

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

WILHELM DAMKÖHLER

**Periodische Extremalen vom Minimumtyp in Ringbereichen**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 5, n° 2  
(1936), p. 127-140

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1936\\_2\\_5\\_2\\_127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_2_127_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PERIODISCHE EXTREMALEN VOM MINIMUMTYP  
IN RINGBEREICHEN

von WILHELM DAMKÖHLER (München).

**Einleitung.**

Vor längerer Zeit hat Herr L. TONELLI <sup>(1)</sup> das spezielle Variationsproblem

$$(E. 1) \quad F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \equiv \varrho(x, y) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \dot{x} \cdot \alpha(x, y) + \dot{y} \cdot \beta(x, y), \quad \varrho(x, y) > 0$$

nach seinen Methoden auf die Existenz periodischer Extremalen hin untersucht und einen Beweis für das auf WHITTAKER <sup>(2)</sup> und BIRKHOFF <sup>(3)</sup> zurückgehende Kriterium gegeben, welches die Existenz periodischer Extremalen für dieses Variationsproblem (E. 1) in besonders gearteten Ringbereichen  $\mathfrak{R}$  der  $xy$ -Ebene ausspricht. Wird nämlich  $\mathfrak{R}$  von den zwei einfach geschlossenen JORDANSCHEN Kurven  $L_1$  und  $L_2$  begrenzt, von denen etwa  $L_1$  die *innere* Randkurve sein mag, und ist in  $\mathfrak{R}$  ein positiver Umlaufungssinn um  $L_1$  herum festgesetzt (bei dem z. B. das Innere ( $L_1$ ) von  $L_1$  zur Linken liegen möge), so soll  $\mathfrak{R}$  bezüglich des Variationsproblems  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  *gerichtet extremalkonvex* heissen, wenn je zwei beliebige Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Rande von  $\mathfrak{R}$ , sobald sie nur hinreichend benachbart sind, durch eine ganz innerhalb  $\mathfrak{R}$  (bis auf die Endpunkte) verbleibende Extremale  $\mathfrak{E}$  verbunden werden können, die in der vorgeschriebenen positiven Richtung von dem einen Punkt  $P_1$  zu dem andern  $P_2$  führt. Dann besagt das WHITTAKER-BIRKHOFFSche Kriterium, dass unter den Voraussetzungen: 1°)  $\mathfrak{R}$  sei für (E. 1) *gerichtet extremalkonvex*, und 2°)

$$(E. 2) \quad \alpha_y - \beta_x \neq 0 \quad \text{in } \mathfrak{R},$$

eine einfach geschlossene Extremale existiert, die  $L_1$  im positiven Sinne einmal umläuft. Während aber Herr L. TONELLI infolge der Anordnung, die er seinem Beweis gibt, noch wesentlichen Gebrauch macht von der Bedingung (E. 2), so lässt sich doch durch eine leichte Modifikation des Kurvenbereiches, bezüglich dessen

---

<sup>(1)</sup> L. TONELLI: *Sulle orbite periodiche irreversibili*. Memorie R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna (Cl. Scienze fis.), serie 8, vol. 1 (1924), pp. 21-25.

<sup>(2)</sup> WHITTAKER: *On periodic orbits*. Monthly notice of the Roy. Astr. Soc. London, vol. 62 (1902), pp. 186-193.

<sup>(3)</sup> G. D. BIRKHOFF: *Dynamical systems with two degrees of freedom*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18 (1917), pp. 224-232.

das absolute Minimum angenommen werden soll, zeigen, dass die TONELLIsche Idee kräftig genug ist, auch die Existenz einfach geschlossener Extremalen vom Minimumtyp zu sichern, wenn über das Variationsproblem  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  (das jetzt nicht einmal mehr die spezielle Form (E. 1) zu haben braucht!) überhaupt keine einschränkenden Annahmen gemacht werden (ausser den auch sonst in der Variationsrechnung üblichen Regularitätsforderungen).

Wir wollen nämlich das folgende Theorem beweisen:

**THEOREM.** - *Es sei  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  ein beliebiges positiv reguläres <sup>(4)</sup> Variationsproblem in der Weierstrass'schen Parameterdarstellung ( $t$ =Parameter) und  $\mathbb{R}$  ein Ringbereich in der  $xy$ -Ebene, der bezl.  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  gerichtet extremalkonvex ist. Dann gibt es in  $\mathbb{R}$  mindestens eine einfach geschlossene Extremale  $\mathbb{E}$ , welche die innere Randkurve  $L_1$  von  $\mathbb{R}$  im positiven Sinne umschliesst.  $\mathbb{E}$  ist vom Minimumtyp, d. h. sie liefert ein starkes Minimum im Vergleich zu allen positiv orientierten einfach geschlossenen Kurven aus  $\mathbb{R}$ , die in einer hinreichend schmalen Ringumgebung von  $\mathbb{E}$  verlaufen.*

Dieses Theorem spricht also eine ganz allgemeine geometrische Eigenschaft des Richtungsfeldes der Extremalenelemente in  $\mathbb{R}$  aus; es ist doch im höchsten Grade interessant, dass allein schon die Tatsache der Extremalkonvexität des Ringbereiches  $\mathbb{R}$  ausreicht, um sicher zu sein, dass sich irgendwo im Innern von  $\mathbb{R}$  die Linienelemente der Extremalen so zu einem glatten Kurvenzug zusammenschliessen lassen, der  $L_1$  im positiven Sinne umschliesst, also in gerade dem Sinne, der auch die Konvexität des Ringbereiches  $\mathbb{R}$  bestimmt.

Unser Beweis ruht auf folgenden beiden Säulen: 1° auf der Verwendung der Klasse  $\mathbb{C}$  von Kurvenkomplexen  $c$  (§ 1), und 2° auf der geschickten Ausnutzung des mehrfachen Zusammenhanges des Ringbereiches  $\mathbb{R}$  (§ 3), wodurch uns die Existenz eines vollständigen Differential

$$d\Phi = p(x, y) \cdot dx + q(x, y) \cdot dy$$

mit der Periode

$$\int_c d\Phi = \mu_0 > 0$$

auf jedem Komplex  $c \in \mathbb{C}$  gegeben wird (s. u.). Als Bindeglied erscheint das Funktional  $Z(c/\mu)$  des § 2, das über die Identität (4.3) zu der Ungleichung (5.2), d. h.

$$(E. 3) \quad \int_c F dt + \mu_0 \geq \frac{m}{2} \int_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

(4) D. H.

$$F_1 \equiv \frac{F_{\dot{x}} \dot{x}}{\dot{y}^2} = - \frac{F_{\dot{x}} \dot{y}}{\dot{x} \dot{y}} = \frac{F_{\dot{y}} \dot{y}}{\dot{x}^2} > 0.$$

führt, in der die positiven Zahlen  $\mu_0 > 0$  und  $m > 0$  von dem einzelnen Komplex  $\mathfrak{C} < \mathfrak{C}$  nicht mehr abhängen.

Aus (E. 3) schliesst man jetzt leicht auf die Existenz eines Grenzkomplexes  $\mathfrak{C}_0 < \mathfrak{C}$ , für den (§§ 5-7)

$$(E. 4) \quad \int_{\mathfrak{C}_0} F dt = J_0 = \text{abs. min.}$$

wird, und der, wie sich durch nähere Untersuchung (§§ 8-9) erkennen lässt, aus einer endlichen Anzahl einfach geschlossener Extremalen des Variationsproblems  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  besteht, die keine Punkte miteinander gemeinsam haben. Da nun die Komplexklasse  $\mathfrak{C}$  des § 1 so definiert wurde, dass jeder der ihr angehörenden Kurvenkomplexe  $\mathfrak{C}$  mindestens eine einfach geschlossene Kurve enthält, die  $L_1$  im positiven Sinne umschliesst, so haben wir damit wenigstens eine einfach geschlossene Extremale  $\mathfrak{E}$  erhalten, die im positiven Sinne einmal um  $L_1$  herumläuft. Dass  $\mathfrak{E}$  vom Minimumtyp ist, ist wegen (E. 4) selbstverständlich, während die Extremalkonvexität des Ringbereiches  $\mathfrak{R}$  verbürgt, dass  $\mathfrak{E}$  keinen Punkt auf dem Rande haben kann, ohne ganz mit ihm zusammenzufallen.

## I.

§ 1. - Es bedeute  $\mathfrak{C}$  die Gesamtheit aller Kurvenkomplexe  $\mathfrak{C}$  des Bereiches  $\mathfrak{R}$  mit folgenden Eigenschaften :

1°) Jeder Komplex  $\mathfrak{C} < \mathfrak{C}$  besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen einander nicht schneidenden <sup>(5)</sup>, orientierten, einfach geschlossenen und rektifizierbaren Kurven  $C_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) des Ringbereiches  $\mathfrak{R}$  der Art, dass die Gesamtlänge von  $\mathfrak{C}$ , — d. i. die Summe der Bogenlängen  $L_k = \text{Länge } C_k$  aller in  $\mathfrak{C}$  vorkommenden Kurven  $C_k$  —, beschränkt bleibt :

$$(1.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} L_k < \infty.$$

2°) Um nun die Orientierung einer geschlossenen Kurve  $C$  bequem festlegen zu können, ist es zweckmässig ihr die Zahlen  $+1$  oder  $-1$  zuzuordnen, je nachdem  $C$  « positive » oder « negative » Orientierung hat. Dann bestimmt sich die Orientierung eines jeden  $C_k$  im Komplex  $\mathfrak{C} < \mathfrak{C}$  eindeutig durch folgendes rekurrente Verfahren: Wird  $C_k$  von genau  $s$  ineinandergeschachtelten Kurven  $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(s)}$  des Komplexes  $\mathfrak{C}$  umschlossen (wobei  $C_k$  selbst in der Zählung ausser Acht zu lassen ist!), so hat  $C_k$  die Orientierung  $(-1)^s$ , also insbesondere die « posi-

<sup>(5)</sup> Es ist aber wohl erlaubt, dass zwei Kurven  $C'$  und  $C''$  des Komplexes  $\mathfrak{C}$  sich von aussen oder innen her in einzelnen Punkten oder auch ganzen Bogenstücken berühren; jedoch soll es nicht vorkommen, dass zwei Kurven mit verschiedener Orientierung dieselbe Punktmenge in der  $x, y$ -Ebene ausmachen.

tive » Orientierung +1, falls  $s=0$  ist, d. h.  $C_k$  überhaupt von keiner Kurve des Komplexes  $\mathfrak{C}$  umschlossen wird <sup>(6)</sup>.

Da wegen (1.1) eine jede Kurve  $C_k$  nur von höchstens endlich vielen Kurven des Komplexes  $\mathfrak{C}$  umschlossen wird, ist die Eindeutigkeit der Anweisung zur Festlegung ihrer Orientierung im Komplex offensichtlich.

3°) In jedem Komplex  $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}$  gibt es stets eine *ungerade* Anzahl (also mindestens *eine*) einfach geschlossener Kurven, welche die innere Randkurve  $L_1$  von  $\mathfrak{R}$  umschliessen. Mit Rücksicht auf 2) gibt es somit in jedem Komplex  $\mathfrak{C}$  auch mindestens eine Kurve, die  $L_1$  im positiven Sinne umläuft.

§ 2. - Auf der Komplexklasse  $\mathfrak{C}$  untersuchen wir jetzt etwas näher das Verhalten des Funktionals

$$(2.1) \quad Z(\mathfrak{C}/\mu) = \frac{\int_{\mathfrak{C}} (p_0 \cdot \dot{x} + q_0 \cdot \dot{y}) dt}{\mu + \int_{\mathfrak{C}} G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt};$$

hierin bedeuten  $p_0(x, y)$ ,  $q_0(x, y)$  zwei (in der ganzen  $xy$ -Ebene definierte) Polynome,  $\mu \geq 0$  einen nur auf positive Werte beschränkten Parameter und  $G(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  den Integranden eines positiv regulären Variationsproblems in der WEIERSTRASS'schen Normalform, der der Ungleichung

$$(2.2) \quad G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \geq m \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad m > 0, \quad (x, y) \in \mathfrak{R}$$

genügt. Wir setzen

$$(2.3) \quad A^*(\mu) = \sup_{\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}} Z(\mathfrak{C}/\mu)$$

und beweisen den

**Satz 1.** -  $|A^*(\mu)|$  ist für alle nicht negativen Werte von  $\mu$  gleichmässig beschränkt, und erfüllt die Limesgleichung

$$(2.4) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} |A^*(\mu)| = 0.$$

*Beweis:* Es bedeute  $(L_1)$  das in der  $xy$ -Ebene von der JORDAN'schen Kurve  $L_1$  berandete beschränkte Gebiet und

$$(2.5) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{R} \dot{\cup} (L_1)$$

die Vereinigung des Ringgebietes  $\mathfrak{R}$  mit dem Bereich  $(L_1)$ . Dann gibt es auf  $\mathfrak{A}$  für die dort überall stetige Funktion

$$(2.6) \quad j(x, y) = \frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{\partial q_0}{\partial x}$$

<sup>(6)</sup> Wir wollen hier einfür allemal das in der ganzen folgenden Arbeit eingehaltene Übereinkommen treffen, unter « positiver » Orientierung einer einfach geschlossenen Kurve  $C$  diejenige Orientierung zu verstehen, bei der ihr Inneres zur Linken gelegen ist. Für diesen Fall sind die Formeln der vorliegenden Arbeit berechnet. - Definiert man die « positive »

eine endliche obere Schranke  $M$  ihres absoluten Betrages :

$$(27) \quad |j(x, y)| \leq M, \quad (x, y) \in \mathfrak{A}.$$

Nun werde für den beliebig herausgegriffenen Komplex  $\mathfrak{C}$  die folgende Abzählung seiner ihn aufbauenden Kurven  $C$  vorgenommen :

SCHEMA  $S$ .

$C_1, C_2, \dots, C_{i_1}, \dots$ , sind die höchstens abzählbar unendlich vielen ausserhalb einander gelegenen einfach geschlossenen Kurven von  $\mathfrak{C}$ , die von *keiner* weiteren Kurve des Komplexes  $\mathfrak{C}$  mehr umfasst werden.

$C_{i_1, 1}, C_{i_1, 2}, \dots, C_{i_1 i_2}, \dots$ , sind die höchstens abzählbar unendlich vielen ausserhalb einander gelegenen einfach geschlossenen Kurven von  $\mathfrak{C}$  innerhalb  $C_{i_1}$ , die von keiner weiteren ebenfalls im Innern von  $C_{i_1}$  verlaufenden Kurve des Komplexes  $\mathfrak{C}$  umschlossen werden.

$C_{i_1 i_2, 1}, C_{i_1 i_2, 2}, \dots, C_{i_1 i_2 i_3}, \dots$ , sind desgl. die höchstens abzählbar vielen Kurven von  $\mathfrak{C}$  innerhalb  $C_{i_1 i_2}$ , die ausserhalb einander liegen und von keiner weiteren Kurve des Komplexes  $\mathfrak{C}$  innerhalb  $C_{i_1 i_2}$  umfasst werden. u. s. w.

Mit Hilfe dieser Numerierung des Schemas  $S$  wollen wir das Zählerintegral von (2.1) in der folgenden Form schreiben :

$$\int_{\mathfrak{C}} (p_0 \dot{x} + q_0 \dot{y}) dt = \sum_{i_1} \int_{C_{i_1}} (p_0 \dot{x} + q_0 \dot{y}) dt + \sum_{i_1 i_2} \int_{C_{i_1 i_2}} (p_0 \dot{x} + q_0 \dot{y}) dt + \sum_{i_1 i_2 i_3} \int_{C_{i_1 i_2 i_3}} (p_0 \dot{x} + q_0 \dot{y}) dt + \dots,$$

oder unter Anwendung des GREEN'schen Satzes und Berücksichtigung der Definitionsgleichung (2.6) sowie der Orientierungsregel des § 1 für die Kurven  $C_{i_1}, C_{i_1 i_2}, \dots$

$$(2.8) \quad \int_{\mathfrak{C}} (p_0 \dot{x} + q_0 \dot{y}) dt = - \sum_{i_1} \iint_{(C_{i_1} - \sum_{i_2} C_{i_1 i_2})} j(x, y) dx dy - \sum_{i_1 i_2 i_3} \iint_{(C_{i_1 i_2 i_3} - \sum_{i_4} C_{i_1 i_2 i_3 i_4})} j(x, y) dx dy - \dots$$

Hierin bedeutet in nicht misszuverstehender Weise  $(C_{i_1} - \sum_{i_2} C_{i_1 i_2})$  das Teilgebiet von  $\mathfrak{A}$ , welches  $C_{i_1}$  zur äusseren und die  $C_{i_1 i_2}$  zu inneren Randkurven hat, und

---

Orientierung einer einfach geschlossenen Kurve anders, so bleiben die Ergebnisse unserer Arbeit intakt, nur erleiden die sie beweisenden Formeln einige Vorzeichenänderungen.

in genau derselben Weise ist das Symbol  $(C_{i_1 i_2 i_3} - \sum_{i_4} C_{i_1 i_2 i_3 i_4})$  zu erklären. Bemerkte man nun, dass sich die Teilgebiete von  $\mathfrak{A}$ , über welche die Integrationen in (2.8) zu erstrecken sind, gegenseitig nicht überdecken, so bekommt man mit Rücksicht auf (2.7) die Abschätzung

$$(2.9) \quad \left| \int_{\mathfrak{C}} (p_0 \dot{x} + q_0 \dot{y}) dt \right| \leq M \cdot \iint_{\mathfrak{A}} dx dy,$$

und wenn man dies in (2.1) einsetzt und die Ungleichung (2.2) sowie  $\mu \geq 0$  beachtet:

$$(2.10) \quad |Z(\mathfrak{C}/\mu)| \leq \frac{M \cdot \iint_{\mathfrak{A}} dx dy}{\mu + m \int_{\mathfrak{C}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt}.$$

Nun ist aber die Gesamtlänge (§ 1)  $\int_{\mathfrak{C}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$  des Komplexes  $\mathfrak{C}$  mindestens so gross wie die Bogenlänge der kleinsten  $L_1$  umschliessenden konvexen Kurve  $\mathfrak{K}^*$ ; wir können daher aus (2.10) die weitere Ungleichung

$$(2.11) \quad |Z(\mathfrak{C}/\mu)| \leq \frac{M \cdot \iint_{\mathfrak{A}} dx dy}{\mu + m \cdot \int_{\mathfrak{K}^*} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt}.$$

ableiten, aus der, wie ohne weiteres ersichtlich, alle Behauptungen des Satzes 1 fließen.

## II.

§ 3. - Wir wenden jetzt unser Augenmerk dem mehrfachen Zusammenhang des Bereiches  $\mathfrak{R}$  zu. Es sei  $\mu_0 > 0$  ein solcher (nach Satz 1 sicher existierender) Parameterwert, für den

$$(3.1) \quad |A^*(\mu_0)| < +\frac{1}{2}$$

ist. Dann kann man aus den Elementen der Potentialtheorie folgendes entnehmen: es gibt zwei in  $\mathfrak{R}$  eindeutige und stetige Funktionen  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$ , die den Gleichungen

$$(3.2) \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \mathfrak{R},$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = \omega(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in (L_1)$$

genügen, wobei  $\omega(x, y)$  eine solche in einem inneren Teilbereich von  $(L_1)$  definierte, mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion bedeute, die nur die Bedingung

$$(3.4) \quad \oint_{L_1} (p \dot{x} + q \dot{y}) dt = - \iint_{(L_1)} \omega(x, y) dx dy = \mu_0 > 0$$

zu erfüllen hat, in der das links stehende Kurvenintegral im positiven Sinne über die Kurve  $L_1$  zu erstrecken ist (<sup>7</sup>). Das durch die Funktionen  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  bestimmte vollständige Differential

$$(3.5) \quad d\Phi = p(x, y)dx + q(x, y)dy$$

hat daher auf jeder geschlossenen, einmal um  $L_1$  im positiven Sinne herumlaufenden Kurve  $C$  die Periode

$$(3.6) \quad \oint_C d\Phi = \mu_0.$$

Die Existenz dieser Periodizitätsrelation ist es aber gerade, welche den Beweis unseres Theorems gelingen lässt. Man betrachte zu dem Ende nur die Ungleichung (5.2), die über (4.4) aus der Identität (4.3) entspringt.

### III.

§ 4. - Nach diesen vorbereitenden Ueberlegungen können wir in den eigentlichen Beweis des Theorems eintreten. Es sei also

$$(4.1) \quad F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$$

das in  $\mathbb{R}$  vorgelegte positiv reguläre Variationsproblem, bezl. dessen der Rand von  $\mathbb{R}$  gerichtet extremalkonvex ist. Dann kann man zwei Polynome  $p_0(x, y)$ ,  $q_0(x, y)$  finden (<sup>8</sup>), die mit einer gewissen positiven Konstanten  $m > 0$  in ganz  $\mathbb{R}$  die Ungleichung

$$(4.2) \quad G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \equiv F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + p_0(x, y) \cdot \dot{x} + q_0(x, y) \cdot \dot{y} \geq m \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$$

befriedigen. Sind nun  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  irgendwelche eindeutige und stetige Funktionen in  $\mathbb{R}$ , also insbesondere die gleichbezeichneten Funktionen des § 3, so besteht die folgende Identität:

$$(4.3) \quad \frac{\int_c (F + p \cdot \dot{x} + q \cdot \dot{y}) dt}{\int_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} \equiv \frac{\int_c (G + p \cdot \dot{x} + q \cdot \dot{y}) dt}{\int_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} \cdot \left\{ 1 - \frac{\int_c (p_0 \cdot \dot{x} + q_0 \cdot \dot{y}) dt}{\int_c (G + p \cdot \dot{x} + q \cdot \dot{y}) dt} \right\}.$$

(<sup>7</sup>) Vergl. hierzu: Enzykl. der math. Wiss., II, C. 3 (1901-1921), Artikel von L. LICHTENSTEIN, N. 8. - Man braucht bloss  $p = \psi_y$ ,  $q = -\psi_x$  zu setzen und  $\psi(x, y)$  aus den Gleichungen  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$  in  $\mathbb{R}$  resp.  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega$  in  $(L_1)$  zu bestimmen.

(<sup>8</sup>) Vergl. hierzu die § 3 und § 4 meiner Arbeit: *Ueber indefinite Variationsprobleme*, Math. Ann., Bd. 110 (1934), pp. 230-283. - NB! Die Existenz der Polynome  $p_0(x, y)$  und  $q_0(x, y)$  ist unabhängig von der Konvexität des Ringbereiches  $\mathbb{R}$ !



Wenn man jetzt ausdrücklich verlangt, dass  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  die in § 3 mit denselben Buchstaben bezeichneten Funktionen sein sollen, und wenn man bedenkt, dass auf Grund der Definition der Komplexklasse  $\mathfrak{C}$  (§ 1) für jedes  $c \in \mathfrak{C}$  die zu (3.6) analoge Periodizitätsbeziehung

$$\int_c (p \cdot \dot{x} + q \cdot \dot{y}) dt = \mu_0$$

gelten muss, so leitet man aus (4.3) sofort die andere Gleichung

$$(4.4) \quad \frac{\mu_0 + \int_c F dt}{\int_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} \equiv \frac{\mu_0 + \int_c G dt}{\int_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} \cdot \{1 - Z(c/\mu_0)\}, \quad (c \in \mathfrak{C})$$

ab, da ja die durch (4.2) definierte Funktion  $G(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  offensichtlich (2.2) erfüllt und daher mit ihr das Funktional  $Z(c/\mu)$  (2.1) gebildet werden kann.

§ 5. - Auf (4.4) ruht jetzt der HAUPT-Satz 2, der die Aussage unseres Theorems als Spezialfall enthält:

**Satz 2.** - *Das Funktional*

$$(5.1) \quad \mathfrak{J}_c = \int_c F dt$$

nimmt auf der Komplexklasse  $\mathfrak{C}$  (§ 1) sein absolutes Minimum  $J_0$  an für einen Komplex  $c_0$ , der aus endlich vielen einfach geschlossenen rektifizierbaren Kurven  $C$  des Ringes  $\mathbb{R}$  besteht, die keine Punkte miteinander gemeinsam haben. Jede dieser Kurven  $C$  stellt eine Extremale von Minimumtyp unseres Variationsproblems  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  dar.

*Beweis:* In der Tat, bedeutet  $\{c_k\}$  eine Minimalfolge von Komplexen aus  $\mathfrak{C}$ , so lässt sich auf Grund der aus (4.4) unter Berücksichtigung von (4.2) und (3.1) fließenden Ungleichung

$$(5.2) \quad \frac{\mu_0 + \int_c F dt}{\int_c \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt} \geq \frac{m}{2} > 0$$

schliessen, dass 1°)

$$(5.3) \quad J_0 > -\infty$$

[denn der Bruch linkerhand in (5.2) ist stets positiv!] und dass 2°) die Minimalfolge von gleichmässig beschränkter Gesamtlänge (§ 1) ist.

Denn weil für die Minimalfolge  $\{c_k\}$  die Relation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_{c_k} = J_0$$

gilt, lässt sich ein  $\bar{k} > 0$  so gross angeben, dass für alle  $k \geq \bar{k}$  die Ungleichung

$$\mathfrak{J}_{c_k} < J_0 + 1$$

richtig ist. Dies in (5.2) eingesetzt, liefert

$$\mu_0 + (J_0 + 1) \geq \frac{m}{2} \int_{\mathcal{C}_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

und damit die Behauptung 2°).

Bevor wir aber hieraus auf die Existenz eines Grenzkomplexes  $\mathcal{C}_0 < \mathcal{C}$ , der ein absolutes Minimum für  $\mathfrak{F}_C$  liefert, schlussfolgern können, müssen wir einen Hilfssatz vorausschieken:

**Hilfssatz.** - *Es gibt eine Zahl  $\varrho > 0$ , sodass für jede geschlossene Kurve  $C$  des Ringes  $\mathbb{R}$ , die ganz in einem Kreis  $\mathbb{K}(\varrho)$  vom Radius  $\varrho > 0$  Platz hat, die Ungleichung*

$$(5.4) \quad \int_C F dt \geq \frac{m}{2} \cdot \int_C \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt > 0$$

besteht.

*Beweis:* In der Tat kann mit Hilfe zweier beliebiger Konstanten  $a$  und  $\beta$  die linke Seite von (5.4) geschrieben werden:

$$(5.5) \quad \int_C F dt = \int_C G dt - \int_C [(p_0 - a)\dot{x} + (q_0 - \beta)\dot{y}] dt \geq \\ \geq \left\{ m - \text{Max}_{(x,y) < \mathcal{C}} \sqrt{(p_0 - a)^2 + (q_0 - \beta)^2} \right\} \cdot \int_C \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

[Man beachte hierzu nur (4.2) und die SCHWARZ'sche Ungleichung

$$|(p_0 - a)\dot{x} + (q_0 - \beta)\dot{y}| \leq \sqrt{(p_0 - a)^2 + (q_0 - \beta)^2} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} !]$$

Legen wir jetzt den Konstanten  $a$  und  $\beta$  die Werte bei, die  $p_0(x, y)$  und  $q_0(x, y)$  im Mittelpunkte des  $C$  umschliessenden Kreises  $\mathbb{K}(\varrho)$  annehmen, so lässt sich  $\varrho > 0$  ein für alle Male so bestimmen, dass für jede beliebige Lage des Kreises  $\mathbb{K}(\varrho)$  in  $\mathbb{R}$  die Ungleichung

$$(5.6) \quad \text{Max}_{(x,y) < \mathbb{K}(\varrho)} \sqrt{(p_0 - a)^2 + (q_0 - \beta)^2} \leq \frac{m}{2}$$

richtig ist. Dies in (5.5) eingesetzt, führt aber zu der Aussage (5.4) unseres Hilfssatzes.

§ 6. - Der Hilfssatz erlaubt es uns jetzt, aus der vorgelegten Minimalfolge  $\{\mathcal{C}_k\}$  eine andere für unsere Zwecke geeignetere abzuleiten; denn

1°) wird die Eigenschaft der Folge  $\{\mathcal{C}_k\}$ , eine Minimalfolge zu sein, nicht zerstört, wenn man aus jedem Komplex  $\mathcal{C}_k$  alle diejenigen seiner Kurven  $C^{(k)}$  streicht, die einen Durchmesser  $\leq \varrho$  besitzen. Das folgt offensichtlich aus (5.4).

Der so neu aus  $\mathcal{C}_k$  entstandene Komplex  $\hat{\mathcal{C}}_k$  besteht daher aus nur endlich vielen Kurven  $C^{(k)}$  und diese Anzahl bleibt für alle  $k=1, 2, 3, \dots$ , gleichmässig beschränkt. Es kann somit

2°) eine Auswahlfolge  $\{\hat{C}_{k'}\}$  hergestellt werden, die folgendes Verhalten zeigt: In dem Schema  $S_{k'}$ , das nach § 2 dem Komplex  $\hat{C}_{k'}$  zugeordnet wird, ist der Ziffernbereich  $Z(i_1, i_2, \dots, i_{t-1})$  für den letzten unteren Index  $i_t$  einer  $t$ -fach indizierten Kurve  $C_{i_1 i_2 \dots i_{t-1} i_t}^{(k')}$  unabhängig von der Laufzahl  $k'$ , er kann aber noch sehr wohl eine Funktion der vorhergehenden Ziffern  $i_1, i_2, \dots, i_{t-1}$  sein.

Eine Minimalfolge  $\{\hat{C}_{k'}\}$  mit den Eigenschaften 1°) und 2°) wollen wir eine « normale Minimalfolge » nennen.

Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, dass schon die vorgelegte Minimalfolge  $\{C_k\}$  normal sei. Nun fanden wir in § 5, dass die Gesamtlänge der Komplex  $C_k$  gleichmässig beschränkt ist; das gleiche gilt dann um so mehr von den Bogenlängen der Kurven in jeder einzelnen der Kurvenfolgen  $\{C_{i_1 i_2 \dots}^{(k)}\}$ , in denen  $k$  die Ziffern 1, 2, 3, ... durchläuft, während der untere Index  $(i_1, i_2, \dots)$  festgehalten wird. Durch Uebergang zu einer Teilfolge  $\{k'\}$  der  $\{k\}$  kann also bewirkt werden, dass jede Kurvenfolge  $\{C_{i_1 i_2 \dots}^{(k')}\}$  gleichmässig gegen eine Grenzkurve  $C_{i_1 i_2 \dots}$  konvergiert, der wir dann dieselben unteren Indizes beifügen wollen, die auch die einzelnen Kurven in der Folge  $\{C_{i_1 i_2 \dots}^{(k')}\}$  tragen.

Es ist nun natürlich noch keineswegs ausgemacht, dass diese Grenzkurve  $C_{i_1 i_2 \dots}$  auch einfach geschlossen sein muss, oder dass etwa zwei Grenzkurven  $C_{i_1 i_2 \dots}$  und  $C_{i_1' i_2' i_3' \dots}$  mit verschiedenen unteren Indizes auch notwendig verschiedene Punktmengen in der  $xy$ -Ebene darstellen müssen; wie wir hier weiterkommen, wird sich im nächsten § 7 zeigen.

Zunächst aber wollen wir die Grenzkurven  $C_{i_1 i_2 \dots}$  so, wie sie sich durch den Grenzübergang ergeben haben, noch etwas näher betrachten: Da bemerken wir zuerst, dass sie sich weder selbst noch auch gegenseitig durchdringen können, da solches sonst auch von einigen  $C_{i_1 i_2 \dots}^{(k')}$  der Fall sein müsste, sobald  $k'$  hinreichend gross ist. Um zweitens ihren Zusammenhang mit dem Funktional  $\mathfrak{F}_c$  (5.1) bequem studieren zu können, wird es zweckmässig sein, sie zu einem Komplex  $\hat{C}$  zusammenzufassen. Man bedenke jedoch, dass es vorerst noch gar nicht entschieden ist, ob nun dieses  $\hat{C}$  auch zur Komplexklasse  $\mathfrak{C}$  (§ 1) gehört!

Wegen der Halbstetigkeit nach unten <sup>(9)</sup> des Integrals  $\int F dt$  erfüllt jedenfalls jedes  $C_{i_1 i_2 \dots}$  die Relation

$$(6.1) \quad \lim_{k' \rightarrow \infty} \int_{C_{i_1 i_2 \dots}^{(k')}} F dt \geq \int_{C_{i_1 i_2 \dots}} F dt,$$

und da ausserdem stets

$$(6.2) \quad \lim_{k' \rightarrow \infty} \left( \sum_{i_1 i_2 \dots} \int_{C_{i_1 i_2 \dots}^{(k')}} F dt \right) \geq \sum_{i_1 i_2 \dots} \left( \lim_{k' \rightarrow \infty} \int_{C_{i_1 i_2 \dots}^{(k')}} F dt \right)$$

<sup>(9)</sup> L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Bd. 1, § 97 (Bologna, 1921).

ist, folgt damit aus (6.1) unter Rücksichtnahme auf die Definition der Komplexe  $C_k$  und  $\hat{C}$  die wichtige Ungleichung

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} \int_{\hat{C}_{k'}} F dt \geq \int_{\hat{C}} F dt,$$

welche sich, weil die  $C_k$  eine Minimalfolge bilden, auch

$$(6.3) \quad J_0 \geq \int_{\hat{C}} F dt$$

schreiben lässt. Gehörte nun  $\hat{C}$  der Klasse  $\mathbf{C}$  an, so würde das die Streichung des Ungleichheitszeichens in (6.3) bedeuten, und wir hätten erkannt, dass  $J_0$  wirkliches absolutes Minimum ist. Wir wollen jetzt sehen, wie dasselbe Resultat erhalten werden kann, selbst wenn  $\hat{C}$  nicht zur Klasse  $\mathbf{C}$  gehören sollte. Dazu ist notwendig, aus dem Komplex  $\hat{C}$  einen Komplex  $c_0 < \mathbf{C}$  herzuleiten, der keinen grösseren Wert für das Funktional  $J_{c_0}$  liefert, d. h. der die Ungleichung

$$(6.4) \quad \int_{c_0} F dt \leq \int_{\hat{C}} F dt$$

erfüllt.

§ 7. - Zu dem Ende gebe ich ein *vollständiges Schema von Operationen* (V. O.) an, durch deren Anwendung man aus  $\hat{C}$  ein  $c_0 < \mathbf{C}$  mit der gewünschten Eigenschaft bekommt. Man beachte das fortwährende Hereinspielen der Ungleichheit (5.4) des Hilfssatzes, welches noch durch ein eigens hinzugesetztes (Hilfssatz) hervorgehoben werden soll, und wodurch bei jedem Schritt in unserem Schema V. O. eine (6.4) entsprechende Ungleichung gesichert bleibt.

VOLLSTÄNDIGES OPERATIONSSCHEMA V. O.

I). Wir betrachten zuerst einmal jedes  $C_{i_1 i_2 \dots}$  für sich gesondert :

1°) Auf  $C_{i_1 i_2 \dots}$  werden diejenigen maximalen zusammenhängenden mehrfach überdeckten Teilbögen markiert längs deren eine Selbstberührung stattfindet, und ihnen ein Index beigelegt, der die Vielfachheit dieser Ueberdeckung zählt. Dann werden :

a) alle Teilbögen mit *geradem* Index gestrichen (Hilfssatz);

b) alle Teilbögen mit *ungeradem* Index als *einfach* durchlaufene Bögen beibehalten, wobei aber als Durchlaufungssinn derjenige zu nehmen ist, der in der mehrfachen Ueberdeckung des häufigeren auftrat (Hilfssatz).

So entsteht aus jeder Kurve  $C_{i_1 i_2 \dots}$  eine Anzahl orientierter Kurven  $\bar{C}_{i_1 i_2 \dots}$ , die aber frei sind von mehrfach bedeckten Kurvenstücken.

2°) Jedes  $\bar{C}_{i_1 i_2 \dots}$  wird darauf in eine Reihe einfach geschlossener Kurven aufgelöst: Man zerschneide  $\bar{C}_{i_1 i_2 \dots}$  in einem beliebigen seiner Doppel-

punkte<sup>(40)</sup>  $\bar{P}$  in zwei geschlossene (aber nicht notwendig *einfach* geschlossene) Kurven  $\bar{C}'_{i_1 i_2 \dots}$  und  $\bar{C}''_{i_1 i_2 \dots}$ , und wiederhole bei jeder von ihnen dasselbe Vorgehen; so gelangt man nach endlich vielen Schritten entweder zu lauter *einfach* geschlossenen Kurven oder aber das Verfahren bricht nicht ab und liefert dann geschlossene Kurven beliebig kleinen Durchmessers, die unter Berufung auf den Hilfssatz gleich alle fortzulassen sind.

3°) Von den verbleibenden *einfach* geschlossenen Kurven werden weiter alle diejenigen getilgt, die einen Durchmesser  $\leq \rho$  besitzen (Hilfssatz).

4°) *Neuindizierung*: Da die Ausführung der Operationen I, 1°)-I, 3°) im allgemeinen das in Schema  $S$  (§ 2) befolgte Rezept der Kurvenzählung (— das darin besteht, die Anzahl der einer jeden Kurve beigelegten Indizes stets um 1 grösser sein zu lassen als die Anzahl der sie umschliessenden Kurven —) zerstört, wird jetzt eine Neuindizierung notwendig, die die Bezifferungsweise des Schemas  $S$  wieder einheitlich herstellt. Möglicherweise lässt sich diese Bezifferung nicht ganz eindeutig durchführen, da es geschehen kann, dass verschiedene geschlossene Kurven dieselbe Punktmenge in der  $xy$ -Ebene bedecken (Vergl. hierzu V. O. II).

So entsteht aus dem Komplex  $\hat{C}$  ein Komplex  $C_I$ , für den eine Ungleichung (6.4) gilt.

II). 1°) Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der im Komplex  $C_I$  vereinigten Kurven  $\bar{C}_{i_1 i_2 \dots}$  und legen jeder von ihnen einen Index bei, der die Vielfachheit zählt, mit der sie im Komplex  $C_I$  bedeckt werden. Jede Kurve, die von keiner von ihr verschiedenen bedeckt wird, erhält den Index 1. Die Kurven mit *geradem* Index werden wieder insgesamt gestrichen (Hilfssatz), während die Kurven *ungeraden* Indexes mit derjenigen Orientierung beibehalten werden, die häufiger aufgetreten ist (Hilfssatz).

2°) Darnach wird eine *Neuindizierung* vorgenommen, die aber jetzt das Bezifferungssystem des Schemas  $S$  (§ 2) eindeutig durchzuführen gestattet.

Der so aus  $C_I$  entstehende Komplex heisse  $C_{II}$ , und für ihn gilt eine Ungleichung vom Typus (6.4).

Wenn man nun bemerkt, dass durch die Operationen des V. O. die Orientierungsvorschrift (§ 1) für die einzelnen Kurven  $C_{i_1 i_2 \dots}$  des Komplexes  $C_{II}$  nicht verletzt wurde, sowie, dass auch die Anzahl der  $L_1$  umgebenden Kurven stets ungerade bleibt, so erkennt man, dass  $C_{II} < \mathfrak{C}$  ist, und dass man daher als Komplex  $C_0$  (Ende § 6) den Komplex  $C_{II}$  nehmen darf:

$$(7.1) \quad C_0 = C_{II}.$$

---

<sup>(40)</sup> Als Doppelpunkt einer Kurve soll jeder Punkt bezeichnet werden, der nicht nur für einen einzigen Wert des Parameters  $t$  angenommen wird.

Für ihn gilt also insbesondere die Gleichheit

$$(7.2) \quad J_0 = \int_{C_0} F dt.$$

Nebenbei erkennt man jetzt auch, dass schon der Komplex  $\overset{\wedge}{C}$  der Klasse  $\mathbf{C}$  angehören muss, da ja die Ausführung der Operationen des V. O. eine wirkliche Verkleinerung des Funktionalwertes  $\mathbf{J}_C$  bedeutet.

§ 8. - Wir wollen jetzt zeigen, dass wegen (7.2) die einzelnen Kurven von  $C_0$ , die es zufolge des V. O. nur in endlicher Anzahl geben kann, überhaupt keine gemeinsamen Punkte besitzen können. In der Tat, hätten etwa die zwei Kurven  $C_i$  und  $C_j$  ( $i \neq j$ ) ein ganzes Bogenstück  $U$  gemeinsam, so könnte man aus  $C_i$  und  $C_j$  dadurch eine einzige Kurve  $C_{(ij)}$  bilden, dass dieses gemeinsame Bogenstück herausgenommen wird. Die Kurve  $C_{(ij)}$  braucht natürlich noch nicht einfach geschlossen zu sein, aber durch Anwendung der Operationen des V. O. liesse sie sich in endlich viele einfach geschlossene Kurven zerfallen. Weil nun  $U$  in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird, —  $C_i$  und  $C_j$  berühren sich ja nach § 1 von aussen her und besitzen gleiche Orientierung —, ergibt sich hiermit eine Unterschreitung des absoluten Minimums  $J_0$  (Hilfssatz).

Durch Schrittweise Wiederholung der hier für zwei einfach indizierte Kurven angestellten Ueberlegungen erkennt man, dass überhaupt keine zwei Kurven  $C_{i_1, i_2, \dots}$  und  $C_{i'_1, i'_2, \dots}$  ein ganzes zusammenhängendes Bogenstück gemeinsam haben können.

Aber ebenso ist es unmöglich, dass zwei Kurven *mehr als endlich* viele Berührungspunkte besitzen. Wir zeigen das wieder an dem Beispiel zweier einfach indizierten Kurven  $C_i$  und  $C_j$  ( $i \neq j$ ); angenommen also,  $C_i$  und  $C_j$  berührten sich in unendlich vielen diskreten Punkten. Dann sei  $P_1, P_2, P_3, \dots$  eine Folge solcher Berührungspunkte mit  $\bar{P}$  als Häufungspunkt. Um  $\bar{P}$  als Mittelpunkt lege ich einen Kreis  $\mathbf{K}(\varrho)$  vom Radius  $\varrho > 0$  des Hilfssatzes in § 5. In  $\mathbf{K}(\varrho)$  gibt es mindestens zwei aufeinanderfolgende Punkte  $P_{i_1}$  und  $P_{i_2}$  dieser Folge, zwischen denen die von ihnen begrenzten Teilbögen der Kurven  $C_i$  und  $C_j$  ganz in  $\mathbf{K}(\varrho)$  verlaufen; denn der Komplex  $C_0$  ist ja rektifizierbar. Verschmilzt man also durch Herausschneiden dieser Bogenstücke  $C_i$  und  $C_j$  zu einer einzigen geschlossenen Kurve, so bekommt man gerade so wie vorhin eine Unterschreitung des absoluten Minimums  $J_0$ .

Es bleibt also nur noch zu zeigen übrig, dass auch eine Berührung zweier Kurven  $C_{i_1, i_2, \dots}$  und  $C_{i'_1, i'_2, \dots}$  in *endlich* vielen Punkten nicht statthaben kann. Angenommen die beiden Kurven  $C_i$  und  $C_j$  ( $i \neq j$ ) berührten sich in dem isolierten Punkte  $\bar{P}$ . Dann grenze man durch einen um  $\bar{P}$  als Mittelpunkt gelegten Kreis  $\mathbf{K}(\sigma)$  vom Radius  $\sigma \leq \varrho$  (Hilfssatz des § 5) ein einfach zusammenhängendes in  $\bar{P}$  einmündendes Stück des Aussengebietes der beiden Kurven  $C_i$  und  $C_j$  ab. In  $\mathbf{K}(\sigma)$  gibt es nun zwei so nahe an  $\bar{P}$  gelegene Punkte  $P$  und  $Q$ ,  $P$  auf  $C_i$ ,  $Q$  auf  $C_j$ ,

dass die Extremale  $\mathbf{E}(P, Q)$ , ( $\mathbf{E}(Q, P)$ ), die von  $P$  ( $Q$ ) nach  $Q$  ( $P$ ) führt einen kleineren Wert für das Integral  $\int F dt$  liefert als der gebrochene Kurvenzug

$$C_i(P, \bar{P}) \dot{+} C_j(\bar{P}, Q), \quad (C_j(Q, \bar{P}) \dot{+} C_i(\bar{P}, P)).$$

Ersetzt man also diesen gebrochenen Kurvenzug durch das entsprechende Extremalenstück, so kommt man genau so wie oben zu einer Unterschreitung des absoluten Minimums  $J_0$ .

Als zusammenfassendes Ergebnis unserer Betrachtungen können wir daher notieren, dass alle Kurven des Komplexes  $\mathcal{C}_0$  getrennt liegen. Ebenso aber überzeugt man sich davon, dass keine derselben innerhalb  $\mathbf{R}$  Ecken oder Spitzen haben kann.

§ 9. - Nun ist selbstredend jeder ganz in  $\mathbf{R}$  verlaufende Teilbogen einer Kurve  $C_{i_1 i_2 \dots}$  des Komplexes  $\mathcal{C}_0$  eine Extremale des Variationsproblems  $F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ . Wegen der gerichteten Konvexität der Randkurven  $L_1$  und  $L_2$  kann aber keine dieser Kurven  $C_{i_1 i_2 \dots}$  einen Punkt auf dem Rande besitzen, ausser sie fällt ganz mit ihm zusammen; dies macht man sich an Hand der in § 1 gegebenen Orientierungsvorschrift für die Kurven der Komplexe  $\mathcal{C} < \mathbf{C}$  leicht klar. Wir finden also schliesslich, dass  $\mathcal{C}_0$  aus lauter einfach geschlossenen, ganz in  $\mathbf{R}$  gelegenen Extremalen besteht, die keine Punkte miteinander gemein haben und nur in endlicher Anzahl auftreten können. Damit ist der Satz 2 des § 5 und zugleich auch das Theorem der Einleitung vollständig bewiesen.