ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di calcolo delle variazioni di ordine n

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 5, nº 3-4 (1936), p. 169-190

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_3-4_169_0>

SOPRA L'ESISTENZA DELLA SOLUZIONE NEI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI DI ORDINE n (*)

di SILVIO CINQUINI (Pisa).

Il problema, in forma ordinaria, del Calcolo delle Variazioni, che, fino ad oggi, ha formato oggetto del maggiore studio, è quello di trovare, fra le curve

$$C: \quad y=y(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

di una certa classe, quella che rende minimo l'integrale

$$I_C = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx.$$

Come è ben noto questo *problema* che diremo *del primo ordine*, perchè la f è al più funzione delle x, $y(x)$, $y'(x)$, e non delle derivate della $y(x)$ di ordine maggiore di uno, è stato risolto, in modo soddisfacente, soltanto ricorrendo ai « metodi diretti », fra i quali, l'unico che veramente si è imposto, ormai da parecchi anni, per i brillanti risultati che ha fornito e per il suo rigore, è quello del TONELLI, basato sulla semicontinuità di cui godono, generalmente, le funzioni di linea che si presentano nel Calcolo delle Variazioni.

Questo Autore, nella sua Opera fondamentale (1) e successivamente in altri lavori (2), ha stabilito, in condizioni molto generali per la funzione f, l'esistenza del minimo nella classe delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue e per le quali l'integrale I_C esiste finito.

Un problema, di cui il precedente è un caso particolare, e che finora ha formato oggetto di ben pochi studi, è quello di trovare il minimo dell'integrale

$$I_{C^{[n]}}^{[n]} = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\, dx,$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Due volumi (N. Zanichelli, Bologna, 1921-1923).

(2) Tutta la teoria relativa all'esistenza del minimo dell'integrale I_C è stata rielaborata in una recente Memoria che contiene anche i risultati fino ad allora ottenuti da altri Autori. Vedi: L. TONELLI: *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. III (1934), pp. 401-450).

ove n è un numero intero >1, ed f è quindi funzione di almeno una delle derivate della $y(x)$ di ordine superiore al primo.

I più noti trattati di Calcolo delle Variazioni ([3]) vi dedicano al più qualche pagina, accennando soltanto a qualche immediata estensione di risultati ottenuti nel caso particolare $n=1$.

Nè d'altra parte il metodo diretto di H. LEWY, recentemente applicato anche a tale problema ([4]), poteva fornire i risultati che sono da attendersi, dato che esso si è mostrato poco efficace anche nel caso particolare $n=1$.

Si presenta allora spontanea l'idea di applicare il metodo del TONELLI, a questo *problema* che diremo *di ordine* n, nel caso che n sia l'ordine massimo delle derivate della $y(x)$, dalle quali dipende *effettivamente* la funzione f. Nulla essendo stato fatto finora a tal riguardo ([5]), si tratta, innanzi tutto, di impostare la questione in condizioni che presentino la stessa generalità di quelle in cui si è posto il TONELLI. In forma concisa, il nostro problema è il seguente (vedi n.° 1, β)):

Consideriamo le curve $C^{[n]}$: $y=y(x)$, con $y(x)$ assolutamente continua insieme con le proprie derivate dei primi $n-1$ ordini, per le quali esiste finito l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ e proponiamoci di trovare, fra tali curve, quelle che rendono minimo l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$.

Si vedrà da quanto segue e da quello che esporremo in successivi lavori che

---

([3]) O. BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung.* (Teubner, Leipzig, 1909), Parte I, pp. 152-153.

J. HADAMARD: *Leçons sur le Calcul des Variations*, T. I (Gauthier-Villars, Paris, 1910), pp. 134-141 e pp. 458-464.

Vedi anche nella Encyclopédie des Sciences Mathèmatiques l'articolo di M. LECAT, p. 55 e segg., e, per $n=2$, A. R. FORSYTH: *Calculus of Variations* (Univ. Press, Cambridge, 1927), Cap. III.

([4]) H. O. HIRSCHFELD: *Direkte Methoden der Variationsrechnung zur Lösung von Randwertproblemen.* (Schriften des Math. Seminars und des Instituts für angewandte Math. der Univ. Berlin, Band 2 (1934), Heft 3, pp. 65-108). L'HIRSCHFELD si limita a considerare le funzioni $y(x)$ continue insieme alle loro derivate dei primi n ordini, ed impone alla funzione f condizioni molto restrittive. Nel caso $n=1$, l'A. ritiene di avere dato per primo, sotto opportune ipotesi, il teorema di esistenza e continuità delle derivate seconde delle funzioni estremanti, mentre tale teorema, sotto condizioni anche più generali, trovasi nei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* del TONELLI, ed anche nella Memoria di questo stesso A.: *Sur une méthode directe du Calcul des Variations* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXIX (1915), pp. 233-264).

Vedi anche: F. BÄBLER: *Über die Existenz von Lösungen zur Variationsproblemen n-ter ordnung.* (Comment. Math. Helvetici, Vol. 6 (1933-1934), pp. 1-27).

([5]) È però da segnalare la Memoria di N. BOGOLIOUBOFF: *Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations.* (Annali di Matematica pura e applicata, Serie IV, T. IX, pp. 195-241), che studia, seguendo i metodi del TONELLI, il problema del minimo degli integrali in forma parametrica, nel caso $n=2$.

il metodo del TONELLI, fondato sul concetto di semicontinuità, si presta mirabilmente a risolvere questo problema in tutta la sua generalità.

In questa Memoria, che è divisa in tre paragrafi, cominceremo ad estendere al nostro problema alcuni dei risultati stabiliti dal TONELLI per $n=1$.

Il § 1 è dedicato alle generalità ed alle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali $I^{[n]}_{C^{[n]}}$, che vengono solamente enunciate, perchè le dimostrazioni sono completamente analoghe a quelle per $n=1$, mentre le condizioni necessarie per la semicontinuità formeranno oggetto di un lavoro a parte, per non rendere troppo voluminoso il presente.

Nel § 2 vengono dati teoremi di esistenza, che estendono agli integrali $I^{[n]}_{C^{[n]}}$, nel caso che il campo $A^{[n]}$, ad $n+1$ dimensioni, in cui possono variare le $x, y, y',\dots, y^{(n-1)}$, sia limitato, gli analoghi risultati stabiliti dal TONELLI per gli integrali I_C e per tutte le classi complete di curve.

La condizione che il campo $A^{[n]}$ sia limitato viene eliminata nel § 3, che contiene parecchi criteri, i quali, giovandosi dei risultati del § 2, permettono di stabilire, sotto opportune condizioni per la funzione f, l'esistenza del minimo anche nel caso che il campo $A^{[n]}$ sia illimitato.

Altri teoremi di esistenza si otterranno giovandosi delle soluzioni dell'equazione differenziale di EULERO e verranno dati in altro lavoro dedicato a tali equazioni.

§ 1. - Generalità. La semicontinuità.

1. - Generalità.

α). IL CAMPO $A^{[n]}$. LA FUNZIONE $f(x, y, y',\dots, y^{(n)})$. - Sia n un numero intero positivo, e si consideri uno spazio ad $n+1$ dimensioni, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali $(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$. Diremo campo $A^{[n]}$ ogni insieme di questo spazio, contenente tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito.

Per ogni punto $(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, e per ogni valore finito di $y^{(n)}$ supporremo definita una funzione $f(x, y, y',\dots, y^{(n)})$ finita e continua insieme con la propria derivata parziale $f_{y^{(n)}}(x, y, y',\dots, y^{(n)})$.

β). LE CURVE $C^{[n]}$. L'INTEGRALE $I^{[n]}_{C^{[n]}}$. - Consideriamo le curve

$$C^{[n]}: \quad y=y(x), \qquad a\leq x\leq b,$$

per le quali $y(x)$ è una funzione assolutamente continua insieme alle sue derivate dei primi $n-1$ ordini, $y'(x),\dots, y^{(n-1)}(x)$, ogni punto $(x, y(x), y'(x),\dots, y^{(n-1)}(x))$, (con $a\leq x\leq b$) appartiene al campo $A^{[n]}$, ed inoltre esiste finito l'integrale (del LEBESGUE)

$$I^{[n]}_{C^{[n]}}=\int_a^b f(x, y(x), y'(x),\dots, y^{(n)}(x))dx.$$

γ). INTORNO $(\varrho)^n$ DI UNA CURVA $C^{[n]}$. - Date due curve $C^{[n]}$

$$C_0^{[n]}:\quad y=y_0(x), \qquad a_0 \leq x \leq b_0$$
$$C_1^{[n]}:\quad y=y_1(x), \qquad a_1 \leq x \leq b_1,$$

diremo che la funzione $y_1(x)$ [od anche la curva $C_1^{[n]}$] **appartiene all'intorno** $(\varrho)^n$ della funzione $y_0(x)$ [della curva $C_0^{[n]}$], se

1°) per ogni x, comune ai due intervalli (a_0, b_0), (a_1, b_1), è:

$$|y_0^{(r)}(x) - y_1^{(r)}(x)| \leq \varrho,$$
$$(r=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ \text{ove } y^{(0)}(x) \equiv y(x));$$

2°) per ogni x, minore di a_0 e appartenente ad (a_1, b_1), è:

$$a_0 - x \leq \varrho, \qquad |y_0^{(r)}(a_0) - y_1^{(r)}(x)| \leq \varrho, \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, n-1);$$

3°) per ogni x, maggiore di b_0 e appartenente ad (a_1, b_1), è:

$$x - b_0 \leq \varrho, \qquad |y_0^{(r)}(b_0) - y_1^{(r)}(x)| \leq \varrho, \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Diremo poi che la funzione $y_1(x)$ [la curva $C_1^{[n]}$] **appartiene propriamente all'intorno** $(\varrho)^n$ della $y_0(x)$ [della $C_0^{[n]}$], se, oltre alle tre condizioni indicate, sono soddisfatte anche le disuguaglianze

$$|a_0 - a_1| \leq \varrho, \qquad |b_0 - b_1| \leq \varrho.$$

δ). SEMICONTINUITÀ E CONTINUITÀ DELL'INTEGRALE $I^{[n]}_{C^{[n]}}$. - Diremo che l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è una *funzione semicontinua inferiormente*, se, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\varrho > 0$, in modo che, qualunque sia, fra le curve $C^{[n]}$, la $C_0^{[n]}$, la disuguaglianza

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} > I^{[n]}_{C_0^{[n]}} - \varepsilon,$$

sia verificata per tutte le curve $C^{[n]}$, appartenenti propriamente all'intorno $(\varrho)^n$ della $C_0^{[n]}$.

Analoga definizione per la *semicontinuità superiore.*

Diremo poi che l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è una *funzione continua*, se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\varrho > 0$, in modo che, qualunque sia, fra le curve $C^{[n]}$, la $C_0^{[n]}$, si abbia

$$|I^{[n]}_{C^{[n]}} - I^{[n]}_{C_0^{[n]}}| < \varepsilon,$$

per tutte le curve $C^{[n]}$ appartenenti propriamente all'intorno $(\varrho)^n$ della $C_0^{[n]}$.

ε). Diremo che $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è un integrale *quasi-regolare positivo* se, in ogni punto $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ del campo $A^{[n]}$, la derivata parziale $f_{y^{(n)}}(x, y, y', ..., y^{(n)})$ è, come funzione della sola $y^{(n)}$, sempre non decrescente.

Inoltre se in nessun punto $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, la $f_{y^{(n)}}$ è costante per tutti i valori di $y^{(n)}$, diremo che l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è *quasi-regolare positivo seminormale.*

Infine, se per ogni $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, la $f_{y^{(n)}}$ è funzione sempre crescente della $y^{(n)}$, diremo che l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è *quasi-regolare positivo normale.*

Se poi, oltre alle ipotesi del capoverso a), supponiamo che la funzione f ammetta, in ogni punto di $A^{[n]}$, e per ogni valore finito di $y^{(n)}$, finita e continua anche la derivata parziale $f_{y^{(n)}y^{(n)}}$, diremo che l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è *regolare positivo*, se, in ogni punto $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, è sempre, per tutti i valori di $y^{(n)}$, $f_{y^{(n)}y^{(n)}}>0$.

ζ). CLASSE COMPLETA DI CURVE D'ORDINE n. - Considerato un insieme J di infinite curve $C^{[n]}$, diremo che la curva C_0 è una sua *curva d'accumulazione d'ordine n*, se ad ogni intorno $(\varrho)^n$ della C_0 appartengono sempre propriamente infinite curve dell'insieme.

Ciò premesso, diremo che un insieme J di curve $C^{[n]}$, costituisce una *classe completa d'ordine n*, quando ogni sua curva d'accumulazione d'ordine n, se è una curva $C^{[n]}$, appartiene pure all'insieme J.

Per esempio, dati due punti $(x_i, y_i, y_i', ..., y_i^{(n-1)})$, $(i=1, 2)$, appartenenti al campo $A^{[n]}$, tutte le curve $C^{[n]}$, per le quali è

$$y^{(r)}(x_i)=y_i,$$
$$(r=0, 1, 2, ..., n-1;\ y^{(0)}(x)\equiv y(x);\ i=1, 2)$$

costituiscono una classe completa d'ordine n.

2. - La semicontinuità.

a). LEMMA. - *Se $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, per ogni punto $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ e per ogni valore di $y_0^{(n)}$, si può determinare (almeno) una terna di numeri p, q, ϱ, con $\varrho>0$, in modo che, in tutti i punti $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$, per i quali è*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(y'-y_0')^2+ .... +(y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)})^2\leq\varrho^2,$$

sia

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)})>p+qy^{(n)},$$

per tutti gli $y^{(n)}$, e

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)})<p+qy^{(n)}+\varepsilon,$$

per gli $y^{(n)}$ tali che

$$|y^{(n)}-y_0^{(n)}|\leq\varrho.$$

β). TEOREMA DI SEMICONTINUITÀ. - *Se* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, esso è semicontinuo inferiormente.*

γ). COROLLARIO. - *Se* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *è un integrale quasi-regolare positivo, esso è semicontinuo inferiormente in ogni classe* $K^{[n]}$ *di curve* $C^{[n]}$: $y=y(x)$, *per le quali le relative curve* $y=y^{(n-1)}(x)$, $\left(y^{(n-1)}(x) \equiv \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\right)$, *abbiano tutte lunghezza inferiore ad un numero fisso.*

δ). INTEGRALI SOLTANTO QUASI-REGOLARI POSITIVI. - Si supponga, soltanto nel presente capoverso, che la $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ sia, per tutti gli $y^{(n)}$, definita anche in un campo $A^{[n]}_*$, contenente $A^{[n]}$ nel suo interno, e in modo che, in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}_*$ e per qualsiasi $y^{(n)}$, essa risulti sempre finita e continua, insieme con la sua derivata parziale $f_{y^{(n)}}$; e si supponga inoltre che in $A^{[n]}$ ed anche in $A^{[n]}_*$, e per tutti gli $y^{(n)}$ esistano finite e continue anche le derivate parziali $f_{y^{(n)}x}$, $f_{y^{(n)}y}$, $f_{y^{(n)}y'}, \ldots, f_{y^{(n)}y^{(n-2)}}$.

Sotto queste ipotesi, se $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *è un integrale quasi-regolare positivo, esso è semicontinuo inferiormente.* (6).

ε). ESTENSIONE DELLA SEMICONTINUITÀ. - *Sia*

$$\Gamma_0: \quad y=y_0(x), \qquad a_0 \leqslant x \leqslant b_0,$$

una curva, tale che $y_0(x)$ *sia una funzione assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi* $n-1$ *ordini* $y_0'(x), \ldots, y_0^{(n-1)}(x)$, *e per la quale ogni punto* $(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n-1)}(x))$, (con $a_0 \leqslant x \leqslant b_0$) *appartenga al campo* $A^{[n]}$.

Allora (sotto le ipotesi del n.° 1 *a*)), *se* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, e se la funzione* $f(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x))$ *non è integrabile in* (a_0, b_0), *preso ad arbitrio un numero H, si può determinare un* $\varrho > 0$, *in modo che ogni curva* $C^{[n]}$, *appartenente propriamente all'intorno* $(\varrho)^n$ *della* Γ_0, *soddisfi alla disuguaglianza.*

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} > H.$$

ζ). OSSERVAZIONI:

1ª). *Il teorema dato in* ε) *vale anche nel caso che l'integrale* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *non sia seminormale, purchè ci si limiti ad una classe di curve* $C^{[n]}$: $y=y(x)$, *per le quali le corrispondenti curve* $y=y^{(n-1)}(x)$ *abbiano tutte lunghezza inferiore ad un numero fisso.*

2ª). *Sotto le ipotesi fatte all'inizio del capoverso* δ) *del presente*

---

(6) La dimostrazione di questa proposizione viene data in S. CINQUINI: *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n.* (In corso di stampa negli Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, T. XV (1936-1937), pp. 1-10).

numero, il teorema dato in ε) *si estende a tutti gli integrali quasi-regolari positivi.*

Tutte le proposizioni enunciate nel presente numero si dimostrano ripetendo, con qualche evidente modificazione, le dimostrazioni fatte dal TONELLI per le analoghe proposizioni, relative agli integrali I_C (7).

§ 2. - Esistenza dell' estremo in campi limitati.

3. - Il campo $A_L^{[n]}$. Le curve $C_L^{[n]}$.

In tutto il presente paragrafo supporremo che il campo $A^{[n]}$, di cui al n.° 1, a), sia limitato e lo indicheremo con $A_L^{[n]}$. Osserviamo che $A_L^{[n]}$ risulta anche chiuso. Indicheremo poi con $C_L^{[n]}$ le curve $C^{[n]}$: $y=y(x)$, $(a\leq x\leq b)$, per le quali ogni punto $(x, y(x), y'(x),\ldots, y^{(n-1)}(x))$ $(a\leq x\leq b)$, appartiene al campo limitato $A_L^{[n]}$.

4. - Primo teorema d' esistenza.

Supposto: 1°) *che l' integrale* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *sia quasi-regolare positivo*; 2°) *che esista una funzione* $\Phi(z)$, *definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata, tale che* $\Phi(z):z\to+\infty$, *per* $z\to+\infty$, *e per la quale si abbia, in tutto il campo limitato* $A_L^{[n]}$,

$$f(x, y, y',\ldots, y^{(n)})\geq\Phi(|y^{(n)}|), \tag{1}$$

in ogni classe completa d' ordine n, di curve $C_L^{[n]}$, *esiste il minimo assoluto di* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ (8).

Infatti, sia K una classe completa d' ordine n di curve $C_L^{[n]}$; analogamente a quanto ha osservato il TONELLI per $n=1$, il limite inferiore i dell' integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ in K risulta finito.

Sia allora

$$C_1,\quad C_2,\ldots,\quad C_r,\ldots, \tag{2}$$

una successione di curve di K, minimizzante per $I_{C^{[n]}}^{[n]}$. Posto

$$C_r:\quad y=y_r(x),\qquad a_r\leq x\leq b_r,$$

ripetendo un ragionamento fatto dal TONELLI, si prova, in virtù della (1), che le derivate

$$y_1^{(n-1)}(x),\quad y_2^{(n-1)}(x),\ldots,\quad y_r^{(n-1)}(x),\ldots, \tag{3}$$

costituiscono una successione di funzioni equiassolutamente continue.

(7) Vedi L. TONELLI, loc. cit. in (2), Cap. I, n.i 2-7.

(8) Per $n=1$, vedi L. TONELLI, loc. cit. in (2), n.° 9.

D' altra parte, dall' ipotesi che le curve (2) siano tali che ogni punto $(x, y_r(x), y_r'(x),...., y_r^{(n-1)}(x))$ appartenga al campo limitato $A_L^{[n]}$, segue facilmente che le funzioni $y_r(x)$ sono tutte equiassolutamente continue, e della stessa proprietà gode ognuna delle seguenti $n-2$ successioni (oltrechè la (3))

$$\frac{d^j y_r(x)}{dx^j}, \quad (r=1, 2,....) ; \qquad j=1, 2,...., n-2.$$

Si può pertanto estrarre dalla (2) un'altra successione di curve

$$C_{1,1}, \quad C_{1,2},...., \quad C_{1,r},...., \qquad (C_{1,r}:\ y=y_{1,r}(x)), \tag{4}$$

con

$$I_{C_{1,r}}^{[n]} \leq i+\frac{1}{r}, \tag{5}$$

uniformemente convergente verso una curva

$$C_0: \quad y=y_0(x), \qquad a_0 \leq x \leq b_0,$$

con $y_0(x)$ assolutamente continua.

Poi dalla (4) si può estrarre un'altra successione di curve

$$C_{2,1}, \quad C_{2,2},...., \quad C_{2,r},...., \qquad (C_{2,r}:\ y=y_{2,r}(x))$$

che converge ancora uniformemente verso la C_0 ed è inoltre tale che le derivate $\frac{dy_{2,r}(x)}{dx}$, $(r=1, 2,....)$ convergono uniformemente verso una funzione, assolutamente continua, $y_0'(x)$, la quale, per un noto teorema di derivazione per serie, è la $\frac{dy_0(x)}{dx}$.

Proseguendo a questo modo, perveniamo, alla fine, ad una successione di curve

$$C_{n,1}, \quad C_{n,2},...., \quad C_{n,r},...., \qquad (C_{n,r}:\ y=y_{n,r}(x)),$$

tale che le derivate $\frac{d^{n-1}y_{n,r}(x)}{dx^{n-1}}$, $(r=1, 2,....)$ convergono uniformemente verso una funzione, assolutamente continua, $y_0^{(n-1)}(x)$, la quale, per il già citato teorema di derivazione per serie, è la $\frac{d^{n-1}y_0(x)}{dx^{n-1}}$.

Dunque la funzione $y_0(x)$ è assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini e le n successioni delle $y_{n,r}(x)$, $(r=1, 2,....)$ e delle loro derivate dei primi $n-1$ ordini convergono uniformemente verso la $y_0(x)$ e verso le sue derivate dei primi $n-1$ ordini rispettivamente; pertanto ogni punto $(x, y_0(x), y_0'(x),...., y_0^{(n-1)}(x))$, $(a_0 \leq x \leq b_0)$ appartiene al campo $A_L^{[n]}$.

Inoltre dalla (5) segue *a fortiori*

$$I_{C_{n,r}}^{[n]} \leq i+\frac{1}{r}. \tag{6}$$

Siccome l'integrale $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ è quasi-regolare positivo ed anche (per la condizione 2°)) seminormale, dalla (6) e dal n.° 2, ε) segue che la funzione $f(x, y_0(x), y_0'(x),...., y_0^{(n)}(x))$ è integrabile su (a_0, b_0) e che perciò C_0 è una curva $C_L^{[n]}$, e quindi appartiene alla classe K, siccome questa classe è completa d'ordine n.

Dalla (6) e dal n.° 2, β) segue $I_{C_0}^{[n]}=i$, come volevasi provare.

5. - Secondo teorema d'esistenza.

Alla condizione 2°) del primo teorema d'esistenza può sostituirsi la seguente:

2_*°). *In ciascun punto* $(x, y, y',...., y^{(n-1)})$ *del campo limitato* $A_L^{[n]}$ *sia, per* $|y^{(n)}|\to\infty$,

(7) $$\left|\frac{f(x, y, y',...., y^{(n)})}{y^{(n)}}\right|\to\infty.$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte dal TONELLI (9) si prova che le condizioni 2°) e 2_*°) sono equivalenti.

6. - Terzo teorema d'esistenza.

Supposto: 1°) *che* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *sia un integrale quasi-regolare positivo*; 2°) *che ogni punto* $(x_0, y_0, y_0',...., y_0^{(n-1)})$ *del campo limitato* $A_L^{[n]}$ *soddisfi o alla condizione* [condizione α)] *che in tutti i punti di* $A_L^{[n]}$ *di un suo intorno valga, per* $|y^{(n)}|\to\infty$, *la* (7), *oppure all'altra condizione* [condizione β)] *che ad esso si possano far corrispondere due funzioni* $\varphi(z)$, $\Psi(z)$ *e tre costanti* $l>0$, $\nu>0$, *e* μ, *con* $\varphi(z)$ *definita in* $(0, l)$ *non negativa, tendente a* $+\infty$, *per* $z\to+0$, *e integrabile in* $(0, l)$, *e* $\Psi(z)$ *definita in* $(0, +\infty)$ *non negativa, non decrescente, tale che per* $z\to+0$, *sia*

(8) $$z\varphi(z)\Psi(\varphi(z))\to+\infty,$$

e in modo che, in tutti i punti $(x, y, y',...., y^{(n-1)})$ *di* $A_L^{[n]}$ *sufficientemente vicini a* $(x_0, y_0, y_0',...., y_0^{(n-1)})$, *risulti, per tutti gli* $y^{(n)}$,

(9) $$f(x, y, y',...., y^{(n)})\geqq|x-x_0|^\nu|y^{(n)}|^{1+\nu}\Psi^\nu(|y^{(n)}|)+\mu;$$

in ogni classe completa d'ordine n di curve $C_L^{[n]}$, *esiste il minimo assoluto di* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$.

Basta ripetere il ragionamento, fatto dal TONELLI per $n=1$ (10), con le modificazioni suggerite da quanto si è detto nel n.° 4.

OSSERVAZIONE. - Si ottengono immediatamente molti casi particolari del teorema del presente numero deducendoli da quelli indicati dal TONELLI.

---

(9) Vedi L. TONELLI, loc. cit. in (2), n.° 11.

(10) Ibidem, n.° 12.

La condizione β) è verificata se, nell'intorno del punto $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$, è:

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) \geqslant k \,|\, x - x_0 \,|^{\nu} \,|\, y^{(n)} \,|^{1+\nu+\sigma} + \mu,$$

oppure

$$f \geqslant k \,|\, x - x_0 \,|^{\nu} \,|\, y^{(n)} \,|^{1+\nu} \lg^{\nu+\sigma} (1 + |\, y^{(n)} \,|) + \mu,$$

oppure

$$f \geqslant k \,|\, x - x_0 \,|^{\nu} \,|\, y^{(n)} \,|^{1+\nu} \lg^{\nu} (1 + |\, y^{(n)} \,|)[\lg \{1 + \lg (1 + |\, y^{(n)} \,|)\}]^{\nu+\sigma} + \mu,$$

ecc., con $k > 0$, $\nu > 0$, $\sigma > 0$.

7. - Lemmi.

a). *Se* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, per ogni punto* $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *si può determinare (almeno) una quaterna di numeri* p, q, ν, ϱ, *con* $\nu > 0$, $\varrho > 0$, *in modo che, in tutti i punti* $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$, *distanti da* $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ *non più di* ϱ, *e per tutti gli* $y^{(n)}$, *sia*

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) - (p + q y^{(n)}) > \nu \,|\, y^{(n)} \,|.$$

β). *Se* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *è un integrale quasi-regolare positivo seminormale e se* H *è una classe di curve* $C^{[n]}$, *tutte appartenenti al campo limitato* $A_L^{[n]}$ *e tutte soddisfacenti alla disuguaglianza*

$$I_{C^{[n]}}^{[n]} \leqslant M, \tag{10}$$

con M *numero fisso, le variazioni totali delle derivate d'ordine* $n-1$ *delle funzioni* $y(x)$ *che rappresentano le curve* $C^{[n]}$ *sono tutte inferiori ad un numero fisso (ossia le lunghezze delle curve* $y = \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}$ *restano tutte inferiori ad un numero fisso).*

Le dimostrazioni sono del tutto analoghe a quelle indicate dal TONELLI per $n = 1$ (11).

8. - Quarto teorema d'esistenza.

Supposto: 1°) *che* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$ *sia un integrale quasi-regolare positivo seminormale*; 2°) *che i punti* $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *del campo limitato* $A_L^{[n]}$, *in cui non è verificata la condizione*

$$\lim_{|y^{(n)}| \to \infty} \left| \frac{f(x, y, y', ..., y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty, \tag{7}$$

(11) Vedi L. TONELLI, loc. cit. in (2), n.i 14 e 15.

costituiscano un insieme G giacente, in parte, su un numero finito od un infinità numerabile di ipersuperfici

$$\Gamma_\nu: \quad y^{(n-1)} = \varphi_\nu(x), \qquad a_\nu \leq x \leq b_\nu,$$

con $\varphi_\nu(x)$ funzione assolutamente continua, e, in parte, su iperpiani $y^{(n-1)} = \text{cost.}$, *intersecanti l'asse delle $y^{(n-1)}$ in un insieme di punti di misura nulla, in ogni classe K completa di ordine n di curve $C_L^{[n]}$, esiste il minimo assoluto di $I_{C^{[n]}}^{[n]}$* [12].

Cominciamo a provare che per le curve $C_L^{[n]}$, per le quali è soddisfatta la condizione

(10) $$I_{C^{[n]}}^{[n]} \leq M,$$

con M numero fisso, le corrispondenti derivate $\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}$ sono tutte ugualmente continue. Infatti, in caso contrario, esisterà un numero $\lambda > 0$, tale che, ad ogni intero positivo r, corrisponderanno almeno una funzione $\bar{y}_r(x)$, rappresentante una curva $C_L^{[n]}$, che indicheremo con $\bar{C}_r^{[n]}$, per la quale sia soddisfatta la (10), ed una coppia di punti $x_{r,1}$, $x_{r,2}$ appartenenti all'intervallo dell'asse delle x, in cui è definita la $\bar{C}_r^{[n]}$, e soddisfacenti alle disuguaglianze

$$0 < x_{r,2} - x_{r,1} < \frac{1}{r}, \qquad |\bar{y}_r^{(n-1)}(x_{r,1}) - \bar{y}_r^{(n-1)}(x_{r,2})| > \lambda, \qquad \left(\text{ove } \bar{y}_r^{(n-1)}(x) \equiv \frac{d^{n-1}\bar{y}_r(x)}{dx^{n-1}}\right).$$

Se x_0 è un punto dell'asse delle x, tale che, in ogni suo intorno, cadano sempre punti $x_{r,1}$ di indice comunque grande, potremo sempre supporre, per semplicità, che, per $r \to \infty$, sia

$$x_{r,1} \to x_0, \qquad \bar{y}_r^{(j)}(x_{r,1}) \to y_0^{(j)},$$

$$\left(j = 0, 1, 2, \ldots, n-2\,;\ \bar{y}_r^{(j)}(x) \equiv \frac{d^j\bar{y}_r(x)}{dx^j}, \text{ per } \quad j \neq 0\,;\ \bar{y}_r^{(0)}(x) \equiv \bar{y}_r(x)\right),$$

ed inoltre che $\bar{y}_r^{(n-1)}(x_{r,1})$ e $\bar{y}_r^{(n-1)}(x_{r,2})$ tendano a due limiti $y_{0,1}^{(n-1)}$, $y_{0,2}^{(n-1)}$, e che si abbia, per fissare le idee, $y_{0,1}^{(n-1)} < y_{0,2}^{(n-1)}$; sarà quindi necessariamente $y_{0,2}^{(n-1)} - y_{0,1}^{(n-1)} \geq \lambda$.

Scelti due numeri l_1 e l_2, con $y_{0,1}^{(n-1)} < l_1 < l_2 < y_{0,2}^{(n-1)}$, per r maggiore di un certo $\bar{r}$, sarà

$$\bar{y}_r^{(n-1)}(x_{r,1}) < l_1, \qquad l_2 < \bar{y}_r^{(n-1)}(x_{r,2}).$$

Indichiamo con P_1' e P_2' rispettivamente i due punti $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-2)}, l_i)$, $(i = 1, 2)$ e con P_1^* e P_2^* le loro proiezioni ortogonali sul piano $(x, y^{(n-1)})$.

Siccome i punti dell'insieme G che si trovano sul segmento $P_1'P_2'$ costituiscono un insieme di misura nulla, si può fissare un insieme E' di punti di tale segmento, che sia chiuso, abbia misura $> \frac{l_2 - l_1}{2}$, e sul quale valga sempre la (7).

---

[12] Per $n = 1$, vedi L. TONELLI, loc. cit. in [2], n.° 16.

Fissato un $N > 4M : (l_2 - l_1)$, con considerazioni analoghe a quelle altrove ([13]) fatte dal TONELLI, si prova che, per ogni punto $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ di E', esistono un intorno e un numero p, tali che, in tutto l'intorno (e per punti di $A_L^{[n]}$), sia sempre, se è $|y^{(n)}| \geqq p$,

$$\frac{f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{|y^{(n)}|} > N. \tag{11}$$

Possiamo poi ricoprire l'insieme chiuso E' con un numero finito di intervalli (del segmento $P_1'P_2'$) $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_s'$, non sovrapponentisi, di lunghezza complessiva $> \frac{l_2 - l_1}{2}$, e in modo che, in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A_L^{[n]}$, distanti non più di un certo $\varrho > 0$ da uno qualunque di questi intervalli, la (11) risulti verificata per tutti gli $y^{(n)}$ in modulo non inferiori a un certo $Y^{(n)}$.

Sia $\delta > 0$, $< \varrho$ e $< \frac{l_2 - l_1}{8 Y^{(n)}}$, e si supponga che l'$\bar{r}$ sopra indicato sia anche tale che, per $r > \bar{r}$, sia

$$\sqrt{1 + (n-1)A^2}\, |x_{r,i} - x_0| < \delta, \qquad (i = 1, 2), \tag{12}$$

ove si è indicato con A un numero non inferiore al massimo modulo delle y', $y'', \ldots, y^{(n-1)}$ nei punti di $A_L^{[n]}$.

Si consideri, per $r > \bar{r}$, quell'arco della curva $\bar{C}_r'$, definita da

$$\{ y^{(j)} = \bar{y}_r^{(j)}(x), \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{13}$$

il quale corrisponde al segmento $(x_{r,1}, x_{r,2})$ dell'asse delle x, e si indichi con $\bar{C}'_{r,\Delta}$ quella parte di tale arco, la cui proiezione ortogonale sulla retta $P_1'P_2'$ cade sui segmenti $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_s'$.

Si indichi poi con $\bar{C}_r^*$ la curva proiezione ortogonale della $\bar{C}_r'$ sul piano $(x, y^{(n-1)})$, la quale, in questo piano, è definita da: $y^{(n-1)} = \bar{y}_r^{(n-1)}(x)$, e con $\bar{C}_{r,\Delta}^*$ si indichi la proiezione ortogonale, sullo stesso piano, di $\bar{C}'_{r,\Delta}$, e con $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_s^*$, le proiezioni ortogonali, sulla retta $P_1^*P_2^*$, dei segmenti Δ_i', $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Indicato con $e_{r,1}$ l'insieme di quei punti dell'asse delle x, a cui, per le (13), corrispondono i punti di $\bar{C}'_{r,\Delta}$, nei quali la $\bar{y}_r^{(n)}(x)$ esiste finita ed è, in modulo, $\geqq Y^{(n)}$, e con $e_{r,2}$ l'insieme di quei punti dell'asse delle x, a cui, per le (13), corrispondono tutti i rimanenti punti di $\bar{C}'_{r,\Delta}$, abbiamo, tenuto conto delle (12), per la (11)

$$\int_{e_{r,1}} f(x, \bar{y}_r(x), \bar{y}_r'(x), \ldots, \bar{y}_r^{(n)}(x))dx > N \int_{e_{r,1}} |\bar{y}_r^{(n)}(x)|\, dx \geqq$$
$$\geqq N \left\{ \int_{e_{r,1}+e_{r,2}} |\bar{y}_r^{(n)}(x)|\, dx - Y^{(n)} \int_{e_{r,2}} dx \right\},$$

e siccome la variazione totale della $\bar{y}_r^{(n-1)}(x)$ su $e_{r,1} + e_{r,2}$ è almeno uguale alla

([13]) Vedi L. TONELLI, loc. cit. in ([2]), n.° 11.

somma delle lunghezze dei Δ_i^*, $(i=1, 2,\ldots, s)$, e quindi, poichè Δ_i^* ha lunghezza uguale a Δ_1', $>(l_2-l_1):2$, mentre, d'altra parte, è

$$Y^{(n)}\int_{e_{r,2}} dx < Y^{(n)}(x_{r,2}-x_{r,1}) < 2Y^{(n)}\delta < \frac{l_2-l_1}{4},$$

risulta

$$\int_{e_{r,1}} f(x, \bar{y}_r(x), \bar{y}_r'(x),\ldots, \bar{y}_r^{(n)}(x))dx > N\frac{l_2-l_1}{4}. \tag{14}$$

Dalle (10) e (14) segue, in modo analogo al TONELLI [14], $\frac{N(l_2-l_1)}{4}<M$, contrariamente al modo in cui è stato scelto il numero N, e con ciò risulta provato che, per le curve della classe $C_L^{[n]}$ che soddisfano alla (10), le corrispondenti $\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}$ sono tutte ugualmente continue.

Ciò premesso, scelta in K una successione minimizzante $C_1^{[n]}$, $C_2^{[n]},\ldots$, $C_r^{[n]},\ldots$, tale cioè che si abbia

$$I^{[n]}_{C_r^{[n]}} \leq i+\frac{1}{r}, \tag{15}$$

siccome tali curve appartengono alla classe $C_L^{[n]}$, tenute presenti le considerazioni fatte al n.° 4, possiamo senz'altro affermare che esiste un'altra successione minimizzante, che supporremo la stessa:

$$C_r^{[n]}:\quad y=y_r(x), \qquad\qquad (r=1, 2,\ldots,)$$

la quale converga uniformemente ad una curva $y=y_0(x)$, $(a_0\leq x\leq b_0)$, con $y_0(x)$ assolutamente continua insieme con le sue derivate dei primi $n-2$ ordini, mentre la derivata d'ordine $n-1$ è continua, verso le quali convergano, in modo uniforme, rispettivamente le derivate dei primi $n-1$ ordini delle $y_r(x)$.

Ma per il lemma del n.° 7, β) le lunghezze delle curve

$$y=y_r^{(n-1)}(x) \qquad \left(r=1, 2,\ldots;\ y_r^{(n-1)}(x)\equiv\frac{d^{n-1}y_r(x)}{dx^{n-1}}\right)$$

sono tutte inferiori ad un numero fisso, quindi la curva $y=y_0^{(n-1)}(x)$ è rettificabile, cioè la derivata d'ordine $n-1$ della $y_0(x)$ è anche a variazione limitata (oltrechè continua); vogliamo dimostrare che è pure assolutamente continua.

A tal uopo, come ha fatto il TONELLI, basta provare che, ad ogni insieme di misura nulla sull'asse x, corrisponde, per la $y=y_0^{(n-1)}(x)$, un insieme di valori di $y^{(n-1)}$, la cui misura è pure nulla.

Sia E_x un insieme di punti di misura nulla dell'intervallo (a_0, b_0); la parte di E_x, a cui corrispondono punti $(x, y_0^{(n-1)}(x))$, giacenti sulle curve intersezioni delle ipersuperfici Γ_ν con il piano $(x, y^{(n-1)})$, o sulle rette, intersezioni degli iper-

---

[14] Vedi L. TONELLI, ibidem, p. 424.

piani, indicati nel nostro enunciato, col piano ora indicato, dà (tenuto conto che le funzioni $\varphi_\nu(x)$ sono assolutamente continue) un insieme di valori di $y^{(n-1)}$ di misura nulla.

Rimane da considerare la parte rimanente E_x^* di E_x; osserviamo subito che i punti $(x, y_0(x), y_0'(x),...., y_0^{(n-1)}(x))$, ad essa corrispondenti, soddisfano alla (7). Indicato con $E^*_{y^{(n-1)}}$ l'insieme dei valori di $y_0^{(n-1)}(x)$ corrispondenti a E_x^*, dobbiamo provare che la misura di $E^*_{y^{(n-1)}}$ è nulla. In caso contrario si avrebbe $m(E^*_{y^{(n-1)}})>0$, e siccome l'insieme J' dei punti $(x, y_0(x), y_0'(x),...., y_0^{(n-1)}(x))$, corrispondenti a quelli di E_x^*, ha, per proiezione ortogonale sull'asse delle $y^{(n-1)}$, l'insieme $E^*_{y^{(n-1)}}$, la misura di J', contata sulla curva

$$(16) \qquad \{y^{(j)}=y_0^{(j)}(x), \quad (j=0, 1, 2,...., n-1;\ y_0^{(0)}(x)\equiv y_0(x)),$$

sarebbe $\geqq m(E^*_{y^{(n-1)}})>0$.

Se J'' è un insieme chiuso, contenuto in J', e tale che sia

$$m(J')-m(J'')<\frac{1}{2}\,m(E^*_{y^{(n-1)}}),$$

la sua proiezione ortogonale sull'asse delle $y^{(n-1)}$ è un componente $E^{**}_{y^{(n-1)}}$ di $E^*_{y^{(n-1)}}$, ed è

$$m(E^{**}_{y^{(n-1)}})>0.$$

Procediamo ora in modo analogo a quello precedentemente seguito per provare l'uniforme continuità delle $\dfrac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}$.

Fissato un $N^*>\dfrac{4(|i|+1)}{m(E^{**}_{y^{(n-1)}})}$, si ricopra J'' con un numero finito di archi β_μ' della curva (16), non sovrapponentisi, in modo che, in tutti i punti $(x, y, y',...., y^{(n-1)})$ di $A_L^{[n]}$, distanti non più di un certo $\varrho>0$ da uno qualunque di questi archi, e per tutti gli $y^{(n)}$, il cui modulo sia maggiore di un certo $Y_*^{(n)}$, valga la (11), avendo scelto i β_μ' in modo che sia

$$\sum \beta_\mu'<m(J'')+\varepsilon, \quad \text{con } \varepsilon<\frac{m(E^{**}_{y^{(n-1)}})}{4\,Y^{(n)}}\,;$$

e, indicata con β_μ^* la proiezione di β_μ' sull'asse delle x, sarà $\sum \beta_\mu^*<\varepsilon$.

Di ogni curva

$$C_r':\ \{y^{(j)}=y_r^{(j)}(x),$$

$$\left(j=0, 1, 2,...., n-1;\ y_r^{(j)}(x)\equiv\frac{d^jy_r(x)}{dx^j},\ j\neq 0;\ y_r^{(0)}(x)\equiv y_r(x)\right)$$

si consideri quella parte $\widetilde{C}_r'$ che si proietta ortogonalmente sull'asse delle x negli intervalli β_μ^*. Siccome, per $r\to\infty$, le $y_r^{(n-1)}(x)$ convergono uniformemente alla $y_0^{(n-1)}(x)$, la variazione totale di $y_r^{(n-1)}(x)$ sugli intervalli β_μ^* è, per ogni r maggiore di un certo $\bar{r}$, maggiore della metà della corrispondente variazione totale della $y_0^{(n-1)}(x)$, e quindi $>\frac{1}{2}\,m(E^{**}_{y^{(n-1)}})$.

Indicato con $e^*_{r,1}$ l'insieme dei punti dei $\beta_\mu{}^*$, in cui la $y_r^{(n)}(x)$ esiste finita ed è $|y_r^{(n)}(x)| \geqq Y_*^{(n)}$, tenendo ora conto che, per $r\to\infty$, le curve C_r' convergono uniformemente alla curva (16), in virtù della (11), procedendo in modo analogo a quello seguito per stabilire la (14), abbiamo per $r>\bar{r}$,

$$\int\limits_{e^*_{r,1}} f(x,\, y_r(x),\, y_r'(x),\ldots,\, y_r^{(n)}(x))\, dx > \frac{1}{4}\, N^* m(E^{**}_{y^{(n-1)}}),$$

da cui segue facilmente ([15])

$$\frac{1}{4}\, N^* m(E^{**}_{y^{(n-1)}}) < I^{[n]}_{C_r^{[n]}} \leqq i+1,$$

contrariamente al modo in cui è stato scelto il numero N^*.

Provata in tal modo l'assoluta continuità della derivata $y_0^{(n-1)}(x)$, siccome in virtù della (15) e per il n.° 2, ε) la $f(x,\, y_0(x),\, y_0'(x),\ldots,\, y_0^{(n)}(x))$ è integrabile in (a_0, b_0), la curva $y=y_0(x)$ appartiene alla classe $C_L^{[n]}$ e quindi anche a K. Per il n.° 2, β) e per la (15) tale curva risulta anche minimante per l'integrale $I^{[n]}_{C^{[n]}}$.

Esempio. - Sia $n=2$, e $A_L^{[2]}$ sia il cubo, a lati paralleli agli assi coordinati di vertici opposti (0, 0, 0) e (1, 1, 1).

La funzione

$$f(x,\, y,\, y',\, y'') = (x+y'-1)^2(y'-x^2)^2 y''^2 + \sqrt{1+y''^2},$$

soddisfa alle condizioni del teorema del presente numero.

9. - Quinto teorema di esistenza.

Supposto: 1°) *che* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$ *sia un integrale quasi-regolare positivo*; 2°) *che i punti* $(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})$ *del campo limitato* $A_L^{[n]}$, *in cui non è verificata la* (7), *e neppure la condizione* β) (*del* n.° 6), *costituiscano un insieme G giacente, in parte, su un numero finito od un'infinità numerabile di ipersuperfici*

$$\Gamma_\nu:\quad y^{(n-1)} = \varphi_\nu(x), \qquad a_\nu \leqq x \leqq b_\nu,$$

con $\varphi_\nu(x)$ *funzione assolutamente continua, e, in parte, su iperpiani* $y^{(n-1)}=$ cost., *intersecanti l'asse delle* $y^{(n-1)}$, *in un insieme di punti di misura nulla;* 3°) *che in ciascuno dei punti di G la* $f(x, y, y',\ldots, y^{(n)})$, *come funzione della sola* $y^{(n)}$, *non si riduca ad una funzione lineare; in ogni classe K completa d'ordine n di curve* $C_L^{[n]}$, *esiste il minimo assoluto di* $I^{[n]}_{C^{[n]}}$.

Basta ripetere il ragionamento, fatto dal Tonelli per $n=1$ ([16]), con le modificazioni suggerite da quanto si è detto al n.° 8.

([15]) Vedi L. Tonelli, loc. cit. in ([14]).

([16]) Vedi L. Tonelli, loc. cit. in ([2]), n.° 17.

ESEMPI. - Sia $n=2$, e sia $A_L^{[2]}$ il cubo dello spazio ordinario, a lati paralleli agli assi coordinati, di vertici opposti $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$. Le seguenti funzioni soddisfano alle condizioni del teorema del presente numero, ma non a quelle di alcuno dei precedenti teoremi:

$$f(x, y, y', y'') \equiv x^2 y'^2 y''^4 + (1-y')^2 \sqrt{1+y''^2}$$
$$f(x, y, y', y'') \equiv x^2(y^2+y'^2)y''^4 + (1-\sqrt{y^2+y'^2})^2 \sqrt{1+y''^2}.$$

§ 3. - Esistenza dell'estremo in campi illimitati.

10. - Teorema.

Se: a) scelto comunque un qualsiasi insieme limitato e chiuso $A_1^{[n]}$ *del campo* $A^{[n]}$, *il valore dell'integrale* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$, *relativo ad una qualunque curva* $C^{[n]}$: $y=y(x)$, *per la quale almeno un punto* $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ *appartenga ad* $A_1^{[n]}$, *tende sempre a* $+\infty$, *col tendere all'infinito del massimo della somma* $x^2+y^2(x)+[y'(x)]^2+ .... +[y^{(n-1)}(x)]^2$; *b) sono verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi di esistenza del* § 2; *in ogni classe completa d'ordine n di curve* $C^{[n]}$, *per ognuna delle quali almeno un punto* $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$ *appartenga ad un dato insieme, chiuso e limitato, esiste sempre il minimo* (assoluto) *di* $I_{C^{[n]}}^{[n]}$.

Basta ripetere con poche evidenti varianti la dimostrazione data dal TONELLI per $n=1$ ([17]).

11. - Corollario I.

La condizione a) del teorema del n.° 10 è soddisfatta se: 1°) *esistono due numeri finiti* a^*, b^*, *con* $a^* < b^*$, *in modo che, in tutti i punti di* $A^{[n]}$, *sia* $a^* \leq x \leq b^*$; 2°) *è*

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) \equiv g_1(x, y^{(n)}) - g_2(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{17}$$

ed è possibile determinare un numero $h > b^* - a^*$ *e due funzioni* $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, *definite e continue per* $u \geq 0$, *non decrescenti, con* $\psi_1(u)$ *concava verso l'alto, tali che sia*

$$\psi_1(u) - \psi_2(u) \to +\infty, \quad \text{per } u \to \infty, \tag{18}$$

in modo che risulti in tutti i punti $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *e per tutti i valori di* $y^{(n)}$

$$g_1(x, y^{(n)}) \geq \psi_1(h\,|y^{(n)}|), \qquad g_2(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \leq \psi_2(|y^{(n-1)}|) \quad ([18]). \tag{19}$$

([17]) Vedi L. TONELLI, opera cit. in ([1]), Vol. II, n.° 90 *a*), p. 307.

([18]) Questo corollario fornisce, anche nel caso particolare $n=1$, un'estensione della condizione data dal TONELLI al n.° 90 *d*) (pp. 311-312) del Vol. II dell'opera cit. in ([1]).

Per la dimostrazione non c'è che da ragionare come fa il TONELLI [19] per $n=1$, sostituendo all'uso della disuguaglianza di SCHWARZ quella di JENSEN che dà

$$\int_a^b \psi_1(h\,|\,y^{(n)}(x)\,|)dx \geqslant (b-a)\psi_1\left(\frac{h}{b-a}\int_a^b |\,y^{(n)}(x)\,|\,dx\right) \geqslant$$
$$\geqslant (b-a)\psi_1\left(\frac{h}{b-a}\,[\overline{\overline{y}}^{(n-1)}-\overline{y}^{(n-1)}]\right),$$

ove si sono indicati con $\overline{\overline{y}}^{(n-1)}$ e $\overline{y}^{(n-1)}$ rispettivamente il massimo e il minimo della $y^{(n-1)}(x)$ nei punti della curva $C^{[n]}$: $y=y(x)$, $(a\leqslant x\leqslant b)$, che si considera.

Si terrà poi presente che se $C_0^{[n]}$ è una classe di curve $C^{[n]}$ tali che su ciascuna di esse esista un punto, in cui $(x, y(x), y'(x),\dots, y^{(n-1)}(x))$ appartiene ad un insieme $A_*^{[n]}$ limitato, e se per tutte le curve di $C_0^{[n]}$ è $\operatorname{Max}|y^{(n-1)}|\leqslant R$, tutte le $y, y',\dots, y^{(n-2)}$ per tutte le curve di $C_0^{[n]}$, restano in modulo minori di un certo H, e perciò il $\operatorname{Max}(x^2+y^2+y'^2+\dots+[y^{(n-1)}]^2)$ resta minore di un certo R'.

ESEMPI. - Le funzioni ψ_1 e ψ_2 che figurano nelle (19) possono, in particolare, avere la forma seguente:

$$\psi_1(u)\equiv c_1u^{1+\alpha_1+\alpha_2}-c_2, \qquad \psi_2(u)\equiv c_3u^{1+\alpha_1}+c_4,$$

i c e gli α essendo numeri positivi.

Nelle condizioni del presente numero si trovano le seguenti funzioni:

$$f(x, y, y',\dots, y^{(n)})\equiv[y^{(n)}]^2-y^{(n-1)};$$

(basta prendere: $\psi_1(u)\equiv u^2$, $\psi_2(u)\equiv u^{\frac{3}{2}}+1$);

per $n=2$:

$$f(x, y, y', y'')\equiv(\sqrt{1+y''^2})^{1+\alpha}\lg\sqrt{1+y''^2}-(\sqrt{1+y'^2})^{1+\alpha}, \quad \text{con } \alpha>0;$$

(basta prendere: $\psi_1(u)\equiv\frac{1}{h^{3+\alpha}}(\sqrt{1+u^2})^{1+\alpha}\lg\sqrt{1+u^2}$, $\psi_2(u)\equiv(\sqrt{1+u^2})^{1+\alpha}$).

12. - Corollario II.

La condizione a) del teorema del n.° 10 è soddisfatta se: 1°) *esiste un numero* $c>0$ *tale che in tutti i punti di* $A^{[n]}$ *sia* $-c\leqslant x\leqslant c$; 2°) *esiste un numero* N, *in modo che si abbia* $f(x, y, y',\dots, y^{(n)})\geqslant N$, *in tutti i punti* $(x, y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *e per tutti gli* $y^{(n)}$; 3°) *esiste un numero positivo* λ *e una funzione* $\Phi(y, y',\dots, y^{(n-1)})$ *differenziabile, tale che* $|\Phi|\to\infty$, *quando* $y^2+y'^2+\dots+[y^{(n-1)}]^2\to\infty$, *in modo che, posto:*

$$\varphi_0(y, y',\dots, y^{(n-1)})=\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \varphi_1(\dots)=\frac{\partial\Phi}{\partial y'},\dots, \quad \varphi_{n-1}(\dots)=\frac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}},$$

---

[19] Vedi loc. cit. in [18].

si abbia in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, *tali che* $y^2+y'^2+\ldots+[y^{(n-1)}]^2 \geqslant \lambda^2$,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant |y'\varphi_0(y, y', \ldots, y^{(n-1)})+y''\varphi_1(\ldots)+\ldots+y^{(n)}\varphi_{n-1}(\ldots)|,$$

per tutti gli $y^{(n)}$ *che verificano la disuguaglianza*

$$|y'\varphi_0(y, y', \ldots, y^{(n-1)})+y''\varphi_1(\ldots)+\ldots+y^{(n)}\varphi_{n-1}(\ldots)| \geqslant 1.$$

Per provare l'asserto, basta dimostrare che, preso un numero $M>0$ qualunque, e considerata la classe $K^{(n)}$ delle curve $C^{[n]}$: $y=y(x)$, per ognuna delle quali: I) ogni punto $P[x]\equiv(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ appartiene ad $A^{[n]}$; II) è

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} \leqslant M; \tag{20}$$

III) esiste almeno un punto $P[x]$ appartenente ad un dato insieme limitato e chiuso $A^{[n]}_*$; tutti i punti $P[x]$, relativi ad ogni curva di $K^{(n)}$, giacciono in una parte limitata del campo $A^{[n]}$.

A tal uopo potremo sempre supporre che in tutti i punti di $A^{[n]}_*$ sia $y^2+y'^2+\ldots+[y^{(n-1)}]^2 \leqslant \lambda^2$, (in caso contrario basta prendere per λ^2 il massimo della somma $y^2+y'^2+\ldots+[y^{(n-1)}]^2$ in tutto $A^{[n]}_*$).

Indicato con Λ un numero $>\lambda$, sia $K^{(n)}_0$: $y=y_0(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$ una curva qualunque della classe $K^{(n)}$, per la quale esista almeno un $\bar{x}$ di (a, b) tale che

$$y_0^2(\bar{x})+y_0'^2(\bar{x})+\ldots+[y_0^{(n-1)}(\bar{x})]^2 \geqslant \Lambda.$$

Possiamo allora trovare sempre due valori a', b' di x appartenenti all'intervallo (a, b) e tali che sia

$$\sqrt{y_0^2(a')+y_0'^2(a')+\ldots+[y_0^{(n-1)}(a')]^2}=\lambda,$$
$$\sqrt{y_0^2(b')+y_0'^2(b')+\ldots+[y_0^{(n-1)}(b')]^2}=\Lambda,$$

e che in tutti i punti di (a', b') sia sempre

$$\lambda \leqslant \sqrt{y_0^2(x)+y_0'^2(x)+\ldots+[y_0^{(n-1)}(x)]^2} \leqslant \Lambda.$$

Supposto poi, per fissare le idee, $a'<b'$, abbiamo per 2°) e 3°)

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} f(x, y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n)}(x))dx \geqslant \\ \geqslant \int_{a'}^{b'} |y_0'\varphi_0(y_0(x), y_0'(x), \ldots, y_0^{(n-1)}(x))+y_0''\varphi_1(\ldots)+\ldots+y_0^{(n)}\varphi_{n-1}(\ldots)|dx+ \\ +(N-1)(b'-a'),\end{aligned} \tag{21}$$

ove

$$\int_{a'}^{b'} |y_0'\varphi_0 + y_0''\varphi_1 + \dots + y_0^{(n)}\varphi_{n-1}|\,dx \geqslant \left|\int_{a'}^{b'} (y_0'\varphi_0 + y_0''\varphi_1 + \dots + y_0^{(n)}\varphi_{n-1})dx\right| =$$

$$= \left|\int_{a'}^{b'} \frac{d\Phi(y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n-1)}(x))}{dx}\,dx\right| = |\Phi\{\Lambda\} - \Phi\{\lambda\}|,$$

ove con $\Phi\{\Lambda\}$ si è indicato il valore di $\Phi(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ in un punto in cui è $\sqrt{y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2} = \Lambda$, e quindi $|\Phi\{\Lambda\}| \to \infty$ per $\Lambda \to +\infty$, mentre $\Phi\{\lambda\}$ non può superare un numero fisso.

Pertanto dalla (21) risulta per la (20)

$$M \geqslant |\Phi\{\Lambda\} - \Phi\{\lambda\}| - (|N| + 1)(b - a).$$

Λ non può dunque superare un numero fisso, e per quanto abbiamo sopra osservato il nostro asserto è con ciò provato.

13. - Primi casi particolari del corollario II.

Un caso particolare del corollario II da segnalare è quello in cui Φ sia funzione della $\sqrt{y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2}$. In tal caso la condizione 3°) può assumere una delle due seguenti forme:

$3^0_{1,a}$). *Esista un numero positivo λ e una funzione $\psi(u)$, definita per ogni $u \geqslant \lambda$, continua, positiva e tale che $\int_{\lambda}^{+\infty} u\psi(u) = +\infty$, in modo che si abbia, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, per i quali è $y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2 \geqslant \lambda^2$,*

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geqslant \psi(\sqrt{y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2})\,|yy' + y'y'' + \dots + y^{(n-1)}y^{(n)}|,$$

per tutti gli $y^{(n)}$ che verificano la disuguaglianza

$$|yy' + y'y'' + \dots + y^{(n-1)}y^{(n)}| \geqslant 1 : \psi(\sqrt{y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2}).$$

Basta considerare una primitiva qualunque $\Phi(u)$ di $u\psi(u)$ e porre

$$\Phi(\sqrt{y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2})$$

al posto della funzione $\Phi(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ nella condizione 3°) del n.° 12.

$3^0_{1,b}$). *Esista un numero positivo λ e una funzione $\varphi(u)$ definita per $u \geqslant \lambda$, continua, positiva e tale che $\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(u)du \to +\infty$, in modo che si abbia, in tutti i punti $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, per i quali è $y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2 \geqslant \lambda^2$,*

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \geqslant \varphi(\sqrt{y^2 + y'^2 + \dots + [y^{(n-1)}]^2})\sqrt{y'^2 + y''^2 + \dots + [y^{(n)}]^2},$$

per tutti gli $y^{(n)}$ *che verificano la disuguaglianza*

$$\sqrt{y'^2+y''^2+....+[y^{(n)}]^2} \geqq 1 : \varphi(\sqrt{y^2+y'^2+....+[y^{(n-1)}]^2}).$$

Basta considerare una primitiva qualunque $\Phi(u)$ di $\varphi(u)$, porre

$$\Phi(\sqrt{y^2+y'^2+....+[y^{(n-1)}]^2})$$

al posto della funzione $\Phi(y, y',...., y^{(n-1)})$ nella condizione 3°) del n.° 12, ed osservare che è

$$\sqrt{y'^2+y''^2+....+[y^{(n)}]^2} \geqq \frac{|yy'+y'y''+....+y^{(n-1)}y^{(n)}|}{\sqrt{y^2+y'^2+....+[y^{(n-1)}]^2}}.$$

ESEMPIO. - Sia $n=2$;

$$f(x, y, y', y'') \equiv \left(\frac{y^2+y''^2}{1+y^2+y'^2}\right)^{\mu}, \quad \text{con } \mu > \frac{1}{2}.$$

Per $y^2+y'^2 \geqq 1$, abbiamo

$$f \geqq \frac{1}{2^{\mu}}\left(\frac{y^2+y''^2}{y^2+y'^2}\right)^{\mu} \geqq \frac{1}{2^{\mu}}\left[\frac{y^2y'^2+y'^2y''^2}{(y^2+y'^2)^2}\right]^{\mu} \geqq \frac{1}{2^{2\mu}}\left[\frac{(yy'+y'y'')^2}{(y^2+y'^2)^2}\right]^{\mu},$$

e quindi per $|yy'+y'y''| \geqq y^2+y'^2$, siccome $\mu > \frac{1}{2}$, risulta

$$f \geqq \frac{1}{4^{\mu}} \frac{|yy'+y'y''|}{y^2+y'^2}.$$

È dunque verificata la condizione $3^0_{1,a}$) prendendo $\psi(u) \equiv 2^{2\mu}\frac{1}{u^2}$.

14. - Ulteriori casi particolari del corollario II.

a). Abbiamo un altro notevole caso particolare del corollario II, quando Φ sia funzione della sola $y^{(n-1)}$. In tal caso alla condizione 3°) può sostituirsi la seguente:

$3^0_{2,a}$). *Esista un numero positivo* λ *e una funzione* $\varphi(u)$ *definita per* $|u| \geqq \lambda$, *continua, non negativa, e tale che*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(u)du = +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(u)du = +\infty$$

in modo che si abbia, in tutti i punti $(x, y, y',...., y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *con* $|y^{(n-1)}| \geqq \lambda$,

$$f(x, y, y',...., y^{(n)}) \geqq |y^{(n)}| \varphi(y^{(n-1)}),$$

per tutti gli $y^{(n)}$ *che verificano la disuguaglianza* $|y^{(n)}| \geqq 1 : \varphi(y^{(n-1)})$ [20].

[20] Per $n=1$, cfr. il teorema dato, per gli integrali parametrici associati da E. J. MC. SHANE, in *Existence Theorems for ordinary Problems of the Calculus of Variations* (Part II), (Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Vol. III (1934), pp. 287-315), § 11, pp. 302-304.

Basta evidentemente prendere una primitiva qualunque $\Phi(u)$ di $\varphi(u)$ e porre $\Phi(y^{(n-1)})$ al posto $\Phi(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ nella condizione 3°) del n.° 12.

ESEMPIO. - Sia $n=2$;

$$f(x, y, y', y'') \equiv \frac{(x-y)^2 + \sqrt{e^2 + y''^2} \lg \sqrt{e^2 + y''^2}}{\sqrt{e^2 + y'^2} \lg \sqrt{e^2 + y'^2}} \cdot \frac{1}{\lg \lg \sqrt{e^2 + y'^2}}.$$

Si prenda

$$\varphi(u) \equiv \frac{1}{2^2 \sqrt{2}} \frac{1}{|u| \lg |u|} \cdot \frac{1}{\lg \lg |u|},$$

e si osservi che per $|y'| \geqslant e^2$ risulta

$$f(x, y, y', y'') \geqslant |y''| \varphi(y').$$

β). Un caso anche più particolare e di frequente applicazione si ha quando la funzione che figura nella condizione $3^0_{2,\alpha}$) ha la forma $\varphi(u) \equiv \frac{a}{u}$. In tal caso la condizione $3^0_{2,\alpha}$) può mettersi sotto la seguente forma più semplice:

$3^0_{2,\beta}$). *Esistono due numeri positivi λ, a, in modo che in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ del campo $A^{[n]}$, per i quali è $|y^{(n-1)}| \geqslant \lambda$, risulti*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant a \left| \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} \right|,$$

per tutti gli $y^{(n)}$ che verificano la disuguaglianza

$$|y^{(n)}| \geqslant \frac{|y^{(n-1)}|}{a}.$$

ESEMPI.

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv \frac{[y^{(n)}]^2}{1 + [y^{(n-1)}]^2};$$

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv \frac{|y^{(n)}|^\mu}{|y^{(n-1)}|^\nu}, \quad \text{con } \mu > 1, \ \mu \geqslant \nu \geqslant 1;$$

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \equiv e^{[y^{(n-1)} y^{(n)}]^2} [y^{(n)}]^2 \quad (^{21}).$$

γ). Più particolarmente ancora, alla condizione $3^0_{2,\beta}$) può sostituirsi la seguente:

(21) È da rilevare che questa funzione non rientra nei casi considerati da H. O. HIRSCHFELD (loc. cit. in (4), p. 99), perchè non soddisfa all'ipotesi IV di tale Autore, mentre soddisfa al teorema dato al n.° 10. È un integrale regolare; ed è evidentemente $\left| \frac{f}{y^{(n)}} \right| \to \infty$, per $|y^{(n)}| \to \infty$, quindi sono soddisfatte le condizioni del teorema del n.° 5. Inoltre sono soddisfatte le condizioni del n.° 12 e in particolare la 3°) nella forma $3^0_{2,\beta}$), perchè per $|y^{(n-1)}| \geqslant 1$ è

$$|f| \equiv \left| \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} \right| |y^{(n-1)} y^{(n)}| e^{[y^{(n-1)} y^{(n)}]^2} \geqslant \left| \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} \right|,$$

per tutti gli $|y^{(n)}| \geqslant |y^{(n-1)}|$, essendo (per tali valori di $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$) $|y^{(n-1)} y^{(n)}| \geqslant 1$.

$3^0_{2,\gamma}$). *Esistono due numeri positivi* M_1, M_2, *un numero* $\sigma \geqslant 0$, *ed una funzione* $g(u)$ *continua e maggiore di zero per ogni* $|u| \geqslant 1$, *e soddisfacente alla condizione*

$$|u|^{1+\sigma} g(u) \rightarrow \infty, \tag{22}$$

per $|u| \rightarrow \infty$, *in modo che si abbia*

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant |y^{(n)}|^{1+\sigma} g(y^{(n-1)})$$

in tutti i punti $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *di* $A^{[n]}$ *tali che* $|y^{(n-1)}| \geqslant M_1$ *e per ogni* $|y^{(n)}| \geqslant M_2$ [22].

Infatti per la (22) può determinarsi un $M' \geqslant M_1$ in modo che, per ogni $|y^{(n-1)}| \geqslant M'$, sia

$$g(y^{(n-1)}) \geqslant 1 : |y^{(n-1)}|^{1+\sigma},$$

e quindi per ogni $|y^{(n-1)}|$ non inferiore al maggiore dei due numeri M' e M_2 abbiamo

$$f \geqslant \left| \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} \right|^{1+\sigma} \geqslant \left| \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}} \right|,$$

per $|y^{(n)}| \geqslant |y^{(n-1)}|$, ossia la condizione $3^0_{2,\beta}$) con $\alpha = 1$.

---

[22] Per $n = 1$, vedi L. TONELLI, opera cit. in [1], Vol. II, n.° 90 *b*), pp. 308-309.