

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

MAURICE FRÉCHET

**Solution générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 5, n° 2  
(1936), p. 143-158

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1936\\_2\\_5\\_2\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_2_143_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DE CHAPMAN-KOLMOGOROFF

par MAURICE FRÉCHET (Paris).

## Introduction.

Dans la théorie des probabilités en chaîne, on rencontre une équation dite de CHAPMAN-KOLMOGOROFF dont plusieurs auteurs ont publié *des* solutions.

Nous allons indiquer ici comment réduire à un problème plus simple la recherche de celles de ses solutions qui sont de carrés doublement sommables. Pour y arriver, il nous sera commode de préciser d'abord les propriétés qui nous seront utiles de cette catégorie de fonctions.

## Propriétés des fonctions de carrés doublement sommables.

Soit  $f(M, P)$  une fonction (réelle) de deux points  $M$  et  $P$  variables sur une région fixe  $V$  de l'espace à  $\nu$  dimensions. Nous dirons qu'elle est de carré *doublement* sommable sur  $V$ , si l'intégrale  $2\nu$ -uple

$$I = \int_V \int_V f^2(M, P) dM dP$$

est finie.

On pourrait rattacher l'étude de cette fonction à celle des fonctions  $\varphi(R)$  de carré simplement sommable sur le domaine  $V'$  de l'espace à  $2\nu$  dimensions parcouru par le point  $R$  qui y correspond au couple de points  $M, P$  variables indépendamment sur  $V$ . En posant  $f(M, P) = \varphi(R)$ , l'intégrale  $\int_{V'} \varphi^2(R) dR$  serait en effet finie comme égale à  $\int_V \int_V f^2(M, P) dM dP$ .

Mais, bien que cette indication puisse nous servir de guide, il nous sera nécessaire pour la suite de distinguer les rôles des deux points variables dont dépend  $f(M, P)$ , puisque dans l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF dont nous avons en vue la solution, ces rôles sont effectivement distincts.

Observons que  $I = \int_V \alpha(P) dP$  avec  $\alpha(P) = \int_V f^2(M, P) dM$ . Puisque  $I$  est fini,  $\alpha(P)$  est fini

sur  $V$ , sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle  $v_1$ . Ainsi, quand  $P$  est sur  $V - v_1$ ,  $f(M, P)$  est une fonction de  $M$  de carré sommable sur  $V$ . De même,  $f(M, P)$  est une fonction de  $P$  qui est de carré sommable sur  $V$  quand  $M$  est sur l'ensemble  $V - v_2$ , où  $v_2$  est de mesure nulle. Soit alors  $W = V - v_1 - v_2$ , alors  $f(M, P)$  est de carré sommable sur  $W$  par rapport à chacune de ses variables, l'autre étant fixée en un point arbitraire de  $W$ . Et on obtient  $W$  en ne retranchant de  $V$  qu'un ensemble de mesure nulle  $v_0 = v_1 + v_2$ .

Soit maintenant

$$X_1(M), X_2(M), \dots, X_n(M), \dots,$$

une suite illimitée de fonctions qui forment un système orthonormé et complet sur  $W$  (et par suite sur  $V$ ). C'est-à-dire que :

- a) les fonctions  $X_j(M)$  sont de carrés intégrables sur  $W$ ;  
 b) on a

$$\int_V X_i(M)X_j(M)dM = \delta_{ij}$$

avec

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j; \end{cases}$$

- c) enfin pour toute fonction  $\varphi(M)$  de carré sommable sur  $W$ , on a

$$\int_W \varphi^2(M)dM = \sum_{j=1}^{j=+\infty} \varphi_j^2$$

avec

$$\varphi_j = \int_W \varphi(M)X_j(M)dM.$$

Comme on a

$$\int_W \left[ \varphi(M) - \sum_{j \leq n} \varphi_j X_j(M) \right]^2 dM = \int_W \varphi^2(M)dM - \sum_{j \leq n} \varphi_j^2,$$

il résulte de la condition c) que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_W \left[ \varphi(M) - \sum_{j \leq n} \varphi_j X_j(M) \right]^2 dM = 0.$$

C'est ce qu'on exprime en disant que  $\sum_j \varphi_j X_j(M)$  converge vers  $\varphi(M)$  en moyenne quadratique sur  $W$  et ce qu'on représente par la notation

$$\varphi(M) \sim \sum_{j=1}^{j=+\infty} \varphi_j X_j(M).$$

Ceci étant, si  $f(M, P)$  est de carré doublement sommable sur  $V$ , cette fonction est, pour  $P$  fixe sur  $W$ , une fonction de  $M$  de carré sommable sur  $W$ , et l'on a

$$(1) \quad f(M, P) \sim \sum_j f_j(P)X_j(M)$$

avec

$$(2) \quad f_j(P) = \int_W f(M, P)X_j(M)dM,$$

$$(3) \quad \int_W f^2(M, P)dM = \sum_j f_j^2(P).$$

Mais on a, d'après l'inégalité de SCHWARZ

$$\int_W f_j^2(P)dP \leq \int_W \left[ \int_W f^2(M, P)dM \right] \left[ \int_W X_j^2(M)dM \right] dP$$

D'où :

$$\int_{\bar{W}} f_j^2(P) dP \leq I.$$

Ainsi,  $f_j(P)$  est de carré sommable sur  $W$ , et l'on peut écrire

$$(4) \quad f_j(P) \sim \sum_k f_{jk} X_k(P)$$

avec

$$f_{jk} = \int_{\bar{W}} f_j(P) X_k(P) dP,$$

d'où

$$(5) \quad f_{jk} = \int_{\bar{W}} \int_{\bar{W}} f(M, P) X_j(M) X_k(P) dM dP$$

$$(6) \quad \int_{\bar{W}} f_j^2(P) dP = \sum_k f_{jk}^2.$$

Ce qui précède invite à former la série double

$$\sum_{j, k} f_{jk} X_j(M) X_k(P),$$

à étudier sa convergence et à comparer sa somme à  $f(M, P)$ .

Observons d'abord que d'après (6), on a pour la somme

$$\sigma_{n, p} = \sum_{j \leq n} \sum_{k \leq p} f_{jk}^2 \leq \sum_{j \leq n} \int_{\bar{W}} f_j^2(P) dP = \int_{\bar{W}} \left[ \sum_{j \leq n} f_j^2(P) \right] dP$$

et d'après (3)

$$\sigma_{n, p} \leq \int_{\bar{W}} \int_{\bar{W}} f^2(M, P) dM dP = I.$$

Donc la *série double*  $\sum_{j, k} f_{jk}^2$ , à termes  $\geq 0$ , est convergente et sa somme  $\sigma$  est  $\leq I$ .

De plus

$$\sigma \geq \sum_{j \leq n} \left[ \sum_{k=1}^{k=+\infty} f_{jk}^2 \right] = \sum_{j \leq n} \int_{\bar{W}} f_j^2(P) dP.$$

D'où :

$$\sigma \geq \int_{\bar{W}} u_n(P) dP$$

avec

$$u_n(P) = \sum_{j \leq n} f_j^2(P) dP \leq \int_{\bar{W}} f^2(M, P) dM = a(P).$$

Or  $u_n(P)$  étant une fonction non décroissante de  $n$  et qui reste au plus égale à une fonction sommable  $a(P)$  vers laquelle elle tend, d'après (3),  $\int_{\bar{W}} u_n(P) dP$  tend vers  $\int_{\bar{W}} a(P) dP = I$ . Donc  $\sigma \geq I$ .

On a donc :

$$I \leq \sigma \leq I,$$

d'où

$$(7) \quad \sum_{j,k} f_{jk}^2 = I = \int_W \int_W f^2(M, P) dM dP.$$

Ceci étant, considérons l'infinité dénombrable des couples d'entiers  $j, k$ , ordonnons-les en une suite à un seul indice  $l$  et représentons par  $\sum_{j,k}^{l \leq n}$  la sommation opérée en considérant seulement les couples  $j, k$  correspondant à  $l \leq n$ . Suivant une idée due à M. SEVERI, nous appellerons série double convergente, une série double  $\sum_{j,k}^{l \leq n} u_{jk}$  telle que  $\sum_{j,k} u_{jk}$  ait une limite, quand  $n$  croît (quel que soit l'ordre suivant lequel sont rangés les couples  $jk$ ) et telle que cette limite soit elle-même indépendante de cet ordre.

Il est d'ailleurs clair que si la série double est à termes positifs ou nuls, il suffit que les sommes d'un nombre fini de ses termes soient bornées dans leur ensemble pour que la série soit convergente.

Formons maintenant

$$0 \leq \int_W \int_W \left\{ f(M, P) - \sum_{j,k}^{l \leq n} f_{jk} X_j(M) X_k(P) \right\}^2 dM dP.$$

D'après (5), le second membre est égal à

$$I - \sum_{j,k}^{l \leq n} f_{jk}^2.$$

Quel que soit l'ordre adopté pour les  $f_{jk}$ , le second membre tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$  d'après (7). On a donc :

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_W \int_W \left\{ f(M, P) - \sum_{j,k}^{l \leq n} f_{jk} X_j(M) X_k(P) \right\}^2 dM dP = 0.$$

C'est ce que nous exprimerons en disant que  $\sum_{j,k} f_{jk} X_j(M) X_k(P)$  converge vers  $f(M, P)$  en double moyenne quadratique sur  $W$  et c'est que nous représentons par la notation

$$(9) \quad f(M, P) \cong \sum_{j,k} f_{jk} X_j(M) X_k(P),$$

où

$$(5) \quad f_{jk} = \int_W \int_W f(M, P) X_j(M) X_k(P) dM dP.$$

D'ailleurs, n'oublions pas que la série double  $\sum_{j,k} f_{jk} X_j(M) X_k(P)$  peut aussi être sommée par lignes ou par colonnes, mais par deux moyennes successives simplement quadratiques, prises seulement sur  $W$ , d'après les relations (4) et (1).

Aucun de ces deux modes de convergence de la série double ne définit complètement sa somme. C'est-à-dire qu'il existe d'autres fonctions  $r(M, P)$  que  $f(M, P)$ , telles qu'on ait aussi

$$(10) \quad r(M, P) \cong \sum_{j,k} f_{jk} X_j(M) X_k(P).$$

En effet :

1°) S'il existe une telle fonction  $r(M, P)$ , alors, en posant

$$S_n = \sum_{\substack{j, k \\ j, k \leq n}} f_{jk} X_j(M) X_k(P),$$

on aura

$$0 \leq \sqrt{\int_V \int_V (f-r)^2 dM dP} \leq \sqrt{\int_V \int_V (f-S_n)^2 dM dP} + \sqrt{\int_V \int_V (r-S_n)^2 dM dP}.$$

En faisant croître  $n$  indéfiniment, on voit que

$$\int_V \int_V (f-r)^2 dM dP = 0,$$

ce qu'on pourra représenter par la notation  $f \cong r$ . Dès lors la fonction  $\varrho(P) = \int_V (f-r)^2 dM$

est nulle sur  $V$  sauf peut-être sur un ensemble  $e$  de mesure nulle. Alors, si  $P_0$  est sur  $V - e$ ,  $f(M, P_0) - r(M, P_0)$  est nul sur  $V$  sauf sur un ensemble nulle  $e_0$  (qui peut varier avec  $P_0$ ).

2°) Réciproquement, si  $r$  est une fonction de carré doublement sommable qui ne diffère que de cette façon de  $f$ , on aura

$$\int_V \int_V r(M, P) X_j(M) X_k(P) dM dP = f_{jk}$$

et l'égalité (10) s'ensuivra.

Enfin, observons qu'il existe un seul développement de la forme (9). Autrement dit, si l'on a

$$(8') \quad f(M, P) \cong \sum_{j, k} f'_{jk} X_j(M) X_k(P)$$

on a nécessairement  $f_{jk} = f'_{jk}$ . Car, on peut écrire :

$$f_{ih} = \int_W \int_W \left[ f(M, P) - \sum_{\substack{j \leq n \\ k \leq p}} f'_{jk} X_j(M) X_k(P) \right] X_i(M) X_h(P) dM dP + \sum_{\substack{j \leq n \\ k \leq p}} f'_{jk} \delta_{ji} \delta_{kh},$$

d'où pour  $n \geq j, p \geq k$  et en vertu de l'inégalité de SCHWARZ

$$|f_{ih} - f'_{ih}|^2 \leq \int_W \int_W \left[ f(M, P) - \sum_{\substack{j \leq n \\ k \leq p}} f'_{jk} X_j(M) X_k(P) \right]^2 dM dP.$$

Le premier membre est indépendant de  $n$  et  $p$  et d'après l'hypothèse (8'), le second membre est aussi petit que l'on veut quand  $n$  et  $p$  sont tous deux assez grands. Donc  $f_{ih} = f'_{ih}$ .

Il nous sera également utile pour la suite de développer l'intégrale

$$L(M, P) = \int_V G(M, Q) H(Q, P) dQ$$

où  $G, H$  sont de carrés doublement sommables sur  $V$ , connaissant les développements :

$$G(M, Q) \cong \sum_{j, i} g_{ji} X_j(M) X_i(Q),$$

$$H(Q, P) \cong \sum_{m, k} h_{mk} X_m(Q) X_k(P).$$

Pour cela, observons d'abord qu'en vertu de l'inégalité de SCHWARZ, on a

$$\int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} L^2(M, P) dM dP \leq \int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} \left[ \int_{\dot{V}} G^2(M, Q) dQ \right] \left[ \int_{\dot{V}} H^2(Q, P) dQ \right] dM dP \leq$$

$$\leq \left[ \int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} G^2(M, Q) dQ dM \right] \left[ \int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} H^2(Q, P) dQ dP \right].$$

Donc  $L$  est aussi de carré doublement sommable. Dès lors

$$L(M, P) \cong \sum_{j, k} l_{jk} X_j(M) X_k(P)$$

avec

$$l_{jk} = \int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} L(M, P) X_j(M) X_k(P) dM dP = \int_{\dot{V}} \left[ \int_{\dot{V}} G(M, Q) X_j(M) dM \right] \left[ \int_{\dot{V}} H(Q, P) X_k(P) dP \right] dQ$$

$l_{jk}$  est donc de la forme

$$l_{jk} = \int_{\dot{V}} \alpha(Q) \beta(Q) dQ.$$

Nous savons que la fonction  $G(M, Q)$  est de carré sommable par rapport à chaque variable séparément sur l'ensemble  $V - v_0'$  où  $v_0'$  est de mesure nulle; de même pour  $H(M, Q)$  sur  $V - v_0''$ , où  $v_0''$  est de mesure nulle. Soit  $V'$  l'ensemble  $V - v_0' - v_0''$ . Les fonctions

$$\alpha(Q) = \int_{\dot{V}} G(M, Q) X_j(M) dM,$$

$$\beta(Q) = \int_{\dot{V}} H(Q, P) X_k(P) dP,$$

sont alors de carrés sommables sur  $V'$  et l'on a

$$l_{jk} = \int_{\dot{V}'} \alpha(Q) \beta(Q) dQ,$$

avec, sur  $V'$

$$\alpha(Q) \cong \sum_i \alpha_i X_i(Q),$$

$$\beta(Q) \cong \sum_m \beta_m X_m(Q).$$

Dès lors, d'après l'égalité de PARSEVAL

$$l_{jk} = \sum_i \alpha_i \beta_i$$

avec

$$\alpha_i = \int_{\dot{V}'} a(Q) X_i(Q) dQ = \int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} G(M, Q) X_j(M) X_i(Q) dM dQ$$

d'où  $\alpha_i = g_{ji}$  et de même  $\beta_i = h_{ik}$ .

D'où finalement

$$(11) \quad l_{jk} = \sum_i g_{ji} h_{ik}.$$

### Réduction du problème.

Soit  $V$  un ensemble mesurable dans l'espace à  $\nu$  dimensions. L'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF relative à  $V$  est

$$(C) \quad F(M, s; P, t) = \int_{\dot{V}} F(M, s; Q, u) F(Q, u; P, t) dQ, \quad \text{pour } s < u < t.$$

Dans le problème de probabilités qui conduit à cette équation,  $F$  est une densité de probabilité qui ne joue qu'un rôle accessoire. Ce qu'il s'agit de déterminer c'est la probabilité

$$\tilde{\omega}(M, s; v, t) = \int_v F(M, s; P, t) dP$$

où  $v$  est une portion quelconque (mesurable) de  $V$ . Il n'y a donc pas d'inconvénient pour la détermination de  $\tilde{\omega}$  que  $F$  soit infini ou indéterminé sur un ensemble de mesure nulle de positions de  $P$ .

Cherchons maintenant la solution la plus générale de (C), telle que pour chaque système de valeurs de  $s, t$  ( $s < t$ ) l'intégrale double (en réalité  $2\nu$ -uple)

$$I(s, t) = \int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} F^2(M, s; P, t) dM dP$$

soit finie (la fonction  $I(s, t)$  étant bornée ou non).

En vertu des propriétés générales des fonctions de carrés doublement sommables, on a

$$(12) \quad F(M, s; P, t) \cong \sum_{j, k} f_{jk}(s, t) X_j(M) X_k(P)$$

$$\int_{\dot{V}} \int_{\dot{V}} F^2(M, s; P, t) dM dP = \sum_{j, k} f_{jk}^2(s, t)$$

et

$$\int_{\dot{V}} F(M, s; Q, u) F(Q, u; P, t) dQ \cong \sum_{j, k} f'_{jk}(s, t) X_j(M) X_k(P)$$

avec

$$f'_{jk}(s, t) = \sum_i f_{ji}(s, u) f_{ik}(u, t), \quad s < u < t.$$



Si  $F$  est solution de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF,  $f_{jk}(s, t)$  et  $f'_{jk}(s, t)$  s'expriment tous deux en vertu de (5) par la même formule

$$f_{jk}(s, t) = \int_V \int_V F(M, s; P, t) X_j(M) X_k(P) dM dP = f'_{jk}(s, t);$$

par suite les  $f_{jk}(s, t)$  vérifient l'équation fonctionnelle

$$f_{jk}(s, t) = \sum_i f_{ji}(s, u) f_{ik}(u, t), \quad s < u < t$$

et la série double  $\sum_{j, k} f_{jk}^2(s, t)$  est convergente pour  $s < t$ .

Inversement, supposons ces deux conditions réalisées. Alors la série

$$\sum_{j, k} f_{jk}(s, t) X_j(M) X_k(P)$$

converge en double moyenne quadratique vers une fonction  $F(M, s; P, t)$  de carré doublement sommable sur  $V$  et cette fonction vérifié

$$(C_g) \quad F(M, s; P, t) \simeq \int_V F(M, s; Q, u) F(Q, u; P, t) dQ.$$

pour  $s < u < t$ .

Appellons l'équation  $(C_g)$ , l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF généralisée. On voit que notre méthode nous fournit non seulement les solutions de l'équation  $(C)$ , mais aussi les solutions de l'équation plus générale  $(C_g)$ . Seulement la méthode ne permet pas de distinguer parmi les solutions de  $(C_g)$ , celles qui sont solutions de  $(C)$ .

Mais nous avons observé que la véritable inconnue est  $\tilde{\omega}(M, s; v, t)$ , qui, d'après l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF, intégrée sur  $v$  par rapport à  $P$ , vérifie l'équation

$$(C_l) \quad \tilde{\omega}(M, s; v, t) = \int_V F(M, s; Q, u) \tilde{\omega}(Q, u; v, t) dQ.$$

Or, si  $F$  est solution de  $(C_g)$ , on a

$$(13) \quad F(M, s; P, t) = \int_V F(M, s; Q, u) F(Q, u; P, t) dQ + \theta(M, s; P, t)$$

avec

$$\int_V \int_V \theta^2(M, s; P, t) dM dP = 0$$

de sorte que la fonction

$$\theta_1(M, s, t) = \int_V \theta^2(M, s; P, t) dP$$

est nulle sur  $V$  sauf peut être sur un ensemble  $w$ , de mesure nulle, de positions de  $M$ . On a donc, pour  $M$  fixe, sur  $V-w$ :

$$\theta(M, s; P, t) = 0$$

quand  $P$  varie sur  $V$  presque partout. Par suite, en intégrant (13) sur  $v$  pour  $M$  fixe sur  $V-w$ , on aura

$$\tilde{\omega}(M, s; v, t) = \int_V F(M, s; \varphi, u) \tilde{\omega}(Q, u; v, t) d\varphi.$$

Dès lors, toute solution  $F$  de l'équation  $(C_g)$  fournit une fonction  $\tilde{\omega}$  qui vérifie l'équation  $(C_f)$  quels que soient  $M, s, t$  pourvu que  $s < t$  et que  $M$  reste en dehors de l'ensemble  $w$  de mesure nulle ( $w$  pouvant d'ailleurs varier avec  $s$  et  $t$ ).

D'ailleurs, la difficulté disparaît si l'on concentre son attention sur les solutions  $F(M, s; P, t)$  de  $(C)$  qui, pour  $s, t$  fixes ( $s < t$ ), sont des fonctions continues de  $M$  et de  $P$ .

En effet, ce sont d'abord des solutions de  $(C_g)$ . Réciproquement, si  $F$  est solution continue de  $(C_g)$  la fonction

$$\Theta(M, s; P, t) = F(M, s; P, t) - \int_V F(M, s; Q, u) F(Q, u; P, t) dQ$$

est continue en  $M$  et  $P$  et telle que

$$\int_V \int_V \Theta^2(M, s; P, t) dM dP = 0.$$

Si, comme on le suppose,  $V$  n'est pas de mesure nulle, cette égalité ne peut avoir lieu que si  $\Theta \equiv 0$ . C'est-à-dire que toute solution de  $(C_g)$  qui est une fonction continue de  $M$  et  $P$  est aussi une solution de  $C$ .

#### Application aux noyaux itérés.

Dans la théorie des équations intégrales, on appelle noyaux itérés les fonctions  $K_n(M, P)$  telles que

$$(15) \quad K_{n+p}(M, P) = \int_V K_n(M, Q) K_p(Q, P) dQ.$$

Supposons que  $K_n, K_p$ , soient de carrés doublement sommables sur  $V$ . Alors  $K_{n+p}$  sera aussi de carré doublement sommable sur  $V$  et on aura, par exemple

$$(16) \quad K_n(M, P) \cong \sum_{j, k} \beta_{jk}(n) X_j(M) X_k(P).$$

Alors, d'après (15) et (11), on aura

$$(17) \quad \beta_{jk}(n+p) = \sum_i \beta_{ji}(n) \beta_{ik}(p).$$

De plus, la série double  $\sum_{j,k} \beta_{jk}^2(n)$  sera convergente.

Réciproquement, si les  $\beta$  vérifient ces deux conditions, l'expression (16) est solution de l'équation d'itération (15).

Dans le cas actuel, le système de  $X_j$  est l'un quelconque des systèmes ortho-normés et complets. On pourra simplifier la formule obtenue en choisissant le système des  $X_j$  de sorte que l'expression de  $K_1$  soit plus simple. C'est-à-dire de façon que le système des  $\beta_{jk}(1)$  soit plus simple. Il en résultera, en général que le système des  $\beta_{jk}(n)$  sera aussi plus simple.

Revenons à l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF ( $C_g$ ). La recherche de toutes ses solutions de carré doublement sommable sur  $V$  est maintenant ramenée à celle de toutes les solutions du système

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (14) \quad f_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} f_{ji}(s, u) f_{ik}(u, t); \quad (s < u < t) \\ (18) \quad \sum_{j=1}^{j=+\infty} \sum_{k=1}^{k=+\infty} f_{jk}^2(s, t) < +\infty. \end{array} \right.$$

#### Solutions du système réduit (I).

La détermination complète de toutes les solutions de ce système est remise à plus tard. Toutefois des considérations immédiates permettent d'en obtenir des solutions extrêmement générales.

Rappelons d'abord que nous avons obtenu <sup>(1)</sup> ailleurs le système de solutions continues le plus général de l'équation fonctionnelle

$$(19) \quad \varphi_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=r} \varphi_{ji}(s, u) \varphi_{ik}(u, t) \\ s < u < t, \quad \left. \begin{array}{l} j \\ k \end{array} \right\} = 1, 2, \dots, r.$$

Cette solution continue est de la forme

$$(20) \quad \varphi_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=r} a_{ji}(s) b_{ki}(t)$$

<sup>(1)</sup> *Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne*, Bull. Soc. Math. France, t. LX, 1932, pp. 1-36. Voir aussi t. LXII, 1934, pp. 68-83.

où les fonctions  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues formant un système biorthonormé relativement aux second indices, c'est-à-dire tel que

$$(21) \quad \sum_{i=1}^{i=r} a_{ij}(u) b_{ik}(u) = \delta_{jk}.$$

En négligeant la condition de continuité, on s'assure immédiatement que l'expression (20) fournit une solution de (14), quelles que soient les fonctions  $a_{ji}(s)$ ,  $b_{ki}(t)$ , pourvu qu'elles satisfassent à la condition (21).

Dès lors en revenant à l'équation (14), on est naturellement conduit à se demander s'il existe des solutions de cette équation de la forme

$$(22) \quad f_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} a_{ji}(s) b_{ki}(t).$$

Pour qu'on soit assuré de la convergence de (22), il est naturel de supposer que les séries

$$(23) \quad \sum_i a_{ji}^2(s), \quad \sum_i b_{ki}^2(t)$$

sont convergentes. On a alors

$$(24) \quad f_{jk}^2(s, t) \leq \sum_i a_{ji}^2(s) \sum_i b_{ki}^2(t).$$

Mais il faut réaliser encore la condition (18). Ceci conduit naturellement à imposer aux  $a$  et  $b$  la condition que les séries doubles

$$(25) \quad \sum_{j,i} a_{ji}^2(s), \quad \sum_{k,i} b_{ki}^2(t)$$

sont convergentes. Car alors, en vertu de (24), on aura l'inégalité

$$\sum_{j,k} f_{jk}^2(s, t) \leq \left[ \sum_{j,i} a_{ji}^2(s) \right] \left[ \sum_{k,i} b_{ki}^2(t) \right]:$$

la condition (18) sera aussi vérifiée. Et d'ailleurs, si les séries doubles (25) sont convergentes, la convergence — précédemment imposée —, de  $\sum_i a_{ji}^2(s)$  et de  $\sum_i b_{ki}^2(t)$  se trouvera réalisée d'elle-même.

Ceci étant, substituons l'expression (22) dans l'équation (14). Il faudra (\*) qu'on ait

$$(26) \quad \sum_i a_{ji}(s) b_{ki}(t) = \sum_l \left[ \sum_i a_{ji}(s) b_{li}(u) \right] \left[ \sum_h a_{lh}(u) b_{kh}(t) \right] = \\ = \sum_{i,h} \left\{ a_{ji}(s) b_{kh}(t) \left[ \sum_l a_{lh}(u) b_{li}(u) \right] \right\}.$$

(\*) Grâce à la convergence des séries doubles (25), on vérifie que les séries qui figurent dans (26) sont convergentes et les égalités (26) elles-mêmes sont bien des conséquences de (22) et de (14).

Si donc on généralise la condition (21), en imposant ici aux  $a, b$  la condition

$$(27) \quad \sum_{l=1}^{l=+\infty} a_{lh}(u)b_{li}(u) = \delta_{hi}$$

— où, remarquons-le, le premier membre est une série convergente, en vertu de la convergence des séries doubles (25) — la condition (26) sera bien vérifiée.

En résumé, *quelles que soient les fonctions  $a_{ji}(s), b_{ki}(t)$ , pourvu que les séries doubles (25) de leurs carrés soient convergentes:*

1°) les séries simples

$$\sum_{i=1}^{i=+\infty} a_{ji}(s)b_{ki}(t), \quad \sum_{l=1}^{l=+\infty} a_{lh}(u)b_{li}(u)$$

convergent ;

2°) le système de fonctions bien déterminées

$$(22) \quad f_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} a_{ji}(s)b_{ki}(t)$$

*fournit un système très général de solutions du système (14), (18) quand les  $a, b$  forment un système biorthonormé relativement aux seconds indices ; c'est-à-dire vérifient (27).*

**Une solution très générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff.**

De ce système de solutions  $f_{jk}(s, t)$  du système (14), (18), on peut déduire un système très général de solutions de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF ( $C_g$ ).

En portant les expressions (22) des  $f_{jk}(s, t)$  dans les expressions (12) de  $F(M, s; P, t)$ , on a pour  $s < t$

$$(28) \quad F(M, s; P, t) \cong \sum_{j, k} \left[ \sum_i a_{ji}(s)b_{ki}(t) \right] X_j(M) X_k(P)$$

d'où, au moins, d'abord, formellement

$$(29) \quad F(M, s; P, t) \cong \sum_i \left\{ \sum_j a_{ji}(s) X_j(M) \right\} \left\{ \sum_k b_{ki}(t) X_k(P) \right\}$$

ou

$$(30) \quad F(M, s; P, t) \cong \sum_i A_i(M, s) B_i(P, t)$$

avec

$$(31) \quad A_i(M, s) \cong \sum_j a_{ji}(s) X_j(M); \quad B_i(P, t) \cong \sum_k b_{ki}(t) X_k(P).$$

En vertu de la convergence des séries doubles (25), les seconds membres

de (31) convergent en moyenne quadratique vers des fonctions  $A_i(M, s)$ ,  $B_i(P, t)$  de carré sommable sur  $V$ . On a même en vertu de l'égalité de PARSEVAL

$$(32) \quad \sum_i \int_V A_i^2(M, s) dM = \sum_i \sum_j a_{ji}^2(s),$$

$$(32^{bis}) \quad \sum_i \int_V B_i^2(P, t) dP = \sum_i \sum_k [b_{ki}(t)]^2.$$

Done les premiers membres de (32) et (32<sup>bis</sup>) sont des séries convergentes. Il en résulte que le second membre de (30) converge en double moyenne quadratique vers une fonction  $H(M, s; P, t)$  de carré doublement sommable. Car on a

$$\begin{aligned} \iint \left[ \sum_{i=n}^{i=n+p} A_i(M, s) B_i(P, t) \right]^2 dM dP &\leq \left\{ \int_V \left[ \sum_{i=n}^{i=n+p} A_i^2(M, s) \right] dM \right\} \left\{ \int_V \left[ \sum_{i=n}^{i=n+p} B_i^2(P, t) \right] dP \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{i=n}^{i=n+p} \left[ \sum_j a_{ji}^2(s) \right] \right\} \left\{ \sum_{i=n}^{i=n+p} \left[ \sum_k b_{ki}^2(t) \right] \right\} \end{aligned}$$

qui tend vers zéro avec  $n$ .

Alors, si

$$h_{jk}(s, t) = \int_V \int_V H(M, s; P, t) X_j(M) X_k(P) dM dP,$$

on a

$$h_{jk}(s, t) = \sum_i \int_V \int_V A_i(M, s) B_i(P, t) X_j(M) X_k(P) dM dP = \sum_i a_{ji}(s) b_{ki}(t).$$

Done  $F(M, s; P, t)$  et  $H(M, s; P, t)$  ayant les mêmes coefficients  $h_{jk}(s, t) = f_{jk}(s, t)$  l'égalité (30) se trouve bien maintenant rigoureusement établie.

De plus, on a, en vertu de l'égalité de PARSEVAL

$$\int_V A_i(M, s) B_k(M, s) dM = \sum_i a_{ij}(s) b_{ik}(t) = \delta_{jk}.$$

En résumé, on a obtenu une solution de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF ( $C_g$ ) qui est de la forme (30) où les fonctions  $A, B$  sont chacune de carré sommable sur  $V$ , où les séries

$$\sum_i \int_V A_i^2(M, s) dM; \quad \sum_i \int_V B_i^2(P, t) dP$$

sont convergentes et où les  $A_j(M, s)$ ,  $B_k(M, s)$  forment un système biorthonormé sur  $V$ , c'est-à-dire tel que

$$\int_V A_j(M, s) B_k(M, s) dM = \delta_{jk}.$$

Réciproquement, si on choisit arbitrairement des fonctions  $A, B$  satisfaisant à ces trois conditions, la formule (30) définit une fonction de

*carré doublement sommable sur V qui vérifie l'équation de Chapman-Kolmogoroff (C<sub>g</sub>), comme on le voit immédiatement en substituant (30) dans (C<sub>g</sub>).*

Nous retrouvons ainsi <sup>(3)</sup> — en le précisant dans le cas des solutions de carré doublement sommable — un type très général de solutions de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF que nous avons obtenu, pour  $s < t$ , par une toute autre méthode dans une note des Lincei <sup>(4)</sup>, développée ailleurs <sup>(5)</sup>.

**Autre sorte de réduction.**

Dans ce qui précède, nous avons réduit la recherche des solutions de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF relative à un domaine  $V$  à  $\nu$  dimensions à celle des solutions d'une équation fonctionnelle (14), relative, si l'on peut dire, à un ensemble dénombrable, celui des valeurs entières de la variable auxiliaire  $i$  de (14).

On peut aussi, ce qui peut avoir certains avantages — bien que la réduction soit moins grande — réduire la résolution de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF (C<sub>g</sub>) à celle d'une autre équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF mais relative à un domaine à une dimension et plus précisément à un segment rectiligne. En effet; on a vu que la solution de (C<sub>g</sub>) est de la forme (22) où les  $f_{jk}(s, t)$  sont la solution la plus générale du système

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (14) \quad f_{jk}(s, t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} f_{ji}(s, u) f_{ik}(u, t), \quad (s < u < t), \\ (18) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^{j=+\infty \\ k=+\infty} f_{jk}^2(s, t) < +\infty, \quad (s < t). \end{array} \right.$$

Or tout système de solutions de (33) peut être considéré d'après ce qui précède comme le système des coefficients du développement

$$\Phi(x, s; y, t) \cong \sum f_{jk}(s, t) U_j(x) U_k(y)$$

d'une solution  $\Phi(x, s; y, t)$  de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF relative au segment rectiligne  $(a, b)$

$$(34) \quad \Phi(x, s; y, t) \cong \int_a^b \Phi(x, s; z, u) \Phi(z, u; y, t) dz.$$

<sup>(3)</sup> Cependant, ces trois conditions suffiraient à faire vérifier l'équation (C<sub>g</sub>) quels que soient  $s$  et  $t$ . On n'a donc pas nécessairement ainsi toutes les solutions qui ne sont supposées valables que pour  $s < t$ .

<sup>(4)</sup> Rend. Acc. Lincei, vol. XX, 1934, pp. 95-99.

<sup>(5)</sup> *Sur l'équation fonctionnelle de Chapman et sur le problème des probabilités en chaîne.* Proc. London Math. Soc., 1935.

Par suite,  $f_{jk}(s, t)$  est de la forme

$$(35) \quad f_{jk}(s, t) = \int_a^b \Phi(x, s; y, t) U_j(x) U_k(y) dx dy.$$

Ainsi, la solution (de carré doublement sommable sur  $V$ ) la plus générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff généralisée ( $C_g$ ) relative à un domaine  $V$  à  $\nu$  dimensions peut s'exprimer sous la forme

$$F(M, s; P, t) \underset{\substack{n \rightarrow +\infty \\ p \rightarrow +\infty}}{\cong} \lim. \text{ en moy. quadr. } \int_a^b \int_a^b \Phi(x, s; y, t) W_{n,p}(M, P; x, y) dx dy$$

où  $\Phi(x, s; y, t)$  est la solution (de carré doublement sommable sur  $(a, b)$ ) la plus générale de l'équation de Chapman-Kolmogoroff généralisée (34) relative au segment  $(a, b)$  et où  $W_{n,p}(M, P; x, y)$  est une fonction de  $n, p, M, P, x, y$  convenablement choisie une fois pour toutes connaissant  $V$  et  $(a, b)$  — indépendamment de  $\Phi$  et de  $F$  — et de carré doublement sommable sur  $V$ , doublement sommable sur  $(a, b)$ .

On peut prendre

$$W_{n,p}(M, P; x, y) = \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^{\substack{j=n \\ k=p}} X_j(M) X_k(P) U_j(x) U_k(y)$$

où les  $X_j(M)$ , forment un système orthonormé et complet quelconque sur  $V$  et les  $U_j(x)$  forment un système orthonormé et complet quelconque sur  $(a, b)$ .

Il résulte bien de la proposition en italique que la résolution dans le cas d'un domaine à  $\nu$  dimensions peut être réduite à la résolution dans le cas d'un domaine à une dimension.

#### Système biorthonormé.

Il paraît naturel de supposer qu'il est peut-être parfois plus commode, bien qu'il en résulte une légère complication, de substituer au système orthonormé des  $X_j$ , un système biorthonormé.

Considérons deux suites de fonctions de carrés intégrables sur  $V$

$$X_1(M), X_2(M), \dots, Y_1(M), Y_2(M), \dots$$

Ce système sera biorthonormé sur  $V$  si

$$\int_V X_j(M) Y_k(M) dM = \delta_{jk}.$$

Il sera complet si, pour toute fonction  $f(M, P)$ , de carré doublement sommable, il existe des constantes  $f_{jk}$  telles que

$$(36) \quad f(M, P) \cong \sum_{j,k} f_{jk} X_j(M) Y_k(P),$$



On aura, alors, nécessairement

$$(37) \quad f_{jk} = \int_V \int_V f(M, P) Y_j(M) X_k(P) dM dP$$

Nous ne dirons rien sur l'emploi d'un système biorthonormé pour la solution générale de l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROFF.

Nous nous contenterons de signaler un cas particulier.

#### Cas des noyaux itérés.

Dans ce cas, au lieu de prendre pour les  $X, Y$  un système quelconque biorthonormé et complet, on peut prendre le système biorthonormé des fonctions auxiliaires de SCHMIDT relatives à  $K_1$  et à  $V$  et obtenir le résultat ci-dessous par un raisonnement direct <sup>(6)</sup> sans se préoccuper si ce système est complet.

Avec les notations plus haut, si  $K_1(M, P)$  est de carré doublement sommable sur  $V$ ,  $K_n$  le sera aussi et en posant

$$(38) \quad K_n \cong \sum_{j, k} \gamma_{jk}(n) X_j(M) Y_k(P)$$

la série double  $\sum_{j, k} \gamma_{jk}^2(n)$  sera convergente et on aura

$$(39) \quad \gamma_{jk}(n+p) = \sum_i \gamma_{ji}(n) \gamma_{ik}(p).$$

---

<sup>(6)</sup> Voir à ce sujet notre note aux C. R., 1934, t. 199, p. 1008 : *Sur une expression générale des noyaux itérés*, ainsi que le développement de cette note qui paraîtra en 1936 dans le Journal de Mathématiques.