

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI RICCI

Sul settimo problema di Hilbert

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 4, n° 4 (1935), p. 341-372

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_4_341_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUL SETTIMO PROBLEMA DI HILBERT

di GIOVANNI RICCI (Pisa).

Al Congresso Internazionale dei Matematici del 1900, tenutosi a Parigi, D. HILBERT, in una sua conferenza, tratteggiò ventitrè problemi per le matematiche del futuro [6] ⁽¹⁾; uno fra questi (il settimo) riguardava la natura aritmetica dei numeri della forma ξ^n con ξ e η algebrici. (Esempio: $2^{\sqrt{2}}$ è algebrico o trascendente?).

Furono poi dimostrate le proposizioni seguenti che costituirono un primo avvicinamento alla soluzione del problema:

« Se ξ ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$) è algebrico e $\eta = i\sqrt[n]{n}$ con n intero naturale, allora ξ^n è trascendente ». (A. GELFOND [2], 1929).

« Se ξ ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$) è algebrico e $\eta = \sqrt[n]{n}$ irrazionale, con n intero naturale, allora ξ^n è trascendente ». (C. SIEGEL [9], R. KUZMIN [7], 1930). (Dunque $2^{\sqrt{2}}$ è trascendente; ma, $2^{\sqrt[3]{2}}$ è algebrico o trascendente?).

« Se ξ ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$) è qualunque e $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ sono numeri linearmente indipendenti di un corpo algebrico di grado s ($s \geq 2$), allora degli s numeri $\xi^{\theta_1}, \xi^{\theta_2}, \dots, \xi^{\theta_s}$ uno almeno è trascendente ». (K. BOEHLE [1], 1933). (Ma, ancora, $2^{\sqrt[3]{2}}$ è algebrico o trascendente?).

Finalmente A. GELFOND [3], [4] (1934), diede definitiva risposta al problema posto col dimostrare in maniera agile e brillante: « Se ξ ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$) è algebrico e η è algebrico irrazionale, allora ξ^η è trascendente » ⁽²⁾.

Uno studio della dimostrazione di A. GELFOND ci persuase che opportuni accorgimenti in essa introdotti potevano condurre ad una proposizione, che *all'ingrosso* avrebbe potuto dire: « ξ^η è trascendente quando ξ ($\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$) e η (irrazionale) sono approssimabili abbastanza velocemente con numeri algebrici »; e gli opportuni accorgimenti consistevano nella manovra di una formula di interpolazione dovuta, nella sua forma generale, a CH. HERMITE.

⁽¹⁾ I numeri entro parentesi [] si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Memoria.

⁽²⁾ Proprio in questi ultimi giorni sono comparsi due lavori di TH. SCHNEIDER nel primo dei quali [8] viene di nuovo dimostrato il teorema di A. GELFOND.

Denotiamo, per $r=1, 2, 3, \dots$, con:

g_r il grado di un corpo algebrico K_r contenente $\xi_r, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$,

x_r il minimo intero razionale positivo per cui $x_r \xi_r$ è intero (algebrico),

y_r il minimo intero razionale positivo per cui $y_r \eta_{1,r}, y_r \eta_{2,r}, \dots, y_r \eta_{k,r}$ sono tutti interi (algebrici),

$$\delta_r = \text{Max} (|\xi - \xi_r|, |\eta_{1,r} - \eta_{1,r}|, \dots, |\eta_k - \eta_{k,r}|),$$

$$X_r = \text{Max} (|\bar{\xi}_r|) \quad (3), \quad Y_r = \text{Max} (|\bar{\eta}_{1,r}|, |\bar{\eta}_{2,r}|, \dots, |\bar{\eta}_{k,r}|),$$

A_r la quota fino alla quale i numeri $1, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono linearmente indipendenti (nel campo razionale) (4).

Allora, dei k numeri (5)

$$\xi^{\eta_1}, \xi^{\eta_2}, \dots, \xi^{\eta_k}$$

uno almeno è trascendente quando esistono tre numeri reali (positivi) ϱ, σ, θ pei quali sono verificate tutte e tre le condizioni seguenti

a) $0 < \varrho < \varrho + \sigma < 1, \quad \theta > 1 + \frac{1}{k},$

b) $\left(g_r^{\frac{\theta-1}{k}} \log \frac{1}{\delta_r} \right)^{\frac{1}{k\theta}} = O(A_r), \quad \text{per } r \rightarrow +\infty$

c) $\left\{ \begin{aligned} g_r^{\frac{1}{k}} \{ g_r \log (e y_r Y_r) \}^{\theta} &= o \left(\log \frac{1}{\delta_r} \right) \\ g_r^{\frac{1}{k}} \{ g_r \log (e x_r X_r) \}^{\sigma} &= o \left(\log \frac{1}{\delta_r} \right) \\ g_r^{\frac{1}{k}} \{ g_r^2 \log (e y_r Y_r) \}^{\theta_1} &= o \left(\log \frac{1}{\delta_r} \right), \end{aligned} \right. \quad \text{per } r \rightarrow +\infty$
 $\left(\theta_1 = \frac{k\theta}{k\theta - k - 1} \right).$

(3) Una notazione: Se ξ, η, \dots, ζ sono numeri algebrici con $\text{Max} (|\bar{\xi}|, |\bar{\eta}|, \dots, |\bar{\zeta}|)$ denoteremo il massimo modulo di ξ, η, \dots, ζ e di tutti i loro coniugati.

(4) Una locuzione: Ricordiamo che h numeri $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ si dicono linearmente indipendenti (si sottintenderà sempre « nel campo razionale ») quando essendo c_1, c_2, \dots, c_h interi razionali indeterminati, l'uguaglianza $c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \dots + c_h \zeta_h = 0$ equivale a $c_1 = c_2 = \dots = c_h = 0$. Allorquando $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ non siano linearmente indipendenti sussistono uguaglianze $c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \dots + c_h \zeta_h = 0$ con $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_h| > 0$, e si può considerare l'estremo superiore A dei numeri positivi λ tali che il sistema

$$c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \dots + c_h \zeta_h = 0, \quad |c_1| \leq \lambda, \quad |c_2| \leq \lambda, \dots, \quad |c_h| \leq \lambda$$

porti di conseguenza $c_1 = c_2 = \dots = c_h = 0$. Diremo allora che $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ sono linearmente indipendenti fino alla quota A (o anche: almeno fino alla quota λ). Infatti in questo caso nel reticolo ad h dimensioni (e_1, e_2, \dots, e_h) di punti a coordinate intere, l'iperpiano $c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \dots + c_h \zeta_h = 0$ passa per l'origine $(0, 0, \dots, 0)$ e non incontra alcun punto internamente al dominio quadrato $-A \leq c_i \leq A$ ($i=1, 2, \dots, h$). Quando $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_h$ siano linearmente indipendenti sarà da porre $A = +\infty$.

(5) Con ξ^η intendiamo $e^{\eta \log \xi}$ per una determinazione fissata di $\log \xi$.

Nel caso semplice $k=1$, soddisfatte le condizioni precedenti, si conclude che ξ^n è trascendente ($\eta_1 = \eta$).

Osservazioni. - 1^a). Se $\delta_r = 0$ (cioè $\xi_r = \xi$, $\eta_{1,r} = \eta_1, \dots$, $\eta_{k,r} = \eta_k$) conveniamo di assumere (com'è del resto naturale) $\log \frac{1}{\delta_r} = +\infty$, e i quozienti delle tre espressioni che compariscono ai primi membri di c) per $\log \frac{1}{\delta_r}$ sono da considerarsi nulli per quel valore di r .

2^a). Notiamo che la condizione b) è soddisfatta quando per ogni r ($r=1, 2, 3, \dots$) $\delta_r > 0$ e i $k+1$ numeri $1, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono linearmente indipendenti ($A_r = +\infty$). Quando, per un valore di r sia $A_r = +\infty$ e $\delta_r = 0$ conveniamo di porre

$$\left(g_r^{-\frac{1}{k}} \log \frac{1}{\delta_r} \right)^{\frac{1}{k\theta}} \leq A_r;$$

questa convenzione è giustificata dal fatto che ad ogni successione di δ_r nulli si può sostituirne un'altra di δ_r' positivi e abbastanza piccoli da *accordarsi* con le relazioni di limite contenute in c).

3^a). La simmetria delle due prime limitazioni in c) si riflette in una certa simmetria in cui vengono a trovarsi le posizioni della base ξ e degli esponenti $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$.

4^a). Risulta evidentemente $x_r X_r = \text{Max}(|\overline{x_r \xi_r}|)$, dove $\overline{x_r \xi_r}$ sono algebrici interi e quindi $x_r X_r \geq 1$; analogamente $y_r Y_r \geq 1$. Dunque

$$(1.1) \quad \log(e y_r Y_r) \geq 1, \quad \log(e x_r X_r) \geq 1.$$

2. - Da questo teorema generale se ne possono ricavare immediatamente altri. Sia $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ una successione di numeri algebrici che converge a ζ ; possiamo fissare l'idea su due forme tipiche di approssimazione: 1^o) col supporre che ζ_r , ($r=1, 2, \dots$) siano tutti di grado limitato ($\leq G$ indipendente da r); 2^o) col supporre che le due successioni z_1, z_2, z_3, \dots e Z_1, Z_2, Z_3, \dots siano entrambe limitate (dove z_r è il minimo intero razionale positivo per cui $z_r \zeta_r$ è algebrico intero e $Z_r = \text{Max}(|\overline{\zeta_r}|)$). Fissando l'idea ora su l'una o sull'altra di queste due forme di approssimazione si deducono i teoremi seguenti via via più particolari; e nei loro enunciati (salvo affermazione contraria) ci serviremo delle notazioni introdotte al n.º 1.

TEOREMA II. - Se, per $r=1, 2, 3, \dots$, i numeri $\xi_r, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono di grado $\leq G$ (indipendente da r); allora dei k numeri

$$\xi^{\eta_1}, \quad \xi^{\eta_2}, \dots, \quad \xi^{\eta_k} \quad (\xi \neq 0, \xi \neq 1)$$

uno almeno è trascendente quando esistono tre numeri reali (positivi) ϱ, σ, θ pei quali sono verificate tutte e tre le condizioni seguenti:

$$1^\circ) \quad 0 < \varrho < \varrho + \sigma < 1, \quad \theta > 1 + \frac{1}{k},$$

2°) i numeri $1, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono linearmente indipendenti almeno fino alla quota $(-\log \delta_r)^{\frac{1}{k\theta}}$ ($r=1, 2, 3, \dots$),

3°) con $\theta_1 = \frac{k\theta}{k\theta - k - 1}$ e per $r \rightarrow +\infty$ è

$$\log^{\frac{\theta}{\varrho}}(e y_r Y_r) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \quad \log^{\frac{\theta}{\sigma}}(e x_r X_r) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \quad \log^{\theta_1}(e y_r Y_r) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right).$$

Osservazione. - Poichè $\frac{\theta}{\varrho} \equiv \theta_1$ secondochè $\theta \equiv 1 + \frac{1}{k} + \varrho$, si conclude che nella condizione 3°) si potrà tralasciare la prima o la terza delle tre relazioni di limite secondochè è $\theta < 1 + \frac{1}{k} + \varrho$ oppure $\theta \geq 1 + \frac{1}{k} + \varrho$.

Questo teorema si ottiene dal precedente, osservando che nelle nostre ipotesi è $g_r = O(1)$.

3. - TEOREMA III. - Supponiamo che esistano un intero razionale N e un numero positivo L (ambidue indipendenti da r) tali che i numeri $N\xi_r, N\eta_{1,r}, \dots, N\eta_{k,r}$ siano algebrici interi, ed essi e tutti i loro coniugati abbiano modulo $< L$ ($r=1, 2, 3, \dots$). Allora dei k numeri $\xi^{\eta_1}, \dots, \xi^{\eta_k}$ ($\xi \neq 0, \xi \neq 1$) uno almeno è trascendente, quando sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

1°) i numeri $1, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono linearmente indipendenti almeno fino alla quota $(-g_r^2 \log \delta_r)^{\frac{1}{2k+1}}$, ($r=1, 2, 3, \dots$);

2°) esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ per il quale è $g_r^{4+\frac{3}{k}+\varepsilon} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right)$, per $r \rightarrow +\infty$.

Osservazione. - La condizione 1°) è sicuramente soddisfatta nel caso particolare in cui $1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ sono algebrici linearmente indipendenti, coll'assumere $\eta_{i,r} = \eta_i$ ($i=1, 2, \dots, k$).

Dimostrazione. - Le ipotesi ci dicono che x_r, y_r, X_r, Y_r sono tutti limitati per $r \rightarrow +\infty$, e la *c*) del n.° 1 si riduce a $g^{\gamma} = o(-\log \delta_r)$, dove γ è il massimo dei tre numeri $\frac{1}{k} + \frac{\theta}{\varrho}, \frac{1}{k} + \frac{\theta}{\sigma}, \frac{1}{k} + 2\theta_1$. Posto $\theta = 2 + \frac{1}{k}, \varrho = \sigma = \frac{1}{2+\varepsilon'}$ risulta

$$\frac{1}{k} + \frac{\theta}{\varrho} = \frac{1}{k} + \frac{\theta}{\sigma} = 4 + \frac{3}{k} + \varepsilon' \left(2 + \frac{1}{k}\right) = 4 + \frac{3}{k} + \varepsilon; \quad \frac{1}{k} + 2\theta_1 = 4 + \frac{3}{k}.$$

Per ciò che riguarda la *b*), si osservi che $\theta - \frac{1}{k} = 2, k\theta = 2k + 1$.

4. - Fissiamo in particolare l'attenzione sul caso in cui $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ sono tutti algebrici. Assumiamo $\eta_{i,r} = \eta_i$ ($i=1, 2, \dots, k; r=1, 2, 3, \dots$); allora i numeri y_r e Y_r risultano limitati. Vale il seguente

TEOREMA IV. - Supponiamo che ξ_r sia algebrico di grado g_r ($r=1, 2, 3, \dots$) e che i $k+1$ numeri $1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ siano algebrici linearmente indipendenti.

Sia $\xi_r \rightarrow \xi, \xi \neq 0, \xi \neq 1, \delta_r = |\xi_r - \xi|, x_r \xi_r$ intero, $X_r = \text{Max}(|\xi_r|)$.

Allora dei k numeri $\xi^{\eta_1}, \xi^{\eta_2}, \dots, \xi^{\eta_k}$ uno almeno è trascendente quando è soddisfatta la condizione seguente:

A) esistono due numeri reali ϱ, σ con $0 < \varrho < \varrho + \sigma < 1$, tali che per $\theta = 1 + \frac{1}{k} + 2\varrho$ e $r \rightarrow +\infty$ risulti

$$g_r^{\frac{1}{k} + \frac{\theta}{\varrho}} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \quad g_r^{\frac{1}{k} + \frac{\theta}{\sigma}} \log^{\frac{\theta}{\sigma}}(ex_r X_r) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right).$$

Questo teorema non cessa di valere se alla condizione A) si sostituisce la seguente (più restrittiva):

B) $g_r = O(1)$ ed esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che per $r \rightarrow +\infty$ risulti

$$x_r X_r = O\left(e^{\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{k-\varepsilon}{k+1}}}\right).$$

Dimostrazione. - Partiamo dal Teorema I: le condizioni a) e b) sono verificate, e rimane a soddisfare la c). La seconda relazione limite di c) figura in A); essendo $y_r Y_r = O(1)$, per le altre due basta avere $g^\gamma = o(-\log \delta_r)$ dove γ è il massimo dei due numeri $\frac{1}{k} + \frac{\theta}{\varrho}, \frac{1}{k} + 2\theta_1$; ma

$$\frac{1}{k} + 2\theta_1 = \frac{1}{k} + \frac{2k\theta}{k\theta - k - 1} = \frac{1}{k} + \frac{\theta}{\varrho}.$$

Per completare basta provare che dalla B) segue la A): infatti, essendo $g_r = O(1)$, se poniamo

$$\varepsilon = 3\varepsilon', \quad \theta = \frac{k+1}{k-\varepsilon'} \left(> 1 + \frac{1}{k}\right), \quad \sigma = \frac{k-2\varepsilon'}{k-\varepsilon'} (< 1)$$

risulta (con opportuno $G_r = O(1)$)

$$\begin{aligned} g_r^{\frac{1}{k} + \frac{\theta}{\sigma}} \log^{\frac{\theta}{\sigma}}(ex_r X_r) &= O\left(\log^{\frac{\theta}{\sigma}}(ex_r X_r)\right) = O\left(\log^{\frac{\theta}{\sigma}}\left(e G_r e^{\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{k-\varepsilon}{k+1}}}\right)\right) = \\ &= O\left(O(1) + \left(\log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{k-\varepsilon}{k+1} \cdot \frac{\theta}{\sigma}}\right) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \end{aligned}$$

poichè infatti

$$\frac{k-\varepsilon}{k+1} \cdot \frac{\theta}{\sigma} = \frac{k-3\varepsilon'}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k-\varepsilon'} \cdot \frac{k-\varepsilon'}{k-2\varepsilon'} = \frac{k-3\varepsilon'}{k-2\varepsilon'} < 1.$$

5. - Termineremo col considerare due casi particolari interessanti in cui vale $g_r = O(1)$.

TEOREMA V. - Supponiamo che i numeri $\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ ($k \geq 1$) siano algebrici e che i $k+1$ numeri $1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ siano linearmente indipendenti.

Siano $\xi', \eta_1', \eta_2', \dots, \eta_k'$, $k+1$ numeri reali e $\xi\xi' \neq 0, \xi\xi' \neq 1$.

Allora dei k numeri

$$(\xi\xi')^{\eta_1\eta_1'}, \quad (\xi\xi')^{\eta_2\eta_2'}, \quad \dots, \quad (\xi\xi')^{\eta_k\eta_k'}$$

uno almeno è trascendente quando esistono un numero reale $\varepsilon > 0$ e $k+1$ successioni di numeri razionali

$$\frac{p_r}{q_r} \rightarrow \xi', \quad \frac{p_{1,r}}{q_r} \rightarrow \eta_1', \dots, \quad \frac{p_{k,r}}{q_r} \rightarrow \eta_k', \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

convergenti rispettivamente a $\xi', \eta_1', \dots, \eta_k'$, in guisa da avere

$$\left| \xi' - \frac{p_r}{q_r} \right| < \frac{1}{q_r^\omega}, \quad \left| \eta_1' - \frac{p_{1,r}}{q_r} \right| < \frac{1}{q_r^\omega}, \dots, \quad \left| \eta_k' - \frac{p_{k,r}}{q_r} \right| < \frac{1}{q_r^\omega},$$

$$\left(\omega = (\log q_r)^{2\left(1+\frac{1}{k}\right)+\varepsilon} \right).$$

Per $k=1$ risulta $\omega = \log^{4+\varepsilon} q_r$ e il numero $(\xi\xi')^{\eta\eta'}$ è trascendente non appena sia soddisfatta la condizione enunciata.

Dimostrazione. - Evidentemente un corpo algebrico contenente $\xi, \eta_1, \dots, \eta_k$ contiene anche tutti i numeri $\xi \frac{p_r}{q_r}, \eta_1 \frac{p_{1,r}}{q_r}, \dots, \eta_k \frac{p_{k,r}}{q_r}$ e quindi $g_r = O(1)$. Inoltre

$$X_r = \text{Max} \left(\left| \xi \frac{p_r}{q_r} \right| \right) = O(1), \quad Y_r = \text{Max} \left(\left| \eta_1 \frac{p_{1,r}}{q_r} \right|, \dots, \left| \eta_k \frac{p_{k,r}}{q_r} \right| \right) = O(1),$$

quindi $ex_r X_r = O(q_r), ey_r Y_r = O(q_r)$.

Partiamo dal Teorema II (n.º 2). La condizione 2º) è soddisfatta; si tratta di soddisfare alla 3º) con le costanti ϱ, σ, θ soddisfacenti alla 1º) cioè

$$0 < \varrho < \varrho + \sigma < 1, \quad \theta > 1 + \frac{1}{k}.$$

Essendo $ex_r X_r = O(q_r), ey_r Y_r = O(q_r)$ la 3º) prende la forma

$$(5.1) \quad \log^\gamma q_r = o \left(\log \frac{1}{\delta_r} \right), \quad \gamma = \text{Max} \left(\frac{\theta}{\varrho}, \frac{\theta}{\sigma}, \frac{k\theta}{k\theta - k - 1} \right).$$

D'altronde, l'ipotesi di questo Teorema V ci dice che esiste un numero G (indipendente da r) per il quale

$$\delta_r \leq G \text{Max} \left(\left| \xi' - \frac{p_r}{q_r} \right|, \left| \eta_1' - \frac{p_{1,r}}{q_r} \right|, \dots, \left| \eta_k' - \frac{p_{k,r}}{q_r} \right| \right) < \frac{G}{q_r^\omega},$$

cioè $\delta_r q_r^\omega < G$, da cui

$$(5.2) \quad \omega \log q_r = \log^{3+\frac{2}{k}+\varepsilon} q_r < \log G + \log \frac{1}{\delta_r}.$$

Dunque se, per $\varepsilon' > 0$, assumiamo $\varrho = \sigma = \frac{1}{2(1+\varepsilon')}$, $\theta = \frac{3}{2} + \frac{1}{k}$ risulta

$$\frac{\theta}{\varrho} = \frac{\theta}{\sigma} = \left(3 + \frac{2}{k} \right) (1 + \varepsilon'), \quad \frac{k\theta}{k\theta - k - 1} = 3 + \frac{2}{k},$$

e per ε' abbastanza piccolo (basta $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{5}$) dalla (5.2) segue la relazione limite (5.1).

6. - TEOREMA VI. - Siano ξ , η due numeri algebrici, η irrazionale.

1°) Se $\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$, allora ξ^η è trascendente (A. GELFOND).

2°) Se $\xi \neq 0$, $\xi \neq 1$ e nello sviluppo in frazione continua di un numero reale irrazionale α esistono infinite ridotte $\frac{p_r}{q_r}$ per le quali

$$\left| \alpha - \frac{p_r}{q_r} \right| < \frac{1}{q_r^\omega}, \quad (\omega = \log^{2+\varepsilon} q_r, \varepsilon > 0 \text{ indipendente da } r),$$

allora ξ^η è trascendente.

3°) Se $\xi \alpha \neq 0$, $\xi \alpha \neq 1$ e nello sviluppo di α esistono infinite ridotte $\frac{p_r}{q_r}$ per le quali

$$\left| \alpha - \frac{p_r}{q_r} \right| < \frac{1}{q_r^\tau}, \quad (\tau = \log^{1+\varepsilon} q_r, \varepsilon > 0 \text{ indipendente da } r),$$

allora $(\xi \alpha)^\eta$ è trascendente.

Dimostrazione. - Tutto è conseguenza immediata delle proposizioni precedenti. Dimostriamo ad esempio 2°). Riferendoci al Teorema I abbiamo

$$\begin{aligned} k=1, \quad g_r=O(1), \quad ex_r X_r=O(1), \quad Y_r=O(1), \\ ey_r Y_r=O(q_r), \quad \log(ey_r Y_r)=O(\log q_r) \end{aligned}$$

e basta dimostrare che per ϱ e θ opportuni con $0 < \varrho < 1$, $\theta > 2$, $\theta_1 = \frac{\theta}{\theta-2}$ si ha

$$\log^{\frac{\theta}{\varrho}} q_r = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \quad \log^{\theta_1} q_r = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right).$$

Ma, per l'ipotesi, esiste un numero G , indipendente da r , per il quale è $q_r^\omega \delta_r < G$, cioè

$$\omega \log q_r = \log^{3+\varepsilon} q_r < \log G + \log \frac{1}{\delta_r}.$$

Assumendo $\theta=3$, $\varrho = \frac{1}{1+\varepsilon'}$, con $\varepsilon' > 0$ abbastanza piccolo (basta $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$), si ha $\frac{\theta}{\varrho} = 3(1+\varepsilon') < 3+\varepsilon$, $\theta_1 = 3 < 3+\varepsilon$ e il teorema risulta dimostrato.

7. - I numeri reali α che soddisfano alle condizioni del Teorema VI sono infiniti; ricorrendo alla definizione mediante la frazione continua regolare si costruiscono facilmente degli esempi: basta evidentemente che nella successione dei quozienti parziali vi siano infiniti di tali quozienti « molto grandi » rispetto a quelli che li precedono. Per esempio, se $\beta = [b_0, b_1, b_2, b_3, \dots]$ è un irrazionale reale qualunque, scelta arbitrariamente una successione crescente $\{h\} h_1, h_2, h_3, \dots$ di interi positivi, si costruisca il numero $\alpha = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ con la legge $a_s = b_s c_s$ dove:

$$c_s = 1 \text{ quando } s \text{ non è in } \{h\};$$

$$c_s = [e^{\log^4 (2^s b_0 b_1 \dots b_{s-1} c_0 c_1 \dots c_{s-1})}] \text{ quando } s \text{ è in } \{h\}.$$

È facile riconoscere che il numero α così costruito soddisfa abbondantemente alle condizioni in discorso.

È evidente che l'insieme dei numeri α ha la potenza del continuo. Dunque i risultati conseguiti ci forniscono infiniti numeri trascendenti del tipo ζ^r e del tipo γ^ζ con ζ algebrico, e tale infinità ha la potenza del continuo.

Lemma fondamentale.

8. - Siano

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N), \quad (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$$

due N -uple di numeri (complessi), la prima delle quali sia costituita di numeri *distinti*.

Supponiamo che esistano due numeri λ e μ non nulli tali che

$$\lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \dots, \lambda\omega_N, \quad \mu e^{\tau_1}, \mu e^{\tau_2}, \dots, \mu e^{\tau_N}$$

siano tutti *algebrici interi* e appartengano a un corpo algebrico K di grado g .

Poniamo ⁽⁶⁾

$$A = \text{Max} (|\omega_1|, |\omega_2|, \dots, |\omega_N|, |\tau_1|, |\tau_2|, \dots, |\tau_N|)$$

$$H = \frac{N}{gA}$$

$$\delta = \text{Max} (|\omega_1 - \tau_1|, |\omega_2 - \tau_2|, \dots, |\omega_N - \tau_N|)$$

$$L = \text{Max} (|\overline{\lambda\omega_1}|, |\overline{\lambda\omega_2}|, \dots, |\overline{\lambda\omega_N}|)$$

$$M = \text{Max} (|\overline{\mu e^{\tau_1}}|, |\overline{\mu e^{\tau_2}}|, \dots, |\overline{\mu e^{\tau_N}}|).$$

Per ogni successione di coppie di N_r -uple

$$(\omega_1^{(r)}, \omega_2^{(r)}, \dots, \omega_N^{(r)}), \quad (\tau_1^{(r)}, \tau_2^{(r)}, \dots, \tau_N^{(r)}), \quad (N = N_r; r = 1, 2, 3, \dots)$$

per le quali sono verificate le circostanze precedenti, i numeri

$$N, \lambda, \mu, g, A, H, \delta, L, M$$

risultano funzioni di r .

Allora, non possono esistere sei numeri reali

$$a, \beta, \gamma, \varepsilon, r, \vartheta$$

pei quali sono verificate tutte le circostanze seguenti ⁽⁷⁾

$$(8.1) \quad 0 \leq a < a + \beta \leq 1, \quad \gamma \geq 0, \quad r \geq 0, \quad \vartheta > 0,$$

⁽⁶⁾ D'ora in poi saranno conservate queste posizioni.

⁽⁷⁾ Tutte le relazioni di limite che considereremo d'ora in poi, salvo che sia detto espli-

$$(8.2) \quad H \rightarrow +\infty,$$

$$(8.3) \quad H^\alpha \log^\varepsilon H \rightarrow +\infty,$$

$$(8.4) \quad AH^\beta \log^{-\varepsilon} H \rightarrow +\infty,$$

$$(8.5) \quad \log^+ A = o(H^\alpha \log^{1+\varepsilon} H),$$

$$(8.6) \quad g \log N = o(AH^{\alpha+\beta} \log H),$$

$$(8.7) \quad \log^+ (|\lambda| L^{g-1}) = o(H^\alpha \log^{1+\varepsilon} H),$$

$$(8.8) \quad \log^+ (|\mu| M^{g-1}) = o(AH^{\beta-\gamma} \log^{1-\varepsilon} H),$$

$$(8.9) \quad g \log^+ (|\lambda| L^{g-1}) = o(H^{\alpha+\beta+\gamma\gamma^{-1}} \log H),$$

$$(8.10) \quad \log^+ (NH^{-(\alpha+\beta+\gamma\gamma^{-1})}) = o(H^{\alpha+\beta+\gamma\gamma^{-1}} \log H),$$

$$(8.11) \quad \log \frac{1}{\delta} > \vartheta AH^{\alpha+\beta+\gamma\gamma} \log H + N \log^+ A.$$

Osservazioni. - 1^a). Quando è $\delta=0$ conveniamo di porre $\log \frac{1}{\delta} = +\infty$ e la disuguaglianza (8.11) è da considerarsi in questo caso soddisfatta.

2^a). Abbiamo incluso nel lemma enunciato anche i casi estremi $\alpha=0$, $\gamma=0$, che possono presentare interesse; qualora ci limitassimo a supporre $\alpha\gamma > 0$ molte delle relazioni di limite che in esso figurano verrebbero a semplificarsi col tenere conto che per qualunque $\sigma > 0$ è $\log H = o(H^\sigma)$.

Il complesso delle limitazioni (8.1), ..., (8.11) è molto complicato; si intravede però qualche connessione fra le limitazioni in giuoco. Vogliamo citare un semplice esempio che riuscirà istruttivo come indicatore di quelle connessioni e anche come indicatore dello spirito di « stretta economia » col quale è costruito il lemma.

Se in (8.1) si sostituisce $\vartheta \geq 0$ in luogo di $\vartheta > 0$ e in (8.8) si sostituisce $AH^{\beta-\gamma} \log^{1-\varepsilon+\varepsilon'} H$ in luogo di $AH^{\beta-\gamma} \log^{1-\varepsilon} H$, la proposizione cessa di valere, come lo dimostra l'esempio seguente.

Per ogni intero N poniamo

$$\omega_k = \tau_k = k \log \left(1 + \frac{1}{N}\right), \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

in guisa che posto $\frac{1}{\lambda} = \log \left(1 + \frac{1}{N}\right)$, $\mu = N^N$, i $2N$ numeri

$$1, 2, \dots, N, N^N \left(1 + \frac{1}{N}\right), N^N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2, \dots, N^N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

citamente il contrario, saranno valutate per $r \rightarrow +\infty$. Seguendo l'uso corrente poniamo, per u positivo, $\log^+ u = \log u$ per $u \geq 1$, $\log^+ u = 0$ per $u < 1$.

risultano tutti *razionali interi*. Le nozioni elementari sui limiti ci dicono che $N \log \left(1 + \frac{1}{N}\right) \rightarrow 1$ per $N \rightarrow +\infty$ e quindi si ha

$$\begin{aligned} g=1, \quad A=1+o(1), \quad \delta=0, \quad H=\frac{N}{gA}=\frac{N}{A}=N+o(N) \\ \log \lambda = \log \left(\log \left(1 + \frac{1}{N}\right) \right)^{-1} = \log (N+o(N)) = \log N + o(1) = \log H + o(1) \\ \log \mu = N \log N = H \log H + o(H \log H) \\ \log (|\lambda| L^{g-1}) = \log |\lambda| = \log \lambda, \quad \log (|\mu| M^{g-1}) = \log |\mu| = \log \mu. \end{aligned}$$

Se assumiamo

$$\alpha=0, \quad \beta=1, \quad \gamma=0, \quad \nu=0, \quad \vartheta=0, \quad \varepsilon' > \varepsilon > 0$$

tutte le limitazioni (8.1),..., (8.11) con le modificazioni di cui sopra, risultano soddisfatte; la proposizione modificata non è vera.

In modo analogo si vede che non è vera la proposizione ottenuta sostituendo in (8.1) la catena $0 \leq \alpha < \alpha + \beta \leq 1 + \eta$ ($\eta > 0$ qualunque) in luogo di $0 \leq \alpha < \alpha + \beta \leq 1$. Infatti con lo stesso sistema di coppie di N -uple si assuma

$$\alpha = \frac{\eta}{2}, \quad \beta = 1 + \frac{\eta}{2}, \quad \gamma = 0, \quad \nu = 0, \quad \varepsilon = -1, \quad \vartheta = 1$$

e le limitazioni (8.1),..., (8.11) risultano tutte verificate.

Ai n.° 16-27 dimostreremo il lemma fondamentale, per il quale si richiedono altre semplici proposizioni ausiliarie che presenteremo ai n.° 9-15.

9. - Consideriamo la funzione intera

$$(9.1) \quad G(z) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\tau_i z},$$

dove c_1, c_2, \dots, c_N sono *razionali interi*, e le sue derivate

$$(9.2) \quad G^{(s)}(z) = \sum_{i=1}^N c_i \tau_i^s e^{\tau_i z} \quad (s=0, 1, 2, \dots; \quad G^{(0)}(z) = G(z));$$

risulta

$$(9.3) \quad G^{(s)}(z) - h_s(z) = \sum_{i=1}^N c_i \omega_i^s e^{\tau_i z},$$

dove abbiamo posto

$$(9.4) \quad h_s(z) = \sum_{i=1}^N c_i (\tau_i^s - \omega_i^s) e^{\tau_i z}.$$

In tutto ciò che segue supporremo

$$(9.5) \quad |c_i| \leq C \quad (i=1, 2, \dots, N; \quad C \geq 1)$$

e, quando convenga, per facilitare la scrittura porremo $\exp \{z\} = e^z$.

10. - Lemma 1°.

$$(I) \quad |G(z)| < \exp \{ \log N + \log C + A |z| \}.$$

È evidente, poichè per (9.1) e (9.5) è

$$|G(z)| \leq \sum_{i=1}^N |c_i e^{\tau_i z}| \leq C \sum_{i=1}^N e^{|\tau_i z|} \leq N C e^{A |z|}.$$

11. - Lemma 2°. - *Siano S e T razionali interi ≥ 1 ; se*

$$(11.1) \quad [C^{\frac{N}{2ST}} + 1] < ([C] + 1)^{\frac{N}{2ST}}$$

è possibile scegliere i coefficienti c_1, c_2, \dots, c_N (razionali interi) non tutti nulli e in modulo non superiori a C , in guisa che valgano tutte le ST disuguaglianze

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} |G^{(s)}(t)| < \exp \left\{ \frac{3}{2} \log 2 + \log N + S \log A + AT - \left(\frac{N}{2ST} - 1 \right) \log C \right\} \\ (s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T-1). \end{array} \right.$$

Osservazione. - Per $N > 2ST$ e C abbastanza grande la (11.1) è soddisfatta.

Procediamo, con A. GELFOND, secondo un classico metodo di DIRICHLET: In uno spazio a $2ST$ dimensioni, nel quale sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, assumiamo come immagine della funzione $G(z)$ il punto avente per coordinate:

$$\Re G^{(s)}(t), \quad \Im G^{(s)}(t), \quad (s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T-1).$$

Poichè $G(z)$ è determinata dai suoi N coefficienti c_1, c_2, \dots, c_N , se a ciascuno di questi facciamo assumere i valori $0, 1, \dots, [C]$, nel nostro spazio verranno definiti $([C] + 1)^N$ punti e tutti, per la (9.2), saranno contenuti nel dominio quadrato avente il centro nell'origine e dimensione

$$(11.2) \quad \underset{0 \leq s \leq S-1, 0 \leq t \leq T-1}{2 \text{ Max}} |G^{(s)}(t)| < 2NCA^S e^{AT}$$

dove A^S è da sostituire con 1 tutte le volte che $A < 1$.

Dividiamo ogni spigolo di tale dominio in D parti eguali; otterremo, mediante iperpiani paralleli a quelli coordinati condotti pei punti di divisione, una suddivisione del dominio quadrato in D^{2ST} domini quadrati uguali. Tutte le volte che $D^{2ST} < ([C] + 1)^N$ esiste almeno un dominio quadrato della suddivisione contenente almeno due punti immagini di due funzioni $G_1(z), G_2(z)$ distinte; se supponiamo soddisfatta la (11.1) e poniamo

$$(11.3) \quad D = [C^{\frac{N}{2ST}} + 1],$$

risulta $D^{2ST} < ([C] + 1)^N$ e la funzione $G(z) = G_1(z) - G_2(z)$ ha i coefficienti c_1, c_2, \dots, c_N che rispondono alle condizioni del lemma e inoltre, essendo

$$\log D = \log [C^{2ST} + 1] > \log C^{2ST} = \frac{N \log C}{2ST},$$

$$G^{(s)}(t) = G_1^{(s)}(t) - G_2^{(s)}(t),$$

risulta evidentemente per la (11.2)

$$\left. \begin{matrix} \Re G^{(s)}(t) \\ \Im G^{(s)}(t) \end{matrix} \right\} < \exp \left\{ \log 2 + \log N + \log C + S \log A + AT - \frac{N \log C}{2ST} \right\}$$

$$(s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T-1).$$

E passando al modulo $|G^{(s)}(t)|$ segue ovviamente la (II).

12. - Lemma 3°. - *Nelle posizioni (9.3) e (9.4), per ogni coppia (s, t) di interi non negativi s e t si verifica necessariamente una almeno delle due circostanze seguenti*

$$(12.1) \quad G^{(s)}(t) = h_s(t),$$

$$(12.2) \quad |G^{(s)}(t)| \geq \exp \{ - (g-1) \log N - (g-1) \log C - s \log (|\lambda| L^{g-1}) - t \log (|\mu| M^{g-1}) \} - \\ - \exp \{ \log \delta + \log N + \log C + (s-1) \log A + At + \log s \}.$$

Infatti il numero

$$\theta_{s,t} = \sum_{i=1}^N c_i (\lambda \omega_i)^s (\mu e^{\tau_i})^t$$

è intero nel corpo K ; per esso e pei suoi coniugati $\bar{\theta}_{s,t}$ vale la limitazione

$$|\bar{\theta}_{s,t}| \leq NCL^s M^t$$

e poichè la norma di $\theta_{s,t}$ è nulla oppure ≥ 1 si conclude

$$\theta_{s,t} = 0 \quad \text{oppure} \quad |\theta_{s,t}| \geq (NCL^s M^t)^{-g+1}.$$

D'altronde è

$$|G^{(s)}(t) - h_s(t)| = |\lambda^s \mu^t \theta_{s,t}| = |\lambda|^s |\mu|^t |\theta_{s,t}|,$$

quindi o vale l'uguaglianza $G^{(s)}(t) = h_s(t)$ oppure è

$$(12.3) \quad |G^{(s)}(t) - h_s(t)| \geq |\lambda|^s |\mu|^t (NCL^s M^t)^{-g+1}.$$

Adesso osserviamo

$$|\tau_i^s - \omega_i^s| = |\tau_i - \omega_i| \cdot |\tau_i^{s-1} + \tau_i^{s-2} \omega_i + \dots + \omega_i^{s-1}| \leq \delta s A^{s-1},$$

quindi per la (9.4)

$$(12.4) \quad |h_s(t)| \leq NC \delta s A^{s-1} e^{At}.$$

Dalle (12.3) e (12.4) si ricava

$$|G^{(s)}(t)| \geq |\lambda|^s |\mu|^t (NCL^s M^t)^{-g+1} - |h_s(t)| \geq |\lambda|^s |\mu|^t (NCL^s M^t)^{-g+1} - \delta NC s A^{s-1} e^{At},$$

cioè vale la (12.2). Il lemma 3° risulta così dimostrato. Questo lemma ci dice tra l'altro che:

Per $(s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T-1)$ vale necessariamente almeno una delle due circostanze seguenti

$$G^{(s)}(t) = h_s(t),$$

$$(III) \quad |G^{(s)}(t)| \geq \exp \left\{ -(g-1) \log N - (g-1) \log C - S \log^+ (|\lambda| L^{g-1}) - T \log^+ (|\mu| M^{g-1}) \right\} - \\ - \exp \left\{ \log \delta + \log N + \log C + S \log^+ A + AT + \log S \right\}.$$

13. - Lemma 4°. - Diciamo $P(z)$ il polinomio (unico) in z di grado $\leq ST-1$, pel quale si abbia

$$(13.1) \quad P^{(s)}(t) = h_s(t), \quad (s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T-1),$$

e poniamo

$$Q(z) = \{z(z-1)\dots(z-T+1)\}^S.$$

Esiste un numero T' , tale che per qualunque $|z| \geq T \geq T'$ risulta

$$(IV) \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \exp \left\{ \log \delta - ST \log T - \log (|z| - T + 1) + \right. \\ \left. + \log N + \log C + S \log^+ A + AT + S \log S + \right. \\ \left. + 2ST + T \log (S + T) + S \log 2 + 3 \log S + \log T \right\}.$$

Per stabilire questo lemma ricorriamo alla formula generale di interpolazione di CH. HERMITE [5], che qui conviene ricordare.

14. - Siano a_0, a_1, \dots, a_{T-1} numeri distinti ($T \geq 1$),

s_0, s_1, \dots, s_{T-1} interi razionali positivi ($s_0 + s_1 + \dots + s_{T-1} = n + 1$),

β_{i, k_i} , ($k_i = 0, 1, \dots, s_i - 1; i = 0, 1, \dots, T-1$) un sistema di $n + 1$ numeri arbitrari.

Esiste uno, ed uno solo, polinomio $P(z)$ di grado $\leq n$ che soddisfa alle $n + 1$ condizioni

$$(14.1) \quad P^{(r)}(a_i) = \beta_{i, r}, \quad (r = 0, 1, \dots, s_i - 1; i = 0, 1, \dots, T-1); \quad (P^0(z) = P(z)).$$

Posto

$$(14.2) \quad \varphi(z) = (z - a_0)^{s_0} (z - a_1)^{s_1} \dots (z - a_{T-1})^{s_{T-1}},$$

il polinomio $P(z)$ è dato dalla formula di CH. HERMITE

$$(14.3) \quad \frac{P(z)}{\varphi(z)} = \sum \frac{\partial^{s-1}}{\partial \alpha^{s-1}} \left\{ \frac{sP(\alpha)}{\varphi^{(s)}(\alpha)(z-\alpha)} \right\},$$

dove la somma è estesa alle T coppie (α, s)

$$(\alpha_0, s_0), \quad (\alpha_1, s_1), \dots, \quad (\alpha_{T-1}, s_{T-1})$$

e le derivazioni indicate in ciascun termine si devono eseguire riguardando il

corrispondente a come variabile, z come una costante, e, dopo eseguite le derivazioni si deve porre in luogo di $P^{(r)}(a_i)$ i numeri $\beta_{i,r}$ assegnati.

Ci proponiamo di maggiorare $\left| \frac{P(z)}{\varphi(z)} \right|$, e per questo fissiamo l'attenzione sopra uno qualunque dei T termini che compariscono al secondo membro di (14.3). Posto

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^s}{\psi(z)},$$

$\psi(z)$ risulta indipendente da quell' a e, derivando $\varphi(z)$ s volte rispetto ad a e ponendo poi $z=a$, otteniamo

$$\varphi^{(s)}(a) = \frac{(-1)^s s!}{\psi(a)}, \quad \frac{sP(a)}{\varphi^{(s)}(a)(z-a)} = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} P(a)(z-a)^{-1} \psi(a),$$

e pel termine della somma in (14.3)

$$(14.4) \quad \frac{\partial^{s-1}}{\partial a^{s-1}} \left\{ \frac{sP(a)}{\varphi^{(s)}(a)(z-a)} \right\} = (-1)^s \sum_{a+b+c=s-1} \frac{P^{(a)}(a)}{a!} \cdot \frac{((z-a)^{-1})^{(b)}}{b!} \frac{\psi^{(c)}(a)}{c!},$$

essendo la somma estesa alle soluzioni intere non negative dell'equazione

$$a + b + c = s - 1.$$

Osserviamo

$$(14.5) \quad ((z-a)^{-1})^{(b)} = b! (z-a)^{-b-1},$$

e se pensiamo (per fissare le idee) $a = \alpha_i$ risulta

$$\psi(\alpha_i) = \prod_{*} (\alpha_i - \alpha_j)^{-s_j}$$

essendo il prodotto \prod_{*} esteso ai valori dell'indice j ($0 \leq j \leq T-1; j \neq i$); ricaviamo

$$\frac{d^c}{d\alpha_i^c} \psi(\alpha_i) = c! \sum_{\sum l_j = c} \prod_{*} \frac{1}{l_j!} \frac{d^{l_j}}{d\alpha_i^{l_j}} \{(\alpha_i - \alpha_j)^{-s_j}\},$$

e poichè

$$\frac{d^l}{d\alpha_i^l} \{(\alpha_i - \alpha)^{-s}\} = (-1)^l \frac{(s+l-1)!}{(s-1)!} (\alpha_i - \alpha)^{-s-l} = (-1)^l l! \binom{s+l-1}{l} (\alpha_i - \alpha)^{-s-l},$$

si conclude

$$(14.6) \quad \frac{\psi^{(c)}(\alpha_i)}{c!} = (-1)^c \sum_{\sum l_j = c} \prod_{*} \binom{s_j + l_j - 1}{l_j} (\alpha_i - \alpha_j)^{-s_j - l_j}.$$

15. - Fermiamoci sul caso particolare che ci interessa ponendo

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \dots, \quad \alpha_{T-1} = T-1; \quad s_0 = s_1 = \dots = s_{T-1} = S; \quad n+1 = ST,$$

$$\varphi(z) = \{z(z-1)\dots(z-T+1)\}^S = Q(z),$$

e andiamo a maggiorare separatamente ciascun termine al secondo membro

di (14.3), cioè il secondo membro di (14.4); perverremo a questo scopo maggiorando ciascun termine che compare nella somma al secondo membro di (14.4) col tenere presenti le espressioni date in (14.5) e (14.6) ai fattori di tale termine.

Intanto, essendo $|z| \geq T$, $b \geq 0$ e $|z-a| \geq |z| - T + 1 \geq 1$ dalla (14.5) ricaviamo

$$(15.1) \quad \left| \frac{((z-a)^{-1})^{(b)}}{b!} \right| \leq (|z| - T + 1)^{-1}.$$

Consideriamo la (14.6): essendo $0 \leq l_j \leq c \leq S-1$, $s_j = S$, $a_i - a_j \geq 1$ risulta

$$\begin{aligned} \left| \prod_{*} \binom{s_j + l_j - 1}{l_j} (a_i - a_j)^{-s_j - l_j} \right| &\leq \prod_{*} |a_i - a_j|^{-S} \cdot \prod_{*} (S + l_j - 1)^{l_j} \leq \\ &\leq \left(\left[\frac{T}{2} \right] ! \right)^{-2S} \cdot \prod_{*} \{2(S-1)\}^{l_j} \leq \left(\left[\frac{T}{2} \right] ! \right)^{-2S} (2S)^{\sum l_j} \leq \left(\left[\frac{T}{2} \right] ! \right)^{-2S} 2^S S^S. \end{aligned}$$

Poichè $c \leq S-1$, il numero dei termini della somma in (14.6) è

$$\binom{c + T - 2}{T - 2} < (S + T)^T,$$

e si conclude per (14.6)

$$(15.2) \quad \left| \frac{\psi^{(c)}(a_i)}{c!} \right| \leq \left(\left[\frac{T}{2} \right] ! \right)^{-2S} S^S (S + T)^T 2^S.$$

Infine osserviamo che, essendo per $0 \leq s \leq S-1$

$$|\tau_i^s - \omega_i^s| = |\tau_i - \omega_i| \cdot |\tau_i^{s-1} + \tau_i^{s-2}\omega_i + \dots + \omega_i^{s-1}| \leq \delta s A^s \leq \delta S A_1^S,$$

dove

$$A_1 = \text{Max}(1, A),$$

in base alla (9.4), proprio come per la (12.2), otteniamo

$$(15.3) \quad |h_s(t)| \leq \delta N C A_1^S S e^{AT}.$$

Per le (13.1) abbiamo

$$(15.4) \quad \left| \frac{P^{(a)}(t)}{a!} \right| \leq |P^{(a)}(t)| = |h_a(t)| \leq \delta N C A_1^S S e^{AT}.$$

Le (15.4), (15.1), (15.2) ci maggiorano i tre fattori del termine generico della somma in (14.4); questa somma possiede un numero di termini $\leq S^2$. La somma in (14.3) possiede T termini. Essendo $\varphi(z) = Q(z)$ si perviene finalmente alla disuguaglianza

$$(15.5) \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \delta \left(\left[\frac{T}{2} \right] ! \right)^{-2S} (|z| - T + 1)^{-1} N C A_1^S e^{AT} S^S (S + T)^T 2^S S^3 T.$$

Per tradurre il fattoriale in esponenziale ci serviamo della ben nota formula di STIRLING $\log(x!) = x \log x - x + o(x)$, la quale ci dice che per $T \geq T'$ (T' conveniente) risulta

$$\log \left(\left[\frac{T}{2} \right] ! \right) > \frac{T}{2} \log T - T,$$

e introdotta questa in (15.5) otteniamo senz'altro la (IV).

Dimostrazione del Lemma fondamentale.

16. - Per dimostrare il Lemma fondamentale (n.º 8) proveremo che il verificarsi simultaneo delle circostanze (8.1),..., (8.11) conduce all'assurdo.

Cominciamo con le seguenti semplici osservazioni:

1º) Il numero $\vartheta > 0$ entra soltanto nelle relazioni (8.10) e (8.11), le quali sussistono a maggior ragione quando a ϑ si sostituisca un numero ϑ' con $0 < \vartheta' < \vartheta$. Essendo $\beta > 0$ si può quindi supporre $\vartheta < \beta$, e si può fissare un numero $\varrho \geq 1$ in guisa da avere (vedi (8.1))

$$(16.1) \quad 0 < \frac{\beta}{4\varrho} < \vartheta < \beta \leq 1 - a.$$

2º) Le relazioni (8.8),..., (8.11) sussistono ancora se ai due numeri γ e ν si sostituiscono due altri numeri γ' e ν' con $0 \leq \gamma' \leq \gamma$, $\nu\gamma = \nu'\gamma'$; allora, poichè $\beta > 0$ (vedi (8.1)), impiccolendo eventualmente γ , potremo fare in modo da avere

$$(16.2) \quad 0 \leq \gamma < \vartheta \leq \gamma + \vartheta < \beta, \quad \nu \text{ razionale intero } \geq 0,$$

convenendo di porre $\nu = 0$ per $\gamma = 0$.

3º) Per (8.3) e (8.4) è

$$N = gAH \geq AH \geq O(1) + AH^{\alpha+\beta} = O(1) + (H^\alpha \log^\varepsilon H)(AH^\beta \log^{-\varepsilon} H) \rightarrow +\infty,$$

dunque risulta

$$(16.3) \quad N \rightarrow +\infty.$$

4º) Avuto riguardo alle relazioni (8.3),..., (8.8), si può determinare una funzione $\psi = \psi(r)$ crescente abbastanza lentamente da avere

$$(16.4) \quad \psi \rightarrow +\infty, \quad \psi = o(H^\alpha \log^\varepsilon H), \quad \psi = o(\log H),$$

$$(16.5) \quad \log^+ A = o\left(\frac{H^\alpha \log^{1+\varepsilon} H}{\psi}\right),$$

$$(16.6) \quad g \log N = o\left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi}\right),$$

$$(16.7) \quad \log^+ (|\lambda| L^{g-1}) = o\left(\frac{H^\alpha \log^{1+\varepsilon} H}{\psi}\right),$$

$$(16.8) \quad \log^+ (|\mu| M^{g-1}) = o\left(\frac{AH^{\beta-\gamma} \log^{1-\varepsilon} H}{\psi}\right),$$

ed essendo, per (16.3), $\log N \rightarrow +\infty$ dalla (16.6) ricaviamo in particolare

$$(16.9) \quad \frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{g\psi} \rightarrow +\infty, \quad \frac{AH \log H}{g\psi} \rightarrow +\infty.$$

Per collegarci opportunamente coi lemmi precedenti poniamo

$$(16.10) \quad S = \left[\frac{1}{4\varrho} AH^\beta \log^{-\varepsilon} H \right], \quad T = [H^\alpha \log^\varepsilon H], \quad \log C = \frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{g\psi}.$$

Per le (16.10), (8.4), (8.3) e (16.9) risulta

$$(16.11) \quad S \rightarrow +\infty, \quad T \rightarrow +\infty, \quad C \rightarrow +\infty, \\ \frac{1+o(1)}{4g} AH^{\alpha+\beta} = ST \leq \frac{1}{4g} AH^{\alpha+\beta}, \quad 4gST \leq AH = \frac{N}{g} \leq N.$$

In tutto ciò che segue supporremo di assumere $r > r'$ (con r' conveniente) in guisa da avere

$$(16.12) \quad H \geq 3, \quad S \geq 3, \quad T \geq 3, \quad T \geq T', \quad C \geq C'$$

essendo T' e C' i numeri adatti per la validità rispettivamente del Lemma 4° e del Lemma 2°. (Si noti che $2ST < 4gST \leq N$ e per $C \geq C'$, con C' conveniente, vale la (11.1)).

Andiamo adesso a studiare la forma asintotica delle disuguaglianze dei Lemma 1°, 2°, 3° e 4° in queste posizioni.

17. - Da (16.6) e (16.10) ricaviamo

$$(17.1) \quad \begin{cases} \log N \leq g \log N = o\left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi}\right), \\ \log C = \frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{g\psi} = o(AH^{\alpha+\beta} \log H). \end{cases}$$

Dunque la (I) del n.° 10 diventa

$$(I^*) \quad |G(z)| \leq \exp \{ o(AH^{\alpha+\beta} \log H) + A|z| \}.$$

Osserviamo, perchè ci servirà nel seguito, che su questa disuguaglianza non influisce l'espressione che abbiamo assegnato a T in (16.10).

18. - Consideriamo la (II) del n.° 11: un semplice calcolo ci mostrerà che, nella somma entro parentesi $\{\}$ al secondo membro, l'ultimo termine è preponderante. Infatti, ricordiamo che per (8.1) è $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta \leq 1$; l'ultimo termine in discorso è (vedi (16.10) e (16.11))

$$\left(\frac{N}{2ST} - 1\right) \log C = \left(\frac{gAH}{2ST} - 1\right) \log C \geq \left(2g - \frac{1}{gH^{1-\alpha-\beta}}\right) \frac{AH \log H}{\psi}$$

mentre pei termini precedenti si ha (vedi (16.9), (16.6), (16.10), (16.5), (16.4))

$$\frac{3}{2} \log 2 = o\left(\frac{AH \log H}{\psi}\right), \quad \log N = o\left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi}\right) = o\left(\frac{AH \log H}{\psi}\right), \\ S \log A = \frac{1}{4g} AH^\beta \log^{-\varepsilon} H o\left(\frac{H^\alpha \log^{1+\varepsilon} H}{\psi}\right) = o\left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi}\right) = o\left(\frac{AH \log H}{\psi}\right), \\ AT \leq AH^\alpha \log^\varepsilon H = o(AH^{\alpha+\beta}) = o\left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi}\right) = o\left(\frac{AH \log H}{\psi}\right).$$

Si conclude che, nelle nostre posizioni, la (II) assume la forma

$$(II^*) \quad |G^{(s)}(t)| < \exp \left\{ - \left(2\varrho + o(1) - \frac{1}{gH^{1-\alpha-\beta}} \right) \frac{AH \log H}{\psi} \right\}.$$

19. - Consideriamo la (III) del n.° 12: vediamo subito che nella somma entro la prima parentesi $\{\}$ il termine preponderante (quando non sia nullo) è $(g-1) \log C$, mentre nella somma entro la seconda parentesi $\{\}$ il termine preponderante è $\log \delta$. Infatti (vedi (16.10), (16.6), (16.7), (16.8), (8.11), (16.4))

$$(g-1) \log C = \left(1 - \frac{1}{g} \right) \frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi},$$

$$(g-1) \log N < g \log N = o \left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi} \right),$$

$$S \log \left(|\lambda| L^{g-1} \right) \leq \frac{1}{4\varrho} AH^\beta \log^{-\varepsilon} H o \left(\frac{H^\alpha \log^{1+\varepsilon} H}{\psi} \right) = o \left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi} \right),$$

$$T \log \left(|\mu| M^{g-1} \right) \leq H^\alpha \log^\varepsilon H o \left(\frac{AH^{\beta-\gamma} \log^{1-\varepsilon} H}{\psi} \right) = o \left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi} \right),$$

$$\log \delta < -\vartheta AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \leq -\vartheta AH^{\alpha+\beta} \log H,$$

$$\begin{aligned} \log S &\leq \log (AH^\beta \log^{-\varepsilon} H) = O(\log (AH^\beta \log^{-\varepsilon} H \cdot H^\alpha \log^\varepsilon H)) = \\ &= O(\log (AH^{\alpha+\beta})) = o(AH^{\alpha+\beta}) = o \left(\frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi} \right). \end{aligned}$$

Tenendo presenti anche le relazioni trovate al precedente n.° 18, otteniamo dalla (III)

$$G^{(s)}(t) \geq \exp \left\{ - \left(1 - \frac{1}{g} + o(1) \right) \frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi} \right\} - \exp \left\{ - (\vartheta + o(1)) AH^{\alpha+\beta} \log H \right\}.$$

Dei due termini $\exp \{\}$ che figurano al secondo membro il primo è preponderante poichè $\vartheta > 0$ e $\psi \rightarrow +\infty$. Si conclude che

Per ogni coppia (s, t) di interi s e t con $(0 \leq s \leq S-1, 0 \leq t \leq T-1)$ si ha

$$G^{(s)}(t) = h_s(t),$$

oppure

$$(III^*) \quad G^{(s)}(t) \geq \exp \left\{ - \left(1 - \frac{1}{g} + o(1) \right) \frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi} \right\}.$$

20. - Dal confronto di (II*) e (III*), essendo asintoticamente

$$\left(1 - \frac{1}{g} + o(1) \right) \frac{AH^{\alpha+\beta} \log H}{\psi} < \left(2\varrho + o(1) - \frac{1}{gH^{1-\alpha-\beta}} \right) AH \log H,$$

si conclude

$$G^{(s)}(t) = h_s(t), \quad \text{per } s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T-1.$$

21. - Procediamo adesso per induzione (finita) dimostrando che dal sistema di uguaglianze

$$(21.1) \quad \begin{cases} G^{(s)}(t) = h_s(t), & \text{per } s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T_n-1 \\ S = \left[\frac{1}{4\varrho} AH^\beta \log^{-\varepsilon} H \right], & T_n = [H^{\alpha+n\gamma} \log^\varepsilon H], \end{cases} \quad (0 \leq n \leq \nu)$$

segue quello non meno ampio:

$$(21.2) \quad \begin{cases} G^{(s)}(t) = h_s(t), & \text{per } s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T_{n+1}-1 \\ S = \left[\frac{1}{4\varrho} AH^\beta \log^{-\varepsilon} H \right], & T_{n+1} = [H^{\alpha+(n+1)\gamma} \log^\varepsilon H], \\ & (1 \leq n+1 \leq \nu+1). \end{cases}$$

Per $\gamma=0$ questa proposizione è vera perchè i due sistemi coincidono.

Sia $\gamma \geq 0$. Posto

$$(21.3) \quad Q_n(z) = \{z(z-1)\dots(z-T_n+1)\}^S$$

e detto $P_n(z)$ il polinomio di grado $\leq ST_n-1$ per cui si ha

$$(21.4) \quad P_n^{(s)}(t) = h_s(t) \quad (s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T_n-1)$$

la funzione

$$(21.5) \quad F_n(z) = \frac{G(z) - P_n(z)}{Q_n(z)}$$

risulta intera, e il massimo modulo dei valori che essa assume nel cerchio

$$(21.6) \quad |z| \leq H^{\alpha+\beta+n\gamma} = Z_n$$

viene assunto sul contorno $|z|=Z_n$.

Coll'osservare che $0 \leq \gamma < \beta$, $H \geq 3$, $H \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$T_n = [H^{\alpha+n\gamma} \log^\varepsilon H] \leq T_{n+1} = [H^{\alpha+(n+1)\gamma} \log^\varepsilon H] = o(H^{\alpha+\beta+n\gamma}) = o(Z_n).$$

Supporremo $r \geq r_n$, dove r_n è tale che per $r \geq r_n$ sia

$$(21.7) \quad T_n \leq T_{n+1} \leq Z_n.$$

Andiamo a valutare il massimo modulo di $F_n(z)$ in $|z| \leq Z_n$; poichè $Q_n(z)$ non si annulla per $|z|=Z_n$ e

$$(21.8) \quad |F_n(z)| \leq \left| \frac{G(z)}{Q_n(z)} \right| + \left| \frac{P_n(z)}{Q(z)} \right|, \quad \text{per } |z|=Z_n,$$

si tratta di migliorare separatamente ciascun termine del secondo membro.

Per $|z| \geq T_n$ risulta evidentemente dalla (21.3)

$$|Q_n(z)| \geq \exp \{ST_n \log(|z| - T_n + 1)\}$$

e, posto $|z|=Z_n = H^{\alpha+\beta+n\gamma}$, coll'osservare che $\beta > 0$ e $T_n = o(Z_n)$, otteniamo

$$ST_n \log(|z| - T_n + 1) = (1 + o(1))ST_n \log Z_n = \frac{\alpha + \beta + n\gamma + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H,$$

da cui

$$(21.9) \quad |Q_n(z)| \geq \exp \left\{ \frac{\alpha + \beta + n\gamma + o(1)}{4e} AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| = Z_n.$$

La funzione $|G(z)|$ per $|z| = Z_n$ è maggiorata mediante la (I*) (nella quale non figura T_n , vedi osservazione alla fine del n.° 17) e otteniamo per la (I*) e la (21.9)

$$\left| \frac{G(z)}{Q_n(z)} \right| < \exp \left\{ o(AH^{\alpha + \beta} \log H) + AZ_n - \frac{\alpha + \beta + n\gamma + o(1)}{4e} AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H \right\},$$

da cui si ricava subito ($Z_n = H^{\alpha + \beta + n\gamma}$)

$$(21.10) \quad \left| \frac{G(z)}{Q_n(z)} \right| < \exp \left\{ - \frac{\alpha + \beta + n\gamma + o(1)}{4e} AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| = Z_n.$$

22. - Per valutare $\left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right|$ applichiamo la disuguaglianza (IV) del n.° 13.

Cominciamo col semplificarla: per il solo fatto che $S \rightarrow +\infty$, $T \rightarrow +\infty$ tutti i termini che compariscono nell'ultima riga entro la parentesi $\{\}$ sono $o(ST \log T)$ e possiamo scrivere

$$(22.1) \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \exp \left\{ \log \delta - (1 + o(1))ST \log T - \log(|z| - T + 1) + \right. \\ \left. + \log N + \log C + S \log A + AT + S \log S \right\}$$

valida per $|z| \geq T$ e $T \geq T'$ (con T' conveniente).

Poniamo in questa $P(z) = P_n(z)$, $Q(z) = Q_n(z)$, $T = T_n$; come al n.° 18 si ricava

$$(22.2) \quad \log N + \log C + S \log A = O\left(\frac{AH^{\alpha + \beta} \log H}{\psi}\right) = o(AH^{\alpha + \beta} \log H);$$

d'altronde per la (16.10)

$$S \log S \leq S \log A + \beta S \log H - \varepsilon S \log \log H \\ \leq o(AH^{\alpha + \beta} \log H) + \frac{\beta}{4e} \frac{AH^{\alpha + \beta} \log H}{H^\alpha \log^\varepsilon H} - \frac{\varepsilon + o(1)}{4e} \frac{AH^{\alpha + \beta} \log \log H}{H^\alpha \log^\varepsilon H}$$

e poichè (vedi (8.3)) $H^\alpha \log^\varepsilon H \rightarrow +\infty$ risulta

$$(22.3) \quad S \log S = o(AH^{\alpha + \beta} \log H) = o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H),$$

$$(22.4) \quad AT_n \leq AH^{\alpha + n\gamma} \log^\varepsilon H = o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma}) = o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H).$$

Dalle (21.1) ricaviamo, per $\alpha + n\gamma \geq 0$:

$$(22.5) \quad ST_n \log T_n = \frac{1 + o(1)}{4e} AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \left\{ (\alpha + n\gamma) \log H + \varepsilon \log \log H \right\} \\ = \frac{\alpha + n\gamma + o(1)}{4e} AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H.$$

Dalla (8.11) ricaviamo

$$(22.6) \quad \log \delta < -(\vartheta + o(1))AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H, \quad (\vartheta > 0).$$

Per $|z| \geq T_n$ è $\log(|z| - T_n + 1) \geq 0$, dunque la (22.1) per $T = T_n$ e $|z| \geq T_n$ ci fornisce in definitiva

$$(22.7) \quad \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| \leq \exp \left\{ - \left(\vartheta + \frac{\alpha + n\gamma}{4\varrho} + o(1) \right) AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| \geq T_n.$$

23. - Introducendo le (21.9) e (22.7) nella (21.8), coll'osservare che (vedi (16.1))

$$\vartheta + \frac{\alpha + n\gamma}{4\varrho} > \frac{\alpha + \beta + n\gamma}{4\varrho},$$

si conclude

$$(23.1) \quad \begin{cases} |F_n(z)| \leq \exp \left\{ - \frac{\alpha + \beta + n\gamma + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H \right\}, \\ \text{per } |z| = Z_n = H^{\alpha+\beta+n\gamma}. \end{cases}$$

24. - Passiamo ora da T_n a T_{n+1} e proponiamoci di maggiorare $|G(z)|$ per $|z| \leq T_{n+1}$; a questo scopo ci serviremo della disuguaglianza

$$(24.1) \quad |G(z)| \leq |F_n(z)Q_n(z)| + |P_n(z)|$$

conseguenza della (21.5). Dalla proposizione (21.3) abbiamo

$$(24.2) \quad \begin{aligned} \max_{|z| \leq T_{n+1}} |Q_n(z)| &\leq \exp \{ ST_n \log (T_{n+1} + T_n) \} \leq \exp \{ ST_n \log (2T_{n+1}) \} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{\alpha + (n+1)\gamma + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H \right\}, \end{aligned}$$

e questa, insieme alle (23.1) e (21.7), ci fornisce

$$(24.3) \quad |F_n(z) \cdot Q_n(z)| \leq \exp \left\{ - \frac{\beta - \gamma + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| \leq T_{n+1}.$$

Essendo $|P_n(z)| = \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| \cdot |Q_n(z)|$ (per $Q_n(z) \neq 0$), la disuguaglianza (22.7) valevole per $|z| \geq T_n$ e la disuguaglianza (24.2) valevole per $|z| \leq T_{n+1}$ ci forniscono

$$(24.4) \quad |P_n(z)| \leq \exp \left\{ - \left(\vartheta - \frac{\gamma}{4\varrho} + o(1) \right) AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| \leq T_{n+1}$$

valevole per $|z| \leq T_{n+1}$ poichè $P_n(z)$ è intera.

Le (24.3) e (24.4) introdotte nella (24.1) ci danno (essendo $\vartheta > \frac{\beta}{4\varrho}$, vedi (16.2))

$$(24.5) \quad |G(z)| \leq \exp \left\{ - \frac{\beta - \gamma + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+n\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| \leq T_{n+1}.$$

25. - Questa disuguaglianza fornisce una maggiorazione di $|G(z)|$; ma a noi serve una maggiorazione di $|G^{(6)}(t)|$ colla quale si possa contraddire la disugua-

glianza (III) del n.º 12, onde poter concludere $G^{(s)}(t) = h_s(t)$. Per maggiorare $|G^{(s)}(t)|$ applichiamo la formula di CAUCHY:

$$G^{(s)}(t) = \frac{s!}{2\pi i} \int \frac{G(z) dz}{(z-t)^{s+1}}, \quad (|z| = T_{n+1});$$

$$(s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T_{n+1}-1).$$

Essendo $s! < S! < S^S$, $|z-t| \geq 1$, e valendo (24.5), abbiamo:

$$|G^{(s)}(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{\beta - \gamma + o(1)}{4e} AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H + S \log S + \log T_{n+1} \right\}.$$

Nella somma entro la parentesi $\{ \}$ il primo termine è preponderante poichè (vedi (22.3))

$$S \log S = o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H),$$

$$\begin{aligned} \log T_{n+1} &\leq \log (H^{\alpha + (n+1)\gamma} \log^\varepsilon H) = O(\log H) = o(AH^{\alpha + \beta} \log H) = \\ &= o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H). \end{aligned}$$

Si conclude

$$(25.1) \quad |G^{(s)}(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{\beta - \gamma + o(1)}{4e} AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H \right\},$$

$$(s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T_{n+1}-1).$$

Andiamo adesso a precisare la (III) col porre in essa $T = T_{n+1}$; dobbiamo eseguire un calcolo perfettamente analogo a quello svolto al n.º 19, col tenere conto, per quello che riguarda il termine $S \log A$ del calcolo eseguito al n.º 18. Poichè $\gamma \geq 0$ e $\psi \rightarrow +\infty$, verifichiamo subito che tutti i termini

$$\begin{aligned} (g-1) \log N, & \quad (g-1) \log C, & \quad S \log^+ (|\lambda| L^{g-1}), \\ \log N, & \quad \log C, & \quad S \log^+ A, & \quad \log S \end{aligned}$$

sono $o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H)$, e d'altronde

$$\begin{aligned} T_{n+1} \log^+ (\mu M^{g-1}) &\leq H^{\alpha + (n+1)\gamma} \log^\varepsilon H o \left(\frac{AH^{\beta - \gamma} \log^{1-\varepsilon} H}{\psi} \right) = o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H), \\ \log \delta &< -\vartheta AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H, \quad (\vartheta > 0), \\ AT_{n+1} &\leq AH^{\alpha + (n+1)\gamma} \log^\varepsilon H = o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma}) = o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H). \end{aligned}$$

Poichè $\vartheta > 0$ e $0 \leq n \leq \nu$, la (III) assume la forma

$$\begin{aligned} |G^{(s)}(t)| &\geq \exp \{ o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H) \} - \exp \{ -(\vartheta + o(1)) AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H \} \geq \\ &\geq (1 + o(1)) \exp \{ o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H) \} \geq \\ &\geq \exp \{ o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H) \}, \quad (0 \leq n \leq \nu). \end{aligned}$$

Dal Lemma 3º (n.º 12) otteniamo: Per ogni coppia (s, t) di interi s e t con $0 \leq s \leq S-1$ e $0 \leq t \leq T_{n+1}-1$, si ha $G^{(s)}(t) = h_s(t)$, oppure

$$(25.2) \quad |G^{(s)}(t)| \geq \exp \{ o(AH^{\alpha + \beta + n\gamma} \log H) \}.$$

La (25.2) non può valere perchè contraddice la (25.1), dunque

$$G^{(s)}(t) = h_s(t), \quad (s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T_{s+1}-1);$$

e siamo passati dal sistema di uguaglianze (21.1) al successivo (21.2).

Poichè per $n=0$ il sistema è vero, esso risulta vero per $n=0, 1, \dots, \nu$; in particolare abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} G^{(s)}(t) = h_s(t), \quad \text{per } s=0, 1, \dots, S-1; t=0, 1, \dots, T_\nu-1 \\ S = \left[\frac{1}{4\varrho} AH^\beta \log^{-\varepsilon} H \right], \quad T_\nu = [H^{\alpha+\nu\gamma} \log^\varepsilon H]. \end{array} \right.$$

26. - Dopo avere fatti ν passi avanzando la T , da T_0 a T_ν , procediamo a fare l'ultimo passo avanzando la S . Intanto la (23.1) per $n=\nu$ ci dà

$$(26.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |F_\nu(z)| \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha + \beta + \nu\gamma + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\}, \\ \text{per } |z| \leq Z_\nu = H^{\alpha+\beta+\nu\gamma}. \end{array} \right.$$

Cerchiamo di maggiorare $|G(z)|$ per $|z| \leq Z^* = H^{\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta}$. Essendo

$$\alpha + \nu\gamma < \alpha + \beta + \nu\gamma - \vartheta < \alpha + \beta + \nu\gamma,$$

e quindi anche

$$T_\nu \leq H^{\alpha+\nu\gamma} \log^\varepsilon H = o(Z^*), \quad Z^* < Z_\nu,$$

si può supporre $r \geq r''$, dove r'' è tale che per $r \geq r''$ sia $T_\nu \leq Z^* < Z_\nu$. Allora nel cerchio $|z| \leq Z^*$ valgono tutte le disuguaglianze (ottenute con procedimento perfettamente analogo a quello seguito al n.º 24)

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq Z^*} |Q_\nu(z)| &\leq \exp \{ ST_\nu \log(Z^* + T_\nu) \} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \frac{\alpha + \beta + \nu\gamma - \vartheta + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\}; \end{aligned}$$

$$|F_\nu(z) Q_\nu(z)| \leq \exp \left\{ -\frac{\vartheta + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| \leq Z^*;$$

$$\left| \frac{P_\nu(z)}{Q_\nu(z)} \right| \cdot |Q_\nu(z)| \leq \exp \left\{ -\left(\vartheta + \frac{\alpha + \nu\gamma + o(1)}{4\varrho} - \frac{\alpha + \beta + \nu\gamma - \vartheta + o(1)}{4\varrho} \right) AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\},$$

per $T_\nu \leq |z| \leq Z^*$, da cui

$$|P_\nu(z)| \leq \exp \left\{ -\left(\vartheta - \frac{\beta - \vartheta}{4\varrho} + o(1) \right) AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| \leq Z^*.$$

Introdotte queste disuguaglianze nella (24.1), in cui si faccia $n=\nu$, col tenere conto che è $0 < \beta < 4\varrho\vartheta$, per cui anche $0 < \frac{\vartheta}{4\varrho} < \vartheta - \frac{\beta - \vartheta}{4\varrho}$, si conclude

$$(26.2) \quad |G(z)| \leq \exp \left\{ -\frac{\vartheta + o(1)}{4\varrho} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\}, \quad \text{per } |z| \leq Z^* = H^{\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta}.$$

27. - Applicando la formula di CAUCHY:

$$G^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{G(z) dz}{z^{n+1}}, \quad (|z| = H^{\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta}),$$

valutiamo $|G^{(n)}(0)|$ per $n=0, 1, \dots, N-1$. Otteniamo dalla (26.2)

$$\begin{aligned} G^{(n)}(0) &\leq \exp \left\{ n \log n - \frac{\vartheta + o(1)}{4e} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H - n \log H^{\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ n \log (nH^{-(\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta)}) - \frac{\vartheta + o(1)}{4e} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ N \log (NH^{-(\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta)}) - \frac{\vartheta + o(1)}{4e} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\}. \end{aligned}$$

Essendo per (8.10)

$$\begin{aligned} N \log (NH^{-(\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta)}) &\leq gAH \log (NH^{-(\alpha+\beta+\nu\gamma-\vartheta)}) \leq \\ &\leq AHo(H^{\alpha+\beta+\nu\gamma-1} \log H) = o(AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H), \end{aligned}$$

si perviene in definitiva a

$$(27.1) \quad |G^{(n)}(0)| \leq \exp \left\{ -\frac{\vartheta + o(1)}{4e} AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\}, \quad (n=0, 1, \dots, N-1).$$

Applichiamo il Lemma 3° (n.° 12) al caso $0 \leq s = n \leq N-1, t=0$; dalla (12.2) ricaviamo:

$$(27.2) \quad |G^{(n)}(0)| \geq \exp \left\{ -(g-1) \log N - (g-1) \log C - N \log (|\lambda| L^{g-1}) \right\} - \\ - \exp \left\{ \log \delta + \log N + \log C + N \log A + \log N \right\}.$$

Come abbiamo veduto al n.° 25, i termini

$$(g-1) \log N, \quad (g-1) \log C, \quad \log N, \quad \log C$$

sono tutti $o(AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H)$, mentre per (8.9) e (8.11) è

$$\begin{aligned} N \log (|\lambda| L^{g-1}) &= gAH \log (|\lambda| L^{g-1}) = o(AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H), \\ \log \delta + N \log A &< -\vartheta AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H, \end{aligned}$$

e dalla (27.2) si ricava:

$$(27.3) \quad G^{(n)}(0) \geq \exp \left\{ o(AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H) \right\} - \\ - \exp \left\{ -(\vartheta + o(1)) AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H \right\} \geq \exp \left\{ o(AH^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H) \right\}.$$

E questa è incompatibile con la (27.1). Il Lemma 3° ci dice dunque che

$$(27.4) \quad G^{(n)}(0) = h_n(0), \quad \text{per } n=0, 1, \dots, N-1.$$

Per queste uguaglianze e per le (9.3), gl'interi razionali c_1, c_2, \dots, c_N , non tutti nulli e scelti in base al Lemma 2° (n.° 11), soddisfano al sistema di N equazioni lineari e omogenee

$$\sum_{i=1}^N c_i \omega_i^s = 0, \quad (s=0, 1, \dots, N-1),$$

il cui determinante è il determinante delle differenze degli N numeri *distinti* $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ e quindi non è nullo. Questo è assurdo, e il Lemma fondamentale risulta dimostrato.

Dimostrazione del Teorema I.

28. - Si tratta di provare il Teorema I come conseguenza del Lemma fondamentale.

Cominciamo con la seguente ovvia osservazione: Non si altera la generalità del teorema quando alla condizione c) si sostituisce la seguente, solo apparentemente più restrittiva:

$$c') \quad \left\{ \begin{array}{l} g_r^k \{g_r \log(ey_r Y_r)\}^{\varrho} \log \{g_r \log(ey_r Y_r)\} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right) \\ g_r^k \{g_r \log(ex_r X_r)\}^{\sigma} \log \{g_r \log(ex_r X_r)\} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right) \\ g_r^k \{g_r^2 \log(ey_r Y_r)\}^{\theta_1} \log \{g_r^2 \log(ey_r Y_r)\} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right). \end{array} \right.$$

Questo dipende dal fatto che in a) figura la condizione $\varrho + \sigma < 1$ (aperta, e non $\varrho + \sigma \leq 1$). Nel caso che queste relazioni limite non valessero, pur valendo quelle in c), si potrebbe sostituire alla terna $(\varrho, \sigma, \theta)$ un'altra $(\varrho', \sigma', \theta')$ (coll'aumentare di abbastanza poco i tre numeri) in guisa da avere ancora

$$0 < \varrho' < \varrho' + \sigma' < 1, \quad \theta' > 1 + \frac{1}{k}$$

e anche

$$\varrho' > \varrho, \quad \sigma' > \sigma, \quad \theta' > \theta, \quad \frac{\theta}{\varrho} > \frac{\theta'}{\varrho'}, \quad \frac{\theta}{\sigma} > \frac{\theta'}{\sigma'},$$

e risulterebbe $\theta_1' < \theta_1$

$$\theta_1' = \frac{k\theta'}{k\theta' - k - 1} < \frac{k\theta}{k\theta - k - 1} = \theta_1.$$

Poichè per $u_r \geq 1$, $0 < a' < a$, $r \rightarrow +\infty$ risulta $u_r^{a'} \log u_r = O(u_r^a)$, le tre limitazioni in $c')$ sono evidenti.

Dunque nel seguito supporremo soddisfatte le $a)$, $b)$, $c')$ anzichè le $a)$, $b)$, $c)$.

Scegliamo una funzione $H_r = H(r)$ in guisa da avere

$$(28.1) \left\{ \begin{array}{l} H_r \rightarrow +\infty, \quad g_r^{\frac{1}{k}} H_r^\theta \log H_r = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right) \\ \frac{\{g_r \log (e y_r Y_r)\}^{\frac{1}{2}}}{H_r} \rightarrow 0, \quad \frac{\{g_r \log (e x_r X_r)\}^{\frac{1}{\sigma}}}{H_r} \rightarrow 0, \quad \frac{\{g_r^2 \log e y_r Y_r\}^{\frac{\theta_1}{\theta}}}{H_r} \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Questo è sempre possibile per le c' ; infatti se, ad esempio, denotiamo per un momento con Z_r il massimo dei tre numeri che figurano al numeratore di queste tre ultime frazioni risulta per le c')

$$g_r^{\frac{1}{k}} Z_r^\theta \log Z_r = \varepsilon_r \log \frac{1}{\delta_r}, \quad (\varepsilon_r \rightarrow +0, \delta_r \rightarrow +0)$$

e si può assumere $H_r = Z_r \varepsilon_r^{-\frac{1}{2\theta}}$; essendo $Z_r \geq 1$ segue $H_r \rightarrow +\infty$, e si riconosce subito che vale anche la seconda delle (28.1):

$$g_r^{\frac{1}{k}} H_r^\theta \log H_r = \varepsilon_r^{-\frac{1}{2}} g_r^{\frac{1}{k}} Z_r^\theta \log Z_r + \frac{\varepsilon_r^{-\frac{1}{2}}}{2\theta} \log \frac{1}{\varepsilon_r} g_r^{\frac{1}{k}} Z_r^\theta = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right).$$

Poniamo $\varrho + \sigma + \gamma = 1$ e, per riferirci al Lemma fondamentale,

$$a = \varrho, \quad \beta = \sigma + \gamma, \quad (a + \beta = 1).$$

Per le (28.1) e le (1.1) abbiamo

$$(28.2) \quad g_r \log (e y_r Y_r) = o(H_r^a), \quad g_r \log (e x_r X_r) = o(H_r^{\beta-\gamma}), \quad g_r^2 \log (e y_r Y_r) = o(H_r^{\frac{\theta}{\theta_1}}),$$

$$(28.3) \quad g_r = o(H_r^a), \quad g_r = o(H_r^{\beta-\gamma}), \quad g_r = o(H_r^{\frac{\theta}{2\theta_1}}), \quad \log g_r = O(\log H_r).$$

29. - Per dimostrare il Teorema I partiremo dall'ipotesi che i k numeri $\xi^{\eta_1}, \xi^{\eta_2}, \dots, \xi^{\eta_k}$ siano tutti algebrici e giungeremo al verificarsi simultaneo di tutte le circostanze del Lemma fondamentale (n.º 8).

Denotiamo: con g_0 il grado di un corpo algebrico K_0 contenente questi k numeri, con x_0 il minimo intero razionale positivo pel quale $x_0 \xi^{\eta_1}, x_0 \xi^{\eta_2}, \dots, x_0 \xi^{\eta_k}$ risultano algebrici interi,

$$X_0 = \text{Max} (|\overline{\xi^{\eta_1}}|, |\overline{\xi^{\eta_2}}|, \dots, |\overline{\xi^{\eta_k}}|).$$

Associamo all'intero r ($r=1, 2, 3, \dots$) le due N_r -uple

$$(29.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\omega_1^{(r)}, \omega_2^{(r)}, \dots, \omega_N^{(r)}), \quad (\tau_1^{(r)}, \tau_2^{(r)}, \dots, \tau_N^{(r)}), \quad (N = N_r) \\ \omega^{(r)} = (a_1 \eta_{1,r} + a_2 \eta_{2,r} + \dots + a_k \eta_{k,r} + b) \log \xi, \\ \tau^{(r)} = (a_1 \eta_{1,r} + a_2 \eta_{2,r} + \dots + a_k \eta_{k,r}) \log \xi + b \log \xi_r \end{array} \right.$$

essendo $(a_1, a_2, \dots, a_k, b)$ tutte le $k+1$ -uple distinte di razionali interi che soddisfano alle limitazioni

$$(29.2) \quad 0 \leq a_i \leq B_r, \quad (i=1, 2, \dots, k); \quad 0 \leq b \leq B_r,$$

B_r un numero positivo che definiremo tra breve, e convenendo di scegliere per $\log \xi_r$ la determinazione in guisa da avere $\log \xi_r \rightarrow \log \xi$ per $r \rightarrow +\infty$.

Andiamo a calcolare i numeri ⁽⁸⁾

$$N_r, \lambda_r, \mu_r, g_r', A_r, H_r, \delta_r', L_r, M_r$$

che entrano nell'enunciato del lemma (n.° 8).

Risulta

$$(29.3) \quad N_r = [B_r + 1]^{k+1}.$$

Supposto (per $r \geq r_0$, con r_0 conveniente questo si verifica) che sia

$$|\log \xi_r| < 2 |\log \xi|$$

risulta

$$|\tau^{(r)}| < (k+2) |\log \xi| B_r, \quad |\omega^{(r)}| < (k+2) |\log \xi| B_r,$$

quindi

$$(29.4) \quad |\log \xi| [B_r] \leq A_r < (k+2) |\log \xi| B_r.$$

Come subito si riconosce, si può assumere

$$(29.5) \quad \lambda_r = \frac{y_r}{\log \xi}, \quad \mu_r = x_0^{k[B_r]} x_r^{[B_r]}.$$

Tutti gli interi $\lambda_r \omega_i^{(r)}, \mu_r e^{t_i^{(r)}}$ ($i=1, 2, \dots, N_r$) appartengono a un corpo algebrico per cui grado g_r' risulta $g_r \leq g_r' \leq g_0 g_r$, e si può assumere

$$(29.6) \quad g_r' = g_0' g_r, \quad (1 \leq g_0' \leq g_0).$$

I numeri coniugati a $\lambda_r \omega_i^{(r)}$ si ottengono tutti (eventualmente con ripetizioni) sostituendo a $\eta_{1,r}, \eta_{2,r}, \dots, \eta_{k,r}$ i loro coniugati in tutti i modi possibili; considerazione analoga vale per $\mu_r e^{t_i^{(k)}}$; risulta dunque

$$L_r \leq \frac{y_r}{|\log \xi|} [B_r] (k Y_r + 1), \quad M_r \leq (x_0 X_0)^{k[B_r]} (x_r X_r)^{[B_r]}.$$

Si arriva così alle due disuguaglianze

$$(29.7) \quad L_r \leq \frac{k+1}{|\log \xi|} y_r Y_r B_r, \quad M_r \leq (x_0 X_0)^{k B_r} (x_r X_r)^{B_r}.$$

Se al numero H_r definito al n.° 28 vogliamo dare lo stesso significato che

⁽⁸⁾ Per evitare ambiguità gli elementi g_r e δ_r del Lemma vengono qui indicati con g_r' e δ_r' .

al numero H del Lemma fondamentale, occorre e basta scegliere B_r in guisa che risulti $N_r = g_r' A_r H_r$; cioè per le (29.3), (29.6), (29.4) abbiamo

$$g_0' |\log \xi| \cdot g_r [B_r] H_r \leq [B_r + 1]^{k+1} \leq g_0' (k+2) |\log \xi| \cdot g_r B_r H_r,$$

da cui

$$(29.8) \quad B_r^k \leq g_0' (k+2) |\log \xi| \cdot g_r H_r \leq (k+2) \cdot B_r^k + O(B_r^{k-1}).$$

Poichè $H_r \rightarrow +\infty$, e per (28.3)

$$\log(g_r H_r) = O(\log H_r),$$

da (29.8) e (29.4) ricaviamo

$$(29.9) \quad A_r \rightarrow +\infty, \quad B_r \rightarrow +\infty, \quad A_r = O(B_r), \quad B_r = O(A_r),$$

$$(29.10) \quad A_r = O(g_r^{\frac{1}{k}} H_r^{\frac{1}{k}}), \quad \log B_r = O(\log H_r).$$

I numeri $\omega_1^{(r)}, \omega_2^{(r)}, \dots, \omega_N^{(r)}$ ($N = N_r$) dati dalle (29.1) sono distinti, almeno per $r \geq r'$ (con r' conveniente): infatti i numeri $1, \eta_{1,r}, \dots, \eta_{k,r}$ sono linearmente indipendenti fino alla quota A_r , e A_r soddisfa alla b) (n.º 1); d'altronde, pel modo come abbiamo scelto B_r (vedi (29.9) e (29.10)) e per la seconda delle (28.1) è

$$B_r = O(g_r^{\frac{1}{k}} H_r^{\frac{1}{k}}), \quad H_r = o\left(g_r^{-\frac{1}{k\theta}} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right),$$

e risulta

$$B_r = o\left(g_r^{\theta - \frac{1}{k}} \log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{1}{k\theta}} = o(A_r).$$

30. - Non ci rimane che valutare δ_r' : per questo osserviamo (vedi (29.1))

$$\tau^{(r)} - \omega^{(r)} = \{a_1(\eta_1 - \eta_{1,r}) + \dots + a_k(\eta_k - \eta_{k,r})\} \log \xi + b(\log \xi_r - \log \xi),$$

da cui

$$(30.1) \quad |\tau^{(r)} - \omega^{(r)}| \leq B_r (k |\log \xi| \cdot \delta_r + |\log \xi_r - \log \xi|).$$

Essendo

$$(30.2) \quad \log \xi_r - \log \xi = (\log |\xi_r| - \log |\xi|) + i(\arg \xi_r - \arg \xi)$$

e inoltre $|\xi_r| \rightarrow |\xi| \neq 0$, $\arg \xi_r \rightarrow \arg \xi$, ricaviamo

$$\log |\xi_r| - \log |\xi| = \log \left| \frac{\xi_r}{\xi} \right| = \log \left(1 - \frac{|\xi_r| - |\xi|}{|\xi|} \right) = -(1 + o(1)) \frac{|\xi_r| - |\xi|}{|\xi|}$$

e poichè $\| \xi_r - \xi \| \leq |\xi - \xi_r|$ si trae una prima conclusione

$$(30.3) \quad |\log |\xi_r| - \log |\xi|| \leq (1 + o(1)) \frac{|\xi - \xi_r|}{|\xi|};$$

analogamente

$$\begin{aligned} |\xi - \xi_r| &\geq |\xi| \cdot |\operatorname{sen}(\arg \xi - \arg \xi_r)| = |\xi| \cdot \left| \frac{\arg \xi - \arg \xi_r}{1!} - \frac{(\arg \xi - \arg \xi_r)^3}{3!} + \dots \right| = \\ &= |\xi| (1 + o(1)) |\arg \xi - \arg \xi_r|, \end{aligned}$$

e si trae una seconda conclusione

$$(30.4) \quad |\arg \xi_r - \arg \xi| \leq (1 + o(1)) \frac{|\xi - \xi_r|}{|\xi|}.$$

Per le (30.3) e (30.4), dalla (30.2) si ricava:

$$|\log \xi_r - \log \xi| \leq \frac{\sqrt{2} + o(1)}{|\xi|} |\xi - \xi_r| \leq \frac{\sqrt{2} + o(1)}{|\xi|} \delta_r,$$

e introdotta questa in (30.1):

$$|\tau^{(r)} - \omega^{(r)}| \leq \left(k |\log \xi| + \frac{\sqrt{2} + o(1)}{|\xi|} \right) B_r \delta_r,$$

da cui in definitiva

$$(30.5) \quad \delta_r' = O(B_r \delta_r).$$

31. - Ci rimane soltanto da far vedere che in base alla scelta dei numeri

$$\alpha = \varrho, \quad \beta = \sigma + \gamma, \quad \gamma = 1 - \varrho - \sigma, \quad \varepsilon = 0, \quad \nu = \frac{\theta - 1 - \frac{1}{k}}{\gamma}, \quad \vartheta = \frac{1}{2}$$

(tutti positivi, salvo ε che è nullo) tutte le relazioni (8.1), ..., (8.11) del lemma sono verificate.

Le (8.1) sono evidenti. Per verificare le altre ricorriamo alle relazioni stabilite in questi ultimi numeri; e precisamente alle (28.1), (28.2), (29.5), (29.6), (29.7), (29.9), (29.10) e (30.5). Ricaviamo in modo ovvio

$$\begin{aligned} H_r^{-\alpha} &\rightarrow +\infty, & H_r^\alpha \log^\varepsilon H_r &\rightarrow +\infty, & A_r H_r^\beta \log^{-\varepsilon} H_r &\rightarrow +\infty \\ \log A_r &\leq \log \{ (k+2) |\log \xi| \cdot B_r \} = O(1) + \log B_r = O(\log H_r) = o(H_r^\alpha \log^{1+\varepsilon} H_r), \\ g_r' \log N_r &= g_0' g_r \log ([B_r + 1]^{k+1}) = O(g_r \log B_r) = O(g_r \log H_r) = o(H_r^\alpha \log H_r) = \\ &= o(A_r H_r^{\alpha+\beta} \log H_r), \\ \log (|\lambda_r| L_r^{g_r'-1}) &\leq \log \left\{ \frac{y_r}{|\log \xi|} \left(\frac{k+1}{|\log \xi|} y_r Y_r B_r \right)^{g_r'-1} \right\} \leq g_r' \log \left\{ \frac{k+1}{|\log \xi|} y_r Y_r B_r \right\} \leq \\ &\leq O(g_r) + O(g_r \log B_r) + O(g_r \log (e y_r Y_r)) \leq \\ &\leq o(H_r^\alpha) + o(H_r^\alpha \log H_r) + o(H_r^\alpha) = o(H_r^\alpha \log^{1+\varepsilon} H_r), \\ \log (|\mu_r| M_r^{g_r'-1}) &\leq \log (x_0^{k B_r} x_r^{B_r} \{ (x_0 X_0)^{k B_r} (x_r X_r)^{B_r} \}^{g_r'-1}) \leq \\ &\leq g_r' \log \{ (x_0 X_0)^{k B_r} (x_r X_r)^{B_r} \} = O(g_r B_r) + O(g_r B_r \log (e x_r X_r)) = \\ &= o(B_r H_r^{\beta-\gamma}) + o(B_r H_r^{\beta-\gamma}) = o(A_r H_r^{\beta-\gamma} \log^{1-\varepsilon} H_r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_r' \log^+ (|\lambda_r| L_r^{g_r'-1}) &\leq g_r' \log^+ \left\{ \frac{y_r}{|\log \xi|} \left(\frac{k+1}{|\log \xi|} y_r Y_r B_r \right)^{g_r'-1} \right\} \leq \\
&\leq g_r'^2 \log^+ \left\{ \frac{k+1}{|\log \xi|} y_r Y_r B_r \right\} = O(g_r^2 \log B_r) + O(g_r^2 \log(e y_r Y_r)) = \\
&= o(H_r^{\frac{\theta}{2\theta_1}} \log H_r) + o(H_r^{\frac{\theta}{2\theta_1}}) = o(H_r^{\alpha+\beta+\nu\gamma-1} \log H_r)
\end{aligned}$$

$$\left(\text{poichè } \frac{\theta}{\theta_1} = \frac{k\theta - k - 1}{k} = \theta - 1 - \frac{1}{k} = \nu\gamma = \alpha + \beta + \nu\gamma - 1 \right),$$

$$\begin{aligned}
g_r' \log^+ (N_r H_r^{-(\alpha+\beta+\nu\gamma-\theta)}) &\leq O(1) + g_r' \log \{(B_r + 1)^{k+1}\} = O(g_r \log B_r) = O(g_r \log H_r) \\
&= o(H_r^{\frac{\theta}{2\theta_1}} \log H_r) = o(H_r^{\alpha+\beta+\nu\gamma-1} \log H_r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_r \log^+ A_r &= [B_r + 1]^{k+1} \log^+ A_r = g_r'(k+2) |\log \xi| \cdot g_r B_r H_r \log^+ A_r = \\
&= O(g_r B_r H_r \log A_r) = O(g_r^{1+\frac{1}{k}} H_r^{1+\frac{1}{k}} \log H_r) = o(g_r^{\frac{1}{k}} H_r^{1+\frac{1}{k}+\frac{\theta}{2\theta_1}} \log H_r) = \\
&= o(g_r^{\frac{1}{k}} H_r^{\frac{1}{k}(\theta+1+\frac{1}{k})} \log H_r) = o(g_r^{\frac{1}{k}} H_r^{\theta} \log H_r) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right),
\end{aligned}$$

$$A_r H_r^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H_r = A_r H_r^{\theta-\frac{1}{k}} \log H_r = O(g_r^{\frac{1}{k}} H_r^{\theta} \log H_r) = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right).$$

Essendo per la (30.5)

$$\log \frac{1}{\delta_r} = O\left(\log \frac{B_r}{\delta_r'}\right) = O\left(\log B_r + \log \frac{1}{\delta_r'}\right) = O\left(\log H_r + \log \frac{1}{\delta_r'}\right) = O\left(\log \frac{1}{\delta_r'}\right),$$

si conclude

$$\vartheta A_r H_r^{\alpha+\beta+\nu\gamma} \log H_r + N_r \log^+ A_r = o\left(\log \frac{1}{\delta_r'}\right),$$

e risulta soddisfatta anche la (8.11).

Il verificarsi simultaneo di tutte le circostanze del Lemma, ci dice essere assurdo il supporre che tutti i k numeri $\xi^{\eta_1}, \xi^{\eta_2}, \dots, \xi^{\eta_k}$ siano algebrici.

Il Teorema I risulta così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

1. K. BOEHLE: *Über die Transzendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten (Verallgemeinerung eines Satzes von A. Gelfond)*, *Mathematische Annalen*, Bd. 108 (1933), pp. 56-74.
2. A. GELFOND: *Sur les nombres transcendants*, *Comptes rendus Acad. Sciences Paris*, t. 189 (1929), pp. 1224-1226.
3. — — *Sur le septième problème de D. Hilbert*, *Comptes rendus Acad. Sciences U. R. S. S.*, nouv. série, vol. II (1934), pp. 1-6.
4. — — *Sur le septième problème de Hilbert*, *Bulletin Acad. Sciences U. R. S. S.*, s. 7, 1934, pp. 623-634.
5. CH. HERMITE: *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, *Journal für Mathematik*, Bd. 84 (1878), pp. 70-79; oppure vedere per esempio: *Œuvres*, t. III, Ed. PICARD, Paris 1912, pp. 432-443; O. NICOLETTI: *Funzioni razionali di una o più variabili* in *Enciclopedia delle Matematiche elementari* (a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI, D. GIGLI), vol. I parte II, Milano 1932, p. 167.
6. D. HILBERT: *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, *Compte rendu du 2^e Congrès international des Mathématiciens* (1900), Paris 1902, pp. 58-114; vedere p. 84. Oppure: *Mathematische Probleme*, *Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen*, 1900, pp. 253-297; vedere p. 274.
7. R. KUZMIN: *Sur une nouvelle classe de nombres transcendants*, *Bulletin Acad. Sciences U. R. S. S.*, s. 7, 1930, pp. 585-597.
8. TH. SCHNEIDER: *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I: Transzendenz von Potenzen*, *Journal für Mathematik*, Bd. 172 (1934), pp. 65-69.
9. C. SIEGEL: Lezioni tenute a Berlin e a Göttingen nel febbraio 1930 (citare ma non pubblicate).