

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JOSEPH PÉRÈS

Sur l'équation de Volterra singulière

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 5, n° 1
(1936), p. 73-88

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_1_73_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION DE VOLTERRA SINGULIÈRE

par JOSEPH PÉRÈS (Paris).

§ 1. - Préliminaires.

1. - Le présent travail concerne la théorie de l'équation de VOLTERRA de première espèce

$$(1) \quad \int_0^y \varphi(\zeta) k(\zeta, y) d\zeta = h(y)$$

(où l'inconnue est $\varphi(y)$), dans le cas singulier où la diagonale $k(y, y)$ du noyan s'annule pour la valeur particulière $y=0$. On sait que l'équation (1) se ramène par dérivation à l'équation

$$(2) \quad \varphi(y) k(y, y) + \int_0^y \varphi(\zeta) k_{y'}(\zeta, y) d\zeta = h_{y'}(y)$$

ou bien

$$(2') \quad \varphi(y) + \int_0^y \varphi(\zeta) \frac{k_{y'}(\zeta, y)}{k(y, y)} d\zeta = \frac{h_{y'}(y)}{k(y, y)}$$

(équation de VOLTERRA de seconde espèce). En admettant par exemple que $h_{y'}(y)$, $k(y, y)$, $k_{y'}(x, y)$ sont des fonctions continues dans les domaines respectifs

$$(I) \quad 0 \leq y \leq b$$

$$(D) \quad 0 \leq x \leq y \leq b$$

et en ajoutant l'hypothèse que $k(y, y)$ ne s'annule pas dans (I), on a une équation intégrale régulière, dont la solution est bien connue. Lorsque $k(y, y)$ s'annule pour la valeur particulière $y=0$, le noyan $\frac{k_{y'}(x, y)}{k(y, y)}$ de (2') n'est plus borné dans (D): les équations (2') et (1) sont singulières.

2. - Ce cas singulier a été traité pour la première fois par M. VOLTERRA ⁽¹⁾, qui introduit les conditions suivantes :

(1) Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 8 Mars et 26 Avril 1896.

A). On a

$$h(y) = y^{n+1}h_1(y)$$

$$k(x, y) = \sum_0^n a_i x^i y^{n-i} + \sum_0^{n+1} x^i y^{n+1-i} L_i(x, y)$$

n étant un entier, les a_i des constantes, $h_1(y)$ et $L_i(x, y)$ des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées par rapport à y , dans les domaines respectifs (I) et (D).

B). $K(y, y)$ ne s'annule dans l'intervalle (I) que pour la valeur $y=0$.

C). $\sum_0^n a_i \neq 0$, de sorte que $k(y, y)$ admet la racine $y=0$ à un ordre

de multiplicité exactement égal à n .

D). L'équation algébrique

$$(3) \quad \frac{a_0}{\sigma-1} + \frac{a_1}{\sigma-2} + \dots + \frac{a_n}{\sigma-n-1} = 0$$

a toutes ses racines distinctes.

M. VOLTERRA établit alors les résultats suivants :

1°) Si toutes les racines de (3) ont leurs parties réelles positives, (1) admet une solution et une seule $\varphi(y)$ continue dans (I).

2°) Si (3) a des racines dont la partie réelle est négative, la solution $\varphi(y)$ de l'équation (1) n'est plus unique.

Le second de ces résultats a été complété par M. HOLMGREN ⁽²⁾ en suivant la même méthode. On obtient l'énoncé :

3°) Si (3) admet r racines dont les parties réelles sont négatives, les autres ayant leurs parties réelles positives, la solution générale de (1) dépend de r constantes arbitraires et s'écrit :

$$\varphi(y) = \Phi(y) + C_1 \Phi_1(y) + \dots + C_r \Phi_r(y),$$

$\Phi_1(y), \Phi_2(y), \dots, \Phi_r(y)$ étant des solutions, linéairement distinctes, de l'équation homogène

$$(1') \quad \int_0^y \varphi(\zeta) k(\zeta, y) d\zeta = 0.$$

3. - La question a été reprise par LALESCO ⁽³⁾ qui retrouve les mêmes résultats en suivant une analyse tout à fait différente de celle de MM. VOLTERRA et HOLMGREN.

⁽²⁾ Ibid, 25 Février 1900.

⁽³⁾ Journal de Mathématiques, 1908, p. 125.

Nous ferons quelques remarques comparatives sur les deux méthodes.

LALESCO admet pour le noyau $k(x, y)$ un développement de forme

$$k(x, y) = A_0(x) + A_1(x) \frac{y-x}{1!} + \dots + A_n(x) \frac{(y-x)^n}{n!} + \frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} P(x, y),$$

puis il détache le cas particulier où $P(x, y)$ est identiquement nul. Dans ce cas particulier l'équation (1) conduit, après $(n+1)$ dérivations, à l'équation différentielle

$$(4) \quad \frac{d^n}{dy^n} (A_0(y)\varphi) + \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} (A_1(y)\varphi) + \dots + A_n(y)\varphi = H(y)$$

qui, sous des restrictions correspondantes aux précédentes A, C , est du type de FUCHS.

Dans le cas général ($P(x, y)$ non identiquement nul) LALESCO procède par approximations successives dont chacune est définie par une équation du type (4) où le second membre est connu et s'explique donc (méthode de variation des constantes) par des intégrales où interviennent les solutions fondamentales de (4).

En allant au fond des choses, il est aisé de voir que, dans la méthode de M. VOLTERRA, on détache de même la partie du noyau

$$\sum_0^n a_i x^i y^{n-i},$$

ensemble des termes principaux pour x et y petits, laquelle amènerait, si elle était seule, à l'équation différentielle

$$(5) \quad \sum_i a_i \cdot \frac{d^n}{dy^n} (y^n \varphi) + \sum_i (n-i) a_i \cdot \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} (y^{n-1} \varphi) + \dots + n! a_0 \cdot \varphi = H(y).$$

Mais, tandis que LALESCO a pu employer directement, dans son analyse, l'équation différentielle (4), MM. VOLTERRA et HOLMGREN ne pouvaient utiliser de même (5) qu'il est pourtant loisible de retrouver derrière leurs calculs et qui en donne le fil directeur.

La méthode de LALESCO est formellement beaucoup plus simple, de sorte que c'est elle qui est généralement exposée dans les traités. Elle permet d'éviter la condition D) posée plus haut mais, d'un autre point de vue, elle est pourtant un peu moins générale : LALESCO l'a exposée pour le cas où le noyau $k(x, y)$ de l'équation (1) est analytique ; il est clair, comme il l'a indiqué, que l'analyse vaut sous des hypothèses plus larges, mais, de toutes façons, le passage par l'équation

(4) Au moins en première analyse et s'il est possible d'éviter de telles restrictions, ce ne pourrait être, croyons-nous, que par des modifications profondes de la méthode, qui perdrait alors ses avantages de simplicité.

différentielle nécessite que l'on dérive $(n + 1)$ fois l'équation (1) et il faudra donc admettre l'existence des dérivées $n + 1^{\text{ièmes}}$ de $k(x, y)$ et de $h(y)$ (4). Or M. VOLTERRA pose seulement les conditions précédentes A), C): existence des dérivées premières et hypothèses sur l'allure infinitésimale de $k(x, y)$ et $h(y)$ lorsque x et y approchent de zéro dans (D) ou (I): ce sont là des conditions plus larges et tout à fait naturelles.

Observons d'autre part que la méthode de M. VOLTERRA pourra être préférable s'il s'agit non seulement d'obtenir les théorèmes d'existence, mais de déterminer *effectivement* la ou les solutions d'une équation singulière (1) donnée. Cela vient au fond de ce que l'équation (5) est infiniment plus élémentaire que (4). Les formules de M. VOLTERRA ne font intervenir que des fonctions élémentaires alors que les approximations successives de LALESCO se calculent à l'aide des solutions fondamentales de (4), qui ne sont en général pas connues en termes finis (5).

4. - Il apparaît donc comme souhaitable de simplifier la démonstration donnée par M. VOLTERRA pour les théorèmes d'existence *tout en restant à son point de vue*.

C'est ce que j'ai cherché à faire ici. La méthode que j'expose plus loin amène aux théorèmes en question par des calculs simples et d'une manière qui m'a paru très naturelle. Elle repose sur une *décomposition du noyau* qui permet de procéder par récurrence et qui présente d'ailleurs, en elle-même, un certain intérêt. Je l'examine au paragraphe suivant.

Le lecteur qui a en vue seulement l'équation singulière de VOLTERRA peut passer immédiatement au paragraphe 3.

§ 2. - Les noyaux de forme $\frac{1}{y} P\left(\frac{y}{x}\right)$ et leur décomposition.

5. - Nous utiliserons dans la suite les notations de la *théorie de la composition* de M. VOLTERRA. Rappelons seulement que le produit de composition de deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ est (composition de première espèce)

$$f \overset{**}{g}(x, y) = \int_x^y f(x, \xi) g(\xi, y) d\xi$$

et renvoyons, pour les propriétés utiles de la composition et des fonctions permu-

(5) Au même point de vue, il est intéressant de tenir compte d'un résultat de M. VOLTERRA qui montre, dans sa seconde note, que l'on peut introduire systématiquement des fonctions symétriques des racines de (3).

tables (c'est-à-dire telles que $f^*g^* = g^*f^*$) aux exposés de la théorie ⁽⁶⁾. Les équations précédentes (1) et (2') peuvent alors s'écrire

$$(1) \quad {}_0\overset{*}{\varphi}k^* = {}_0\overset{*}{h}$$

et

$$(2') \quad {}_0\overset{*}{\varphi}({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}}) = {}_0H$$

en introduisant le symbole 1^0 (unité de composition ⁽⁷⁾) et en posant

$$\overset{*}{\mathfrak{N}}(x, y) = -\frac{k_y'(x, y)}{k(y, y)}, \quad H(y) = \frac{h_y'(y)}{k(y, y)}.$$

Il est d'ailleurs sous entendu que, dans (1) et (2'), φ , h , H ne dépendent que de y et que, dans les compositions $\overset{*}{\varphi}k^*$ et $\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\mathfrak{N}}$ la limite inférieure d'intégration est $x=0$ (nous l'indiquons ici par l'indice zéro placé en avant et au dessous de la ligne).

Rappelons enfin que, noyau et second membre étant supposés continus (c'est-à-dire si l'on n'est pas dans le cas singulier), l'équation (2') a pour solution

$$(6) \quad \varphi(y) = {}_0\overset{*}{H}({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}}) \equiv H(y) - \int_0^y H(\zeta)\overset{*}{\mathfrak{N}}(\zeta, y)d\zeta,$$

le noyau $\overset{*}{\mathfrak{N}}$ (noyau résolvant de $\overset{*}{\mathfrak{N}}$) étant donné par la série de composition

$$(7) \quad \overset{*}{\mathfrak{N}} = -(\overset{*}{\mathfrak{N}} + \overset{*}{\mathfrak{N}}^2 + \overset{*}{\mathfrak{N}}^3 + \dots);$$

ce noyau est permutable avec $\overset{*}{\mathfrak{N}}$ et vérifie les équations

$$({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}})({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}}) = ({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}})({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}}) = {}_1^0$$

d'où

$$({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}}) = ({}_1^0 - \overset{*}{\mathfrak{N}})^{-1},$$

équations qui rendent d'ailleurs intuitif le passage de (2') à (6).

6. - Plaçons nous maintenant dans le cas singulier et supposons que le noyau $k(x, y)$ se réduise à ses termes principaux $\sum_i^n a_i x^i y^{n-i}$, avec la condition C :

$$\sum_i^n a_i \neq 0.$$

— — —

⁽⁶⁾ Voir, par exemple, les *Leçons sur la composition et les fonctions permutable*s de V. VOLTERRA et J. PÉRÈS. (Gauthier-Villars, 1924).

⁽⁷⁾ Loc. cit., p. 8.

Le noyau \mathfrak{N}_0 de l'équation (2') se réduira à

$$(8) \quad -\frac{1}{y} \sum_0^n (n-i) a_i \frac{x^i}{y^i} \cdot \frac{1}{\sum_0^n a_i};$$

il est de forme

$$(9) \quad -\frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right)$$

P étant un polynome et nous allons examiner quelques propriétés de tels noyaux.

Soient deux noyaux de type (9) :

$$\frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{y} P_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

P et P_1 étant des polynomes, ou mêmes des *fonctions quelconques* de la variable $t = \frac{x}{y}$, fonctions *bornées et intégrables* pour $0 < t \leq 1$. Les noyaux sont alors définis pour $0 < x \leq y$; on voit de suite qu'ils sont *permutables* entre eux ⁽⁸⁾, leur *produit de composition* étant défini, lui aussi, dans le champ

$$0 < x \leq y,$$

et donnant un nouveau noyau de type (9).

Il en sera de même des *puissances de composition* de $\frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right)$. Donc enfin le *noyau résolvant* de $\frac{1}{y} P\left(\frac{x}{y}\right)$ sera défini pour $0 < x \leq y$ et sera de type (9).

7. - Prenons le cas particulier de deux noyaux

$$f = \frac{a}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \quad g = \frac{b}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\mu$$

où a et b sont des constantes quelconques, ainsi que les exposants λ et μ . Bornons-nous, ce qui suffit pour la suite, au cas où λ et μ sont différents et formons

$$(\mathbf{1}^0 - f^*)(\mathbf{1}^0 - g^*) = (\mathbf{1}^0 - F^*)$$

Il vient, comme on le vérifie de suite

$$F^* = \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\lambda \left(a + \frac{ab}{\lambda - \mu}\right) + \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^\mu \left(b + \frac{ab}{\mu - \lambda}\right).$$

⁽⁸⁾ J'avais indiqué ailleurs (Journ. de Math., 1915, p. 60) que toutes les fonctions permutables avec $x^\alpha y^\beta$ ($\alpha + \beta + 1 \neq 0$) sont de forme $x^\alpha y^\beta \varphi(y^{\alpha+\beta+1} - x^{\alpha+\beta+1})$. Si $\alpha + \beta = -1$ il faut prendre la forme $x^\alpha y^\beta \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ et, pour $\alpha = 0$, $\beta = -1$, on a bien le groupe de fonctions permutables du texte.

Pour que les noyaux f et g soient résolvant l'un de l'autre il sera nécessaire et suffisant que

$$a + \frac{ab}{\lambda - \mu} = 0, \quad b + \frac{ab}{\mu - \lambda} = 0$$

d'où immédiatement

$$\mu = \lambda - a, \quad b = -a.$$

D'où l'énoncé suivant:

Le noyau résolvant de $a \frac{x^\lambda}{y^{\lambda+1}}$ est $-a \frac{x^{\lambda-a}}{y^{\lambda-a+1}}$.

8. - Le calcul qui précède entraîne aussi que: si l'on compose des binomes en nombre quelconque de forme

$$\left(\overset{*}{1}^0 - a_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}} \right) \quad (s=1, 2, \dots, p),$$

où les constantes λ_s sont différentes entre elles on obtiendra une expression de forme $\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{F}$ avec

$$F = \sum_1^p b_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}},$$

les coefficients b_s se calculant aisément à partir des a_s et des λ_s .

Nous nous trouvons tout naturellement amenés à étudier la question inverse: étant donné le noyau

$$(10) \quad F = \sum_1^p b_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}}$$

peut-on trouver une décomposition de $\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{F}$ en produits de composition

$$(11) \quad (\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{F}) = \prod_{s=1}^{s=p} \left(\overset{*}{1}^0 - a_s \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}} \right)$$

et une telle décomposition est-elle unique?

9. - Or l'étude de cette question est bien simple. Les coefficients b_s et λ_s sont connus, les λ_s étant tous distincts. On recherche les a_s . Nous imposons aux décompositions cherchées la condition que les exposants λ_s des divers binomes du produit symbolique Π interviennent tous effectivement dans F , nous devons donc supposer que aucun des b_s n'est nul ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ C'est là une condition qu'il n'est pas indispensable d'introduire. Notons en effet que, pour un choix convenable des a_s et des λ_s il peut fort bien arriver que quelques uns des b_s soient nuls. On pourrait donc envisager des décomposition du type (11) dans lesquels le

Si nous remarquons que

$$\left(\overset{\circ}{1}^0 - a_1 \frac{x^{\lambda_1}}{y^{\lambda_1+1}} \right)^{-1} = \left(\overset{\circ}{1}^0 + a_1 \frac{x^{\lambda_1-a_1}}{y^{\lambda_1-a_1+1}} \right)$$

tout revient à déterminer a_1 de façon que l'on ait

$$\left(\overset{\circ}{1}^0 - F \right) \left(\overset{\circ}{1}^0 + a_1 \frac{x^{\lambda_1-a_1}}{y^{\lambda_1-a_1+1}} \right) = \overset{\circ}{1}^0 - F',$$

avec

$$(12) \quad F'(x, y) = \sum_2^p b_s' \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}},$$

les b_s' étant de nouvelles constantes.

Admettons, pour faire le calcul, que $\lambda_1 - a_1$ est différent de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, quitte à vérifier à la fin que cette hypothèse est bien satisfaite. La valeur de F' s'écrit de suite d'après le calcul du n.º 7. On trouve dans F' un terme en $\frac{x^{\lambda_1}}{y^{\lambda_1+1}}$ dont le coefficient est nul, un terme en $\frac{x^{\lambda_1-a_1}}{y^{\lambda_1-a_1+1}}$ qui doit disparaître, ce qui donne

$$(13) \quad 1 + \sum_1^p \frac{b_s}{\lambda_1 - \lambda_s - a_1} = 0$$

c'est une équation de degré p pour déterminer l'inconnue a_1 ; il apparaît dès maintenant que le problème de la décomposition de $\overset{\circ}{1}^0 - F$ ne sera pas entièrement déterminé; il apparaît aussi que la condition préalable posée $\lambda_1 - a_1 \neq \lambda_s$ ($s=1, 2, \dots, p$) est satisfaite par toutes les racines de (13), les b_s étant tous différents de zéro.

En choisissant a_1 racine de (13) on est ramené à la question analogue avec $\overset{\circ}{1}^0 - F'$, F' ayant la même forme de F mais étant somme de $p-1$ termes seulement. On renouvellera l'application de la méthode.

On arrive ainsi à l'énoncé suivant: *la décomposition (11) est toujours possible et de plusieurs manières.*

10. - On vient de voir que, pour déterminer les a_s , on a à résoudre une suite d'équations algébriques: d'abord

$$(13) \quad 1 + \sum_1^p \frac{b_s}{\lambda_1 - \lambda_s - a_1} = 0 \quad (\text{inconnue } a_1)$$

produit symbolique II introduirait des exposants qui ne se retrouvent pas dans F . Cela n'a pas grand intérêt pour la suite et ne présente d'ailleurs pas de difficultés.

puis l'équation analogue formée avec F_1'

$$(14) \quad 1 + \sum_2^p \frac{b_s'}{\lambda_2 - \lambda_s - a_2} = 0 \quad (\text{inconnue } a_2)$$

etc. Mais *il existe des relations très simples entre ces équations successives* (13), (14),..., de sorte que les décompositions cherchées s'écrivent immédiatement dès que l'on connaît les racines de (13).

Posons, en effet,

$$\lambda_1 - a_1 = \sigma$$

on a, pour σ , l'équation algébrique

$$(15) \quad 1 + \sum_1^p \frac{b_s}{\sigma - \lambda_s} = 0.$$

Or le calcul du n.º 7 entraîne de suite que

$$b_s' = b_s \frac{\lambda_s - \lambda_1}{\lambda_s - \lambda_1 + a_1} = b_s \frac{\lambda_s - \lambda_1}{\lambda_s - \sigma_1} \quad (s=2, 3, \dots, p)$$

en désignant par σ_1 la racine de (15) qui a été prise pour valeur de $\lambda_1 - a_1$.
Ecrivons maintenant (15) sous la forme

$$f(\sigma) \equiv \sigma - \lambda_1 + b_1 + \sum_2^p \frac{b_s(\sigma - \lambda_1)}{\sigma - \lambda_s} = 0$$

puis transformons-la de façon à y faire disparaître le facteur $\sigma - \sigma_1$ (en formant $\frac{f(\sigma) - f(\sigma_1)}{\sigma - \sigma_1}$). Il vient

$$1 + \sum_2^p \frac{b_s(\lambda_s - \lambda_1)}{(\sigma - \lambda_s)(\lambda_s - \sigma_1)} = 0$$

c'est-à-dire

$$1 + \sum_2^p \frac{b_s'}{\sigma - \lambda_s} = 0$$

qui coïncide avec (14) en prenant $\sigma = \lambda_2 - a_2$.

L'application de la méthode suppose donc seulement connues les racines de (15), puisque toutes les équations algébriques que l'on doit considérer se déduisent de (15) en y éliminant les facteurs binomes donnant les racines déjà utilisées. Toutes les racines de (15) seront utilisées à tour de rôle; (15) peut avoir des racines multiples, cela n'amènera aucune difficulté, chacune comptant autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

En résumé les décompositions cherchées de l'expression $\mathbf{1}^0 - F$ s'obtiendront de la façon suivante: *prenons toutes les p racines de l'équation (15) (dis-*

tinctes ou confondues) et faisons correspondre à chacune d'elles σ_s l'un des exposants λ_s , on aura, d'après ce qui précède,

$$(16) \quad \alpha_s = \lambda_s - \sigma_s$$

et on aura

$$(17) \quad \overset{*}{1}^0 - F = \prod_{s=1}^{s=p} \left(\overset{*}{1}^0 - (\lambda_s - \sigma_s) \frac{x^{\lambda_s}}{y^{\lambda_s+1}} \right)$$

d'où immédiatement

$$(18) \quad (\overset{*}{1}^0 - F)^{-1} = \prod_{s=1}^{s=p} \left(\overset{*}{1}^0 - (\sigma_s - \lambda_s) \frac{x^{\sigma_s}}{y^{\sigma_s+1}} \right).$$

On voit très nettement l'arbitraire des décompositions cherchées qui est dans la correspondance établie entre les λ_s et les σ_s ; il y a donc $p!$ décompositions possibles du type précédent.

§ 3. - Application à l'équation intégrale singulière de Volterra.

11. - Nous n'aurons besoin que d'un résultat très particulier entre les précédents et nous l'énonçons ainsi:

Lemme. - *Soit le noyau*

$$(19) \quad M(x, y) = -\frac{1}{y} \sum_0^n (n-i) a_i \frac{x^i}{y^i} \cdot \frac{1}{\sum_i a_i} \\ (\sum_i a_i \neq 0, a_n \neq 0)$$

auquel nous faisons correspondre l'équation

$$(3) \quad \frac{a_0}{\sigma-1} + \frac{a_1}{\sigma-2} + \dots + \frac{a_n}{\sigma-n-1} = 0.$$

Cette équation, rendue entière, est de degré p , si $p+1$ est le nombre des coefficients a_0, a_1, \dots, a_n qui ne sont pas nuls. Soit σ_1 l'une de ses racines et soit r le plus grand entier inférieur à n tel que $a_r \neq 0$. Considérons les deux noyaux (résolvant l'un de l'autre)

$$f_1 = (\sigma_1 - r - 1) \frac{x^{\sigma_1-1}}{y^{\sigma_1}}, \quad g_1 = (r + 1 - \sigma_1) \frac{x^r}{y^{r+1}},$$

on aura, dans le domaine $0 < x \leq y$, les égalités équivalentes:

$$(20) \quad (\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M})(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{f}_1) = (\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M}_1)$$

$$(20') \quad (\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M}) = (\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M}_1)(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{g}_1)$$

$M_1(x, y)$ étant un noyau de même type que (19)

$$(21) \quad M_1(x, y) = -\frac{1}{y} \sum_0^r (r-i) a_i' \frac{x^i}{y^i} \cdot \frac{1}{\sum a_i'}$$

$$(\sum a_i' \neq 0, a_r' \neq 0)$$

mais tel que la somme qui y figure a un terme de moins.

Les coefficients a_i' sont donnés par

$$a_i' = \frac{a_i(n-i)}{\sigma_1 - i - 1} \quad (10)$$

et l'équation analogue à (3) formée avec les a_i' coïncide avec l'équation (3) débarassée du facteur $\sigma - \sigma_1$.

La vérification directe est immédiate. Si l'on veut avoir l'énoncé précédent comme cas particulier des résultats du § 2 on fera attention aux changements de notations: les λ_s du § 2 sont ici les nombres 0, 1, 2, ..., $n-1$, ou du moins ceux de ces nombres qui correspondent à des coefficients a_i non nuls; l'inconnue σ de l'équation (15) est notée ici $\sigma-1$ de manière que (15) prenne exactement la forme (3) donnée par M. VOLTERRA.

12. - Revenons alors à l'équation singulière (1), ou à son équivalente

$$(2') \quad \varphi(y) + \int_0^y \varphi(\zeta) \frac{k_y'(\zeta, y)}{k(y, y)} d\zeta = \frac{h_y'(y)}{k(y, y)}.$$

Nous nommerons $H(y)$ le second membre et nous poserons le noyau

$$-\frac{k_y'(x, y)}{k(y, y)} = M(x, y) + \bar{M}(x, y)$$

$M(x, y)$ étant l'expression (19). Les conditions $A), B), C)$ posées au début entraînent immédiatement la suivante:

$A')$ $H(y)$ et $\bar{M}(x, y)$ sont bornées et continues respectivement dans (I) et (D) . ($\bar{M}(x, y)$ est cependant discontinue pour $x=y=0$, mais en restant bornée; il importe peu pour la suite où l'essentiel est que les fonctions considérées restent bornées et soient intégrables).

Nous avons donc à traiter l'équation

$$(22) \quad \varphi(y) - \int_0^y \varphi(\zeta) M(\zeta, y) d\zeta - \int_0^y \varphi(\zeta) \bar{M}(\zeta, y) d\zeta = H(y)$$

qui peut encore s'écrire

$$(22) \quad {}_0^* \varphi (1^0 - \bar{M}) - {}_0^* \bar{M} = {}_0^* H$$

(10) Bien entendu les valeurs de l'indice i qui correspondraient à des a_i nuls ne doivent pas intervenir dans le calcul, et l'on peut être ainsi assuré de ne jamais rencontrer de dénominateur $\lambda_1 - i - 1$ nul.

sous les hypothèses A'). Toute la difficulté vient de la partie singulière du noyau $M(x, y)$; mais le lemme précédent permettra de réduire cette partie singulière.

13. - Si les noyaux M, f_1, g_1 étaient bornés dans (D) — ce qui n'est pas le cas — la réduction, laquelle serait d'ailleurs sans intérêt, serait fort simple. (22), en la composant par $\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{f}_1$ et en tenant compte de (20) donnerait

$$(23) \quad {}_0\varphi(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M}_1) - {}_0\varphi\overset{*}{\bar{M}}_1 = {}_0\overset{*}{H}_1$$

avec

$$(23') \quad \begin{cases} H_1 = H(y) - \int_0^y H(\zeta)f_1(\zeta, y)d\zeta \\ \bar{M}_1(x, y) = \bar{M}(x, y) - \int_x^y \bar{M}(x, \zeta)f_1(\zeta, y)d\zeta; \end{cases}$$

(23) étant d'ailleurs équivalente à (22) à laquelle on repasse en composant par $(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{g}_1)$, puisque $\overset{*}{g}_1$ est le noyau résolvant de f .

Mais les calculs que nous venons d'indiquer sont légitimes, malgré la limite inférieure d'intégration zéro, si les fonctions f_1, g_1 sont du type :

$$\text{const.} \times \frac{x^{\mu-1}}{y^\mu},$$

l'exposant μ ayant sa partie réelle positive. Il est clair en effet que les intégrales que définissent les compositions restent convergentes et que l'on peut y échanger les signes d'intégration, ce qui donne l'associativité des produits de composition, sur laquelle repose en fait le calcul précédent.

Il n'y aura donc jamais de difficulté concernant g_1 , où apparaît $\frac{x^r}{y^{r+1}}$, avec un exposant r positif. Dans f_1 apparaît de même $\frac{x^{\sigma_1-1}}{y^{\sigma_1}}$ et le calcul du début de ce numéro sera valable si la partie réelle de σ_1 est positive. *En résumé*: toute racine de (3) qui a sa partie réelle positive permet de passer de (22) à une équation (23) équivalente en ce qui concerne la recherche des solutions $\varphi(y)$ bornées, plus simple parcequ'il y a un terme de moins dans la partie singulière du noyau. L'équation (23) est d'ailleurs exactement du même type que (22) car les fonctions \bar{M}_1 et H_1 qui y figurent sont bornées : par exemple l'intégrale qui intervient dans \bar{M}_1 est telle que

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y \bar{M}(x, \zeta)f_1(\zeta, y)d\zeta \right| &< \max \text{ de } |\bar{M}| \cdot \int_x^y |\sigma_1 - r - 1| \frac{\zeta^{\sigma_1-1}}{y^{\sigma_1}} d\zeta = \\ &= \max \text{ de } |\bar{M}| \cdot \frac{|\sigma_1 - r - 1|}{\sigma_1'} \left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\sigma_1'} \right) < \max \text{ de } |\bar{M}| \cdot \frac{|\sigma_1 - r - 1|}{\sigma_1'} \end{aligned}$$

avec σ_1' = partie réelle de σ_1 .

Si (3) a une autre racine à partie réelle positive distincte ou non de σ_1 , on pourra appliquer à nouveau le procédé de réduction, et ainsi de suite.

Lorsque toutes les racines de (3) ont leurs parties réelles positives, on aura ainsi une équation

$$(24) \quad {}_0\overset{*}{\varphi} - {}_0\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\overline{M}}_p = {}_0\overset{*}{H}_p$$

où la partie singulière du noyau a disparue et où \overline{M}_p et H_p sont des fonctions bornées. C'est une équation de VOLTERRA de seconde espèce qui est du type habituel et à laquelle s'applique la théorie classique. Nous retrouvons ainsi le premier résultat de M. VOLTERRA: l'équation (1) a, dans ces conditions, une seule solution (bornée).

De toutes façons on pourra, par le procédé de réduction qui vient d'être donné, se débarrasser de toutes les racines qui ont leurs parties réelles positives. Il nous reste donc à examiner le cas où toutes les racines de (3) ont leurs parties réelles négatives.

14. - Il n'y a plus rien à tirer alors de la composition de (22) par $\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{f}_1$ avec la limite inférieure d'intégration zéro, et cela nous oblige à modifier le procédé de réduction.

Le nouveau procédé conduit, comme on le verra, à une équation qui n'a pas tout à fait la même forme que (22), mais où figure en plus une intégrale \int_y^b . Nous envisagerons donc, dès le début, au lieu de (22), une équation contenant un tel terme, à savoir

$$(25) \quad {}_0\overset{*}{\varphi}(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M}) - \int_0^y \varphi(\zeta)\overline{M}(\zeta, y)d\zeta - \int_y^b \varphi(\zeta)\overline{N}(\zeta, y)d\zeta = H(y)$$

$\overline{N}(x, y)$ désignant un nouveau noyau donné dans le champ

$$(D') \quad 0 \leq y \leq x \leq b,$$

borné et continu (ou au moins intégrable) dans ce champ. L'équation (25) donne (22) comme cas particulier en y prenant $\overline{N} \equiv 0$ et on verra que les réductions successives conservent ce même type (25).

$\varphi(y)$ étant une solution bornée de (25) et σ_1 une racine (de partie réelle négative) de l'équation (3), il n'y a pas d'obstacle à remplacer ${}_0\overset{*}{\varphi}(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M})$ par ${}_0\overset{*}{\varphi}(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M}_1)(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{g}_1)$: nous avons déjà vu que les compositions par g_1 n'amenaient pas de difficultés. En posant

$$(26) \quad {}_0\overset{*}{\varphi}(\overset{*}{1}^0 - \overset{*}{M}_1) = \psi(y)$$

l'équation (25) s'écrit

$$(25') \quad \psi(y) - \int_0^y \psi(\zeta)(r+1-\sigma_1) \frac{\zeta^r}{y^{r+1}} d\zeta = H(y) + \int_0^y \varphi(\zeta) \bar{M}(\zeta, y) d\zeta + \\ + \int_y^b \varphi(\zeta) \bar{N}(\zeta, y) d\zeta.$$

En désignant par $L(y)$ le second membre, sûrement borné, et posant pour un instant

$$\chi(y) = \int_0^y \psi(\zeta) \zeta^r d\zeta$$

on a l'équation différentielle

$$(25'') \quad y \frac{d\chi}{dy} - (r+1-\sigma_1)\chi = y^{r+1} L(y)$$

d'où

$$\chi(y) = -y^{r+1-\sigma_1} \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} L(\eta) d\eta + \alpha y^{r+1-\sigma_1}$$

α étant une constante arbitraire. Le second membre tend vers zéro avec y , on dérive sans difficultés et obtient

$$(25''') \quad \psi(y) = L(y) - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} L(\eta) d\eta + \beta y^{-\sigma_1}$$

β étant une autre constante arbitraire. En tenant compte de (26) on a une nouvelle équation en $\varphi(y)$ qui, d'après le calcul précédent, est équivalente à (25) en ce qui concerne la recherche des solutions bornées. Or cette équation s'écrit :

$$(27) \quad {}_0\overset{\ast}{\varphi}(\overset{\ast}{1}^0 - \overset{\ast}{M}_1) - \int_0^y \varphi(\zeta) \bar{M}_1(\zeta, y) d\zeta - \int_y^b \varphi(\zeta) \bar{N}_1(\zeta, y) d\zeta = H_1(y)$$

avec

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1(y) = H(y) - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} H(\eta) d\eta + \beta y^{-\sigma_1} \\ \bar{M}_1(x, y) = \bar{M}(x, y) - (r+1-\sigma_1) \int_y^b \eta^{\sigma_1-1} \bar{M}(x, \eta) d\eta \cdot y^{-\sigma_1} \\ \bar{N}_1(x, y) = \bar{N}(x, y) - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_y^x \bar{N}(x, \eta) \eta^{\sigma_1-1} d\eta - \\ \quad - (r+1-\sigma_1)y^{-\sigma_1} \int_x^b \bar{M}(x, \eta) \eta^{\sigma_1-1} d\eta, \end{array} \right.$$

et il est clair que $H_1, \bar{M}_1, \bar{N}_1$ respectivement définis dans les champs $(I), (D)$ et (D') y sont bornées.

La réduction est ainsi faite. La nouvelle équation (27) a même forme que (25), mais avec un terme de moins dans la partie singulière du noyau et une constante arbitraire au second membre.

σ_2 étant une autre racine de (3) ayant sa partie réelle négative, on peut recommencer la réduction sur (27). Le terme du second membre $\beta y^{-\sigma_1}$ donnera un terme de forme $\beta(Ay^{-\sigma_1} + By^{-\sigma_2})$, ou bien $\beta(Ay^{-\sigma_1} + By^{-\sigma_1} \log y)$ dans le cas où $\sigma_2 = \sigma_1$ (cas où σ_1 est racine multiple de (3)), A et B ayant des valeurs évidentes; on aura de plus au second membre un terme $\gamma y^{-\sigma_2}$, où γ est une nouvelle constante arbitraire.

15. - Puisque, par hypothèse, toutes les racines de (3) ont leurs parties réelles négatives, on poursuivra la réduction en éliminant complètement la partie singulière M . On aboutira enfin à une équation de forme

$$(29) \quad \varphi(y) - \int_0^y \varphi(\zeta) P(\zeta, y) d\zeta - \int_y^b \varphi(\zeta) Q(\zeta, y) d\zeta = R_0(y) + \sum_1^p a_i R_i(y)$$

où les fonctions P, Q, R_0, R_i sont connues et bornées et où les a_i sont des constantes arbitraires, p étant d'ailleurs le degré de l'équation (3). Il est évident (cf. fin du n.º 14) que les fonctions R_1, R_2, \dots, R_p sont linéairement indépendantes ⁽⁴⁴⁾.

L'équation (29) est du type à limites fixes; elle peut s'écrire

$$\varphi(y) - \int_0^b \varphi(\zeta) S(\zeta, y) d\zeta = R_0 + \sum_i a_i R_i$$

en prenant le noyau S égal à P ou à Q suivant que ζ est inférieur ou supérieur à y . On en aura la solution par des approximations successives, évidemment convergentes si b est assez petit pour que

$$\int_0^b |S(\zeta, y)| d\zeta < \theta \leq 1,$$

ce qui ne fait pas de difficulté; on retrouvera dans cette solution les constantes arbitraires, sûrement indépendantes, a_s .

En combinant ces résultats et ceux des numéros précédents on a bien tous les théorèmes d'existence énoncés au début.

⁽⁴⁴⁾ Ces fonctions sont d'ailleurs solutions fondamentales de l'équation différentielle associée au noyau $M(x, y)$ (équation (5), § 1).

16. - Quelques remarques pour terminer.

Dans le cas du racines à partie réelle négative il faut supposer b assez petit, ce qui restreint l'intervalle (I) de définition des solutions $\varphi(y)$ obtenues. C'est là une restriction qui se présentait aussi dans l'analyse de HOLMGREN et qui est sans importance, car il est aisé de *prolonger* une solution $\varphi(y)$.

Les calculs de MM. VOLTERRA et HOLMGREN supposent essentiellement que l'équation (3) a toutes ses racines distinctes. Dans la méthode de LALESCO également il faut traiter à part le cas où les racines de l'équation (3) ont des différences nulles ou entières, la forme analytique des solutions fondamentales de l'équation de FUCHS (4) étant alors modifiée. Il est intéressant de noter que notre méthode *n'établit pas de distinction entre ces divers cas*: tandis que l'expression analytique des solutions fondamentales de l'équation différentielle (5) se modifie pour le cas des racines multiples, notre décomposition de $(1^0 - M^*)$, décomposition du type (17), se fait toujours exactement de même, que les racines soient simples ou multiples.

Nous avons laissé de côté le cas où (3) aurait des racines dont la partie réelle serait nulle; le lecteur retrouvera sans peine les résultats de LALESCO concernant ce cas.

Il est à peine besoin d'indiquer que les racines imaginaires de (3) n'amèneront, dans l'analyse précédente, aucune difficulté; les imaginaires disparaissent bien entendu d'elles-mêmes dans les formules finales.