

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

BASILIO MANIÀ

## **Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 5, n° 2*  
(1936), p. 89-126

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1936\\_2\\_5\\_2\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_2_89_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# PROPRIETÀ DELLE ESTREMANTI NEI PROBLEMI DI LAGRANGE <sup>(1)</sup>

di BASILIO MANIÀ (Pisa).

In alcune note e memorie precedenti ho dimostrato dei teoremi di esistenza per le estremanti di una notevole classe di problemi di MAYER, di LAGRANGE e di BOLZA <sup>(2)</sup>, e in una recente memoria degli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa » <sup>(3)</sup> ho stabilito, per i problemi di MAYER relativi a un'equazione differenziale della forma

$$(1) \quad u' = F(x, y, x', y', u)$$

o

$$(1') \quad u' = f(x, y, y', u),$$

delle equazioni analoghe alle equazioni di EULERO-LAGRANGE a cui le estremanti debbono soddisfare. Nella deduzione di tali equazioni non ho fatto, sulla continuità e sulla derivabilità delle estremanti, nessuna ipotesi che non risulti già verificata in base ai teoremi di esistenza da me dimostrati, cosicchè le equazioni stabilite per le estremanti si collegano senza lacune ai teoremi di esistenza.

Nella presente memoria mi propongo di ottenere un risultato analogo per i

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa.

<sup>(2)</sup> *Esistenza dell'estremo assoluto in un classico problema di Mayer*, Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie II, Vol. II (1933), pp. 343-354. — *Sul problema di Mayer*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, Serie VI, Vol. XVIII (1933), pp. 358-365. — *Sui problemi di Lagrange e di Mayer*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, T. LVIII (1934), pp. 285-310. — *Sulla curva di massima velocità finale*, Ann. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie II, Vol. III (1934), pp. 317-336. — *Sopra una classe di problemi di Mayer considerati come limiti di ordinari problemi di minimo*, Rend. del Sem. Mat. della R. Univ. di Padova, Vol. V (1934), pp. 98-121. — *Sopra alcuni problemi condizionati del Calcolo delle Variazioni*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, Serie VI, Vol. XXI (1935), pp. 426-432.

<sup>(3)</sup> *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer*, loc. cit., Serie II, Vol. IV (1935), pp. 107-131.



CAPITOLO I.

I problemi in forma parametrica.

1. - *Premesse.* — Indicheremo con  $A$  un campo del piano  $(x, y)$ , con  $\Delta$  un intervallo (finito o infinito) dell'asse reale  $u$ , con  $F(x, y, x', y', u)$  e  $G(x, y, x', y', u)$  due funzioni finite e continue, insieme con le loro derivate parziali dei primi due ordini rispetto a  $x'$  e  $y'$ , e insieme con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x, y, u$ , per  $(x, y)$  appartenente ad  $A$ ,  $u$  appartenente a  $\Delta$ , e  $x', y'$  numeri finiti qualunque non entrambi nulli. Di più supporremo che le funzioni  $F(x, y, x', y', u)$  e  $G(x, y, x', y', u)$  sieno positivamente omogenee di grado 1, rispetto a  $x'$  e a  $y'$ , cioè sieno tali che, per ogni punto  $(x, y, x', y', u)$  del loro insieme di definizione e per ogni numero  $k > 0$ , si abbia

$$F(x, y, kx', ky', u) = kF(x, y, x', y', u)$$

e

$$G(x, y, kx', ky', u) = kG(x, y, x', y', u).$$

Chiameremo *curve ordinarie* le curve continue e rettificabili

$$\mathcal{C}: \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L) \quad (5),$$

appartenenti al campo  $A$ , per le quali l'equazione differenziale

$$(3) \quad u' = F[x(s), y(s), x'(s), y'(s), u]$$

ammette in quasi-tutto l'intervallo  $(0, L)$  una soluzione  $u(s)$ , assolutamente continua in tutto  $(0, L)$ , con  $u(0) = u_0$ , essendo  $u_0$  un valore fissato nell'intervallo  $\Delta$ , e  $u(s)$  sempre appartenente a  $\Delta$ .

Per ogni curva ordinaria  $\mathcal{C}$  risulta definito l'integrale

$$(4) \quad \mathfrak{J}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} G(x, y, x', y', u) ds,$$

nel quale  $u$  è la soluzione della (3) che abbiamo definita sopra.

L'equazione differenziale (3), con la condizione  $u(0) = u_0$ , è equivalente all'equazione integrale

$$(5) \quad u = u_0 + \int_0^s F(x, y, x', y', u) ds,$$

---

(5) Indichiamo con  $s$  la lunghezza dell'arco della curva  $\mathcal{C}$  e con  $L$  la lunghezza dell'intera curva.

e se

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad (a \leq t \leq b),$$

è una qualunque rappresentazione parametrica della curva  $\mathcal{C}$  con  $X(t)$  e  $Y(t)$  funzioni assolutamente continue nell'intervallo  $(a, b)$ , la (5) è equivalente all'equazione

$$(5^*) \quad U = u_0 + \int_a^t F(X, Y, X', Y', U) dt,$$

dove  $U(t) = u(s(t))$ , e si ha

$$(4^*) \quad \mathfrak{J}_{\mathcal{C}} = \int_a^b G(X, Y, X', Y', U) dt.$$

Se  $\mathcal{K}$  è una classe di curve ordinarie, e se  $\mathcal{C}$  è una curva di  $\mathcal{K}$ , un punto  $P$  di  $\mathcal{C}$  si dice *punto di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $\mathcal{K}$* , se è possibile determinare un numero positivo  $\varrho$  tale che, indicato con  $(P, \varrho)$  il cerchio di centro  $P$  e raggio  $\varrho$ , ogni curva ordinaria, ottenuta da  $\mathcal{C}$  sostituendo un arco di essa appartenente a  $(P, \varrho)$  con un arco avente gli stessi punti terminali e pure appartenente a  $(P, \varrho)$ , sia ancora una curva della classe  $\mathcal{K}$ .

## 2. - La condizione generalizzata di Eulero per le curve estremanti. — Se

$$\mathcal{C}_0: \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

è una curva minimante (o massimante) per l'integrale  $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$  in una classe  $\mathcal{K}$  di curve ordinarie;

se la soluzione  $u_0(s)$  dell'equazione (5) corrispondente alla curva  $\mathcal{C}_0$  ha valori sempre interni all'intervallo  $\Delta$ ;

allora ogni arco  $\alpha_0$  di  $\mathcal{C}_0$  i cui punti, esclusi al più i punti terminali, sieno tutti interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $\mathcal{K}$ , soddisfa alle due equazioni

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^s [G_x + \lambda F_x + (G_u + \lambda F_u + \lambda') F_{x'}] ds - \frac{d}{ds} \int_0^s (G_{x'} + \lambda F_{x'}) ds = c_1 \quad (\text{cost.}) \\ \int_0^s [G_y + \lambda F_y + (G_u + \lambda F_u + \lambda') F_{y'}] ds - \frac{d}{ds} \int_0^s (G_{y'} + \lambda F_{y'}) ds = c_2 \quad (\text{cost.}), \quad (6) \end{array} \right.$$

con

$$(6) \quad \lambda(s) = \int_s^{L_0} G_u[x_0(\sigma), y_0(\sigma), x_0'(\sigma), y_0'(\sigma), u_0(\sigma)] \left( \exp \int_s^\sigma F_u[x_0(\tau), \dots] d\tau \right) d\sigma.$$

(6) Gli argomenti delle funzioni integrande sono  $x_0(s)$ ,  $y_0(s)$ ,  $x_0'(s)$ ,  $y_0'(s)$ ,  $u_0(s)$ .

Supponiamo dapprima che l'arco  $\alpha_0$  sia tutto, i punti terminali inclusi, di punti interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $\mathfrak{K}$ . Indichiamo con  $(s', s'')$  l'intervallo parziale di  $(0, L_0)$  che corrisponde all'arco  $\alpha_0$ , e dividiamolo in  $n$  parti uguali mediante i punti

$$s_0 = s', \quad s_1, \dots, \quad s_n = s''.$$

Fissato un numero intero positivo  $i < n$ , definiamo sull'intervallo  $(0, L_0)$  una funzione  $\varphi_i'(s)$  ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_i'(s) &= 1, & \text{per } s_{i-1} \leq s \leq s_i, \\ \varphi_i'(s) &= -1, & \text{per } s_i < s \leq s_{i+1}, \\ \varphi_i'(s) &= 0, & \text{per tutti gli altri valori di } s, \end{aligned}$$

e sia

$$\varphi_i(s) = \int_0^s \varphi_i'(s) ds, \quad (0 \leq s \leq L_0).$$

Allora si possono determinare due numeri positivi  $\tilde{n}$  e  $\delta$ , tali che, se è  $n > \tilde{n}$  e  $|\varepsilon| < \delta$ , la curva

$$\mathcal{C}_\varepsilon: \quad x = x_0(s) + \varepsilon \varphi_i(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

sia una curva ordinaria <sup>(7)</sup>.

Indicata con  $u(s, \varepsilon)$  la soluzione dell'equazione (5) corrispondente alla curva  $\mathcal{C}_\varepsilon$ , e posto

$$\mathfrak{J}(\varepsilon) = \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} G(x_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0, x_0' + \varepsilon \varphi_i', y_0', u(s, \varepsilon)) ds,$$

si deve avere

$$(7) \quad \left( \frac{d\mathfrak{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0,$$

perchè  $\mathcal{C}_0$  è una curva estremante per  $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}_0}$ .

Osserviamo ora che è

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} G(x_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0, x_0' + \varepsilon \varphi_i', y_0', u(s, \varepsilon)) ds + \\ &\quad + \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_{i+1}}^{L_0} G(x_0, y_0, x_0', y_0', u(s, \varepsilon)) ds \end{aligned}$$

<sup>(7)</sup> Vedi B. MANIÀ: *Proprietà delle estremanti ecc.*, loc. cit., p. 110.

e

$$(9) \quad \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} G(x_0 + \varepsilon\varphi_i, y_0, x_0' + \varepsilon\varphi_i', y_0', u(s, \varepsilon)) ds \right]_{\varepsilon=0} = \\ = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ G_x \varphi_i + G_{x'} \varphi_i' + G_u \left( \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right\} ds,$$

$$(10) \quad \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_{i+1}}^{L_0} G(x_0, y_0, x_0', y_0', u(s, \varepsilon)) ds \right]_{\varepsilon=0} = \int_{s_{i+1}}^{L_0} G_u \left( \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} ds \quad (8).$$

Per valutare le derivate  $\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$  che compaiono in queste due formule, fissiamo un intorno  $(\varrho)$  di  $\mathcal{C}_0$  con  $\varrho \leq 1$ , e un intervallo  $\Delta'$  finito contenuto in  $\Delta$  e contenente tutti i valori di  $u_0(s)$  nel suo interno. Dopo di ciò indichiamo con  $M$  un numero maggiore di 1 e maggiore del massimo valore assoluto di  $F$ , di  $G$ , e delle loro derivate che abbiamo ammesso esistenti, per  $(x, y)$  appartenente all'intorno  $(\varrho)$  di  $\mathcal{C}_0$ ,  $x'^2 + y'^2 = 1$ ,  $u$  appartenente all'intervallo  $\Delta'$ .

Allora vale la seguente disuguaglianza

$$\left| \left( \frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right| \leq \frac{16M^2 L_0^2 e^2}{n^2}, \quad (s_{i-1} \leq s \leq s_{i+1}) \quad (9),$$

da cui segue

$$(11) \quad \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} G(x_0 + \varepsilon\varphi_i, y_0, x_0' + \varepsilon\varphi_i', y_0', u(s, \varepsilon)) ds \right]_{\varepsilon=0} = \\ = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ G_x \varphi_i + G_{x'} \varphi_i' + G_u \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \frac{32\vartheta_i M^3 L_0^3 e^2}{n^3},$$

con  $|\vartheta_i| < 1$ .

Per calcolare la derivata  $\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$  nell'intervallo  $(s_{i+1}, L_0)$  osserviamo che in tale intervallo si ha

$$u(s, \varepsilon) = u(s_{i+1}, \varepsilon) + \int_{s_{i+1}}^s F(x_0, y_0, x_0', y_0', u(s, \varepsilon)) ds,$$

(8) Gli argomenti delle funzioni integrande nei secondi membri delle formule (9) e (10) sono  $x_0(s)$ ,  $y_0(s)$ ,  $x_0'(s)$ ,  $y_0'(s)$ ,  $u_0(s)$ .

(9) Vedi B. MANIÀ: *Proprietà delle estremanti*, *ecc.*, loc. cit. p. 111.

e quindi <sup>(10)</sup>

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial u(s_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \int_{s_{i+1}}^s F_u \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} ds.$$

Derivando rispetto a  $s$  e applicando la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari omogenee si ottiene l'equazione

$$(12) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial u(s_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \left(\exp \int_{s_{i+1}}^s F_u ds\right);$$

e ricordando che è

$$\left(\frac{\partial u(s_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_u \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \frac{32 \vartheta_i' M^3 L_0^3 e^2}{n^3} \quad (11),$$

con  $|\vartheta_i'| < 1$ , dalla (12) segue

$$(12^*) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right) = \left(\exp \int_{s_{i+1}}^s F_u ds\right) \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_u \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \frac{32 \vartheta_i^* M^3 L_0^3 e^{2+ML_0}}{n^3},$$

con  $|\vartheta_i^*| < 1$ .

Dalla (12\*) e dalla (10) si ha, infine, ponendo

$$(13) \quad \lambda(s) = \int_s^{L_0} G_u \left(\exp \int_s^\sigma F_u d\tau\right) d\sigma,$$

l'equazione

$$(14) \quad \left[\frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_{i+1}}^{L_0} G(x_0, y_0, x_0', y_0', u(s, \varepsilon)) ds\right]_{\varepsilon=0} = \\ = \lambda(s_{i+1}) \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_u \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \frac{32 \vartheta_i'' M^4 L_0^4 e^{2+ML_0}}{n^3},$$

con  $|\vartheta_i''| < 1$ .

Se poniamo, per brevità di scrittura,

$$H = 32 M^3 L_0^3 e^2 (1 + M L_0 e^{M L_0}),$$

<sup>(10)</sup> Vedi CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen* pp. 665-688.

<sup>(11)</sup> Vedi B. MANIÀ: *Proprietà delle estremanti, ecc.*, loc. cit. p. 111.



dalle formule (7), (8), (11) e (14) segue la formula

$$(15) \quad \left( \frac{d\mathfrak{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ G_x \varphi_i + G_{x'} \varphi_i' + G_u \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \\ + \lambda(s_{i+1}) \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_u \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \frac{\theta_i H}{n^3} = 0,$$

con  $|\theta_i| < 1$ .

Possiamo semplificare la (15) osservando che è

$$\left| \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ G_u \int_{s_{i-1}}^s F_x \varphi_i ds \right\} ds \right| < \frac{8M^2 L_0^2}{n^3}$$

e

$$\left| \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^s F_x \varphi_i ds \right\} ds \right| < \frac{8M^2 L_0^2}{n^3},$$

e quindi

$$(15^*) \quad \left( \frac{d\mathfrak{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ G_x \varphi_i + G_{x'} \varphi_i' + G_u \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} \varphi_i' ds \right\} ds + \\ + \lambda(s_{i+1}) \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_u \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} \varphi_i' ds \right\} ds + \frac{\theta_i' \bar{H}}{n^3} = 0,$$

essendo  $|\theta_i'| < 1$  e  $\bar{H}$  una costante dipendente soltanto da  $M$  e da  $L_0$ .

Se nella (15\*) trasformiamo gli integrali  $\int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} G_x \varphi_i ds$  e  $\int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} F_x \varphi_i ds$ , e ricordiamo la definizione di  $\varphi_i'$ , otteniamo l'equazione

$$(16) \quad \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( G_{x'} - \int_{s_{i-1}}^s G_x ds \right) ds - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( G_{x'} - \int_{s_i}^s G_x ds \right) ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} G_x ds + \\ + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( G_u \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} ds \right) ds - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( G_u \int_{s_i}^s F_{x'} ds \right) ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} G_u ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_{x'} ds + \\ + \lambda(s_i) \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( F_{x'} - \int_{s_{i-1}}^s F_x ds \right) ds - \lambda(s_{i+1}) \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( F_{x'} - \int_{s_i}^s F_x ds \right) ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda(s_{i+1}) \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds + \lambda(s_i) \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( F_u \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} ds \right) ds - \lambda(s_{i+1}) \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left( F_u \int_{s_i}^s F_{x'} ds \right) ds + \\
 & + \lambda(s_{i+1}) \int_{s_i}^{s_{i+1}} F_u ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_{x'} ds + \\
 & + [\lambda(s_{i+1}) - \lambda(s_i)] \left[ \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( F_{x'} - \int_{s_{i-1}}^s F_x ds \right) ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( F_u \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} ds \right) ds \right] + \frac{\theta'_i \bar{H}}{n^3} = 0.
 \end{aligned}$$

Se nell'equazione ora stabilita facciamo  $i=1, 2, \dots, n-1$ , e sommiamo, risulta :

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \int_{s_0}^{s_1} \left( G_{x'} - \int_{s_0}^s G_x ds \right) ds - \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left( G_{x'} - \int_{s_{n-1}}^s G_x ds \right) ds + \\
 & + \int_{s_0}^{s_1} \left( G_u \int_{s_0}^s F_{x'} ds \right) ds - \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left( G_u \int_{s_{n-1}}^s F_{x'} ds \right) ds + \\
 & + \lambda(s_0) \int_{s_0}^{s_1} \left( F_{x'} - \int_{s_0}^s F_x ds \right) ds - \lambda(s_n) \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left( F_{x'} - \int_{s_{n-1}}^s F_x ds \right) ds + \\
 & + \lambda(s_0) \int_{s_0}^{s_1} \left( F_u \int_{s_0}^s F_{x'} ds \right) ds - \lambda(s_n) \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left( F_u \int_{s_{n-1}}^s F_{x'} ds \right) ds + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} G_x ds + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} G_u ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_{x'} ds + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda(s_{i+1}) \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda(s_{i+1}) \int_{s_i}^{s_{i+1}} F_u ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_{x'} ds + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} [\lambda(s_{i+1}) - \lambda(s_i)] \left[ \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( F_{x'} - \int_{s_{i-1}}^s F_x ds \right) ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left( F_u \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} ds \right) ds \right] + \frac{\theta' \bar{H}}{n^2} = 0
 \end{aligned}$$

con  $|\theta'| < 1$ ; e se dividiamo questa equazione per la lunghezza  $\frac{s'' - s'}{n}$  degli intervalli  $(s_{i-1}, s_i)$  e passiamo al limite per  $n$  tendente all'infinito, osservando che è <sup>(12)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{s'' - s'} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} G_x ds = \int_{s'}^{s''} G_x ds,$$

---

<sup>(12)</sup> Vedi B. MANIÀ: *Una proprietà dell'integrale di Lebesgue*. Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Vol. 57, 1934.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{s''-s'} \int_{s_i}^{s_{i+1}} G_u ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds &= \int_{s'}^{s''} G_u F_x ds, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{s''-s'} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \lambda(s_{i+1}) ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds &= \int_{s'}^{s''} \lambda F_x ds, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{s''-s'} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \lambda(s_{i+1}) F_u ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds &= \int_{s'}^{s''} \lambda F_u F_x ds, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{s''-s'} [\lambda(s_{i+1}) - \lambda(s_i)] \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds &= \int_{s'}^{s''} \lambda' F_x ds, \end{aligned}$$

otteniamo

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s''-s'} \left\{ \int_{s_0}^{s_1} G_x ds - \int_{s_{n-1}}^{s_n} G_x ds + \lambda(s_0) \int_{s_0}^{s_1} F_x ds - \lambda(s_n) \int_{s_{n-1}}^{s_n} F_x ds \right\} + \\ + \int_{s'}^{s''} [G_x + \lambda F_x + (G_u + \lambda F_u + \lambda') F_x] ds = 0.$$

Se nei punti  $s'$  ed  $s''$  esistono le derivate rispetto ad  $s$  di  $\int_0^s F_x ds$  e di  $\int_0^s G_x ds$ , e sono rispettivamente uguali a  $F_x'$  e  $G_x'$ , dalla (18) segue

$$(19) \quad \int_0^{s'} [G_x + \lambda F_x + (G_u + \lambda F_u + \lambda') F_x] ds - (G_x' + \lambda F_x')_{s=s'} = \\ = \int_0^{s''} [G_x + \lambda F_x + (G_u + \lambda F_u + \lambda') F_x] ds - (G_x' + \lambda F_x')_{s=s''}.$$

Allora, basta fissare un punto dell'arco  $a_0$  nel quale  $\int_0^s F_x ds$  e  $\int_0^s G_x ds$  hanno per derivata rispettivamente  $F_x'$  e  $G_x'$ , e considerare un punto variabile di  $a_0$  nel quale questa condizione è pure soddisfatta. Per i due punti così scelti vale la (19), e quindi sopra quasi tutto l'arco  $a_0$  si ha

$$\int_0^s [G_x + \lambda F_x + (G_u + \lambda F_u + \lambda') F_x] ds - (G_x' + \lambda F_x') = c_1 \quad (\text{cost.}).$$

Integrando i due membri di questa uguaglianza nell'intervallo  $(s', s)$  con  $s' \leq s \leq s''$ , e poi derivando rispetto a  $s$ , si ottiene

$$(20) \quad \int_0^s [G_x + \lambda F_x + (G_u + \lambda F_u + \lambda') F_x] ds - \frac{d}{ds} \int_0^s (G_x' + \lambda F_x') ds = c_1 \quad (\text{cost.});$$

e questa è la prima delle due equazioni (A) che volevamo stabilire. In modo analogo si ottiene la seconda.

Ora possiamo abbandonare l'ipotesi aggiunta al principio della dimostrazione che anche i punti terminali dell'arco  $a_0$  fossero interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $\mathcal{K}$ . Infatti, se abbandoniamo tale ipotesi, possiamo affermare, per quanto precede, che le (A) sono soddisfatte sopra ogni arco completamente interno ad  $a_0$ , e quindi anche sopra tutto l'arco  $a_0$ .

*Osservazione.* - Le (A) si possono considerare come una generalizzazione delle equazioni di Eulero per le curve estremanti dei problemi liberi in forma parametrica del calcolo delle variazioni.

Infatti, se supponiamo che  $F$  e  $G$  non dipendano da  $u$  e che sia  $F \equiv G$ , il problema di LAGRANGE da noi considerato si riduce al problema libero di calcolo delle variazioni relativo all'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} F(x, y, x', y') ds,$$

e le (A) diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^s F_x ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{x'} ds = c_1 \text{ (cost.)}, \\ \int_0^s F_y ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{y'} ds = c_2 \text{ (cost.)}; \end{array} \right.$$

cioè le equazioni di EULERO per il problema libero indicato.

**3. - I problemi quasi regolari normali.** — Essendo  $\mu$  una costante arbitraria, poniamo

$$H(x, y, x', y', u; \mu) = G(x, y, x', y', u) + \mu F(x, y, x', y', u);$$

allora, nelle ipotesi fatte sopra l'esistenza delle derivate parziali di  $F$  e di  $G$ , e sulla omogeneità rispetto a  $x'$  e  $y'$  di queste due funzioni, si verifica facilmente che si ha sempre

$$(21) \quad \frac{H_{x'x'}}{y'^2} = - \frac{H_{x'y'}}{x'y'} = \frac{H_{y'y'}}{y'^2}.$$

Indicato con  $H_1(x, y, x', y', u; \mu)$  il valore comune dei tre rapporti (21), si dice che il problema di LAGRANGE assegnato è *quasi regolare positivo* [*negativo*] *normale* quando si verifica uno dei due casi seguenti:

1°) è sempre  $G_u \geq 0$ , e per ogni  $\mu \geq 0$ , la funzione  $H_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u; \mu)$  è sempre non negativa [non positiva], e, fissati  $x, y, u$ , i valori di  $\theta$  per i quali si annulla non riempiono mai tutto un intervallo;

2°) è sempre  $G_u \leq 0$ , e per ogni  $\mu \leq 0$ , la funzione  $H_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u; \mu)$  soddisfa alle condizioni ora indicate.

Posta questa definizione, si può dimostrare, come nel caso dei problemi liberi del calcolo delle variazioni <sup>(13)</sup>, il seguente teorema:

*Se il problema di Lagrange considerato nel teorema del numero precedente è quasi regolare normale, l'arco  $\alpha_0$  è di classe 1, e soddisfa alle equazioni*

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} H_{x'} = H_x + H_u F_{x'} + \lambda' F_{x'} \\ \frac{d}{ds} H_{y'} = H_y + H_u F_{y'} + \lambda' F_{y'} \end{cases}$$

con  $\lambda(s)$  data dalla (6) e  $H = G + \lambda F$  <sup>(14)</sup>.

**4. - I problemi regolari.** — Ammettiamo ora che la  $F$  e la  $G$  abbiano finite e continue tutte le derivate parziali dei primi due ordini nel loro insieme di definizione; allora possiamo dimostrare che se l'arco  $\alpha_0$  considerato nel teorema del n.º 2 è di classe 1 e se in un punto di tale arco è  $H_1(x_0, y_0, x_0', y_0', u_0, \lambda) \neq 0$ , in tale punto esistono finite le derivate seconde  $x_0''$ ,  $y_0''$ .

Per provare l'asserto cominciamo con l'osservare che, essendo l'arco  $\alpha_0$  di classe 1, le (A) si possono derivare due volte rispetto a  $s$ , e quindi sopra  $\alpha_0$  sono soddisfatte le (B). Essendo poi, con notazioni evidenti,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} H_{x'} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[G_{x'}(s+h) + \lambda(s+h)F_{x'}(s+h)] - [G_{x'}(s) + \lambda(s)F_{x'}(s)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[G_{x'}(s+h) + \lambda(s)F_{x'}(s+h)] - [G_{x'}(s) + \lambda(s)F_{x'}(s)]}{h} + \lambda'(s)F_{x'}(s), \end{aligned}$$

dalla prima delle (B) segue

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[G_{x'}(s+h) + \lambda(s)F_{x'}(s+h)] - [G_{x'}(s) + \lambda(s)F_{x'}(s)]}{h} = H_x + H_u F_{x'}.$$

Posto  $x_0'(s) = \cos \theta$ ,  $y_0'(s) = \sin \theta$ , e applicando il teorema della media per le funzioni di più variabili, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (\bar{G}_{x'x'} + \lambda \bar{F}_{x'x'}) \frac{\delta x_0}{h} + (\bar{G}_{x'y'} + \lambda \bar{F}_{x'y'}) \frac{\delta y_0}{h} + \right. \\ \left. + (\bar{G}_{x'u} + \lambda \bar{F}_{x'u}) \frac{\delta u}{h} + (\bar{G}_{x'\theta} + \lambda \bar{F}_{x'\theta}) \frac{\delta \theta}{h} \right\} = H_x + H_u F_{x'}; \end{aligned}$$

e poichè è

$$G_{x'\theta} + \lambda F_{x'\theta} = -(G_1 + \lambda F_1) \sin \theta = -H_1(s) \sin \theta,$$

<sup>(13)</sup> Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Vol. II, pp. 101 e segg.; il ragionamento fatto ivi si può ripetere tale e quale nel nostro caso.

<sup>(14)</sup> Gli argomenti di  $F$  e di  $G$  sono  $x_0(s)$ ,  $y_0(s)$ ,  $x_0'(s)$ ,  $y_0'(s)$ ,  $u_0(s)$ .

e nel punto indicato nell'enunciato è  $H_1(s) \neq 0$ , si ha, in quel punto,

$$(22) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left( -\operatorname{sen} \theta \frac{\delta\theta}{h} \right) = \frac{H_x + H_u F_{x'} - H_{x'x} x_0' - H_{x'y} y_0' - H_{x'u} F}{H_1}.$$

Analogamente dalla seconda delle (B) si deduce l'equazione

$$(23) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos \theta \frac{\delta\theta}{h} \right) = \frac{H_y + H_u F_{y'} - H_{y'x} x_0' - H_{y'y} y_0' - H_{y'u} F}{H_1}.$$

Dalla (22) e dalla (23), si deduce subito l'esistenza del

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta\theta}{h},$$

e quindi l'esistenza delle derivate seconde  $x_0''$ ,  $y_0''$  nel punto di  $\alpha_0$  sopra indicato.

Di più, essendo

$$x_0'' = \frac{dx_0'}{ds} = \frac{dx_0'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{ds}$$

e

$$y_0'' = \frac{dy_0'}{ds} = \frac{dy_0'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \cos \theta \frac{d\theta}{ds},$$

dalle (22) e (23) seguono le equazioni

$$\begin{aligned} x_0'' &= \frac{H_x + H_u F_{x'} - H_{x'x} x_0' - H_{x'y} y_0' - H_{x'u} F}{H_1}, \\ y_0'' &= \frac{H_y + H_u F_{y'} - H_{y'x} x_0' - H_{y'y} y_0' - H_{y'u} F}{H_1}, \end{aligned}$$

che si possono semplificare un poco valendosi delle identità

$$H_x = x' H_{xx'} + y' H_{xy'},$$

$$H_y = x' H_{yx'} + y' H_{yy'},$$

e allora diventano

$$(C) \quad \begin{cases} x_0'' = \frac{y_0' (H_{xy'} - H_{yx'}) + H_u F_{x'} - H_{x'u} F}{H_1}, \\ y_0'' = \frac{x_0' (H_{yx'} - H_{xy'}) + H_u F_{y'} - H_{y'u} F}{H_1}. \end{cases}$$

Così abbiamo dimostrato l'affermazione fatta al principio del presente numero, la quale generalizza un'osservazione di HILBERT per i problemi liberi del calcolo delle variazioni <sup>(15)</sup>.

<sup>(15)</sup> Vedi, per esempio, L. TONELLI, loc. cit. pp. 96-98.

Se chiamiamo ora *problemi di Lagrange regolari positivi* [*negativi*] quei problemi, del tipo che stiamo studiando, per i quali la funzione

$$H_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u; \mu),$$

considerata nella definizione del numero precedente, invece che non negativa [non positiva] è sempre positiva [negativa], da quanto qui abbiamo dimostrato e dal teorema del numero precedente, si ottiene subito il teorema:

*Se il problema di Lagrange considerato nel teorema del n.º 2 è regolare, l'arco  $\alpha_0$  ivi indicato, è di classe 2, e sopra di esso sono soddisfatte le equazioni (C), con  $\lambda(s)$  data dalla (6) e  $H = G + \lambda F$ .*

Come corollario immediato di questo teorema si ha che se le funzioni  $F$  e  $G$  ammettono finite e continue le derivate parziali dei primi  $n$  ordini in tutto l'insieme di definizione, anche  $x_0(s)$  e  $y_0(s)$  ammettono finite e continue, sopra l'arco  $\alpha_0$ , le derivate dei primi  $n$  ordini.

**5. - Un caso particolare importante.** — Nel caso in cui sia  $F \equiv G$ , si ha

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}} = u(L),$$

e il problema di LAGRANGE relativo all'equazione (3) e all'integrale (4) diventa il problema di MAYER relativo all'equazione (3). In questo caso particolare le equazioni che abbiamo ottenute per l'arco  $\alpha_0$  possono essere semplificate con la eliminazione di  $\lambda$ .

A questo scopo *ammettiamo che sia sempre*

$$F_1 \equiv \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} \geq 0 \quad [\leq 0],$$

e che, comunque si fissino  $x, y, u$ , i valori di  $\theta$  per i quali  $F_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u)$  si annulla non riempiano mai tutto un intervallo. Osserviamo poi che, essendo  $F \equiv G$ , si ha ora, per ogni  $\mu$ ,

$$H_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u; \mu) = (1 + \mu)F_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u),$$

e

$$\lambda(s) = \int_s^{L_0} F_u \left( \exp \int_s^\sigma F_u d\tau \right) d\sigma = \left[ \exp \int_s^\sigma F_u d\tau \right]_{\sigma=s}^{\sigma=L_0} = \exp \int_s^{L_0} F_u ds - 1,$$

e quindi

$$1 + \lambda(s) > 0.$$

Ne viene che in ogni punto di  $\alpha_0$  la funzione di  $\theta$

$$H_1(x_0, y_0, \cos \theta, \sin \theta, u_0; \lambda)$$

è sempre  $\geq 0$  [ $\leq 0$ ] e i valori di  $\theta$  per i quali si annulla non riempiono mai tutto un intervallo.

Di qua, col ragionamento ricordato al n.º 3, segue che l'arco  $\alpha_0$  è di classe 1, e che sopra tale arco sono soddisfatte le (B).

Queste equazioni hanno ora la forma

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(1+\lambda)F_{x'} = (1+\lambda)(F_x + F_u F_{x'}) + \lambda' F_{x'} \\ \frac{d}{ds}(1+\lambda)F_{y'} = (1+\lambda)(F_y + F_u F_{y'}) + \lambda' F_{y'} \end{cases}$$

e poichè  $\lambda(s)$  è derivabile ed è  $(1+\lambda) > 0$ , si ha

$$\begin{cases} (1+\lambda) \frac{d}{ds} F_{x'} = (1+\lambda)(F_x + F_u F_{x'}) \\ (1+\lambda) \frac{d}{ds} F_{y'} = (1+\lambda)(F_y + F_u F_{y'}) \end{cases}$$

e dividendo per  $1+\lambda$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} F_{x'} = F_x + F_u F_{x'} \\ \frac{d}{ds} F_{y'} = F_y + F_u F_{y'} \end{cases}$$

In queste equazioni non compare più il moltiplicatore  $\lambda$ : esse coincidono con quelle già ottenute direttamente per i problemi di MAYER nella mia memoria citata degli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa » <sup>(16)</sup>.

*Osservazione.* - Il ragionamento fatto qui dimostra come in alcuni casi si possa passare dalle equazioni (A) alle equazioni (B) anche senza imporre nessuna condizione alla derivata  $G_u$ . Infatti, affinchè tale passaggio sia possibile, basta che in ogni punto dell'arco  $\alpha_0$  la funzione di  $\theta$

$$H_1(x_0(s), y_0(s), \cos \theta, \sin \theta, u_0(s); \lambda(s))$$

sia di segno costante e i valori di  $\theta$  per i quali si annulla non riempiano mai tutto un intervallo.

**6. - Esempio: il problema della brachistocrona in un mezzo resistente.** — Come esempio di problemi di LAGRANGE ai quali sono applicabili i risultati precedenti consideriamo il problema relativo all'equazione

$$(24) \quad u' = 2gy' - 2R(\sqrt{u})\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

<sup>(16)</sup> B. MANIÀ: *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer*, loc. cit., p. 115.



con  $R(v)$  funzione finita, continua, derivabile, non decrescente sul semiasse reale positivo, ed  $R(0)=0$ , e all'integrale

$$(25) \quad \mathfrak{J}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{u}} ds.$$

Il campo  $A$  coincida col piano  $(x, y)$  e l'intervallo  $\Delta$  col semiasse reale positivo; la classe  $\mathfrak{K}$  sia la totalità delle curve ordinarie congiungenti due punti fissi, e il *valore iniziale*  $u_0$  <sup>(17)</sup> sia positivo.

In queste ipotesi si ha

$$(26) \quad \lambda(s) = - \int_s^{L_0} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{2u^{3/2}} \left( \exp - \int_s^\sigma \frac{R(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} \sqrt{x'^2 + y'^2} d\tau \right) d\sigma \leq 0$$

e

$$H_1 = G_1 + \lambda F_1 = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \left( \frac{1}{\sqrt{u}} - 2\lambda R(\sqrt{u}) \right) > 0.$$

Siccome poi, in ogni intervallo completamente interno a  $\Delta$ , tanto la  $F$  che la  $G$  hanno finite e continue le derivate parziali dei primi due ordini, eccettuata al più la  $F_{uu}$  che non compare nelle dimostrazioni dei teoremi precedenti, sopra ogni arco  $\alpha_0$  di un estremante  $\mathcal{C}_0$  del problema ora considerato sono soddisfatte le equazioni generalizzate di EULERO in una qualunque delle tre forme (A), (B), (C), purchè la soluzione  $u_0(s)$  della (24) corrispondente a  $\mathcal{C}_0$  abbia tutti i suoi valori *interni* a  $\Delta$ , cioè sia sempre  $u_0(s) > 0$ .

Nell'esempio che stiamo considerando le equazioni (C) diventano

$$(27) \quad \begin{cases} x_0'' = \frac{H_u F_{x'} - H_{x'u} F}{H_1}, \\ y_0'' = \frac{H_u F_{y'} - H_{y'u} F}{H_1}, \end{cases}$$

con  $H = G + \lambda F$ , e

$$F = 2gy' - 2R(\sqrt{u}) \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad G = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{u}},$$

e  $\lambda(s)$  data dalla (26).

L'equazione (24), l'integrale (25) e la classe  $\mathfrak{K}$  qui considerata, si presentano nel problema della curva brachistocrona congiungente due punti fissi di un mezzo resistente. La questione dell'esistenza di una curva estremante  $\mathcal{C}_0$  (nel caso che la classe  $\mathfrak{K}$  non sia vuota) si trova risolta in una mia precedente memoria <sup>(18)</sup>; circa la condizione  $u_0(s) > 0$  si può dire che essa è certamente soddisfatta sopra

<sup>(17)</sup> Si veda la definizione di curva ordinaria al n.° 1.

<sup>(18)</sup> B. MANIÀ: *Sui problemi di Lagrange e di Mayer*, loc. cit.

tutta la curva  $\mathcal{C}_0$  se i due punti fissi sono sufficientemente vicini. Se ne conclude che, se questa ultima ipotesi è soddisfatta, la curva brachistocrona verifica le equazioni generalizzate di EULERO (27).

7. - **I problemi di Lagrange relativi a un sistema di equazioni differenziali.** — Ci siamo limitati fin qui a studiare dei problemi di LAGRANGE con una sola equazione differenziale (1), ma è evidente che il metodo seguito si applica, senza modificazioni essenziali, anche a problemi di LAGRANGE relativi a un sistema della forma (1\*) e a un integrale

$$\mathcal{J}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} G(x, y, x', y', u_1, \dots, u_n) ds.$$

Così pure i risultati precedenti si estendono ai problemi di MAYER relativi a un sistema della forma (1\*) poichè

$$u_n(L) = \int_{\mathcal{C}} F_n(x, y, x', y', u_1, \dots, u_n) ds,$$

e quindi il problema di minimo relativo al funzionale  $u_n(L)$  si riduce a un problema di LAGRANGE con  $G \equiv F_n$ .

## CAPITOLO II.

### I problemi in forma ordinaria.

8. - **Premesse.** — Sia ancora  $A$  un campo del piano  $(x, y)$  e  $\Delta$  sia un intervallo finito o infinito dell'asse reale. Per  $(x, y)$  appartenente ad  $A$ ,  $y'$  finito qualunque ed  $u$  appartenente all'intervallo  $\Delta$  sieno definite due funzioni  $f(x, y, y', u)$  e  $g(x, y, y', u)$  finite e continue insieme con le loro derivate parziali dei primi due ordini. Sia infine  $u_0$  un valore fissato nell'intervallo  $\Delta$ .

Chiameremo *curve ordinarie* le curve appartenenti al campo  $A$ , rappresentabili nella forma

$$C: \quad y = y(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

con  $y(x)$  funzione assolutamente continua nell'intervallo  $(a, b)$ , per le quali in quasi tutto questo intervallo esiste una soluzione  $u(x)$  dell'equazione differenziale

$$(28) \quad u' = f(x, y(x), y'(x), u(x)),$$

con  $u(a) = u_0$  e  $u(x)$  funzione assolutamente continua in tutto  $(a, b)$ ; e per le quali inoltre esiste finito l'integrale

$$(29) \quad I_C = \int_{\mathcal{C}} g(x, y, y', u) dx = \int_a^b g(x, y(x), y'(x), u(x)) dx.$$

Data una classe  $K$  di curve ordinarie e una curva  $C$  di  $K$ , si dice che un punto  $P$  di  $C$  è un *punto di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $\bar{K}$*  se si può determinare un numero  $\varrho$  positivo, tale che ogni curva ordinaria  $\bar{C}$ , ottenuta da  $C$  sostituendo un arco di questa appartenente al cerchio di centro  $P$  e raggio  $\varrho$  con un arco appartenente allo stesso cerchio e avente i medesimi estremi, appartenga ancora alla classe  $K$ .

Dopo queste premesse passiamo a stabilire le condizioni a cui debbono soddisfare le curve estremanti per  $I_C$  in una classe  $K$  di curve ordinarie. Studieremo dapprima, brevemente, le estremanti lipschitziane, e poi le estremanti assolutamente continue qualunque, e daremo due tipi di teoremi: i primi stabiliscono delle condizioni analoghe a quelle per le *estremali* dei problemi liberi del calcolo delle variazioni, i secondi delle condizioni analoghe a quelle per le *pseudoestremali* dei problemi liberi, introdotte dal TONELLI in una sua recente memoria <sup>(19)</sup>.

### L'equazione delle estremali.

9. - Le curve estremanti lipschitziane. — Se

$$C_0: y = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

con  $y_0'(x)$  limitata nell'insieme dei punti di  $(a, b)$  nei quali esiste finita, è una curva minimante (o massimante) per l'integrale  $I_C$  in una classe  $K$  di curve ordinarie;

se, indicata con  $u_0(x)$  la soluzione dell'equazione (28) corrispondente a  $C_0$ , i valori di  $u_0(x)$  sono tutti interni all'intervallo  $\Delta$ ;

allora, ogni arco  $\alpha_0$  di  $C_0$  i cui punti, esclusi al più i punti terminali, sieno interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $K$ , soddisfa all'equazione

$$(30) \quad \int_a^x [g_y + \lambda f_y + (g_u + \lambda f_u + \lambda') f_{y'}] dx - \frac{d}{dx} \int_a^x (g_{y'} + \lambda f_{y'}) dx = c \text{ (cost.)} \quad (20),$$

con

$$(31) \quad \lambda(x) = \int_x^b g_u[\xi, y_0(\xi), y_0'(\xi), u_0(\xi)] \left( \exp \int_x^\xi f_u[\eta, y_0(\eta), y_0'(\eta), u_0(\eta)] d\eta \right) d\xi.$$

La dimostrazione di questo teorema non differisce da quello del teorema analogo per i problemi in forma parametrica.

<sup>(19)</sup> L. TONELLI: *Sulle proprietà delle estremanti*, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. III, (1934), pp. 213-237.

<sup>(20)</sup> Gli argomenti delle funzioni sotto il segno di integrazione sono  $x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x)$ .

Così pure dall'equazione stabilita per l'arco  $a_0$  si possono dedurre dei corollari analoghi a quelli ottenuti nel primo capitolo per i problemi in forma parametrica; ma siccome nella deduzione di tali corollari non è necessaria la condizione che la curva  $C_0$  sia lipschitziana, stabiliamo prima l'equazione (30) anche nel caso che la  $C_0$  sia soltanto assolutamente continua.

*Osservazione.* - Se è  $f \equiv g$  e se  $f$  e  $g$  sono indipendenti da  $u$ , il problema di LAGRANGE qui considerato coincide col problema libero relativo all'integrale

$$\int_C g(x, y, y') dx,$$

e l'equazione (30) diventa l'equazione di EULERO corrispondente a questo integrale:

$$\int_a^x g_y dx - \frac{d}{dx} \int_a^x g_{y'} dx = c \text{ (cost.)}.$$

Per questo fatto chiameremo la (30) *equazione generalizzata di Eulero* per il problema di LAGRANGE proposto.

10. - **Le curve estremanti non lipschitziane: Teorema I.** — *Sia*

$$C_0: y = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

*una curva minimante o massimante per  $I_C$  in una classe  $K$  di curve ordinarie;*

*i valori della soluzione  $u_0(x)$  dell'equazione (28) corrispondente a  $C_0$  sieno tutti interni all'intervallo  $\Delta$ .*

*Le funzioni  $f(x, y, y', u)$  e  $g(x, y, y', u)$  soddisfino alle condizioni seguenti:*

*a) ad ogni parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  si possano far corrispondere cinque numeri positivi  $M, N_1, N_2, N_3, N_4$ , tali che se  $(x, y)$  è un punto qualunque di  $A'$  e se  $u$  è un punto qualunque di  $\Delta'$ , per ogni  $y'$  e per ogni  $\varphi$ , con  $|\varphi| \leq M$  e  $(x, y + \varphi)$  appartenente ad  $A$ , si abbia*

$$\begin{aligned} |f_y(x, y + \varphi, y', u)| &\leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y', u)| + N_3 |g(x, y, y', u)| + N_4, \\ |g_y(x, y + \varphi, y', u)| &\leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y', u)| + N_3 |g(x, y, y', u)| + N_4; \end{aligned}$$

*b) ad ogni parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  si possano far corrispondere quattro numeri positivi  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4$ , tali che, per  $(x, y)$  appartenente ad  $A$ ,  $u$  appartenente a  $\Delta'$  e  $y'$  qualunque, si abbia*

$$\begin{aligned} |f_{y'}(x, y, y', u)| &\leq \bar{N}_1 |y'| + \bar{N}_2 |f(x, y, y', u)| + \bar{N}_3 |g(x, y, y', u)| + \bar{N}_4, \\ |g_{y'}(x, y, y', u)| &\leq \bar{N}_1 |y'| + \bar{N}_2 |f(x, y, y', u)| + \bar{N}_3 |g(x, y, y', u)| + \bar{N}_4; \end{aligned}$$

c) per  $(x, y)$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$ ,  $u$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$ , e  $y'$  qualunque, le derivate  $f_u(x, y, y', u)$ ,  $g_u(x, y, y', u)$  sieno limitate.

Allora, ogni arco  $\alpha_0$  di  $C_0$  i cui punti, esclusi al più i punti terminali, sieno tutti interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $K$ , soddisfa all'equazione (30) con  $\lambda(x)$  data dall'equazione (31).

Come nella dimostrazione del n.º 2, supponiamo anche qui in un primo tempo che l'arco  $\alpha_0$  sia tutto di punti interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $K$ . Allora si può determinare un numero positivo  $\varrho$  tale che, se  $P$  è un punto qualunque di  $\alpha_0$  e se si indica con  $(P, \varrho)$  il cerchio di centro  $P$  e raggio  $\varrho$ , questo cerchio sia tutto di punti interni ad  $A$ , e ogni curva ordinaria  $C$ , dedotta da  $C_0$  sostituendo un arco di  $C_0$  interno a  $(P, \varrho)$  con un arco avente gli stessi punti terminali e pure appartenente a  $(P, \varrho)$ , sia ancora una curva della classe  $K$ .

Indicato con  $(a', b')$  l'intervallo dell'asse delle  $x$  sul quale l'arco  $\alpha_0$  si proietta ortogonalmente, e fissato un numero intero positivo  $n$ , dividiamo  $(a', b')$  in  $n$  parti uguali mediante i punti

$$x_0 = a', \quad x_1, \dots, \quad x_n = b'.$$

Scelto quindi un numero intero positivo  $i$  minore di  $n$ , consideriamo l'intervallo  $(x_{i-1}, x_{i+1})$ , e per  $N$  numero positivo qualunque, consideriamo sia in  $(x_{i-1}, x_i)$  che in  $(x_i, x_{i+1})$  l'insieme dei punti nei quali  $|y_0'(x)| \leq N$ . Se questi due insiemi hanno la stessa misura indichiamoli rispettivamente con  $E'_N$  e con  $E''_N$ ; nel caso contrario, determiniamo una parte dell'insieme di misura maggiore la quale abbia misura uguale a quella dell'altro insieme. In ogni caso possiamo dunque determinare due insiemi  $E'_N, E''_N$ , appartenenti rispettivamente a  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $(x_i, x_{i+1})$ , nei quali sia sempre  $|y_0'(x)| \leq N$ , e per cui inoltre risulti

$$m(E'_N) = m(E''_N) \quad \text{e} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} m(E'_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} m(E''_N) = \frac{b' - a'}{n}.$$

Dopo di ciò poniamo

$$\begin{aligned} \varphi_i'(x) &= 1 && \text{in } E'_N, \\ \varphi_i'(x) &= -1 && \text{in } E''_N, \\ \varphi_i'(x) &= 0 && \text{nei punti rimanenti di } (a, b), \end{aligned}$$

e

$$\varphi_i(x) = \int_a^x \varphi_i'(x) dx, \quad (a \leq x \leq b).$$

Fissate queste notazioni, si possono determinare due numeri positivi  $\bar{n}$  ed  $\bar{\varepsilon}$ , tali che se è  $n \geq \bar{n}$  ed  $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ , indicata con  $C_\varepsilon$  la curva di equazione

$$y = y_0(x) + \varepsilon \varphi_i(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

questa curva appartenga al campo  $A$  e l'equazione (28) ad essa corrispondente ammetta in quasi tutto l'intervallo  $(a, b)$  una soluzione  $u(x, \varepsilon)$  assolutamente continua in questo intervallo, con  $u(a, \varepsilon) = u_0$  e  $u(x, \varepsilon)$  sempre appartenente all'intervallo  $A$  (21). Di più esiste in tutto  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  la derivata  $\left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$  e si ha

$$(32) \quad \left| \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right| \leq 2e^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i'| dx,$$

e anche

$$(33) \quad \left| \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \int_{x_{i-1}}^x \left\{ f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right\} dx \right| \leq \\ \leq 2e^2 \left( \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i'| dx \quad (22).$$

Nell'intervallo  $(x_{i+1}, b)$  si ha

$$u(x, \varepsilon) = u(x_{i+1}, \varepsilon) + \int_{x_{i+1}}^x f(x, y_0(x), y_0'(x), u(x, \varepsilon)) dx$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial u(x_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \int_{x_{i+1}}^x f_u \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} dx;$$

donde segue, derivando rispetto a  $x$  e applicando la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari omogenee,

$$(34) \quad \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial u(x_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \left( \exp \int_{x_{i+1}}^x f_u dx \right).$$

Passiamo ora a considerare l'integrale

$$I(\varepsilon) = \int g(x, y, y', u) dx$$

calcolato sopra la curva  $C_\varepsilon$ , e cominciamo col dimostrare che questo integrale esiste finito.

(21) Vedi B. MANIÀ: *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer*, loc. cit.

(22) Vedi B. MANIÀ, loc. cit.

La funzione integranda  $g(x, y, y', u)$  è limitata nell'insieme  $E'_N + E''_N$ , e nei punti di  $(a, b)$  non appartenenti a questo insieme è

$$\begin{aligned} g(x, y, y', u) &= g(x, y_0, y_0', u_0) + [g(x, y, y_0', u) - g(x, y_0, y_0', u_0)] = \\ &= g(x, y_0, y_0', u_0) + (y - y_0)g_y(x, \bar{y}, y_0', u_0) + (u - u_0)g_u(x, y, y_0', \bar{u}). \end{aligned}$$

Da questa uguaglianza, tenendo conto del fatto che  $C_0$  è una curva ordinaria e delle condizioni  $a)$  e  $c)$  dell'enunciato, si vede subito che l'integrale  $I(\varepsilon)$  esiste finito, purchè  $\varepsilon$  sia sufficientemente piccolo in valore assoluto.

Per dimostrare l'esistenza della derivata  $\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$  e determinarne un'espressione, osserviamo che è

$$\begin{aligned} \frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} &= \int_a^b \frac{g(x, y, y', u) - g(x, y_0, y_0', u_0)}{\varepsilon} dx = \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{g(x, y, y', u_0) - g(x, y_0, y_0', u_0)}{\varepsilon} + \frac{g(x, y, y', u) - g(x, y, y', u_0)}{\varepsilon} \right\} dx = \\ &= \int_a^b \left\{ g_y[x, y_0 + \vartheta\varphi_i, y_0' + \vartheta\varphi_i', u_0]\varphi_i + g_{y'}[\dots]\varphi_i' + g_u[x, y, y', \bar{u}] \frac{u - u_0}{\varepsilon} \right\} dx, \end{aligned}$$

con  $|\vartheta| < |\varepsilon|$ . Allora si vede che anche qui, essendo fuori di  $E'_N + E''_N$   $\varphi_i' = 0$ , la funzione sotto il segno di integrale resta, per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente vicino allo zero, inferiore in valore assoluto a una funzione integrabile fissa. Siccome poi per  $\varepsilon$  tendente a zero la funzione integranda tende in quasi tutto l'intervallo  $(a, b)$  a una funzione integrabile, basta applicare un noto teorema di integrazione per serie e si ottiene l'equazione

$$(35) \quad \left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[ g_y\varphi_i + g_{y'}\varphi_i' + g_u\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \right] dx,$$

dove si intende che l'integrale del secondo membro va calcolato sopra la curva  $C_0$ .

La (35) si può anche scrivere, per la definizione di  $\varphi_i$  e  $\varphi_i'$ ,

$$(36) \quad \left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[ g_y\varphi_i + g_{y'}\varphi_i' + g_u\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \right] dx + \int_{x_{i+1}}^b g_u\left(\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} dx.$$

Da questa ultima formula e dalle (32), (33), (34), segue poi

$$(37) \quad \left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ g_y\varphi_i + g_{y'}\varphi_i' + g_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y\varphi_i + f_{y'}\varphi_i') dx \right\} dx +$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2e^2 \vartheta_i' \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |g_u| dx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i'| dx + \\
 &+ \int_{x_{i+1}}^b g_u \left( \exp \int_{x_{i+1}}^x f_u dx \right) dx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right\} dx + \\
 &+ 2e^2 \vartheta_i'' M \left( \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i'| dx,
 \end{aligned}$$

con  $|\vartheta_i'| < 1$ ,  $|\vartheta_i''| < 1$  ed  $M = \int_a^b |g_u| \left( \exp \int_a^b |f_u| dx \right) dx$ .

Ricordiamo ora che è  $\left( \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$ , e facciamo tendere a  $+\infty$  il numero  $N$  che interviene nella definizione di  $\varphi_i$ : allora, tenendo conto della (31), si ha

$$\begin{aligned}
 (38) \quad &\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ g_y \omega_i + g_{y'} \omega_i' + g_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i') dx \right\} dx + \\
 &+ \lambda(x_{i+1}) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i') dx \right\} dx + \\
 &+ 2e^2 \theta_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i'| dx \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |g_u| dx + M \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right\} = 0
 \end{aligned}$$

con  $|\theta_i| \leq 1$ , e

$$\begin{aligned}
 \omega_i'(x) &= 1, & \text{per } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\
 \omega_i'(x) &= -1, & \text{per } x_i < x \leq x_{i+1}, \\
 \omega_i'(x) &= 0, & \text{nei punti rimanenti di } (a, b),
 \end{aligned}$$

e

$$\omega_i(x) = \int_a^x \omega_i'(x) dx, \quad (a \leq x \leq b).$$

La (38) si può anche scrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 (38^*) \quad &\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ g_y \omega_i + g_{y'} \omega_i' + g_u \int_{x_{i-1}}^x f_{y'} \omega_i' dx \right\} dx + \\
 &+ \lambda(x_{i+1}) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x f_{y'} \omega_i' dx \right\} dx +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 2e^2 \theta_i' \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \omega_i + f_y' \omega_i'| dx + \right. \\
& \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \omega_i| dx \right\} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |g_u| dx + M \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right\} = 0,
\end{aligned}$$

con  $|\theta_i'| \leq 1$ .

Se ora sopra questa equazione eseguiamo delle trasformazioni analoghe a quelle eseguite sopra la (15\*) del primo capitolo otteniamo l'equazione

$$\begin{aligned}
(40) \quad & \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g_{y'} - \int_{x_{i-1}}^x g_y dx) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g_{y'} - \int_{x_i}^x g_y dx) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_y dx + \\
& + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g_u \int_{x_{i-1}}^x f_y' dx) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g_u \int_{x_i}^x f_y' dx) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_u dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx + \\
& + \lambda(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f_{y'} - \int_{x_{i-1}}^x f_y dx) dx - \lambda(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_{y'} - \int_{x_i}^x f_y dx) dx + \\
& + \lambda(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx + \lambda(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f_u \int_{x_{i-1}}^x f_y' dx) dx - \\
& - \lambda(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_u \int_{x_i}^x f_y' dx) dx + \lambda(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_u dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y' dx + \\
& + [\lambda(x_{i+1}) - \lambda(x_i)] \left[ \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f_{y'} - \int_{x_{i-1}}^x f_y dx) dx + \right. \\
& \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f_u \int_{x_{i-1}}^x f_y' dx) dx \right] + \theta_i' H_i = 0,
\end{aligned}$$

con

$$H_i = 2e^2 \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \omega_i + f_y' \omega_i'| dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \omega_i| dx \right\} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |g_u| dx + M \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right\}.$$

Se facciamo nella (40)  $i=1, 2, \dots, n-1$ , sommiamo le equazioni così ottenute, dividiamo l'equazione somma per la lunghezza degli intervalli  $(x_{i-1}, x_i)$ , e pas-

siamo al limite per  $n$  tendente a  $+\infty$ , otteniamo la formula corrispondente alla (18) del primo capitolo:

$$(41) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} g_{y'} dx + \lambda(x_1) \int_{x_0}^{x_1} f_{y'} dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} g_{y'} dx - \lambda(x_n) \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_{y'} dx \right\} \frac{n}{b'-a'} + \\ + \int_{a'}^{b'} \{ g_y + \lambda f_y + (g_u + \lambda f_u + \lambda') f_{y'} \} dx = 0.$$

Ripetendo ora le stesse considerazioni fatte nella dimostrazione del n.º 2 risulta provato il nostro teorema.

11. - **Le curve estremanti non lipschitziane: Teorema II.** — *Se nel teorema del numero precedente in luogo delle condizioni b) e c) per la funzione  $f(x, y, y', u)$  poniamo le due condizioni seguenti:*

b') *per  $(x, y)$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$ ,  $u$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  e  $y'$  variabile comunque, la derivata  $f_{y'}(x, y, y', u)$  resta limitata;*

c') *ad ogni parte limitata  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  si possono far corrispondere cinque numeri positivi  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{N}_1$ ,  $\tilde{N}_2$ ,  $\tilde{N}_3$ ,  $\tilde{N}_4$ , tali che se  $(x, y)$  è un punto qualunque di  $A'$  e  $u$  è un punto qualunque di  $\Delta'$ , per ogni  $\varphi$  con  $|\varphi| \leq \tilde{M}$  e  $(x, y + \varphi)$  appartenente ad  $A$  e per ogni  $y'$  finito si abbia*

$$|f_u(x, y + \varphi, y', u)| \leq \tilde{N}_1 |y'| + \tilde{N}_2 A_1(x, y, y') + \tilde{N}_3 A_2(x, y, y') + \tilde{N}_4,$$

*essendo  $A_1(x, y, y')$  e  $A_2(x, y, y')$  rispettivamente i minimi di  $|f(x, y, y', u)|$  e di  $|g(x, y, y', u)|$  per  $(x, y, y')$  fissato e  $u$  variabile in  $\Delta'$ ;*

*se in luogo della condizione c) per la funzione  $g(x, y, y', u)$  poniamo la condizione:*

c'') *ad ogni parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  si possono far corrispondere cinque numeri positivi  $M^*$ ,  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ ,  $N_3^*$ ,  $N_4^*$ , tali che se  $(x, y)$  è un punto di  $A'$  e  $u$  è un punto di  $\Delta'$ , per ogni coppia di numeri  $\varphi_1, \varphi_2$ , con  $|\varphi_1| \leq M^*$ ,  $|\varphi_2| \leq M^*$ ,  $(x, y + \varphi_1)$  appartenente ad  $A$  e  $u + \varphi_2$  appartenente a  $\Delta$ , e per ogni  $y'$  finito sia*

$$|g_u(x, y + \varphi_1, y', u + \varphi_2)| \leq N_1^* |y'| + N_2^* |f(x, y, y', u)| + \\ + N_3^* |g(x, y, y', u)| + N_4^*,$$

*allora il teorema indicato resta vero.*

Riprendiamo le notazioni del n.º 10 e definiamo nel modo ivi indicato la curva  $C_\varepsilon$  di equazione

$$y = y_0(x) + \varepsilon \varphi_i(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

appartenente al campo  $A$ .

Come prima cosa è da dimostrare che per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo in valore assoluto l'equazione

$$(42) \quad u = u_0 + \int_a^x f(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0' + \varepsilon \varphi_i', u) dx$$

ammette una soluzione  $u(x, \varepsilon)$  in tutto l'intervallo  $(a, b)$ , con  $u(x, \varepsilon)$  sempre appartenente a  $A$ . Per questo osserviamo che è

$$(43) \quad |f(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0' + \varepsilon \varphi_i', u(x, 0)) - f(x, y_0, y_0', u(x, 0))| \leq \\ \leq |f_y(x, y_0 + \theta \varepsilon \varphi_i', y_0', u(x, 0))| + \Phi,$$

essendo  $0 < \theta < 1$  e  $\Phi$  maggiore del massimo valore del primo membro della disuguaglianza (43) nell'insieme  $E'_N + E''_N$ . Dalla condizione a) del teorema precedente, che qui abbiamo supposto verificata, segue che il primo membro della (43) resta inferiore a una funzione integrabile purchè  $\varepsilon$  sia sufficientemente piccolo in valore assoluto; d'altronde per  $\varepsilon$  tendente a zero quel primo membro tende a zero, e quindi

$$(44) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b |f(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0' + \varepsilon \varphi_i', u(x, 0)) - f(x, y_0, y_0', u(x, 0))| dx = 0.$$

Indichiamo con  $A'$  un intervallo chiuso di  $A$  contenente nel suo interno tutti i valori  $u(x, \varepsilon)$ , con  $A'$  un campo chiuso formato da  $C_0$  e da un intorno di  $\alpha_0$  tutto di punti interni ad  $A$  <sup>(23)</sup>. Allora, fissato  $\varepsilon$  con  $|\varepsilon|$  sufficientemente piccolo affinché  $C_\varepsilon$  appartenga ad  $A'$ , risolviamo l'equazione (42) col metodo delle approssimazioni successive di PICARD prendendo come prima approssimazione  $u_1(x, \varepsilon) = u(x, 0)$ .

Poichè dalla condizione c') segue che, per  $|\varepsilon|$  sufficientemente piccolo,  $x$  appartenente ad  $(a, b)$  e  $u$  appartenente a  $A'$ ,  $|f_u(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0' + \varepsilon \varphi_i', u)|$  risulta minore di una funzione integrabile sopra l'intervallo  $(a, b)$ , dalla formula (44) segue che il metodo di approssimazione ora ricordato fornisce una soluzione  $u(x, \varepsilon)$  dell'equazione (42) in tutto l'intervallo  $(a, b)$  purchè  $|\varepsilon|$  sia sufficientemente piccolo <sup>(24)</sup>.

Di più, per noti teoremi sopra le equazioni differenziali dipendenti da un para-

<sup>(23)</sup> Anche qui, come nel numero precedente, supponiamo dapprima che  $\alpha_0$  sia tutto di punti interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $K$ .

<sup>(24)</sup> Vedi B. MANIÀ: *Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, serie VI, vol. 20 (1934).

metro <sup>(25)</sup>, e per le condizioni poste sopra la funzione  $f(x, y, y', u)$  e le sue derivate, esiste  $\left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$  in tutto l'intervallo  $(a, b)$ , e si ha

$$(45) \quad \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_a^x \left\{ f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i' + f_u \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \right\} dx.$$

Nell'intervallo  $(a, x_{i-1})$  è  $\left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0$ ,  $\varphi_i = 0$ ,  $\varphi_i' = 0$ , e quindi per  $(x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1})$  l'equazione (45) diventa

$$(46) \quad \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_{i-1}}^x \left\{ f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i' + f_u \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \right\} dx,$$

e per  $(x_{i+1} \leq x \leq b)$ , essendo  $\varphi_i = 0$ ,  $\varphi_i' = 0$ ,

$$(47) \quad \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial u(x_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \int_{x_{i+1}}^x f_u \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} dx.$$

Da queste due equazioni seguono subito le formule (32), (33), (34), del numero precedente.

A questo punto ci resta da dimostrare che esiste finito l'integrale

$$I(\varepsilon) = \int g(x, y, y', u) dx$$

calcolato sopra la curva  $C_\varepsilon$  e che esiste la derivata  $\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$  data dalla formula (35). Dopo di ciò, ripetendo le trasformazioni del numero precedente, si giunge alla formula (40), e resta da dimostrare, che anche nelle nuove ipotesi che ora abbiamo fatte, si possono eseguire i passaggi al limite ivi indicati.

Essendo, fuori di  $E'_N + E''_N$ , in ogni punto  $x$  di  $(a, b)$ ,

$$g(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0', u(x, \varepsilon)) = g(x, y_0, y_0', u(x, 0)) + \\ + g_u(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0', \bar{u}) [u(x, \varepsilon) - u(x, 0)] + g_y(x, y_0 + \theta \varepsilon \varphi_i, y_0', u(x, 0)) \varepsilon \varphi_i$$

con  $\bar{u}$  compreso fra  $u(x, 0)$  e  $u(x, \varepsilon)$  e  $|\theta| < 1$ , dalle ipotesi fatte segue che  $I(\varepsilon)$  esiste finito. Essendo poi

$$\frac{I(\varepsilon) - I(0)}{\varepsilon} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0' + \varepsilon \varphi_i', u(x, \varepsilon)) - g(x, y_0, y_0', u(x, 0))}{\varepsilon} dx = \\ = \int_a^b \left\{ g_y(x, y_0 + \theta \varepsilon \varphi_i, y_0' + \theta \varepsilon \varphi_i', u(x, 0)) \varphi_i + \right. \\ + g_{y'}(x, y_0 + \theta \varepsilon \varphi_i, y_0' + \theta \varepsilon \varphi_i', u(x, 0)) \varphi_i' + \\ \left. + g_u(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0' + \varepsilon \varphi_i', \bar{u}) \frac{u(x, \varepsilon) - u(x, 0)}{\varepsilon} \right\} dx,$$

<sup>(25)</sup> Vedi CARATHÉODORY, loc. cit.

con  $|\theta| < 1$  e  $\bar{u}$  compreso fra  $u(x, 0)$  e  $u(x, \varepsilon)$ , dalle ipotesi fatte e da un noto teorema di integrazione per serie, si ha

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\{ g_y \varphi_i + g_{y'} \varphi_i' + g_u \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \right\} dx,$$

cioè la formula (35) voluta.

Come nel numero precedente si giunge allora alla formula (40), e facendo in essa  $i=1, 2, \dots, n-1$ , sommando e moltiplicando per  $\frac{n}{b'-a'}$  si ottiene l'equazione

$$(48) \quad \frac{n}{b'-a'} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} g_{y'} dx + \lambda(x_1) \int_{x_0}^{x_1} f_{y'} dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} g_{y'} dx - \lambda(x_n) \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_{y'} dx \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_y dx + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda(x_{i+1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{b'-a'} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_u dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{y'} dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda(x_{i+1})n}{b'-a'} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_u dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{y'} dx + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[\lambda(x_{i+1}) - \lambda(x_i)]n}{b'-a'} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx +$$

$$+ \frac{n}{b'-a'} \left\{ - \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{x_0}^x g_y dx \right) dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left( \int_{x_{n-1}}^x g_y dx \right) dx - \lambda(x_1) \int_{x_0}^{x_1} \left( \int_{x_0}^x f_y dx \right) dx + \right.$$

$$+ \lambda(x_n) \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left( \int_{x_{n-1}}^x f_y dx \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left( g_u \int_{x_0}^x f_y dx \right) dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left( g_u \int_{x_{n-1}}^x f_y dx \right) dx +$$

$$+ \lambda(x_1) \int_{x_0}^{x_1} \left( f_u \int_{x_0}^x f_{y'} dx \right) dx - \lambda(x_n) \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left( f_u \int_{x_{n-1}}^x f_{y'} dx \right) dx \left. \right\} +$$

$$+ \frac{n}{b'-a'} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ [\lambda(x_{i+1}) - \lambda(x_i)] \left[ - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \int_{x_{i-1}}^x f_y dx \right) dx + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( f_u \int_{x_{i-1}}^x f_{y'} dx \right) dx \right] \right\} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n\theta_i' H}{b'-a'} = 0.$$

Ora si verifica facilmente che per  $n$  tendente a  $+\infty$  tutti gli addendi del primo membro a partire dal sesto tendono a zero, e quindi si ottiene ancora la formula (41), dalla quale segue poi subito il teorema.

12. - *Le curve estremanti non lipschitziane: Teorema III.* — *Se sopra le funzioni  $f(x, y, y', u)$  e  $g(x, y, y', u)$  facciamo le seguenti ipotesi:*

a) la funzione  $f(x, y, y', u)$  soddisfa alle condizioni a) e b) del n.º 10 e alla condizione c') del n.º 11;

β) la funzione  $g(x, y, y', u)$  soddisfa alle condizioni a) e b) del n.º 10 e alla condizione c'') del n.º 11;

γ) esiste un numero  $\alpha > 1$  tale che le funzioni

$$|f_u(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x))|^\alpha, \quad |g_u(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x))|^\alpha, \\ |f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x))|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

sieno integrabili in tutto l'intervallo  $(a, b)$ ;

il teorema del n.º 10 è ancora vero.

Nel teorema ora enunciato risultano soddisfatte tutte le ipotesi del teorema precedente meno la b'), secondo la quale  $f_{y'}(x, y, y', u)$  resta limitata per  $(x, y)$  appartenente a un insieme limitato e chiuso  $A'$  di  $A$ ,  $u$  appartenente a un intervallo chiuso  $\Delta'$  di  $\Delta$ , e  $y'$  finito qualunque; e in luogo della b') vale la b) del n.º 10 dalla quale segue che la  $f_{y'}(x, y, y', u)$  è integrabile sopra la curva  $C_0$ .

Ma la condizione che la derivata  $f_{y'}(x, y, y', u)$  fosse limitata è stata sfruttata, nella dimostrazione del numero precedente, soltanto nel passaggio al limite per  $n$  tendente a  $+\infty$  eseguito sopra i termini della formula (48), dove si deve applicare il seguente teorema:

« Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono due funzioni integrabili (nel senso del LEBESGUE) sopra un intervallo finito  $(a, b)$ , e una almeno di esse è limitata; se dividiamo l'intervallo  $(a, b)$  in  $n$  parti uguali mediante i punti

$$x_0 = a, \quad x_1, \dots, \quad x_n = b,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \text{»} \quad (26).$$

Osserviamo però (27) che vale anche il teorema seguente:

« Se è  $\alpha > 1$  e se sopra l'intervallo  $(a, b)$  le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  sono integrabili (nel senso del LEBESGUE) insieme con le potenze  $|f(x)|^\alpha$ ,  $|g(x)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ , si ha ancora, con le notazioni precedenti,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \text{»}.$$

(26) Vedi B. MANIÀ: *Una proprietà dell'integrale di Lebesgue*, loc. cit.

(27) Vedi B. MANIÀ, loc. cit.

Valendosi di quest'ultimo teorema si può eseguire il passaggio al limite sopra i termini della formula (48) nel modo indicato al numero precedente; soltanto per dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[\lambda(x_{i+1}) - \lambda(x_i)]n}{b' - a'} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_{y'} dx = \int_{a'}^{b'} \lambda' f_{y'} dx,$$

occorre osservare prima che, nelle ipotesi fatte, la funzione  $\lambda(x)$  è assolutamente continua e la sua derivata  $\lambda'(x)$  è integrabile insieme con  $|\lambda'(x)|^\alpha$  sopra l'intervallo  $(a', b')$ . Ora è

$$\lambda(x) = \int_x^b g_u e^x d\xi = \int_x^b g_u e^a d\xi + \int_x^b g_u d\xi \cdot e^{-\int_x^x f_u d\eta},$$

e quindi

$$\lambda'(x) = -g_u \left( e^x + e^a \right) - \int_x^b g_u d\xi \cdot e^{-\int_x^x f_u d\eta} \cdot f_u,$$

in quasi tutto l'intervallo  $(a, b)$ . I fattori per cui risultano moltiplicate  $g_u$  ed  $f_u$  in questa formula sono funzioni continue, e quindi  $\lambda'(x)$  è la somma di due funzioni integrabili, insieme con le potenze di esponente  $\alpha$  dei loro valori assoluti, in tutto l'intervallo  $(a, b)$ ; ne viene che anche  $|\lambda'(x)|^\alpha$  è integrabile sopra questo intervallo.

Dopo ciò il teorema enunciato si ottiene facilmente.

*Osservazione.* - La condizione  $\gamma)$  del teorema precedente si riferisce alle derivate  $f_u, g_u, f_{y'}$  calcolate sopra la curva  $C_0$  che in generale non è data a priori. Ma affinché la condizione  $\gamma)$  sia soddisfatta basta che le potenze ivi considerate, calcolate per  $(x, y, u)$  appartenente a un campo limitato e  $y'$  finito qualunque, restino inferiori a una combinazione lineare del tipo indicato nella condizione  $b)$  del n.º 10.

13. - **Estremaloidi ed estremali.** — Se le funzioni  $f(x, y, y', u)$  e  $g(x, y, y', u)$  non dipendono da  $u$  e se inoltre  $f(x, y, y', u) \equiv g(x, y, y', u)$ , allora il problema di LAGRANGE da noi considerato si riduce a un problema libero di calcolo delle variazioni e l'equazione (30) diventa l'equazione di EULERO nella forma integrale

$$\int_a^x f_{y'} dx - \frac{d}{dx} \int_a^x f_y dx = c \text{ (cost.)},$$

cioè l'equazione delle estremaloidi per il problema libero (28).

(28) Si veda L. TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Vol. II, p. 320.

Siamo quindi indotti a porre la seguente definizione: *Un arco  $a_0$  di una curva ordinaria  $C_0$  si dice una estremaloide per il problema di Lagrange considerato, quando sopra tutto l'arco  $a_0$  è soddisfatta l'equazione (30), con  $\lambda(x)$  data dall'equazione (31).*

Se l'arco  $a_0$  è di classe 1, la funzione  $\lambda(x)$  ammette finita e continua la derivata prima sopra tutto l'arco  $a_0$ , e l'equazione (30) si può scrivere, derivando,

$$(49) \quad \frac{d}{dx}(g_{y'} + \lambda f_{y'}) = g_y + \lambda f_y + (g_u + \lambda f_u + \lambda')f_{y'}.$$

Quando si verifica l'ipotesi ora indicata si dice che l'arco  $a_0$  è un'estremale.

Se sopra l'arco  $a_0$  esiste anche la derivata seconda  $y_0''(x)$ , allora si può eseguire con la regola delle funzioni composte la derivazione indicata nel primo membro dell'equazione (49) e si ottiene

$$(50) \quad h_{y'x} + h_{y'y'}y' + h_{y'y''}y'' + h_{y'u}f = h_y + h_u f_{y'}$$

avendo posto

$$h(x, y, y', u; \mu) = g(x, y, y', u) + \mu f(x, y, y', u);$$

e se è  $h_{y'y'} \neq 0$ , si ha

$$(51) \quad y'' = \frac{h_y + h_u f_{y'} - h_{y'x} - h_{y'y'}y' - h_{y'u}f}{h_{y'y'}}.$$

**14. - Condizioni sufficienti affinché un'estremaloide sia di classe 1.** — Nello studio dei problemi liberi di calcolo delle variazioni è molto importante poter decidere se una curva estremante ha la tangente variabile con continuità; e a questo scopo serve bene l'equazione delle estremaloidi, dalla quale si possono dedurre delle condizioni sufficienti affinché una curva che la soddisfi sia lipschitziana, o sia di classe 1, o anche di classe più elevata.

Numerose condizioni sufficienti di questo genere si trovano nei *Fondamenti di calcolo delle variazioni* del TONELLI e in una sua memoria degli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa » (29).

Anche per il problema di LAGRANGE, di cui ci stiamo occupando, la questione indicata è molto importante (30), e anche qui l'equazione delle estremaloidi serve bene allo scopo; ma noi non enunceremo esplicitamente le condizioni che si possono ottenere, dato che esse si deducono facilmente dalle condizioni analoghe per

(29) Vedi L. TONELLI: *Sulle proprietà delle estremanti*, loc. cit.

(30) Per rendersene conto basta ricordare che in tutte le dimostrazioni date finora, da vari matematici, delle condizioni di EULERO per le estremanti dei problemi di LAGRANGE, si ammette che tali estremanti sieno formate da un numero finito di archi di classe 1 o sieno almeno lipschitziane.



il problema libero, e le dimostrazioni non presentano difficoltà. Piuttosto vogliamo notare che il TONELLI, per dedurre nuovi criteri affinché un'estremante sia di classe 1, ha stabilito per le estremanti, oltre all'equazione di EULERO, una seconda equazione a cui debbono soddisfare, sotto opportune condizioni, ed ha chiamato questa equazione equazione delle pseudoestremaloidi.

Noi ci proponiamo ora di ottenere dei risultati analoghi per i problemi di LAGRANGE del tipo che stiamo considerando.

### L'equazione delle pseudoestremali.

#### 15. - Teorema I. - Sia

$$C_0: y=y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

una curva minimante (o massimante) per  $I_C$  in una classe  $K$  di curve ordinarie;

i valori della soluzione  $u_0(x)$  dell'equazione (28) corrispondente a  $C_0$  sieno tutti interni all'intervallo  $\Delta$ .

Le funzioni  $f(x, y, y', u)$  e  $g(x, y, y', u)$  soddisfino alle seguenti condizioni:

a) ad ogni parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$ , si possano far corrispondere cinque numeri positivi  $M, N_1, N_2, N_3, N_4$ , tali che, se  $(x, y)$  è un punto qualunque di  $A'$  e  $u$  un punto qualunque di  $\Delta'$ , per ogni  $\varphi$  con  $|\varphi| \leq M$  per il quale  $(x + \varphi, y)$  appartiene ad  $A$ , si abbia

$$\begin{aligned} |f_x(x + \varphi, y, y', u)| &\leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y', u)| + N_3 |g(x, y, y', u)| + N_4, \\ |g_x(x + \varphi, y, y', u)| &\leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y', u)| + N_3 |g(x, y, y', u)| + N_4. \end{aligned}$$

b) ad ogni parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  si possano far corrispondere quattro numeri positivi  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4$ , tali che, per  $(x, y)$  appartenente ad  $A'$  e  $u$  appartenente a  $\Delta'$ , si abbia sempre

$$\begin{aligned} |f(x, y, y', u) - y' f_{y'}(x, y, y', u)| &\leq \\ &\leq \bar{N}_1 |y'| + \bar{N}_2 |f(x, y, y', u)| + \bar{N}_3 |g(x, y, y', u)| + \bar{N}_4 \\ |g(x, y, y', u) - y' g_{y'}(x, y, y', u)| &\leq \\ &\leq \bar{N}_1 |y'| + \bar{N}_2 |f(x, y, y', u)| + \bar{N}_3 |g(x, y, y', u)| + \bar{N}_4; \end{aligned}$$

c) per  $(x, y)$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$ ,  $u$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$ , e  $y'$  finito qualunque, le derivate  $f_u(x, y, y', u)$ ,  $g_u(x, y, y', u)$  restino limitate.

Allora ogni arco  $\alpha_0$  di  $C_0$  i cui punti, esclusi al più i punti terminali,

sieno tutti interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $K$ , soddisfa all'equazione

$$(52) \quad \int_a^x [g_x + \lambda f_x + (g_u + \lambda f_u + \lambda')(f - y_0' f_{y'})] dx - \\ - \frac{d}{dx} \int_a^x [(g - y_0' g_y) + \lambda(f - y_0' f_{y'})] dx = c \quad (\text{cost.}),$$

con

$$(53) \quad \lambda(x) = \int_x^b g_u(\xi, y_0(\xi), y_0'(\xi), u_0(\xi)) \left( \exp \int_x^\xi f_u[\eta, y_0(\eta), y_0'(\eta), u_0(\eta)] d\eta \right) d\xi.$$

Come nelle dimostrazioni dei teoremi precedenti possiamo supporre che l'arco  $\alpha_0$  sia completamente interno al campo  $A$  e che tutti i suoi punti sieno di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $K$ .

Fissato un numero intero positivo  $n$ , dividiamo l'intervallo  $(a', b')$  dell'asse delle  $x$  sul quale si proietta ortogonalmente l'arco  $\alpha_0$  in  $n$  parti uguali mediante i punti

$$x_0 = a', \quad x_1, \dots, \quad x_n = b';$$

presi poi un numero intero positivo  $i < n$  e un numero reale positivo  $N$ , definiamo la funzione  $\varphi_i(x)$  come al n.º 10, e indichiamo con  $C_\varepsilon$  la curva di equazioni parametriche

$$\xi = x + \varepsilon \varphi_i(x), \quad \eta = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

essendo  $\varepsilon$  un numero in valore assoluto minore di  $\frac{1}{2}$ . Si vede subito che tale curva è rappresentabile nella forma ordinaria

$$\eta = \eta(\xi; \varepsilon), \quad (a \leq \xi \leq b),$$

con  $\eta(\xi; \varepsilon)$  assolutamente continua nell'intervallo  $(a, b)$ , e

$$\eta(\xi; \varepsilon) = y_0(\xi)$$

fuori dell'intervallo  $(x_{i-1}, x_{i+1})$ .

Avendo supposto che l'arco  $\alpha_0$  sia tutto di punti interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto al campo  $A$  e alla classe  $K$ , se  $n$  è sufficientemente grande la curva  $C_\varepsilon$  appartiene alla classe  $K$  purchè sia una *curva ordinaria*, cioè se l'equazione

$$(54) \quad u = u_0 + \int_a^\xi f(\xi, \eta(\xi; \varepsilon), \eta'(\xi; \varepsilon), u) d\xi$$

ammette una soluzione  $u(\xi; \varepsilon)$  assolutamente continua nell'intervallo  $(a, b)$  con  $u(\xi; \varepsilon)$  sempre appartenente a  $\mathcal{A}$ , e se l'integrale

$$I(\varepsilon) = \int_a^b g(\xi, \eta(\xi; \varepsilon), \eta'(\xi; \varepsilon), u(\xi; \varepsilon)) d\xi$$

esiste finito.

Fissiamo un intorno dell'arco  $a_0$  e determiniamo un numero positivo  $\bar{n}$ , tale per  $n \geq \bar{n}$  tutte le curve ordinarie  $C_\varepsilon$  appartengono alla classe  $K$  e gli archi

$$\eta = \eta(\xi; \varepsilon), \quad (x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}),$$

appartengono all'intorno fissato di  $a_0$ .

Ciò posto osserviamo che se, per ogni  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo in valore assoluto, l'equazione

$$(55) \quad u = u_0(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{\xi} f(\xi, \eta(\xi; \varepsilon), \eta'(\xi; \varepsilon), u) d\xi,$$

ammette una soluzione  $u(\xi; \varepsilon)$  assolutamente continua nell'intervallo  $(x_{i-1}, x_{i+1})$ , con  $u(\xi; \varepsilon)$  appartenente a  $\Delta$ , e se inoltre  $u(x_{i+1}; \varepsilon)$  tende a  $u_0(x_{i+1})$  al tendere a zero di  $\varepsilon$ , anche l'equazione (54) ammette una soluzione  $u(\xi; \varepsilon)$  assolutamente continua in tutto l'intervallo  $(a, b)$  con  $u(\xi; \varepsilon)$  appartenente a  $\Delta$ , purchè  $\varepsilon$  sia sufficientemente piccolo in valore assoluto.

Ora, se facciamo la sostituzione

$$v(x; \varepsilon) = u(x + \varepsilon\varphi_i(x); \varepsilon),$$

l'equazione (55) risulta equivalente all'equazione

$$v(x; \varepsilon) = u_0(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^x f\left(x + \varepsilon\varphi_i(x), y_0(x), \frac{y_0'(x)}{1 + \varepsilon\varphi_i'(x)}, v(x; \varepsilon)\right) (1 + \varepsilon\varphi_i'(x)) dx,$$

e questa, per  $|\varepsilon|$  sufficientemente piccolo ammette una soluzione  $v(x; \varepsilon)$  in tutto  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  e in questo intervallo si ha <sup>(31)</sup>, uniformemente,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x; \varepsilon) = u_0(x);$$

quindi anche

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(x_{i+1}, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x_{i+1}, \varepsilon) = u_0(x_{i+1}).$$

Dunque, per  $|\varepsilon|$  sufficientemente piccolo, sopra la curva  $C_\varepsilon$  è definito il funzionale  $u(\xi; \varepsilon)$ .

Di più, in tutto l'intervallo  $(x_{i-1}, x_{i+1})$ , si ha

$$(56) \quad \left| \left( \frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \int_{x_{i-1}}^x [f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'] dx \right| \leq \\ \leq 2e^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'| dx,$$

<sup>(31)</sup> Vedi loc. cit. <sup>(24)</sup>, p. 128.

$$(57) \quad \left| \left( \frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x [f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'] dx \right\} dx \right| \leq \\ \leq 2e^2 \left( \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'| dx \quad (32);$$

e sopra l'intervallo  $(x_{i+1}, b)$  vale l'equazione

$$(58) \quad \left( \frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \left( \frac{\partial v(x_{i+1}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \left( \exp \int_{x_{i+1}}^x f_u dx \right),$$

che si ottiene come la (34).

Occorre ora dimostrare che, per  $|\varepsilon|$  sufficientemente piccolo, esiste finito l'integrale

$$I(\varepsilon) = \int_a^b g(\xi, \eta(\xi; \varepsilon), \eta'(\xi; \varepsilon), u(\xi; \varepsilon)) d\xi,$$

che si può considerare come somma dei tre integrali seguenti:

$$I_1(\varepsilon) = \int_a^{x_{i-1}} g(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x)) dx, \\ I_2(\varepsilon) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g(\xi, \eta(\xi; \varepsilon), \eta'(\xi; \varepsilon), u(\xi; \varepsilon)) d\xi, \\ I_3(\varepsilon) = \int_{x_{i+1}}^b g(x, y_0(x), y_0'(x), v(x; \varepsilon)) dx.$$

Per l'ipotesi fatta sopra  $g_u(x, y, y', u)$ , basta dimostrare che esiste finito  $I_2(\varepsilon)$ , e per questo osserviamo che con un cambiamento di variabile si ha

$$I_2(\varepsilon) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} g \left( x + \varepsilon \varphi_i(x), y_0(x), \frac{y_0'(x)}{1 + \varepsilon \varphi_i'(x)}, v(x; \varepsilon) \right) (1 + \varepsilon \varphi_i'(x)) dx.$$

Nei punti dell'intervallo  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  nei quali è  $|y_0'(x)| \leq N$ , la funzione integranda è limitata, nei punti nei quali è  $|y_0'(x)| > N$ , è  $\varphi_i'(x) = 0$ , e quindi la funzione integranda è

$$g(x + \varepsilon \varphi_i(x), y_0(x), y_0'(x), v(x; \varepsilon)) = g(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x)) + \\ + [g(x + \varepsilon \varphi_i(x), y_0(x), y_0'(x), v(x; \varepsilon)) - g(x + \varepsilon \varphi_i(x), y_0(x), y_0'(x), u_0(x))] + \\ + [g(x + \varepsilon \varphi_i(x), y_0(x), y_0'(x), u_0(x)) - g(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x))],$$

(32) Vedi loc. cit. (21), p. 129.

e, per le ipotesi fatte sopra  $g_x(x, y, y', u)$  e  $g_u(x, y, y', u)$ , per tutti gli  $\varepsilon$  sufficientemente piccoli in valore assoluto, la funzione integranda che compare in  $I_2(\varepsilon)$ , resta inferiore in valore assoluto a una stessa funzione integrale. Di qua segue subito l'esistenza di  $I_2(\varepsilon)$ , e quindi dell'integrale  $I(\varepsilon)$ .

Dunque, se  $|\varepsilon|$  è sufficientemente piccolo,  $C_\varepsilon$  appartiene alla classe  $K$ , e se esiste la derivata  $\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ , deve essere

$$\left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0.$$

Ma si verifica, con un ragionamento simile ad altri già fatti nelle precedenti dimostrazioni, che è

$$\left(\frac{dI_2(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[ g_x \varphi_i + (g - y_0' g_{y'}) \varphi_i' + g_u \left( \frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] dx$$

e

$$\left(\frac{dI_3(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_{i+1}}^b g_u \left( \frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} dx;$$

e quindi, poichè  $I_1(\varepsilon)$  non dipende da  $\varepsilon$ , si ha

$$(59) \quad \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[ g_x \varphi_i + (g - y_0' g_{y'}) \varphi_i' + g_u \left( \frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] dx + \int_{x_{i+1}}^b g_u \left( \frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} dx = 0.$$

La derivata  $\left(\frac{\partial v(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$  che compare nel primo di questi due integrali soddisfa alle disuguaglianze (56), (57) e la derivata che compare nel secondo integrale soddisfa all'equazione (58).

Se osserviamo che le formule (56), (57), (58) si ottengono dalle formule (32), (33), (34) del n.º 10 scambiando  $f_y$ ,  $g_y$ ,  $f_{y'}$ ,  $g_{y'}$  rispettivamente con  $f_x$ ,  $g_x$ ,  $f - y_0' f_{y'}$ ,  $g - y_0' g_{y'}$ , e che il primo membro della (59) si ottiene nello stesso modo dal secondo membro della (36), si comprende che seguendo formalmente il procedimento del n.º 10 si giunge alla dimostrazione del teorema enunciato.

16. - **Teorema II.** - *Se nel teorema del numero precedente in luogo delle condizioni b) e c) per la funzione  $f(x, y, y', u)$  poniamo le due condizioni seguenti:*

b') *per  $(x, y)$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$ ,  $u$  appartenente a una parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  e  $y'$  finito qualunque, l'espressione  $f(x, y, y', u) - y' f_{y'}(x, y, y', u)$  resta limitata;*

c') *ad ogni parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  si possono far corrispondere cinque numeri positivi  $\tilde{M}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3, \tilde{N}_4$ , tali che se  $(x, y)$  è un punto qualunque di  $A'$  e  $u$  è*

un punto di  $\Delta'$ , per ogni  $\varphi$  con  $|\varphi| \leq M$  e  $(x+\varphi, y)$  appartenente ad  $A$ , e per ogni  $y'$  finito si abbia

$$|f_u(x+\varphi, y, y', u)| \leq \tilde{N}_1 |y'| + \tilde{N}_2 A_1(x, y, y') + \tilde{N}_3 A_2(x, y, y') + \tilde{N}_4,$$

essendo  $A_1(x, y, y')$  e  $A_2(x, y, y')$  rispettivamente i minimi di  $|f(x, y, y', u)|$  e  $|g(x, y, y', u)|$  per  $(x, y, y')$  fissato e  $u$  variabile in  $\Delta'$ ;

se in luogo della condizione c) per la funzione  $g(x, y, y', u)$  poniamo la condizione:

c'') ad ogni parte limitata e chiusa  $A'$  di  $A$  e ad ogni parte limitata e chiusa  $\Delta'$  di  $\Delta$  si possono far corrispondere cinque numeri positivi  $M^*, N_1^*, N_2^*, N_3^*, N_4^*$ , tali che se  $(x, y)$  è un punto di  $A$  e  $u$  è un punto di  $\Delta'$ , per ogni coppia di numeri  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , con  $|\varphi_1| \leq M^*$ ,  $|\varphi_2| \leq M^*$ , e  $(x+\varphi_1, y)$  appartenente ad  $A'$ ,  $u+\varphi_2$  appartenente a  $\Delta$ , e per ogni  $y'$  finito, sia

$$|g_u(x+\varphi_1, y, y', u+\varphi_2)| \leq N_1^* |y'| + N_2^* |f(x, y, y', u)| + N_3^* |g(x, y, y', u)| + N_4^*;$$

allora il teorema indicato è ancora vero.

Ciò segue dal teorema del numero precedente come il teorema del n.º 11 segue dal teorema del n.º 10, tenendo conto dell'osservazione fatta alla fine della precedente dimostrazione.

**17. - Teorema III.** — Se sopra le funzioni  $f(x, y, y', u)$  e  $g(x, y, y', u)$  facciamo le seguenti ipotesi:

a) la funzione  $f(x, y, y', u)$  soddisfa alle condizioni a) e b) del n.º 15 e alla condizione c') del n.º 16;

β) la funzione  $g(x, y, y', u)$  soddisfa alle condizioni a) e b) del n.º 15 e alla condizione c'') del n.º 16;

γ) esiste un numero  $\alpha > 1$  tale che le funzioni

$$|f_u(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x))|^\alpha, \quad |g_u(\dots)|^\alpha, \quad |f(\dots) - y_0'(x) f_y(\dots)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

sieno integrabili in tutto l'intervallo  $(a, b)$ ;

il teorema del n.º 15 è ancora vero.

Questo teorema segue dai due precedenti come il teorema del n.º 12 segue da quelli dei n.º 10 e 11, e anche qui si può fare una osservazione analoga a quella fatta alla fine del n.º 12.

**18. - Osservazione.** — Se la curva  $C_0$  considerata nei tre teoremi precedenti è lipschitziana, le condizioni ammesse per le funzioni  $f(x, y, y', u)$  e  $g(x, y, y', u)$  diventano superflue. Si ottiene allora un teorema analogo al teorema del n.º 9.

19. - **Pseudoestremaloidi e pseudoestremali.** — Se supponiamo che nei teoremi precedenti sia  $f(x, y, y', u) = g(x, y, y', u)$  e che inoltre la funzione  $f(x, y, y', u)$  sia indipendente dalla  $u$ , il problema di LAGRANGE da noi considerato diventa un problema libero del calcolo delle variazioni, e l'equazione (52) diventa

$$\int_a^x f_x dx - \frac{d}{dx} \int_a^x (f - y_0' f_{y'}) dx = c \text{ (cost.)},$$

cioè l'equazione delle *pseudoestremaloidi* per il problema libero indicato (33).

Da ciò si è indotti a chiamare *pseudoestremaloidi relative al problema di Lagrange* considerate le curve ordinarie soddisfacenti all'equazione (52) con  $\lambda(x)$  data dalla formula (53).

Se una pseudoestremaloide è di classe 1, l'equazione (52) ad essa corrispondente si può scrivere anche nella forma differenziale

$$g_x + \lambda f_x + (g_u + \lambda f_u + \lambda')(f - y_0' f_{y'}) - \frac{d}{dx} [(g - y_0' g_{y'}) + \lambda(f - y_0' f_{y'})] = 0,$$

come si vede derivando i due membri della (52). In questo caso si dice che la pseudoestremaloide considerata è una *pseudoestremale*.

20. - **Condizioni sufficienti affinché una pseudoestremaloide sia di classe 1.** — Come abbiamo già accennato dall'equazione (52) con  $\lambda(x)$  data dalla (53) si possono dedurre delle condizioni sufficienti affinché una pseudoestremaloide sia di classe 1. Tali condizioni sono molto notevoli perchè, insieme coi teoremi precedenti, permettono, sotto opportune ipotesi, di concludere che le estremanti del problema di LAGRANGE assegnato sono curve di classe 1.

Noi però tralasciamo di dare qui esplicitamente tali condizioni che si deducono senza difficoltà dai teoremi analoghi per i problemi liberi del calcolo delle variazioni (34).

(33) Vedi L. TONELLI: *Sulle proprietà delle estremanti*, loc. cit., p. 227.

(34) Vedi L. TONELLI, loc. cit., p. 230 e sgg.