

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LAMBERTO CESARI

Sulle funzioni a variazione limitata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 5, n° 3-4 (1936), p. 299-313

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_3-4_299_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE FUNZIONI A VARIAZIONE LIMITATA (*)

di LAMBERTO CESARI (Roma).

1. - Richiamiamo la definizione di funzione, di due variabili, a variazione limitata secondo TONELLI (¹).

Si dice che una funzione $f(x, y)$ definita nel quadrato $Q(0, 0; 1, 1)$ è a variazione limitata se, detta $V_y(\bar{x})$ la variazione totale della funzione della sola y , $f(\bar{x}, y)$, ($0 \leq y \leq 1$) e dato a $V_x(\bar{y})$ analogo significato, $V_y(x)$ e $V_x(y)$ risultano quasi ovunque finite, quasi continue ed integrabili in $(0, 1)$. Diremo funzioni T le funzioni a variazione limitata secondo TONELLI.

Il TONELLI (²) ha dimostrato che, se $f(x, y)$ è una funzione continua in Q , condizione necessaria e sufficiente perchè essa rappresenti una superficie ad area finita secondo LEBESGUE è che essa sia una funzione T . Ne risulta da ciò che il concetto di funzione T è, per le funzioni continue, indipendente dalla direzione degli assi x e y . Tale indipendenza non sussiste però in generale per le funzioni non continue, come hanno mostrato recentemente C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON (³) con un esempio.

Noi abbiamo osservato tuttavia che nell'esempio dato da questi autori, come in ogni altro dello stesso genere, tale dipendenza dalla direzione degli assi sparisce qualora si trascurino i valori che la funzione assume in opportuni insiemi di punti di misura nulla in Q . Noi diremo precisamente che *una funzione definita in Q è una funzione T^* , se esiste un insieme di punti E di misura nulla*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(¹) L. TONELLI: *Sulla quadratura delle superficie*. Rend. R. Accad. Lincei, vol. III (1926), pp. 357-362. - *Sur la quadrature des surfaces*. Comptes Rendus, t. 182 (1926), pp. 1198-1200.

(²) Loc. cit. in (¹).

(³) C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON: *Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation*. Transactions of the Amer. Math. Soc., vol. 36 (1934), pp. 711-730, in particolare pp. 726-727. Per un ampio confronto fra le varie definizioni di funzioni a variazione limitata: CLARKSON e ADAMS: *On definitions of bounded variations for functions of two variables*. Transactions of the Am. Math. Soc., vol. 35 (1933), pp. 824-854.

in Q , tale che, trascurando i valori che la funzione assume in essi, le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ risultino quasi ovunque finite, quasi continue ed integrabili.

Scopo del presente lavoro è di dimostrare il seguente

TEOREMA. - *Le funzioni quasi continue T^* sono tali indipendentemente dalla direzione degli assi x e y .*

Non necessariamente l'insieme E relativo che si deve trascurare rimane il medesimo al cambiare degli assi.

Noi giungeremo a tale risultato introducendo il concetto di *superficie $z=f(x, y)$ ad area generalizzata finita* e dimostreremo che *condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie rappresentabile nella forma $z=f(x, y)$ sia ad area generalizzata finita è che la funzione $f(x, y)$ sia una funzione quasi continua T^* .*

Questa generalizzazione del concetto di funzione T non è nuovo (4). In esso rientrano poi molte classi di funzioni che non rientrano in altre definizioni di funzioni a variazione limitata. Ad esempio la funzione definita in Q

$$f(x, y) = 0 \text{ per } x \neq y \text{ e per } x=y=0, \quad f(x, x) = \frac{1}{x} \text{ per } x \neq 0$$

è una funzione T^* . La funzione (5) costruita da C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON è, rispetto ad ogni coppia di assi, una funzione T^* . Inoltre, con questa generalizzazione delle funzioni T , nulla viene cambiato nei riguardi delle proprietà integrali di esse, della loro rappresentabilità in serie di FOURIER o di altre funzioni ortogonali, ecc. (6).

Gli AA. citati hanno poi introdotto il concetto di funzioni \bar{T} (7), teoricamente più generali delle funzioni T e per le quali si ammette soltanto che le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ siano non maggiori di funzioni integrabili.

Noi mostreremo che, dette \bar{T}^* le funzioni per le quali, trascurando un opportuno insieme E di punti di Q di misura nulla, risultano $V_y(x)$ e $V_x(y)$ non maggiori di funzioni integrabili, ogni funzione quasi continua \bar{T} , nonché ogni funzione quasi continua \bar{T}^* è anche funzione T^* .

(4) Cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche*. Ed. Zanichelli, 1928, p. 482.

(5) Loc. cit. in (3).

(6) Altrettanto dicasi per le funzioni a variazione diagonale limitata introdotte dal MIRANDA, che rientrano nelle funzioni T^* . Vedi C. MIRANDA: *Sommazione per diagonali delle serie doppie di Fourier*. Rendiconti Seminario Matematico della R. Università di Roma, 1934, pp. 3-29.

(7) C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON, loc. cit., p. 712.

2. - Diremo che la superficie $z=z(x, y)$ è ad area generalizzata finita o, brevemente, superficie S , se esiste un insieme E di punti di misura nulla in Q e una successione di superfici poliedriche rappresentabili nella forma $z=\Sigma_n(x, y)$, $n=1, 2, 3, \dots$, tali che:

a) il contorno del campo di definizione delle $\Sigma_n(x, y)$ tenda uniformemente al contorno di Q ;

β) le $\Sigma_n(x, y)$ convergano a $z(x, y)$ in tutti i punti di Q fuori di E ;

γ) il minimo limite delle aree delle $\Sigma_n(x, y)$ sia finito.

Tale concetto è manifestamente indipendente dalla direzione degli assi x e y . Se $z=z(x, y)$ rappresenta una superficie S , $z(x, y)$ è quasi continua in Q .

3. - Dimostriamo il seguente

TEOREMA. - Ogni superficie S rappresenta una funzione \bar{T}^* .

La dimostrazione è una generalizzazione di quella del TONELLI ⁽⁸⁾.

Rappresenti $z=z(x, y)$ la superficie S data e sia E il relativo insieme di punti di Q di misura nulla. Sia e_x l'eventuale insieme lineare di misura nulla dei punti $x=\bar{x}$ di $(0, 1)$ tali che, sulle rette $x=\bar{x}$, E seghi insiemi di misura non nulla o, eventualmente, non misurabili. Abbia e_y analogo significato. Sia $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_m, \dots$, la successione delle superfici poliedriche convergenti a $z(x, y)$, sia $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$ la successione delle loro aree e supponiamo, come è lecito, che sia $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = S$, S finito.

Si prenda un \bar{x} di $(0, 1)$ non appartenente ad e_x e sul segmento della retta $x=\bar{x}$ contenuto in Q si prendano n punti qualsiasi non appartenenti ad E . Si costruisca infine la poligonale inscritta nella curva $z=z(\bar{x}, y)$ di cui le proiezioni dei vertici cadono nei punti considerati.

Siano $l(\bar{x})$ la lunghezza di questa poligonale, $L(\bar{x})$ il limite superiore delle lunghezze di tutte le poligonali definite come sopra, $\mathcal{L}_m(\bar{x})$ la lunghezza della poligonale che la superficie poliedrica Σ_m sega sul piano $x=\bar{x}$, ($m=1, 2, 3, \dots$). Preso ora un $\tau > 0$ arbitrario si può sempre trovare un \bar{m} tale che, per ogni $m \geq \bar{m}$ e per la particolare poligonale considerata, sia

$$l(\bar{x}) \leq \mathcal{L}_m(\bar{x}) + \tau.$$

Si osservi che

$$\int_0^1 \mathcal{L}_m(x) dx \leq \sigma_m, \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

e che, posto

$$A(x) = \min \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_m(x),$$

⁽⁸⁾ L. TONELLI, loc. cit. in ⁽¹⁾, Rend. R. Accad. Lincei, pp. 358-359.

la funzione $\Lambda(x)$ risulta quasi ovunque finita, quasi continua ed integrabile ⁽⁹⁾. Da qui, per ogni n e per ogni poligonale del tipo considerato,

$$l(\bar{x}) \leq \Lambda(\bar{x}) + \tau.$$

Da qui ancora

$$L(\bar{x}) \leq \Lambda(\bar{x}) + \tau$$

per ogni \bar{x} di $(0, 1)$, fuori di e_x e per ogni τ , onde anche $L(\bar{x}) \leq \Lambda(\bar{x})$.

Se ora $V_y(\bar{x})$ indica la variazione totale della funzione della sola y , $z = z(\bar{x}, y)$, trascurando i punti di E , è anche $V_y(\bar{x}) \leq L(\bar{x})$, onde $V_y(x) \leq \Lambda(x)$ per tutti gli x di $(0, 1)$ fuori di e_x . Analogamente per la funzione $V_x(y)$.

4. - Vogliamo dimostrare che le funzioni quasi continue \bar{T}^* non sono più generali delle funzioni quasi continue T^* .

Gli AA. ⁽¹⁰⁾ già citati hanno poi osservato che, se R è un rettangolo a lati paralleli agli assi contenuto in Q , le funzioni T in Q non sono necessariamente funzioni T in R , mentre le funzioni \bar{T} in Q sono ancora funzioni \bar{T} in R . Noi dimostriamo addirittura nei riguardi del nuovo e più generale concetto il seguente

TEOREMA. - *Ogni funzione \bar{T}^* in Q , quasi continua in Q , è una funzione T^* in Q nonchè in ogni R contenuto in Q .*

Sia $f(x, y)$ funzione \bar{T}^* in Q , quasi continua in Q , sia E il relativo insieme di punti di misura nulla, siano $V_y(x)$ e $V_x(y)$ le solite variazioni totali della $f(x, y)$, prese trascurando i punti di E , ed esse siano rispettivamente non maggiori delle

⁽⁹⁾ Una dimostrazione di ciò può condursi come segue. Si consideri la doppia successione di funzioni di x in $(0, 1)$, $\mathcal{L}_{m, n}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$; $n = m, m + 1, m + 2, \dots$),

$$\mathcal{L}_{m, m} = \mathcal{L}_m(x)$$

$$\mathcal{L}_{m, n+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_{m, n} & \text{se } \mathcal{L}_{m, n} \leq \mathcal{L}_{n+1} \\ \mathcal{L}_{n+1} & \text{se } \mathcal{L}_{m, n} \geq \mathcal{L}_{n+1} \end{cases} \quad \begin{matrix} (m = 1, 2, 3, \dots), \\ (n = m, m + 1, m + 2, \dots). \end{matrix}$$

Allora è $\mathcal{L}_{m, n+1} \leq \mathcal{L}_{m, n}$ e posto $F_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{m, n}$, le funzioni F_m risultano quasi continue.

Di più, essendo $\mathcal{L}_m \geq 1$, è anche $F_m \geq 1$ ed essendo $\int_0^1 \mathcal{L}_m(x) dx \leq \sigma_m$ e $F_m \leq \mathcal{L}_m$, è anche $\int_0^1 F_m(x) dx \leq \sigma_m$. Infine è $F_{m+1} \geq F_m$ onde la successione di funzioni $F_1, F_2, \dots, F_m, \dots$ converge, per un teorema di B. LEVI, verso una funzione quasi continua ed integrabile. Ma è appunto

$$\Lambda(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \min_{m \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{L}_m(x).$$

⁽¹⁰⁾ Loc. cit. in ⁽³⁾, p. 721.

funzioni integrabili $A_1(x)$ e $A_2(y)$. Sia E' un nuovo insieme di punti di misura nulla in Q e indichiamo con $V_y'(x)$ e $V_x'(y)$ le nuove variazioni totali, prese trascurando i punti di $E + E'$. Sia (\bar{x}, \bar{y}) un punto di Q . Indichiamo con $V_y'(\bar{x}, \bar{y})$ la variazione totale della $f(\bar{x}, y)$, considerata come funzione della sola y , nell'intervallo $0 \leq y \leq \bar{y}$ e trascurando i punti di $E + E'$. Analogo significato abbia $V_x'(\bar{x}, \bar{y})$. È

$$\begin{aligned} V_y'(x, y) &\leq V_y'(x) \leq V_y(x) \leq A_1(x) \\ V_x'(x, y) &\leq V_x'(y) \leq V_x(y) \leq A_2(y). \end{aligned}$$

Basta dimostrare che esiste un E' tale che, per ogni \bar{x} e \bar{y} di $(0, 1)$ risultino $V_y'(x, \bar{y})$ e $V_x'(\bar{x}, y)$ funzioni, rispettivamente della sola x e della sola y , quasi continue.

Osserviamo anzitutto che $f(x, y)$ è integrabile in Q . Infatti, essendo $f(x, y)$ quasi continua, quasi tutte le sue sezioni con piani $x = \bar{x}$, oppure $y = \bar{y}$, sono quasi continue. Di più essendo f una funzione \bar{T}^* , quasi tutte le sue sezioni con gli stessi piani sono quasi continue ed integrabili.

Sia ora \bar{y} un punto di $(0, 1)$ tale che la funzione della sola x , $f(x, \bar{y})$, sia quasi continua e integrabile e tale che l'intersezione $[E, \bar{y}]$ di E con la retta $y = \bar{y}$ sia di misura nulla. Allora è per tutti i punti di Q , fuori di E e per tutte le x non appartenenti a $[E, \bar{y}]$,

$$|f(x, y)| \leq |f(x, \bar{y})| + A_1(x)$$

e il secondo membro rappresenta una funzione integrabile in Q .

Definiamo e_x ed e_y come al n.° 3 nei riguardi del nostro insieme E . Diciamo π_x l'insieme di misura nulla dei punti di $(0, 1)$ per cui $A_1(x)$ non è finita. Analogo significato abbia π_y . Per ogni punto \bar{x} di e_x o π_x consideriamo la retta $x = \bar{x}$ e analogamente per i punti \bar{y} di e_y o di π_y le rette $y = \bar{y}$. Diciamo ancora e_x, e_y, π_x, π_y l'insieme dei punti di Q che appartengono rispettivamente a tali rette.

Se \bar{x} non appartiene ad $e_x + \pi_x$ la funzione della sola y , $f(\bar{x}, y)$ ha, trascurando i punti di E , sole discontinuità di prima specie. Diciamo allora ω_y l'insieme dei punti (\bar{x}, \bar{y}) di Q , fuori di $E + e_x + \pi_x$, di discontinuità per la funzione $f(\bar{x}, y)$, considerata come funzione della sola y , e per i quali accade che

$$\lim_{y \rightarrow \bar{y}-0} f(\bar{x}, y) \neq f(\bar{x}, \bar{y})$$

dove il limite si intende preso trascurando i punti di E .

ω_y contenga inoltre gli eventuali punti di discontinuità per la $f(\bar{x}, y)$ considerata come funzione della sola y , di coordinate $(\bar{x}, 0)$ oppure $(\bar{x}, 1)$.

L'insieme ω_y sega su tutte le rette parallele all'asse y insiemi numerabili.

Poniamo

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow \bar{y}-0} f(\bar{x}, y) & \text{per } \bar{x} \text{ non appartenente ad } e_x + \pi_x \\ & \text{e } (\bar{x}, \bar{y}) \text{ non appartenente a } E, \\ f(\bar{x}, \bar{y}) & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove si ponga $\bar{y} + 0$ al posto di $\bar{y} - 0$ quando $\bar{y} = 0$.

Poniamo

$$\psi(x, y) = \int_0^y f(x, y) dy.$$

Questa funzione risulta anch'essa quasi continua in Q ⁽¹¹⁾.

Posto allora $\varphi(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}$ in tutti i punti di Q in cui questa derivata parziale esiste finita, la $\varphi(x, y)$ risulta così definita quasi dappertutto in Q ed è quasi continua e quasi dappertutto $= f(x, y)$. Nei punti di ω_y la $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ o non esiste finita o è $\neq f(x, y)$; dunque ω_y è un insieme di misura superficiale nulla.

La funzione $\bar{f}(x, y)$ differisce dalla $f(x, y)$ in ω_y ed eventualmente in E : perciò è $\bar{f}(x, y) = f(x, y)$ quasi dappertutto in Q , e anche la $\bar{f}(x, y)$ risulta quasi continua.

Sia \bar{x} un punto di $(0, 1)$ fuori di $e_x + \pi_x$. La funzione della sola y , $\bar{f}(\bar{x}, y)$ ha sole discontinuità a destra (ed è continua per $y=0$) e quindi per essa vale il ben noto teorema ⁽¹²⁾ per le funzioni continue che cioè le somme

$$\sum_{i=1}^n |\bar{f}(\bar{x}, y_{i+1}) - \bar{f}(\bar{x}, y_i)|, \quad 0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq 1$$

tendono uniformemente alla variazione totale della $\bar{f}(\bar{x}, y)$ in $(0, 1)$ quando la più grande parte in cui i punti y_i dividono l'intervallo $(0, 1)$ tende a zero.

Sia ora \bar{y} un numero qualsiasi di $(0, 1)$. Si esegua per ogni n intero la seguente costruzione. Si costruisca il plurintervallo aperto $\Delta_n < \frac{1}{2n}$ su $(0, 1)$ che ricopre l'insieme σ_y dei punti y' in cui $\bar{f}(x, y')$ è non quasi continua, come funzione di x .

Indi si ponga $y_1 = \frac{1}{n}$ se il punto $y = \frac{1}{n}$ non appartiene a Δ_n , altrimenti $y_1 =$ al primo estremo dell'intervallo di Δ_n a cui appartiene il punto $y = \frac{1}{n}$. Si ponga poi $y_2 = y_1 + \frac{1}{n}$ se tale punto non appartiene a Δ_n , altrimenti $y_2 =$ al primo estremo dell'intervallo di Δ_n a cui $y_1 + \frac{1}{n}$ appartiene. E così di seguito. Si osservi che è per ogni i , $y_{i+1} - y_i > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ onde si giungerà ad un punto y_m per cui $\bar{y} - \frac{1}{n} \leq y_m < \bar{y}$. I punti y_i , ($i=1, 2, \dots, m$), non appartengono a τ_y e quindi non appartengono a Δ_n . Per essi è inoltre $y_{i+1} - y_i \leq \frac{1}{n}$, $y_1 \leq \frac{1}{n}$, $y_m \geq \bar{y} - \frac{1}{n}$. Le

⁽¹¹⁾ L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti*. (Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5^a, vol. XVIII, (1909, 2^o sem.) pp. 246-253), p. 248.

⁽¹²⁾ Cfr. L. TONELLI: *Sopra alcuni polinomi di approssimazione*. Annali di Matematica, t. XXV, s. III, 1916, pp. 275-316. Vedi n.º 14. Inoltre T. VIOLA: *Funzioni a variazione limitata continue verso destra*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XV, s. 6^a (1932) 1^o sem., pp. 626-629.

funzioni $\bar{f}(x, y_i)$, ($i=1, 2, \dots, m$), come funzioni della sola x sono quasi continue in $(0, 1)$ e così pure è quasi continua la funzione

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{m-1} |\bar{f}(x, y_{i+1}) - \bar{f}(x, y_i)|.$$

La successione $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ di funzioni quasi continue converge ovunque in $(0, 1)$, eccetto che nell'insieme di punti di misura nulla $e_x + \pi_x$, alla variazione totale della funzione $\bar{f}(x, y)$ nell'intervallo $(0, \bar{y})$, ossia, con ovvie notazioni, a $V_y^*(x, \bar{y})$. Tutte le funzioni $V_y^*(x, \bar{y})$ sono dunque (come funzioni della x) quasi continue in $(0, 1)$ e in particolare è tale $V_y^*(x)$.

In modo del tutto analogo si definisca l'insieme ω_x come si è definito ω_y , e, introdotta una funzione ausiliaria $\bar{f}(x, y)$, analoga alla $\bar{f}(x, y)$ ma con lo scambio di x con y , si dimostra che ω_x è di misura nulla in Q . Indi si vede che, introdotte le funzioni $V_x^*(\bar{x}, y)$ e $V_x^*(y)$, queste sono tutte quasi continue in $(0, 1)$. Si ponga ora $E' = E + \omega_x + \omega_y$.

Indichiamo con τ_x l'insieme di misura nulla dei punti x' di $(0, 1)$ tali che sulle rette $x=x'$ l'insieme ω_x seghi insiemi di misura non nulla o, eventualmente, non misurabili. Analogamente τ_y nei confronti con ω_y .

Dimostriamo che per ogni \bar{y} di $(0, 1)$ e per tutti gli x fuori di $e_x + \pi_x + \tau_x$ è $V_y'(x, \bar{y}) = V_y^*(x, \bar{y})$, e, per ogni \bar{x} di $(0, 1)$ e per tutti gli y fuori di $e_y + \pi_y + \tau_y$ è $V_x'(\bar{x}, y) = V_x^*(\bar{x}, y)$.

Sia \bar{y} un punto qualunque di $(0, 1)$. Intanto $V_y^*(x, \bar{y})$, variazione totale di $\bar{f}(x, y)$ nell'intervallo $(0, \bar{y})$ è, fuori di $e_x + \pi_x$, uguale alla variazione totale di $f(x, y)$ nell'intervallo $(0, \bar{y})$ quando si trascuri $E + \omega_y$. D'altra parte $V_y'(x, \bar{y})$ è la variazione totale di $f(x, y)$ in $(0, \bar{y})$ quando si trascuri $E + \omega_x + \omega_y$. Sia ora x' un punto di $(0, 1)$ fuori di $e_x + \pi_x + \tau_x$. Sulla retta $x=x'$, ω_x sega soltanto un insieme di punti di misura nulla. Di questi una parte (eventuale) apparterrà anche ad ω_y e quindi viene trascurata anche in $V_y^*(x, \bar{y})$. I rimanenti punti, in tutto un insieme di misura nulla, sono tutti punti di continuità o di continuità a sinistra (trascurando E) per $f(x, y)$ come funzione della sola y , e quindi il trascurarli o meno non altera la variazione totale di $f(x, y)$. Dunque è, per ogni \bar{y} di $(0, 1)$ e per ogni x fuori di $e_x + \pi_x + \tau_x$, $V_y'(x, \bar{y}) = V_y^*(x, \bar{y})$ e quindi $V_y'(x, \bar{y})$ è quasi continua in $0 \leq x \leq 1$ valendo tale proprietà per $V_y^*(x, \bar{y})$. Analogamente per $V_x'(\bar{x}, y)$.

5. - Il teorema del n.º 3 in connessione con questo ultimo garantisce il

Corollario. - *Ogni superficie S rappresenta una funzione quasi continua T*.*

6. - Dimostreremo nei numeri seguenti il

TEOREMA. - *Ogni funzione T* in Q, quasi continua in Q, rappresenta una superficie S.*

7. - Sia $f(x, y)$ una funzione quasi continua in Q . Sia inoltre $f(x, y)$ funzione T^* in Q e sia E il relativo insieme di punti di Q di misura nulla, trascurando i quali le funzioni $V_y(x)$ e $V_x(y)$ e, come è lecito supporre in forza del teorema del n.º 4, anche tutte le funzioni $V_y(x, \bar{y})$ per ogni valore di \bar{y} e $V_x(\bar{x}, y)$ per ogni valore di \bar{x} , sono quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili.

Per ogni intero p , consideriamo l'insieme i_p di $(0, 1)$ ove $V_x(y) \geq p$. Sia δ_p la misura di i_p . Costruiamo per ogni p e per ogni intero n un plurintervallo $\Delta_{p, n}$ aperto di ampiezza $< \delta_p + \frac{1}{n}$ e tale che

- a) $\Delta_{p, n}$ contenga i_p ;
- β) $V_x(y)$ sia continua in $(0, 1)$ trascurando i punti di $\Delta_{p, n}$;
- γ) $\Delta_{p, n}$ contenga tutti i punti di discontinuità della funzione, monotona

in $(0, 1)$, $\psi(y) = \int_0^1 V_y(x, y) dx$;

δ) $\Delta_{p, n}$ contenga tutti i punti \bar{y} (eventuali) tali che, sulle rette $y = \bar{y}$, l'insieme E seghi insiemi di misura non nulla o (eventualmente) non misurabili.

Si indichi con le solite notazioni $[V_x(y)]_p$ la funzione uguale a p in i_p , uguale a $V_x(y)$ fuori di i_p ⁽¹³⁾. Si indichi pure ⁽¹⁴⁾ con $\Delta_{p, n} V_x(y)$ la funzione associata alla $V_x(y)$ o, il che è lo stesso per la α), alla $[V_x(y)]_p$ rispetto al plurintervallo $\Delta_{p, n}$. Osserviamo che è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_{p, n}} [V_x(y)]_p dy = p \delta_p$$

onde, fuori del limite,

$$\int_{\Delta_{p, n}} [V_x(y)]_p dy = p \delta_p + \varrho_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0.$$

D'altra parte è

$$\int_{\Delta_{p, n}} V_x(y) dy \leq p \Delta_{p, n}.$$

$\Delta_{p, n} V_x(y)$ e $[V_x(y)]_p$ fuori di $\Delta_{p, n}$ sono identiche e quindi

$$\int_0^1 [V_x(y)]_p dy - \int_0^1 \Delta_{p, n} V_x(y) dy = \int_{\Delta_{p, n}} [V_x(y)]_p dy - \int_{\Delta_{p, n}} V_x(y) dy \geq p \delta_p + \varrho_n - p \Delta_{p, n}$$

⁽¹³⁾ Vedi L. TONELLI: *Sulla nozione di integrale*. Annali di Matematica pura ed appl., 4ª serie, t. 11, 1923-1924.

⁽¹⁴⁾ Loc. cit. in ⁽¹³⁾.

e poichè $\lim_{n \rightarrow \infty} (p\delta_p + \rho_n - p\Delta_p, n) = 0$, si ha

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \Delta_{p, n} V_x(y) dy \leq \int_0^1 [V_x(y)]_p dy.$$

Per ogni p si determini allora il più piccolo intero n_p tale che per esso e per tutti i seguenti sia

$$\int_0^1 \Delta_{p, n_p} V_x(y) dy < \int_0^1 [V_x(y)]_p dy + \frac{1}{p}, \quad \Delta_{p, n_p} < \delta_p + \frac{1}{p}.$$

Allora dalla precedente, passando al limite per $p \rightarrow \infty$, si ha

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 \Delta_{p, n_p} V_x(y) dy \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 [V_x(y)]_p dy + \frac{1}{p} \right\} = \int_0^1 V_x(y) dy.$$

Indichiamo semplicemente con Δ_p il plurintervallo Δ_{p, n_p} .

8. - La funzione $\Delta_p V_x(y)$ è continua in $(0, 1)$. Sia il numero reale $\varepsilon = \frac{1}{p^2}$ e determiniamo un numero $\eta > 0$ tale che l'oscillazione di $\Delta_p V_x(y)$ in ogni intervallo di ampiezza $\leq \eta$ sia $< \frac{\varepsilon}{2}$.

La funzione $\psi(y)$ è monotona e limitata in $(0, 1)$. Siano τ_i i suoi salti. $\sum \tau_i$ converge. Siano $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_r$ quei suoi r salti, di ascisse rispettive $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ che sono $> \frac{\varepsilon}{2}$. Sia $\eta > 0$ abbastanza piccolo affinchè in ogni intervallo di $(0, 1)$ di ampiezza $\leq \eta$ e non contenente punti ξ_i , ($i=1, 2, \dots, r$), anche $\psi(y)$ abbia una oscillazione $< \varepsilon$. Sia infine

$$(1) \quad \eta < \frac{\xi_i}{p}, \quad \frac{1 - \xi_i}{p}, \quad \frac{\xi_i - \xi_j}{p},$$

$(i, j = 1, 2, \dots, r; i \neq j; \xi_i, \xi_j \neq 0, 1).$

Poniamo ora $y_1 = \eta$ se il punto $y = \eta$ su $(0, 1)$ non appartiene a Δ_p , poniamo invece $y_1 =$ al secondo estremo dell'intervallo a cui appartiene $y = \eta$ in caso contrario. Poniamo $y_2 = y_1 + \eta$ se $y_1 + \eta$ non appartiene a Δ_p , altrimenti sia y_2 il primo estremo dell'intervallo di Δ_p a cui appartiene $y_1 + \eta$ se questo non è già il punto y_1 , sia y_2 il secondo estremo di detto intervallo in caso contrario. Sia poi $y_3 = y_2 + \eta$ se ecc. Mediante i punti y_1, y_2, y_3, \dots si arriverà ad un punto y_m che dista da 1 per meno di $\eta + \Delta_p$. m è finito perchè, per ogni r , $y_{r+2} - y_r > \eta$, ($r=1, 2, 3, \dots$).

Si osservi che, per ogni r , $V_x(y_r)$ e $\Delta_p V_x(y_r)$ coincidono, $V_x(y_r) \leq p$, e che la $\psi(y)$ è continua in y_r . Di più dimostriamo che la spezzata che si ottiene

congiungendo i punti $[y_r, V_x(y_r)]$ rappresenta una curva, che diremo $V_x^*(y)$ che differisce dalla curva $y = \Delta_p V_x(y)$ su tutto $(0, 1)$ per meno di ε . Sia infatti $y_r \leq y \leq y_{r+1}$, y ed $r < m$ qualsiasi. Se $y_{r+1} - y_r \leq \eta$ allora

$$\begin{aligned} |\Delta_p V_x(y) - \Delta_p V_x(y_r)|, \quad |\Delta_p V_x(y) - \Delta_p V_x(y_{r+1})| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad y_r \leq y \leq y_{r+1} \\ V_x^*(y_r) = \Delta_p V_x(y_r), \quad V_x^*(y_{r+1}) = \Delta_p V_x(y_{r+1}), \quad V_x^*(y) \cong V_x^*(y) \cong V_x^*(y_{r+1}) \end{aligned}$$

da cui

$$|V_x^*(y) - \Delta_p V_x(y)| < \varepsilon, \quad y_r \leq y \leq y_{r+1}.$$

Se poi è $y_{r+1} - y_r > \eta$ osserviamo che per la costruzione fatta occorre che $y_r + \eta$ appartenga ad un intervallino di Δ_p , che y_r coincida con il primo estremo di esso e y_{r+1} con il secondo. Ma allora $V_x^*(y)$ e $\Delta_p V_x(y)$ coincidono in y_r e in y_{r+1} e sono lineari entrambe in (y_r, y_{r+1}) . Esse dunque coincidono in tutto (y_r, y_{r+1}) . È dunque sempre

$$|V_x^*(y) - \Delta_p V_x(y)| < \varepsilon, \quad y_1 \leq y \leq y_m.$$

9. - Consideriamo gli intervalli (y_r, y_{r+1}) . Quelli di ampiezza $> \eta$ appartengono interamente a Δ_p e non ci interessano. Tra gli altri ve ne saranno alcuni, in numero $\leq r$ che contengono punti ξ_i ($i=1, 2, \dots, r$). La somma delle loro ampiezze sarà $\leq \eta r$. Ma per la (1) è $\eta < \frac{1}{rp}$ e quindi $\eta r < \frac{1}{p}$. Aggiungiamo questi intervalli a Δ_p che chiameremo, così modificato, Δ_p^* . Consideriamo ora perciò soltanto gli altri intervalli (y_r, y_{r+1}) che sono tutti di ampiezza $< \eta$ e non contengono punti ξ_i ($i=1, 2, \dots, r$). Ivi allora $\psi(y)$ ha un salto minore di ε . È cioè per ognuno di essi

$$\int_0^1 \{V_y(x, y_{r+1}) - V_y(x, y_r)\} dx < \varepsilon.$$

L'insieme I_ε di punti x di $(0, 1)$ per cui è

$$V_y(x, y_{r+1}) - V_y(x, y_r) \geq \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{p}$$

avrà una ampiezza tale che $I_\varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon$, onde $I_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{p}$.

Sia ω un plurintervallo di ampiezza $< \frac{2}{p}$ racchiudente nel suo interno I_ε e costruiamo il plurintervallo superficiale formato di tutti i punti (x, y) di Q per cui y è contenuto in (y_r, y_{r+1}) e per cui x è contenuto in ω . Tale plurintervallo superficiale è dunque formato di tanti rettangolini aperti ottenuti segnando la striscia $y_r < y < y_{r+1}$ con rette parallele all'asse y . Tale plurintervallo superficiale ha ampiezza $< \frac{2}{p} (y_{r+1} - y_r)$. Fatto ciò per tutti gli intervallini (y_r, y_{r+1}) che ci siamo limitati a considerare, cioè per quelli non contenuti interamente in Δ_p^* , si

ha un complessivo plurintervallo superficiale Ω di ampiezza minore di

$$\frac{2}{p} \Sigma(y_{r+1} - y_r) \leq \frac{2}{p},$$

dove la somma è estesa ai soli intervallini detti.

Consideriamo ora tutti i punti (x, y) di Q per cui y è contenuto in A_p^* . Tali punti costituiscono un plurintervallo aperto di Q , formato di striscie a lati paralleli all'asse x . Aggiungiamo questo al precedente e diciamo Ω_p il plurintervallo superficiale complessivo. È

$$\Omega_p < \frac{2}{p} + A_p + \frac{1}{p} < \delta_p + \frac{1}{p} + \frac{2}{p} + \frac{1}{p} = \delta_p + \frac{4}{p}.$$

Osserviamo che se (x, y) è un punto di Q non appartenente ad Ω_p , $y_r < y < y_{r+1}$ e se nessuno dei punti (x, y) , (x, y_r) , (x, y_{r+1}) appartiene ad E , è

$$|f(x, y) - f(x, y_r)|, \quad |f(x, y) - f(x, y_{r+1})| \leq V(x, y_{r+1}) - V(x, y_r) < \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{p}.$$

10. - Sia i_p' l'insieme ove $V_y(x) \geq p$ e sia δ_p' la sua misura. Per ogni n esiste un plurintervallo $A'_{p,n}$ che ricopre interamente i_p' e di ampiezza $< \delta_p' + \frac{1}{n}$.

Consideriamo poi le funzioni $f(x, y_r)$ quasi continue in $(0, 1)$, $r=1, 2, 3, \dots, m$. Per ognuna di esse esiste, per ogni intero n , un plurintervallo $v_{r,n}$ di ampiezza $< \frac{1}{mn}$ contenente tutti i punti dell'insieme di misura nulla $[E \cdot y_r]$, intersezione dell'insieme E con la retta $y = y_r$, e tale che la funzione $f(x, y_r)$, trascurando i punti di esso, sia continua in $(0, 1)$. Consideriamo ora il plurintervallo

$$A''_{p,n} = A'_{p,n} + \sum_{r=1}^m v_{r,n} < \delta_p' + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.$$

Rifacendo il ragionamento del n.º 7 si può anche qui dimostrare che

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 A''_{p,n} V_y(x) dx \leq \int_0^1 [V_y(x)]_p dx$$

e quindi esisterà per ogni p , un intero n_p' , tale che, per esso e per tutti i seguenti, sia

$$\int_0^1 A''_{p,n_p'} V_y(x) dx < \int_0^1 [V_y(x)]_p dx + \frac{1}{p}, \quad A''_{p,n_p'} < \delta_p' + \frac{1}{p},$$

onde

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 A''_{p,n_p'} V_y(x) dx \leq \int_0^1 V_y(x) dx.$$

Indicheremo sempre con A_p' il plurintervallo $A''_{p,n_p'}$.

11. - Consideriamo ora le funzioni continue in $(0, 1)$

$$\Delta_p' f(x, y_r), \quad (r=1, 2, \dots, m), \quad \Delta_p' V_y(x).$$

Sia il numero reale $\varepsilon' = \frac{1}{p}$. Esisterà in corrispondenza di questo un numero $\eta' > 0$ tale che in ogni intervallo di $(0, 1)$ di ampiezza $\leq \eta'$ le funzioni dette sopra abbiano tutte una oscillazione minore di ε' . Si costruisca ora in corrispondenza del plurintervallo Δ_p' e del numero η' una m' -upla di punti $x_1, x_2, \dots, x_{m'}$, come si è costruita la m -upla di punti y_r in corrispondenza del plurintervallo Δ_p e del numero η nel n.º 8.

Si osservi che per la costruzione eseguita i punti x_s sono fuori di Δ_p' e i punti (x_s, y_r) di Q , ($s=1, 2, \dots, m'$; $r=1, 2, \dots, m$), sono fuori di E . Inoltre tutte le spezzate costruite sulle rette y_r , ($r=1, 2, \dots, m$) con i punti di coordinate $x=x_s$, $z=f(x_s, y_r)$, ($s=1, 2, \dots, m'$), distano dalle rispettive curve $z=\Delta_p' f(x, y_r)$ per meno di ε' in tutto l'intervallo (x_1, x_m) . Analogamente la spezzata che si ottiene congiungendo i punti $x=x_s$, $z=V_y(x_s)$, ($s=1, 2, \dots, m$) sul piano (x, z) , rappresentante una curva che diremo $V_y^*(x)$, dista dalla curva $z=\Delta_p' V_y(x)$ per meno di ε' . Si osservi che nei punti x_s , ($s=1, 2, \dots, m'$), $V_y(x)$ e $\Delta_p' V_y(x)$ coincidono perchè i punti x_s sono fuori di Δ_p' . Analogamente per le funzioni $f(x, y_r)$ e $\Delta_p' f(x, y_r)$, ($r=1, 2, \dots, m$).

Costruite tutte le spezzate dette sulle rette $y=y_r$, ($r=1, 2, \dots, m$), completiamo la costruzione mediante le analoghe spezzate sulle rette $x=x_s$, ($s=1, 2, \dots, m$), congiungendo tutti i punti di coordinate $y=y_r$, $z=f(x_s, y_r)$ che hanno la stessa x_s . Tutte queste spezzate e le precedenti si incontrano in tutti i punti di coordinate (x_s, y_r) , ($s=1, 2, \dots, m'$; $r=1, 2, \dots, m$) e definiscono una rete a maglie quadrangolari non piane che, mediante le diagonali congiungenti i punti

$$[x_s, y_r, f(x_s, y_r)], \quad [x_{s+1}, y_{r+1}, f(x_{s+1}, y_{r+1})], \\ (s=1, 2, \dots, m'-1; r=1, 2, \dots, m-1),$$

si trasforma in maglie piane e triangolari. Tale reticolato è il reticolato degli spigoli di una superficie poliedrica, che diremo Σ_p , perchè dipende solo da p , rappresentante una funzione $z=\Sigma_p(x, y)$ definita nel rettangolo $(x_1 \leq x \leq x_{m'}, y_1 \leq y \leq y_m)$.

La superficie Σ_p gode di due proprietà che andiamo ad enunciare e a dimostrare.

12. - Per ogni punto (x, y) di $(x_1, x_{m'}; y_1, y_m)$ non appartenente a Ω_p e ad E e tale che x non appartenga a Δ_p' , è

$$(2) \quad |\Sigma_p(x, y) - f(x, y)| < 2\varepsilon' = \frac{2}{p}.$$

Sia (x, y) un punto di $(x_1, x_{m'}; y_1, y_m)$ non appartenente ad Ω_p e ad E e x non appartenga a Δ_p' . Sarà $x_s \leq x \leq x_{s+1}$, $y_r \leq y \leq y_{r+1}$. Sia $x_s < x < x_{s+1}$, $y_r < y < y_{r+1}$.

Non appartenendo x a Δ_p' , nessuno dei punti (x, y_r) , (x, y_{r+1}) e per ipotesi neppure (x, y) appartengono ad E . Allora per quanto si è detto nel n.º 9

$$|f(x, y) - f(x, y_r)|, \quad |f(x, y) - f(x, y_{r+1})| < \frac{1}{p} = \varepsilon'.$$

Ma x non appartiene a Δ_p' e quindi ivi $f(x, y_r)$ coincide con $\Delta_p' f(x, y_r)$ e analogamente $f(x, y_{r+1})$ coincide con $\Delta_p' f(x, y_{r+1})$. Di più è certo $x_{s+1} - x_s \leq \eta'$ perchè se fosse $x_{s+1} - x_s > \eta'$ l'intervallo (x_s, x_{s+1}) apparterrebbe interamente a Δ_p' e quindi vi apparterrebbe anche x .

Ma in (x_s, x_{s+1}) le funzioni $\Delta_p' f(x, y_r)$, $r=1, 2, \dots, m$ hanno una oscillazione $< \varepsilon'$ e quindi

$$\begin{aligned} |f(x, y_r) - f(x_s, y_r)| < \varepsilon', & \quad |f(x, y_r) - f(x_{s+1}, y_r)| < \varepsilon', \\ |f(x, y_{r+1}) - f(x_s, y_{r+1})| < \varepsilon', & \quad |f(x, y_{r+1}) - f(x_{s+1}, y_{r+1})| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_s, y_r)| < 2\varepsilon', & \quad |f(x, y) - f(x_{s+1}, y_r)| < 2\varepsilon', \\ |f(x, y) - f(x_s, y_{r+1})| < 2\varepsilon', & \quad |f(x, y) - f(x_{s+1}, y_{r+1})| < 2\varepsilon'. \end{aligned}$$

Ma la $\Sigma_p(x, y)$ coincide nei punti (x_s, y_r) , $s=1, 2, \dots, m'$, $r=1, 2, \dots, m$, con la funzione $f(x, y)$ e nei due triangoli che la diagonale considerata divide il rettangolo $(x_s, x_{s+1}; y_r, y_{r+1})$ varia linearmente. Vale dunque in (x, y) la (2). Analogamente se $x = x_s$, x_{s+1} , $y = y_r$, y_{r+1} .

13. - Sia \bar{x} un punto qualunque dell'intervallo (x_1, x_m) . Il piano $x = \bar{x}$ sega su $\Sigma_p'(x, y)$ una poligonale e sia $v_y(\bar{x})$ la variazione totale della funzione di una variabile rappresentata da detta poligonale. La funzione $v_y(x)$ è lineare in ciascuno degli intervalli (x_s, x_{s+1}) . Infatti considerato il rettangolo elementare $(x_s, x_{s+1}; y_r, y_{r+1})$ poniamo

$$\begin{aligned} f_1 = f(x_s, y_r), & \quad f_2 = f(x_{s+1}, y_r), & \quad f_3 = f(x_s, y_{r+1}), & \quad f_4 = f(x_{s+1}, y_{r+1}), \\ \xi = x - x_s, & & \quad u = x_{s+1} - x_s. & \end{aligned}$$

Sul segmento $y = y_r$, $x_s \leq x \leq x_{s+1}$, la Σ assume i valori $\frac{1}{u} \{f_1(u - \xi) + f_2\xi\}$, sul segmento che congiunge i punti (x_s, y_r) , (x_{s+1}, y_{r+1}) i valori $\frac{1}{u} \{f_1(u - \xi) + f_4\xi\}$, infine sul segmento $y = y_{r+1}$, $x_s \leq x \leq x_{s+1}$ la Σ assume i valori $\frac{1}{u} \{f_3(u - \xi) + f_4\xi\}$. La variazione totale della Σ sul segmento $x = \bar{x}$, $y_r \leq y \leq y_{r+1}$ è

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \{ |f_1(u - \xi) + f_2\xi - f_1(u - \xi) - f_4\xi| + |f_1(u - \xi) + f_4\xi - f_3(u - \xi) - f_4\xi| \} = \\ = \frac{1}{u} \{ |f_1 - f_3| (u - \xi) + |f_2 - f_4| \xi \} \end{aligned}$$

che dunque è lineare in (x_s, x_{s+1}) . La funzione $v_y(x)$ è dunque lineare in ogni intervallo (x_s, x_{s+1}) come somma di funzioni tutte lineari in essi. La funzione $v_y(x)$ è poi continua in tutto (x_1, x_m) e nei punti x_s ($s=1, 2, \dots, m'$) è uguale alla variazione totale della spezzata che si appoggia alla curva $z=f(x_s, y)$ nei punti $y=y_r$ ($r=1, 2, \dots, m$), onde è certo non maggiore in tali punti della variazione totale della funzione $z=f(x, y)$, considerata come funzione di y , per y variabile in $(0, 1)$, anche se qui trascuriamo i punti di E , perchè i punti (x_s, y_r) non sono punti di E . È quindi

$$v_y(x) \leq V_y^*(x) \leq \Delta_p' V_y(x) + \frac{1}{p}, \quad \varepsilon' = \frac{1}{p},$$

per quanto si è detto al n.º 11.

Analogamente, se \bar{y} è un punto di (y_1, y_m) , il piano $y=\bar{y}$ sega la superficie poliedrica $\Sigma_p(x, y)$ in una spezzata e sia $v_x(y)$ la variazione totale della funzione da questa rappresentata. Anche qui risulterà $v_x(y)$ lineare in ciascuno degli intervalli (y_r, y_{r+1}) e nei punti $y=y_r$, $v_x(y)$ coincide con la variazione totale della spezzata che si appoggia alla $f(x, y)$ nei punti $x=x_s$, ($s=1, 2, \dots, m'$), $y=y_r$. Poichè i punti (x_r, y_s) non appartengono ad E , è anche qui allora

$$v_x(y) \leq V_x^*(y) \leq \Delta_p V_x(y) = \frac{1}{p}, \quad \varepsilon = \frac{1}{p^2} < \frac{1}{p},$$

in forza di quanto si è detto al n.º 8.

Da qui scende che l'area S_p della superficie Σ_p risulta

$$\begin{aligned} S_p &< 1 + \int_0^1 \{1 + v_y(x)\} dx + \int_0^1 \{1 + v_x(y)\} dy \leq \\ &\leq 3 + \int_0^1 \Delta_p' V_y(x) dx + \int_0^1 \Delta_p V_x(y) dy + \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

14. - Aggiungiamo ad Ω_p il plurintervallo superficiale di Q formato da tutti i punti (x, y) con x appartenente a Δ_p' , costituenti tante striscie a lati paralleli all'asse y . Il nuovo plurintervallo Ω_p^* , avrà ampiezza

$$\Omega_p^* < \delta_p + \frac{4}{p} + \delta_p' + \frac{1}{p} = \delta_p + \delta_p' + \frac{5}{p}.$$

Si osservi che $\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p' = 0$. Per ogni intero ν si determini il numero p_ν tale che

$$\Omega_{p_\nu}^* < \delta_{p_\nu} + \delta'_{p_\nu} + \frac{5}{p_\nu} < \frac{1}{2^{\nu+1}}$$

e si costruiscano le corrispondenti superfici poliedriche Σ_{p_ν} sopra definite per

ogni valore di p . Consideriamo di poi la successione dei plurintervalli l'uno contenuto nel precedente

$$\sigma_\nu = \Omega_{p_\nu}^* + \Omega_{p_{\nu+1}}^* + \dots, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

dove $\Omega_{p_\nu}^*$ sono i plurintervalli superficiali visti sopra in corrispondenza della rispettiva superficie poliedrica Σ_{p_ν} . Si ha inoltre

$$\sigma_\nu < \frac{1}{2^{\nu+1}} + \frac{1}{2^{\nu+2}} + \dots = \frac{1}{2^{\nu+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{1}{2^\nu}.$$

Questa successione di plurintervalli l'uno contenuto nel precedente, individua un insieme E' di misura nulla formato da tutti i punti comuni ad essi.

Sia ora (x, y) un punto di Q fuori di $E + E'$. Esisterà certo un $\bar{\nu}$ abbastanza grande tale che, per ogni $\nu \geq \bar{\nu}$ sia (x, y) fuori di σ_ν e quindi fuori di $\Omega_{p_\nu}^*, \Omega_{p_{\nu+1}}^*, \dots$. Deve allora essere, per tutti i $\nu \geq \bar{\nu}$ e nel punto (x, y) ,

$$|\Sigma_{p_\nu}(x, y) - f(x, y)| < \frac{2}{p_\nu},$$

in forza di quanto si è visto nel n.º 12.

Si può dunque affermare che la successione di superfici poliedriche

$$(3) \quad \Sigma_{p_1}(x, y), \Sigma_{p_2}(x, y), \dots, \Sigma_{p_\nu}(x, y), \dots,$$

converge quasi ovunque alla $f(x, y)$ in Q . Di più si osservi che il contorno del campo di definizione della superficie generica $\Sigma_{p_\nu}(x, y)$ tende uniformemente al contorno di Q , tale contorno essendo dato dalle rette $x = x_1, x_{m'}, y = y_1, y_{m'}$ che distano dai lati di Q rispettivamente meno di $\delta_p + \frac{2}{p_\nu}, \delta'_{p_\nu} + \frac{2}{p_\nu}$.

Infine dal n.º 13 si ha

$$S_{p_\nu} < 3 + \int_0^1 \Delta'_{p_\nu} V_y(x) dx + \int_0^1 \Delta_{p_\nu} V_x(y) dy + \frac{2}{p_\nu},$$

dove il secondo membro, per quanto si è visto nel n.º 7 e nel n.º 10, ha un limite superiore, quando ν e quindi $p_\nu \rightarrow \infty$, inferiore, o almeno non superiore, a

$$3 + \int_0^1 V_y(x) dx + \int_0^1 V_x(y) dy.$$

È dunque finito il $\min \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_{p_\nu}$.

La successione (3) trovasi dunque nelle condizioni della nostra definizione per le superfici S e con ciò il teorema del n.º 6 è dimostrato.