p_r^2 p_t^{2\tau(f)+\varepsilon},\qquad \mathfrak{A}\overline{H}+P<p_r p_t^{2\tau(f)+\varepsilon}. \tag{31.5}$$

Da (29.4), (30.1), (30.2), (31.5) segue (2.3) per $r\geqq t\geqq\gamma(\varepsilon,\,F,\,\Theta)$, e il Teorema I risulta dimostrato.

§ 2. - Dimostrazione dei Teoremi II e III.

32. - Pel significato di $h_N(m)$ abbiamo

$$h_N(m)\leqq 2h(m),\qquad 0\leqq h_N(m)<m$$

e quando m è primo con $D(N)$ anche $h_N(m)\geqq h(m)$; dunque per $p>2g$

$$h(p)\leqq h_N(p)\leqq 2h(p),\qquad h(p^2)\leqq h_N(p^2)\leqq 2h(p^2). \tag{32.1}$$

Sia u il minimo intero tale che

$$p_s>2g,\qquad 1-\frac{h_N(p_s)}{p_s}\geqq e^{-\theta}\quad\text{per } s>u. \tag{32.2}$$

Valgano le posizioni (28.2), (28.3) e determiniamo i minimi interi (28.4) in guisa da avere

$$\pi_k=\prod_{r_k<s\leqq r_{k-1}}\left(1-\frac{h_N(m_s)}{m_s}\right)\geqq e^{-\theta_k}\qquad (k=1,\,2,\ldots.,\,l+1). \tag{32.3}$$

La dimostrazione procede in modo analogo a quella svolta ai n.[i] 28-31 pel Teorema I; per chiarezza aggiungiamo l'osservazione seguente: da (32.1), (32.3) ricaviamo

$$\pi_k\geqq\prod_{r_k<s\leqq r_{k-1}}\left(1-\frac{2h(m_s)}{m_s}\right)=\prod_{r_k<s\leqq r_{k-1}}\left(1-\frac{h(m_s)}{m_s}\right)^2\left(1-\left\{\frac{h(m_s)}{m_s-h(m_s)}\right\}^2\right)$$

e poichè

$$\prod_{r_k<s\leqq r_{k-1}}\left(1-\left\{\frac{h(m_s)}{m_s-h(m_s)}\right\}^2\right)\to 1\quad\text{per } r_k\to+\infty$$

risulta

$$\pi_k\geqq(1+o(1))\prod_{r_k<s\leqq r_{k-1}}\left(1-\frac{h(m_s)}{m_s}\right)^2.$$

Si vede così che, analogamente a (31.3), (31.4),

$$\log p_{r_1} < \exp\left(-\frac{\theta_1}{2f} + \varepsilon'\right) \log p_t,$$

$$\log p_{r_k} < \exp\left(-\frac{\theta_k}{2f} + \frac{\varepsilon'}{2}\right) \log p_{r_{k-1}} \qquad (k > 1,\ p_{r_k} > w)$$

e in (31.5) all'espressione $p_t^{2\tau(f)+\varepsilon}$ va sostituito $p_t^{2\tau(2f)+\varepsilon}$.

La dimostrazione del Teorema III è analoga a quella del Teorema II. Nell'applicare il procedimento di V. Brun dobbiamo tener conto che in questo caso, diversamente dai precedenti, i polinomi $F_s(x)$ $(1 \leqq s \leqq r)$ (vedi n.° 24) non sono tutti uguali fra loro poichè essi sono

$$H(x) \quad \text{per } 1 \leqq s \leqq v, \qquad F(x) \quad \text{per } v+1 \leqq s \leqq t.$$

Nella valutazione corrispondente a quella del n.° 31 ci dobbiamo valere dell'ipotesi che λ è fisso, e quindi è possibile determinare

$$w = w(\varepsilon', F, \Theta, \lambda).$$

§ 3. - Dimostrazione del Teorema IV.

33. - Al Teorema IV si perviene mediante le due proposizioni seguenti:

Teorema. - *Per* $y > 0$ *sia* $A(y)$ *il numero delle partizioni* $p + p' = y$, *cioè*

$$A(y) = \sum_{p+p'=y} 1.$$

Sia $j = p_1 p_2 .... p_v \geqq 2$, $\beta(j)$ *e* $\psi(q)$ *come al* n.° 7. *Risulta*

$$\overline{\lim_{\substack{y\to+\infty \\ y\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, j)}}} \frac{A(y)}{\dfrac{y}{\log^2 y} \displaystyle\sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}} \leqq 16 e^{-2C} \frac{j\beta(j)}{\varphi(j)} (1 + \tau(2))^2 \sigma.$$

Dimostrazione. - Il numero delle partizioni

$$y = p + p', \qquad \mathrm{Min}\,(p, p') \leqq \sqrt{y}$$

è $\leqq 2\sqrt{y}$. Valutiamo il numero delle partizioni

$$y = p + p', \qquad p > \sqrt{y}, \qquad p' > \sqrt{y}; \tag{33.1}$$

osserviamo che ogni p_s, con $p_v < p_s \leqq \sqrt{y}$, non divide nè p nè $p - y = -p'$ e inoltre $(p, j) = 1$, quindi $p \equiv a \pmod{j}$ con $(a, j) = 1$.

Poniamo $y = Nj$; per l'osservazione che precede il numero delle partizioni (33.1) risulta

$$\leqq \sum_{\substack{a=1 \\ (a,j)=1}}^{j} L(N),$$

dove $L(N)$ ha il significato stabilito nel teorema del n.° 7. Poichè questa somma ha $\varphi(j)$ termini e

$$\frac{y}{\log^2 y} \sim j \, \frac{N}{\log^2 N} \qquad \text{per } y \to +\infty$$

dal citato teorema del n.° 7 segue l'asserto.

TEOREMA. - Sia

$$\alpha(j) = \sum_q \frac{1}{\varphi(q)\psi(q)} = \prod_{p>p_v} \left(1 + \frac{1}{(p-1)(p-2)}\right),$$

$$\varlimsup_{\substack{y\to\infty \\ y\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, j)}} \frac{A(y)}{\dfrac{y}{\log^2 y} \sum\limits_{q/y} \dfrac{1}{\psi(q)}} \leqq A,$$

$$k = \left[\frac{\varphi(j)}{3j} \, \alpha(j) A\right] + 1.$$

Allora ogni intero abbastanza grande ammette almeno una partizione del tipo

$$n = p' + p'' + \dots + p^{(2k)} + w \qquad 0 \leqq w \leqq jk - 1.$$

Questa proposizione costituisce il risultato principale di H. HEILBRONN-E. LANDAU-P. SCHERK [5] (⁷); essa è dimostrata mediante l'applicazione del metodo di SCHNIRELMANN-ROMANOFF facendo uso anche di una proposizione di A. KHINTCHINE.

34. - Tenuto conto di queste due proposizioni, dal fatto che

$$\alpha(j)\cdot\beta(j) = \prod_{p>p_v} \left(1 + \frac{1}{(p-1)(p-2)}\right) \frac{1 - \dfrac{2}{p}}{\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^2} = \prod_{p>p_v} \frac{p^3 - 3p^2 + 3p}{(p-1)^3} =$$
$$= \prod_{p>p_v} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) =$$
$$= \varrho(j)$$

segue ovviamente il Teorema IV.

(⁷) Ivi si trova $j = 30$, ma si vede subito che la proposizione vale per $j = p_1 p_2 \dots p_v$.