

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

BASILIO MANIÀ

Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 4, n° 2 (1935), p. 107-131

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_107_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIETÀ DELLE ESTREMANTI NEI PROBLEMI DI MAYER ⁽¹⁾

di BASILIO MANIÀ (Pisa).

In questa Memoria mi propongo di dimostrare per le curve estremanti di un problema di MAYER, relativo a un'equazione

$$(1) \quad u' = F(x, y, x', y', u)$$

o

$$(2) \quad u' = f(x, y, y', u),$$

delle condizioni necessarie analoghe alle condizioni di EULERO nel caso dei problemi liberi di Calcolo delle Variazioni. In due Memorie precedenti ho ottenuto tali condizioni per il problema della curva di massima velocità finale ⁽²⁾ e per una classe particolare di problemi di MAYER in forma ordinaria ⁽³⁾. Ivi mi sono valso di un metodo di approssimazione per mezzo di poligonal, che da un lato ha il vantaggio di fornire anche la risoluzione della questione di esistenza, ma dall'altro ha lo svantaggio di non poter essere applicato in molti di quei casi generali in cui si sa per altra via che la soluzione del problema esiste. Qui studio da prima i problemi in forma parametrica e ottengo le condizioni indicate con la generalità con la quale sono date per i problemi liberi; passo poi ad applicare lo stesso metodo ai problemi nella forma ordinaria, ed ottengo anche per questi dei risultati notevolmente generali.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽²⁾ *Sulla curva di massima velocità finale*, Ann. della R. Scuola Norm. Sup., serie II, Vol. 3 (1934), pp. 317-336.

⁽³⁾ *Sopra una classe di problemi di Mayer considerati come limiti di ordinari problemi di minimo*, Rend. Sem. Mat. della R. Univ. di Padova, Vol. V (1934).

CAPITOLO I.

I problemi in forma parametrica.

1. - **Premesse.** — Indicheremo con $F(x, y, x', y', u)$ una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini rispetto a x' e y' e insieme con le sue derivate parziali del primo ordine rispetto a x, y e u , per (x, y) appartenente a un campo A contenente tutti i suoi punti di accumulazione a distanza finita, x', y' numeri finiti qualunque non entrambi nulli e u appartenente a un intervallo (finito o infinito) Δ . Supporremo inoltre che $F(x, y, x', y', u)$ sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto a x' e y' , cioè che per ogni punto (x, y, x', y', u) del suo insieme di definizione e per ogni $k > 0$ sia

$$F(x, y, kx', ky', u) = kF(x, y, x', y', u).$$

Chiameremo *curve ordinarie* le curve continue e rettificabili

$$\mathcal{C}: x=x(s), \quad y=y(s), \quad (0 \leq s \leq L) \quad (4),$$

appartenenti al campo A per le quali l'equazione differenziale

$$(3) \quad u' = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u)$$

ammette in quasi-tutto l'intervallo $(0, L)$ una soluzione $u_{\mathcal{C}}(s)$, assolutamente continua in tutto $(0, L)$, con $u_{\mathcal{C}}(0) = u_0$, essendo u_0 un valore fissato nell'intervallo Δ , e $u_{\mathcal{C}}(s)$ sempre appartenente a Δ .

L'equazione differenziale (3) con la condizione $u_{\mathcal{C}}(0) = u_0$ è equivalente all'equazione integrale

$$(4) \quad u = u_0 + \int_0^s F(x, y, x', y', u) ds,$$

e se

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad (a \leq t \leq b),$$

è una qualunque rappresentazione parametrica della curva \mathcal{C} con $X(t)$ e $Y(t)$ funzioni assolutamente continue nell'intervallo (a, b) , la (4) è equivalente all'equazione

$$(4^*) \quad U = u_0 + \int_a^t F(X, Y, X', Y', U) dt,$$

dove $U(t) = u(s(t))$.

Essendo \mathcal{K} una classe di curve ordinarie e \mathcal{C}_0 una curva di \mathcal{K} , un punto P

(4) Con s indicheremo la lunghezza dell'arco variabile di \mathcal{C} e con L la lunghezza dell'intera curva.

della curva \mathcal{C}_0 si dirà *punto di indifferenza rispetto al campo A ed alla classe \mathcal{K}* , se è possibile determinare un intorno di P tale che ogni curva ordinaria \mathcal{C} ottenuta da \mathcal{C}_0 sostituendo un arco di essa appartenente all'intorno fissato di P con un arco avente gli stessi punti terminali, e appartenente a quello stesso intorno, sia ancora una curva della classe \mathcal{K} .

2. - La condizione generalizzata di Eulero per le curve minimanti. — Se

$$\mathcal{C}_0: \quad x=x_0(s), \quad y=y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

è una curva minimante per $u_{\mathcal{C}}(L)$ in una classe \mathcal{K} di curve ordinarie;

se i valori di $u_{\mathcal{C}_0}(s)$ sono tutti interni all'intervallo Δ ;

allora ogni arco α_0 di \mathcal{C}_0 i cui punti, esclusi al più i punti terminali, siano tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe \mathcal{K} , soddisfa alle due equazioni

$$(A) \quad \begin{cases} \int_0^s \{F_x + F_x F_u\} ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_x ds = c_1 \text{ (cost.)}, \\ \int_0^s \{F_y + F_y F_u\} ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_y ds = c_2 \text{ (cost.)} \quad (5). \end{cases}$$

Sia (s', s'') l'intervallo parziale di $(0, L_0)$ corrispondente all'arco α_0 , e, indicato con n un numero intero positivo fissato ad arbitrio, dividiamo quell'intervallo in n parti uguali mediante i punti

$$s_0 = s', \quad s_1, \quad s_2, \dots, \quad s_n = s''.$$

Per ogni intero positivo $i < n$, sia $\varphi_i'(s)$ una funzione definita nell'intervallo (s_{i-1}, s_{i+1}) mediante le equazioni

$$\begin{aligned} \varphi_i'(s) &= 1, & \text{per } s_{i-1} \leq s \leq s_i, \\ \varphi_i'(s) &= -1, & \text{per } s_i < s \leq s_{i+1}, \end{aligned}$$

e poniamo

$$\varphi_i(s) = \int_0^s \varphi_i'(s) ds, \quad (s_{i-1} \leq s \leq s_i).$$

Ciò posto, supponiamo da prima che l'arco α_0 sia tutto (punti terminali inclusi) di punti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe \mathcal{K} . Allora si può determinare un numero positivo ϱ , tale che, se P è un qualunque

(5) Gli argomenti delle funzioni sotto il segno di integrazione sono $x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{\mathcal{C}_0}(s)$.

punto di a_0 , e se (P, ρ) è il cerchio di centro P e raggio ρ , tutti i punti di (P, ρ) siano interni al campo A , e ogni curva ordinaria, ottenuta sostituendo un arco di \mathcal{C}_0 appartenente a (P, ρ) con un arco appartenente allo stesso cerchio e avente gli stessi punti terminali, appartenga ancora alla classe \mathcal{K} . Quindi se il numero n è stato scelto sufficientemente grande ed ε è un numero in valore assoluto non maggiore di 1, la curva \mathcal{C} che si ottiene da \mathcal{C}_0 sostituendo l'arco corrispondente all'intervallo (s_{i-1}, s_{i+1}) di $(0, L_0)$ con l'arco di equazioni

$$x = x_0(s) + \varepsilon \varphi_i(s), \quad y = y_0(s), \quad (s_{i-1} \leq s \leq s_{i+1})$$

appartiene alla classe \mathcal{K} purchè esista il funzionale $u_{\mathcal{C}}(s)$.

Ma se consideriamo la schiera delle curve che si ottengono nel modo ora indicato al variare di ε da -1 a $+1$, e alla quale appartiene anche la curva \mathcal{C}_0 , per ε abbastanza piccolo in valore assoluto il funzionale $u_{\mathcal{C}_0}(s)$ esiste su tutte le curve della schiera, avendo ammesso che i valori di $u_{\mathcal{C}_0}(s)$ siano tutti interni all'intervallo A . Di più, se indichiamo con $u(s, \varepsilon)$ il funzionale $u_{\mathcal{C}}(s)$ corrispondente a un ε generico, per ogni ε sufficientemente piccolo deve essere

$$u(s_{i+1}, \varepsilon) \geq u(s_{i+1}, 0).$$

Infatti, se per un valore di ε fosse

$$(5) \quad u(s_{i+1}, \varepsilon) < u(s_{i+1}, 0),$$

sarebbe anche

$$(6) \quad u(L_0, \varepsilon) < u(L_0, 0),$$

perchè, per $s_{i+1} \leq s \leq L_0$, è

$$u(s, 0) = u(s_{i+1}, 0) + \int_{s_{i+1}}^s F(x_0, y_0, x_0', y_0', u(s, 0)) ds,$$

$$u(s, \varepsilon) = u(s_{i+1}, \varepsilon) + \int_{s_{i+1}}^s F(x_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0, x_0' + \varepsilon \varphi_i', y_0', u(s, \varepsilon)) ds,$$

e un noto teorema di unicità della soluzione di un'equazione integrale esclude che si abbia, per qualche valore di s , $u(s, \varepsilon) = u(s, 0)$. Ma la (6) non può essere soddisfatta dai valori di ε sufficientemente piccoli, essendo \mathcal{C}_0 una curva minimante per $u_{\mathcal{C}}(L)$ nella classe \mathcal{K} ; e quindi nemmeno la (5) può essere soddisfatta.

Per ogni ε sufficientemente piccolo in valore assoluto si ha

$$u(s, \varepsilon) = u(s_{i-1}, \varepsilon) + \int_{s_{i-1}}^s F(x_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0, x_0' + \varepsilon \varphi_i', y_0', u(s, \varepsilon)) ds$$

in tutto l'intervallo (s_{i-1}, s_{i+1}) . Da noti teoremi sulle equazioni differenziali e integrali ⁽⁶⁾ segue che la derivata

$$\left(\frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

esiste in tutto l'intervallo (s_{i-1}, s_{i+1}) , è ivi assolutamente continua, e soddisfa all'equazione lineare

$$(7) \quad \left(\frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_{i-1}}^s \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_u \left(\frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \right\} ds,$$

essendo $x_0(s)$, $y_0(s)$, $x_0'(s)$, $y_0'(s)$, $u(s, 0)$ gli argomeni di F_x , $F_{x'}$ ed F_u . Applicando la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari si ottiene

$$\left(\frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\exp \int_{s_{i-1}}^s F_u ds\right) \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') \left(\exp - \int_{s_{i-1}}^s F_u ds\right) ds,$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right| &\leq \\ &\leq \left(\exp \int_{s_{i-1}}^s F_u ds \right) \left| \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') \left[\left(\exp - \int_{s_{i-1}}^s F_u ds\right) - 1 \right] ds \right| + \\ &+ \left| \left(\exp \int_{s_{i-1}}^s F_u ds\right) - 1 \right| \left| \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right|. \end{aligned}$$

Se indichiamo con M il massimo modulo di F e delle sue derivate di cui abbiamo ammesso l'esistenza, per (x, y) appartenente a un intorno (ϱ) di \mathcal{C}_0 con $\varrho=1$, $x'^2 + y'^2 = 1$, e u appartenente a un intervallo finito chiuso Δ' contenuto in Δ e contenente tutti i valori di $u_{\mathcal{C}_0}(s)$; se supponiamo n sufficientemente grande affinchè sia $\frac{2ML_0}{n} < 1$ e $\frac{2L_0}{n} < 1$, dall'ultima disuguaglianza si ha

$$(8) \quad \left| \left(\frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right| \leq \frac{16M^2 L_0^2 \varepsilon^2}{n^2}.$$

Dalle formule (7) e (8) segue

$$\left(\frac{\partial u(s, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_{i-1}}^s \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_u \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \frac{32\vartheta_i M^3 L_0^3 \varepsilon^2}{n^3}$$

essendo ϑ_i un numero compreso fra -1 e $+1$.

⁽⁶⁾ Vedi C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 1927, pag. 682.

Ricordando ora che $u(s_{i+1}, \varepsilon)$ ha un minimo pe $\varepsilon=0$, si ottiene

$$(9) \quad \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i' + F_x \int_{s_{i-1}}^s (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds \right\} ds + \frac{\partial_i H}{n^3} = 0,$$

avendo posto

$$H = 32M^3 L_0^2 e^2.$$

Il primo membro della (9) si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} & \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds + \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^s F_x \varphi_i ds \right\} ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} ds \right\} ds - \\ & - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_i}^s F_{x'} ds \right\} ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ F_x \int_{s_{i-1}}^s F_{x'} ds \right\} ds + \frac{\partial_i H}{n^3}. \end{aligned}$$

Con una integrazione per parti si ha poi

$$\begin{aligned} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} (F_x \varphi_i + F_{x'} \varphi_i') ds &= \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \varphi_i' \left(F_{x'} - \int_{s_{i-1}}^s F_x ds \right) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(F_{x'} - \int_{s_{i-1}}^s F_x ds \right) ds - \\ & - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(F_{x'} - \int_{s_i}^s F_x ds \right) ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds, \end{aligned}$$

e perciò in luogo della (9) si può scrivere

$$(10) \quad \begin{aligned} & \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(F_{x'} - \int_{s_{i-1}}^s F_x ds \right) ds - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(F_{x'} - \int_{s_i}^s F_x ds \right) ds + \\ & + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^s F_x ds \right\} ds - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_i}^s F_{x'} ds \right\} ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_{x'} ds \right\} ds + \\ & + \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds + \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^s F_x \varphi_i ds \right\} ds + \frac{\partial_i H}{n^3} = 0. \end{aligned}$$

Facendo nella (10) $i=1, 2, \dots, n-1$ e sommando le equazioni ottenute, si ha (7)

$$(11) \quad \int_{s_0}^{s_1} \left(F_{x'} - \int_{s_0}^s F_x ds \right) ds - \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left(F_{x'} - \int_{s_{n-1}}^s F_x ds \right) ds + \int_{s_0}^{s_1} \left\{ F_u \int_{s_0}^s F_{x'} ds \right\} ds -$$

(7) Si noti che è sempre $|\varphi_i| \leq \frac{L_0}{n}$.

$$\begin{aligned}
 & - \int_{s_{n-1}}^{s_n} \left\{ F_u \int_{s_{n-1}}^s F_x ds \right\} ds + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds \right\} ds + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds + \frac{\theta' M^2 L_0^3}{n^2} + \frac{\theta'' H}{n^2} = 0,
 \end{aligned}$$

con $-1 \leq \theta' \leq 1$ e $-1 \leq \theta'' \leq 1$.

Dividiamo ora la (11) per la lunghezza $\frac{s'' - s'}{n}$ degli intervalli (s_{i-1}, s_i) ed osserviamo che è

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s'' - s'} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ F_u \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds \right\} ds = \int_{s'}^{s''} F_u F_x ds$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s'' - s'} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds \int_{s_{i-1}}^{s_i} F_x ds = \int_{s'}^{s''} F_x ds \quad (8).$$

Allora dalla (11) segue

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{s'' - s'} \int_{s_0}^{s_1} F_x ds - \frac{n}{s'' - s'} \int_{s_{n-1}}^{s_n} F_x ds \right\} + \int_{s'}^{s''} (F_x + F_u F_x) ds = 0.$$

Se negli estremi dell'arco α_0 esiste la derivata dell'integrale $\int_0^s F_x ds$ ed è

$$(13) \quad \frac{d}{ds} \int_0^s F_x ds = F_x,$$

la formula precedente si può scrivere

$$\begin{aligned}
 & F_x(x_0(s'), y_0(s'), x_0'(s'), y_0'(s'), u_{\mathcal{C}_0}(s')) - \int_0^{s'} (F_x + F_u F_x) ds = \\
 & = F_x(x_0(s''), y_0(s''), x_0'(s''), y_0'(s''), u_{\mathcal{C}_0}(s'')) - \int_0^{s''} (F_x + F_u F_x) ds.
 \end{aligned}$$

Dopo ciò, fissiamo un punto dell'arco α_0 nel quale sia soddisfatta la (13) e consideriamo gli archi parziali di α_0 che hanno un estremo nel punto fissato e

(8) Vedi B. MANIÀ: *Una proprietà dell'integrale di Lebesgue*, Rend. Ist. Lomb., Vol. LXVII, 1934.

l'altro estremo in un punto variabile di α_0 nel quale però sia sempre soddisfatta la (13). Applicando a tali archi i risultati precedenti si vede che su quasi tutto α_0 è

$$\int_0^s (F_x + F_u F_{x'}) ds - F_{x'} = c_1 \quad (\text{cost.}),$$

e, integrando

$$\int_{s'}^s \left\{ \int_0^s (F_x + F_u F_{x'}) ds \right\} ds - \int_s^s F_{x'} ds = c_1 (s - s'),$$

da cui

$$(14) \quad \int_0^s (F_x + F_u F_{x'}) ds - \frac{d}{ds} \int_0^s F_{x'} ds = c_1 \quad (\text{cost.})$$

sopra tutto l'arco α_0 .

Così risulta dimostrata la prima formula dell'enunciato; analogamente si dimostra la seconda.

Se i punti terminali dall'arco α_0 non sono entrambi interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe \mathcal{K} , si osserva che la (14) è vera per ogni arco completamente interno ad α_0 con la stessa costante c_1 per tutti questi archi e quindi tale formula è vera anche sopra tutto l'arco α_0 , punti terminali compresi.

3. - Il caso quasi-regolare normale. — Come nei problemi di calcolo delle variazioni relativi all'estremo libero si vede che per (x, y) appartenente al campo A , u appartenente all'intervallo Δ e x', y' entrambi diversi da zero, si ha

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2} = - \frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

e quindi si può definire una funzione $F_1(x, y, x', y', u)$, per (x, y) e u scelti nel modo indicato e x', y' non entrambi nulli, ponendo

$$F_1(x, y, x', y', u) \equiv \frac{F_{x'x'}}{y'^2} \equiv - \frac{F_{x'y'}}{x'y'} \equiv \frac{F_{y'y'}}{x'^2}.$$

Il problema di MAYER considerato si dirà *quasi-regolare positivo [negativo] normale* se è sempre

$$F_1(x, y, x', y', u) \geq 0 \quad [\leq 0],$$

e se, per ogni terna (x, y, u) fissata, i valori di θ per i quali è

$$F_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u) = 0$$

non riempiono mai tutto un intervallo.

Se nell'enunciato del numero precedente si suppone che il problema proposto sia quasi-regolare normale, si può dimostrare facilmente che l'arco α_0 ivi consi-

derato è di classe 1, cioè a tangente variabile con continuità. Per vedere ciò basta ripetere tale e quale la dimostrazione che si fa nel caso dei problemi relativi all'estremo libero ⁽⁹⁾.

Quando sono soddisfatte le condizioni ora indicate le equazioni integrali relative all'arco α_0 che abbiamo ottenute nel numero precedente si possono scrivere sotto la forma differenziale

$$(B) \quad \begin{cases} F_x + F_{x'} F_u = \frac{d}{ds} F_{x'} \\ F_y + F_{y'} F_u = \frac{d}{ds} F_{y'}. \end{cases}$$

4. - Il caso regolare. — Aggiungiamo ora alle ipotesi del n.º 1 l'ipotesi che la funzione $F(x, y, x', y', u)$ ammetta finite e continue tutte le derivate parziali dei primi due ordini nel suo insieme di definizione. Ciò posto, possiamo dimostrare che se l'arco α_0 è di classe 1 e soddisfa alle equazioni (B), in ogni punto di α_0 nel quale è $F_1(x_0(s), y_0(s), x_0'(s), y_0'(s), u_{\alpha_0}(s)) \neq 0$ esistono le derivate seconde $x_0''(s), y_0''(s)$ date dalle equazioni

$$(C) \quad \begin{cases} x_0'' = \frac{y_0'(F_{xy'} - F_{yx'}) + F_{x'} F_u - FF_{x'u}}{F_1} \\ y_0'' = \frac{x_0'(F_{yx'} - F_{xy'}) + F_{y'} F_u - FF_{y'u}}{F_1} \end{cases} \quad (10).$$

Indicando con $\theta = \theta(s)$ l'angolo che la tangente orientata dell'arco α_0 forma con la direzione positiva dell'asse delle x , si ha dalle (B), con notazioni evidenti, applicando il teorema della media per le funzioni di più variabili,

$$\begin{aligned} F_x + F_{x'} F_u &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_{x'}(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, \cos(\theta + \delta\theta), \sin(\theta + \delta\theta), u + \delta u) - F_{x'}(x_0, y_0, x_0', y_0', u)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \bar{F}_{x'x} \frac{\delta x_0}{h} + \bar{F}_{x'y} \frac{\delta y_0}{h} + \bar{F}_{x'u} \frac{\delta u}{h} + \bar{F}_{x'\theta} \frac{\delta\theta}{h} \right\}. \end{aligned}$$

Osservando che è

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta x_0}{h} &= x_0', \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta y_0}{h} = y_0', \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta u}{h} = u' = F \\ \frac{\partial}{\partial \theta} F_{x'}(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u) &= -F_1 \sin \theta, \end{aligned}$$

si ha, se è $\sin \theta \neq 0$,

$$(15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta\theta}{h} = \frac{F_x + F_{x'} F_u - x_0' F_{x'x} - y_0' F_{x'y} - FF_{x'u}}{-F_1 \sin \theta}.$$

⁽⁹⁾ Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, pag. 101 e segg.

⁽¹⁰⁾ Cfr., per esempio, L. TONELLI, loc. cit., pag. 96 e segg.

Analogamente si trova, partendo dalla seconda delle (B), e se è $\cos \theta \neq 0$

$$(16) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{h} = \frac{F_y + F_y' F_u - x_0' F_y' x - y_0' F_y' y - F F_y' u}{F_1 \cos \theta}.$$

Dalle ultime due formule, poichè uno almeno dei due numeri $\cos \theta$, $\sin \theta$ è diverso da zero nel punto di α_0 che si considera, segue l'esistenza del

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{h}$$

e quindi l'esistenza delle derivate x_0'' , y_0'' .

Essendo

$$x_0'' = \frac{dx_0'}{ds} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{ds},$$

dalla (15) segue

$$x_0'' = \frac{F_x + F_x' F_u - x_0' F_x' x - y_0' F_x' y - F F_x' u}{F_1},$$

e poichè

$$F_x = x' F_{xx'} + y' F_{xy'},$$

sostituendo si ottiene la prima delle (C). Analogamente si dimostra la seconda.

Se in tutto il campo di definizione della funzione $F(x, y, x', y', u)$ è sempre

$$F_1(x, y, x', y', u) > 0 [< 0]$$

il problema di MAYER considerato si dice *regolare positivo* [*negativo*].

Se si ammette che il problema considerato nell'enunciato del n.º 2 sia regolare, da quanto ora abbiamo detto, segue che l'arco α_0 è di classe 2 e soddisfa alle equazioni (C).

CAPITOLO II.

I problemi in forma ordinaria.

5. - **Premesse.** — Ci proponiamo di studiare ora i problemi di MAYER relativi a un'equazione della forma

$$u' = f(x, y, y', u),$$

essendo $f(x, y, y', u)$ una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini rispetto a y' , e insieme con le sue derivate parziali del primo ordine rispetto a x, y, u , per (x, y) appartenente a un campo A contenente tutti i suoi punti di accumulazione a distanza finita, y' numero finito qualunque, u appartenente a un intervallo Δ (finito o no).

Essendo u_0 un valore fissato nell'intervallo Δ , chiameremo *curve ordinarie* le curve rappresentabili nella forma

$$C: \quad y = y(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

con $y(x)$ assolutamente continua, appartenenti al campo A , e per le quali l'equazione differenziale

$$u' = f(x, y(x), y'(x), u)$$

ammette in quasi tutto (a, b) una soluzione $u_C(x)$, assolutamente continua in tutto (a, b) , con $u_C(a) = u_0$ e $u_C(x)$ appartenente a Δ .

Il problema di MAYER proposto si dirà *quasi-regolare positivo [negativo] normale* se è sempre

$$f_{y'y'}(x, y, y', u) \geq 0 [\leq 0],$$

e se per ogni terna (x, y, u) fissata con (x, y) in A e u in Δ , i valori di y' per i quali è

$$f_{y'y'}(x, y, y', u) = 0$$

non riempiono mai tutto un intervallo. Il problema di MAYER si dirà invece *regolare positivo [negativo]* se in tutto il campo di definizione della $f(x, y, y', u)$ è

$$f_{y'y'}(x, y, y', u) > 0 [< 0].$$

Data una classe K di curve ordinarie e una curva C di K , si dice che un punto P di C è un punto di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K , se si può determinare un numero $\rho > 0$ tale che ogni curva ordinaria \bar{C} , ottenuta da C sostituendo un arco parziale qualunque di essa tutto appartenente al cerchio (P, ρ) con un arco avente gli stessi punti terminali e appartenente a quello stesso cerchio, è ancora una curva della classe K .

6. - Le curve minimanti lipschitziane. — Se

$$C_0: y = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

con $y_0'(x)$ limitata nell'insieme dei punti di (a, b) in cui esiste finita, è una curva minimante per il valore finale di u_C ⁽¹¹⁾ in una classe K di curve ordinarie;

se i valori di $u_{C_0}(x)$ sono tutti interni all'intervallo Δ ;

allora ogni arco α_0 di C_0 i cui punti, esclusi al più i punti terminali, sieno tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K , soddisfa all'equazione

$$\int_a^x (f_y + f_y' f_u) dx - \frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'} dx = c \text{ (cost.)} \quad (12).$$

La dimostrazione di questo teorema è del tutto analoga alla dimostrazione del n.º 2.

(11) Cioè per il valore di u_C nel secondo punto terminale della curva C .

(12) Gli argomenti delle funzioni sotto il segno di integrazione sono $x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x)$.

Così pure si può ripetere senza cambiamenti essenziali quanto si è detto nei n.º 3 e 4 relativamente ai problemi quasi-regolari normali e ai problemi regolari.

7. - Il caso delle curve minimanti non lipschitziane.

TEOREMA I. - *Sia*

$$C_0: y=y_0(x), \quad a \leq x \leq b,$$

una curva minimante per il valore finale di u_C in una classe K di curve ordinarie;

i valori di $u_{C_0}(x)$ sieno tutti interni all'intervallo Δ ;

la funzione $f(x, y, y', u)$ soddisfi alle seguenti condizioni:

a) ad ogni parte limitata e chiusa A' di A e ad ogni parte limitata e chiusa Δ' di Δ si possono far corrispondere quattro numeri M, N_1, N_2, N_3 , con $M > 0$, tali che, se (x, y) è un punto qualunque di A' , e se u è un punto qualunque di Δ' , per ogni y' e per ogni φ con $|\varphi| \leq M$ per il quale $(x, y + \varphi)$ appartenga ad A , sia

$$|f_y(x, y + \varphi, y', u)| \leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y', u)| + N_3;$$

b) ad ogni parte limitata e chiusa A' di A e ad ogni parte limitata e chiusa Δ' di Δ si possono far corrispondere tre numeri $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$, tali che, per (x, y) appartenente ad A' , u appartenente a Δ' e y' qualunque sia

$$|f_y(x, y, y', u)| \leq \bar{N}_1 |y'| + \bar{N}_2 |f(x, y, y', u)| + \bar{N}_3;$$

c) per (x, y) appartenente a una parte limitata e chiusa A' di A , per u appartenente a una parte limitata e chiusa Δ' di Δ , e y' finito qualunque la derivata $f_u(x, y, y', u)$ resta limitata.

Allora ogni arco α_0 di C_0 i cui punti, esclusi al più i punti terminali, sieno tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K , soddisfa all'equazione

$$\int_a^x (f_y + f_y' f_u) dx - \frac{d}{dx} \int_a^x f_y dx = c \quad (\text{cost.}).$$

Sia (a', b') l'intervallo di (a, b) sul quale si proietta ortogonalmente l'arco α_0 , e, fissato ad arbitrio un intero positivo n , dividiamo (a', b') in n parti uguali mediante i punti

$$x_0 = a', \quad x_1, \dots, \quad x_n = b'.$$

Scelto un intero positivo $i < n$ fissiamo un intero positivo N tale che in ciascuno dei due intervalli (x_{i-1}, x_i) e (x_i, x_{i+1}) la misura dell'insieme dei punti nei quali $|y_0'(x)| \leq N$ sia maggiore di zero; e se questi insiemi non hanno la stessa misura, fissiamo una parte del maggiore la quale abbia misura uguale a quella

dell'altro insieme. Così in ciascuno dei due intervalli (x_{i-1}, x_i) e (x_i, x_{i+1}) resta fissato un insieme di punti nei quali $|y_0'(x)| \leq N$. Indicati con e'_N ed e''_N questi due insiemi, si ha

$$m(e'_N) = m(e''_N) \quad \text{e} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} m(e'_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(e''_N) = \frac{b' - a'}{n}.$$

Ciò posto, definiamo una funzione $\varphi_i'(x)$ nell'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) mediante le equazioni

$$\begin{aligned} \varphi_i'(x) &= 1 && \text{in } e'_N, \\ \varphi_i'(x) &= -1 && \text{in } e''_N, \\ \varphi_i'(x) &= 0 && \text{nell'insieme complementare di } e'_N + e''_N. \end{aligned}$$

Sia poi

$$\varphi_i(x) = \int_a^x \varphi_i'(x) dx, \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}).$$

Supponiamo ora in un primo tempo che l'arco α_0 sia tutto (punti terminali compresi) di punti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K . Allora si può determinare un numero positivo ρ tale che, se P è un punto qualunque di α_0 , tutti i punti del cerchio (P, ρ) sieno interni al campo A , e ogni curva ordinaria, ottenuta da C_0 sostituendo un arco di questa curva appartenente a (P, ρ) con un arco appartenente allo stesso cerchio e avente gli stessi punti terminali, appartenga alla classe K . Quindi se n è stato scelto sufficientemente grande ed ε è un numero in valore assoluto minore di 1, la curva C che si ottiene da C_0 sostituendo l'arco che si proietta ortogonalmente sull'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) con l'arco

$$y = y_0(x) + \varepsilon \varphi_i(x), \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1})$$

appartiene al campo A ed è assolutamente continua. Di più per ε sufficientemente piccolo in valore assoluto esiste il funzionale $u_C(x)$. Infatti si ha, come facilmente si verifica,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b |f(x, y(x), y'(x), u_C(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x))| dx = 0,$$

avendo indicata con

$$y = y(x)$$

l'equazione della curva C (la quale dipende da ε). E allora, basta calcolare la soluzione dell'equazione

$$u = u_0 + \int_a^x f(x, y(x), y'(x), u) dx$$

col metodo delle approssimazioni successive prendendo come prima approssima-

zione $u_{C_0}(x)$ e tenendo conto del fatto che i valori di $u_{C_0}(x)$ sono tutti interni a Δ e della condizione c) dell'enunciato ⁽⁴³⁾.

Dunque per ε sufficientemente piccolo in valore assoluto la curva C è una curva ordinaria e se indichiamo con $u(x, \varepsilon)$ il funzionale $u_C(x)$ corrispondente, abbiamo

$$u(x, \varepsilon) = u(x_{i-1}, \varepsilon) + \int_{x_{i-1}}^x f(x, y_0(x) + \varepsilon\varphi_i(x), y_0'(x) + \varepsilon\varphi_i'(x), u(x, \varepsilon)) dx$$

per $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$. Applicando un teorema sulle equazioni differenziali già citato, si vede che in tutto l'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) esiste la derivata

$$\left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

ed è ivi assolutamente continua e soddisfacente all'equazione

$$(17) \quad \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_{i-1}}^x \left\{ f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i' + f_u \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \right\} dx,$$

essendo gli argomenti delle funzioni sotto il segno di integrazione $x, y_0(x), y_0'(x), u(x, 0)$.

La formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari dà allora

$$\left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left(\exp \int_{x_{i-1}}^x f_u dx\right) \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') \left(\exp - \int_{x_{i-1}}^x f_u dx\right) dx,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right| &\leq \\ &\leq \left(\exp \int_{x_{i-1}}^x f_u dx\right) \left| \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') \left[\left(\exp - \int_{x_{i-1}}^x f_u dx\right) - 1 \right] dx \right| + \\ &+ \left| \left(\exp \int_{x_{i-1}}^x f_u ds\right) - 1 \right| \left| \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right|. \end{aligned}$$

Se il numero n è stato scelto sufficientemente grande affinché in ogni insieme misurabile E di (α', b') di misura $m(E) < \frac{b' - \alpha'}{n}$, sia

$$\int_E |f_u| dx < 1,$$

⁽⁴³⁾ Vedi B. MANIÀ: *Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva*. Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Serie VI, vol. XX (1934).

dall'ultima disuguaglianza ottenuta si deduce

$$\left| \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right| \leq 2e^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i'| dx.$$

Di qua e dalla (17) otteniamo

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\partial u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \int_{x_{i-1}}^x \left\{ f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right\} dx \right| \leq \\ & \leq 2e^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i'| dx. \end{aligned}$$

Osservando che è, per un ragionamento già fatto al n.º 2,

$$\left(\frac{\partial u(x_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0,$$

si ha

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i') dx \right\} dx \right| \leq 2e^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + f_{y'} \varphi_i'| dx.$$

Se il numero n è abbastanza grande affinché la parte n -esima di (a', b') abbia lunghezza minore di 1, e facciamo tendere N a $+\infty$, otteniamo

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i') dx \right\} dx \right| \leq 2e^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \{ |f_y| + |f_{y'}| \} dx,$$

avendo posto

$$\begin{aligned} \omega_i'(x) &= 1, & \text{per } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \omega_i'(x) &= -1, & \text{per } x_{i-1} < x \leq x_{i+1}, \end{aligned}$$

e

$$\omega_i(x) = \int_{x_{i-1}}^x \omega_i'(x) dx, \quad \text{per } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}.$$

Eseguendo sull'ultima disuguaglianza le stesse trasformazioni fatte nel caso dei problemi in forma parametrica, si ottiene

$$\begin{aligned} (18) \quad & \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_{y'} - \int_{x_{i-1}}^x f_y dx \right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_{y'} - \int_{x_i}^x f_y dx \right) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_u \int_{x_{i-1}}^x f_{y'} dx \right) dx - \right. \\ & \left. - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_u \int_{x_i}^x f_{y'} dx \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_u \int_{x_{i-1}}^x f_y \omega_i dx \right) dx \right| \leq \\ & \leq 2e^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \{ |f_y| + |f_{y'}| \} dx. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che è sempre $|\omega_i| \leq \frac{b' - a'}{n}$ e indichiamo con η_n il massimo di $\int_{\delta} |f_u| dx$ e con ξ_n il massimo di $\int_{\delta} |f_y| dx$ nella classe degli intervalli δ di misura non maggiore di $2 \frac{b' - a'}{n}$. Diamo quindi a i successivamente i valori $1, 2, \dots, n-1$ e nelle formule (18) corrispondenti portiamo fuori del segno di valore assoluto

il termine $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_u \int_{x_{i-1}}^x f_y \omega_i dx$.

Sommando le $n-1$ disuguaglianze ⁽¹⁴⁾ si trova

$$(19) \quad \left| \int_{x_0}^{x_1} (f_{y'} - \int_{x_0}^x f_y dx) dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} (f_{y'} - \int_{x_{n-1}}^x f_y dx) dx + \int_{x_0}^{x_1} (f_u \int_{x_0}^x f_y dx) dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} (f_u \int_{x_{n-1}}^x f_y dx) dx + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_u \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx) dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx \right| \\ \leq 2 \frac{b' - a'}{n} \xi_n \int_{a'}^{b'} |f_u| dx + 4e^2 \eta_n^2 \int_{a'}^{b'} \{ |f_y| + |f_{y'}| \} dx.$$

Essendo le funzioni f_y ed $f_{y'}$ integrali in (a', b') ed f_u limitata si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{b' - a'} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f_u \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx) dx = \int_{a'}^{b'} f_u f_y dx$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{b' - a'} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx = \int_{a'}^{b'} f_y dx, \quad (15)$$

e dividendo la (19) per $\frac{b' - a'}{n}$ e passando al limite per n tendente a $+\infty$, si ottiene la formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{b' - a'} \int_{x_0}^{x_1} f_y dx - \frac{n}{b' - a'} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_y dx \right\} + \int_{a'}^{b'} (f_y + f_{y'} f_u) dx = 0,$$

analoga alla formula (12) del Capitolo I. Non resta che da ripetere i ragionamenti ivi fatti per ottenere il teorema enunciato.

⁽¹⁴⁾ Tenendo conto del fatto che la somma dei valori assoluti di più addendi è maggiore o uguale del valore assoluto della somma.

⁽¹⁵⁾ Vedi B. MANIÀ: *Una proprietà dell'integrale di Lebesgue*, Red. Istituto Lombardo, Vol. LXVII, 1934.

8. - TEOREMA II. - *Il teorema del numero precedente resta vero se si sostituiscono le condizioni b) e c) ivi ammesse con le condizioni seguenti:*

b') *per* (x, y) *appartenente a una parte limitata e chiusa* A' *di* A , u *appartenente a una parte limitata e chiusa* Δ' *di* Δ *e* y' *finito qualunque, la derivata* $f_y(x, y, y', u)$ *resta limitata;*

c') *ad ogni parte limitata e chiusa* A' *di* A *e ad ogni parte limitata e chiusa* Δ' *di* Δ *si possono far corrispondere quattro numeri* $\tilde{M}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$ *con* $\tilde{M} > 0$, *tali che, se* (x, y) *è un punto qualunque di* A' *e* u *è un punto qualunque di* Δ' , *per ogni* φ , *con* $|\varphi| \leq \tilde{M}$ *e* $(x, y + \varphi)$ *appartenente ad* A , *e per ogni* y' *finito, sia*

$$|f_u(x, y + \varphi, y', u)| \leq \tilde{N}_1 |y'| + \tilde{N}_2 \Lambda(x, y, y') + \tilde{N}_3,$$

essendo $\Lambda(x, y, y')$ *il minimo di* $|f(x, y, y', u)|$ *per* (x, y, y') *fissato e* u *variabile in* Δ' .

Poichè la condizione b) del numero precedente è una conseguenza della condizione b') ora ammessa, basta dimostrare che le nuove ipotesi possono sostituire la condizione c) nel teorema del n.º 7.

Tale condizione è stata sfruttata in primo luogo per assicurarsi della esistenza del funzionale u_C sopra le curve C ottenute da C_0 sostituendo l'arco proiettantesi ortogonalmente sull'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) mediante l'arco di equazione

$$y = y_0(x) + \varepsilon \varphi_i, \quad (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

con ε sufficientemente piccolo in valore assoluto. Ora, se indichiamo con A' la parte di A che appartiene all'intorno (ϱ) di C_0 con $\varrho = 1$, e con Δ' un intervallo appartenente a Δ e contenente nel suo interno tutti i valori di $u_{C_0}(x)$, detti $\tilde{M}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$, con $0 < \tilde{M} < 1$, quattro numeri corrispondenti ad A' e Δ' in base alla condizione c'), per ogni (x, y) di A con $|y - y_0(x)| \leq \tilde{M}$, si ha

$$(20) \quad |f_u(x, y, y', u)| \leq \tilde{N}_1 |y'| + \tilde{N}_2 \Lambda(x, y_0(x), y') + \tilde{N}_3.$$

Essendo $\Lambda(x, y_0(x), y')$ una funzione indipendente da y e integrabile su C_0 , dalla (20) e dalla condizione

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f(x, y_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0' + \varepsilon \varphi_i', u_{C_0}) - f(x, y_0, y_0', u_{C_0})| dx = 0,$$

che è una conseguenza dall'ipotesi a) del n.º 7, segue ⁽¹⁶⁾ l'esistenza del funzionale u_C sopra le curve C indicate.

⁽¹⁶⁾ Vedi B. MANIÀ: *Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva*, loc. cit. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Vol. XX, 1934.

Ripetendo i ragionamenti del numero precedente si giunge così alla disuguaglianza

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x (f_y \omega_i + f_{y'} \omega_i') dx \right\} dx \right| \leq 2e^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \{ |f_y| |\omega_i| + |f_{y'}| |\omega_i'| \} dx.$$

Trasformando poi nel modo ivi indicato la quantità compresa nel segno di valore assoluto del primo membro e portando fuori di questo segno $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{x_{i-1}}^x f_u \omega_i dx$, si ottiene

$$(21) \quad \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_{y'} - \int_{x_{i-1}}^x f_y dx \right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_{y'} - \int_{x_i}^x f_y dx \right) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_u \int_{x_{i-1}}^x f_y dx \right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_u \int_{x_i}^x f_y dx \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y| |\omega_i| dx + 2e^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \{ |f_y| |\omega_i| + |f_{y'}| |\omega_i'| \} dx.$$

Osserviamo ora che è sempre

$$|\omega_i(x)| \leq \frac{b' - a'}{n}$$

e

$$|f_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x), u_{c_0}(x))| \leq N$$

essendo N una costante. Facendo $n=1, 2, \dots, n-1$ e sommando, vediamo che è

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{x_1} \left(f_{y'} - \int_{x_0}^x f_y dx \right) dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(f_{y'} - \int_{x_{n-1}}^x f_y dx \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left(f_u \int_{x_0}^x f_y dx \right) dx - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(f_u \int_{x_{n-1}}^x f_y dx \right) dx + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f_u \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx \right) dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_y dx \right| \leq 2 \frac{b' - a'}{n} \eta_n \int_{a'}^{b'} |f_y| dx + \\ & + 4e^2 \frac{b' - a'}{n} \eta_n^2 \int_{a'}^{b'} |f_y| dx + 8e^2 N \frac{b' - a'}{n} \eta_n \int_{a'}^{b'} |f_u| dx. \end{aligned}$$

Dividendo questa disuguaglianza per $\frac{b' - a'}{n}$ e passando al limite per n tendente a $+\infty$, si ottiene l'ultima uguaglianza del n.º 7 e quindi l'asserto.

Esempio. - Le condizioni del teorema precedente relative alla funzione $f(x, y, y', u)$ sono soddisfatte se è

$$f(x, y, y', u) = \varphi(x, y, u) + \psi(x, y, u) \sqrt{1 + y'^2},$$

con $\varphi(x, y, u)$ e $\psi(x, y, u)$ finite e continue insieme con le loro derivate parziali del primo ordine rispetto a y e a u , e con $\psi(x, y, u) > 0$.

9. - **Estremaloidi ed estremali.** — Chiameremo *estremaloide* relativa al problema di MAYER proposto ogni curva assolutamente continua

$$C: y = y(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

del campo A per la quale esiste una funzione assolutamente continua $u(x)$, i cui valori appartengono tutti all'intervallo A , e tale che sia

$$u'(x) = f(x, y(x), y'(x), u(x))$$

in quasi-tutto (a, b) , $(f_y + f_{y'}f_u)$ e $f_{y'}$ sieno integrabili su C , e si abbia

$$(22) \quad \int_a^x (f_y + f_{y'}f_u) dx - \frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'} dx = c \text{ (cost.)},$$

in tutto (a, b) .

Se C è una *estremaloide* sulla quale la derivata $y'(x)$ sia finita e continua, allora anche $u(x)$ ammette la derivata $u'(x)$ finita e continua e in tutto (a, b) si ha

$$(23) \quad \begin{aligned} u'(x) &= f(x, y(x), y'(x), u(x)), \\ f_y + f_{y'}f_u - \frac{d}{dx} f_{y'} &= 0. \end{aligned}$$

Nel caso ora considerato diremo che C è un'*estremale* relativa al problema di MAYER proposto.

Se sopra la curva C esiste finita e continua anche la derivata seconda $y''(x)$ e ammettiamo che esistano finite e continue le derivate dei primi due ordini di $f(x, y, y', u)$ nel suo insieme di definizione, la (23) si può scrivere nella forma

$$y'' f_{y'y'} + f_{y'x} + f_{y'y} y' + f_{y'u} f - f_y - f_{y'} f_u = 0,$$

e, se è $f_{y'y'} \neq 0$,

$$(24) \quad y'' = \frac{f_y + f_{y'} f_u - f_{y'x} - f_{y'u} f - f_{y'y} y'}{f_{y'y'}}.$$

Come nei problemi relativi all'estremo degli integrali si dimostra che *se il problema di Mayer proposto è quasi-regolare normale, sopra ogni estremaloide C esiste sempre la tangente (tangente a destra nel primo punto terminale e tangente a sinistra nel secondo) ed essa varia con continuità;*

esclusi al più i punti di (a, b) appartenenti a un insieme Ω di misura nulla, in tutti gli altri la derivata $y'(x)$ esiste finita e continua ed è soddisfatta l'equazione (23) ⁽¹⁷⁾.

Poichè è importante poter affermare che l'insieme Ω non contiene nessun punto, si comprende come sieno utili dei criteri che permettano di dedurre dalle equazioni delle *estremaloidi*, che tali curve sono lipschitziane.

Criteri di questo genere sono stati dati, per le *estremaloidi* relative a integrali I_C nella forma ordinaria, da L. TONELLI in una sua recente Memoria degli Annali della Scuola Normale ⁽¹⁸⁾. Tali criteri sono estendibili immediatamente ai problemi di MAYER che qui abbiamo considerati.

10. - Le pseudoestremaloidi. — Nella Memoria citata, il TONELLI, dopo aver dimostrato (sotto ipotesi più generali di quelle assunte finora dai vari autori) che una curva minimante per un integrale $I_C = \int_C f(x, y, y') dx$ è un' *estremaloide*, cioè soddisfa all'equazione

$$\int_a^x f_y(x, y, y') dx - \frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'}(x, y, y') dx = c,$$

dimostra, sotto condizioni analoghe, che una curva minimante per I_C è anche una *pseudoestremaloide* relativa a I_C , cioè soddisfa all'equazione

$$\int_a^x f_x(x, y, y') dx - \frac{d}{dx} \int_a^x \{ f(x, y, y') - y' f_{y'}(x, y, y') \} dx = c.$$

Questo risultato è notevole anche perchè si può dare una serie di criteri affinché una *pseudoestremaloide* sia lipschitziana, e questi vanno ad aggiungersi ai criteri analoghi relativi alle *estremaloidi*, e come quelli possono servire spesso a decidere se una curva *minimante* per I_C è lipschitziana.

Qui noi ci proponiamo di ottenere un risultato analogo per i problemi di MAYER del tipo che stiamo considerando, e dimostriamo da prima il seguente

TEOREMA III. - Sia

$$C_0: y = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

una curva minimante per il valore finale di u_C in una classe K di curve ordinarie;

i valori di $u_{C_0}(x)$ sieno tutti interni all'intervallo Δ ;

⁽¹⁷⁾ Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, II, pp. 359-370.

⁽¹⁸⁾ L. TONELLI: *Sulle proprietà delle estremanti*, Ann. della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. 3 (1934), pp. 213-237.

la funzione $f(x, y, y', u)$ soddisfi alle seguenti condizioni:

a) ad ogni parte limitata e chiusa A' di A e ad ogni parte limitata e chiusa Δ' di Δ si possono far corrispondere quattro numeri M, N_1, N_2, N_3 , con $M > 0$, tali che, se (x, y) è un punto qualunque di A' e se u è un punto qualunque di Δ' , per ogni φ , con $|\varphi| \leq M$ per il quale $(x + \varphi, y)$ appartenga ad A e per ogni y' , si abbia

$$|f_x(x + \varphi, y, y', u)| \leq N_1 |y'| + N_2 |f(x, y, y', u)| + N_3;$$

β) ad ogni parte limitata e chiusa A' di A e ad ogni parte limitata e chiusa Δ' di Δ si possono far corrispondere tre numeri $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$, tali che, per (x, y) appartenente ad A' , u appartenente a Δ' e y' qualunque sia

$$|f(x, y, y', u) - y' f_{y'}(x, y, y', u)| \leq \bar{N}_1 |y'| + \bar{N}_2 |f(x, y, y', u)| + \bar{N}_3;$$

γ) per (x, y) appartenente a una parte limitata e chiusa A' di A , per u appartenente a una parte limitata e chiusa Δ' di Δ , e y' finito qualunque la derivata $f_u(x, y, y', u)$ resta limitata.

Allora ogni arco α_0 di C_0 i cui punti, esclusi al più i punti terminali, sieno tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K soddisfa all'equazione.

$$\int_a^x [f_x + (f - y_0' f_{y'}) f_u] dx - \frac{d}{dx} \int_a^x (f - y_0' f_{y'}) dx = c \text{ (cost.)}.$$

Indichiamo con (a', b') l'intervallo dell'asse delle x sul quale l'arco α_0 si proietta ortogonalmente e dividiamolo in n parti uguali mediante i punti

$$x_0 = a', \quad x_1, \dots, x_n = b'.$$

Fissato un numero i , con $1 \leq i \leq n - 1$, e un numero N positivo qualunque, definiamo, come al n.º 7, la funzione $\varphi_i(x)$ nell'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) , e, per ogni t in valore assoluto non maggiore di $\frac{1}{2}$ sia β_t la curva definita parametricamente dalle equazioni

$$\beta_t: \quad \xi = x + t\varphi_i(x), \quad \eta = y_0(x), \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}).$$

Si vede facilmente che tale curva è rappresentabile nella forma ordinaria

$$\beta_t: \quad \eta = \eta_t(\xi), \quad (x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}),$$

con $\eta_t(\xi)$ assolutamente continua, e che è

$$\eta_t(x_{i-1}) = y_0(x_{i-1}), \quad \eta_t(x_{i+1}) = y_0(x_{i+1}) \quad (49).$$

Se supponiamo in un primo tempo che l'arco α_0 sia tutto di punti interni al

(49) Vedi la Memoria citata di L. TONELLI, pp. 227-228.

campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K e se n è sufficientemente grande, la curva C_t che si ottiene da C_0 sostituendo con β_t l'arco di C_0 proiettantesi ortogonalmente sull'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) , appartiene al campo A , qualunque sia t con $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Avendo ammesso che i valori di $u_{C_0}(x)$ sieno tutti interni all'intervallo Δ , e quindi anche tutti interni a un intervallo finito e chiuso Δ' contenuto in Δ , per dimostrare che esiste un $\bar{t} > 0$ tale che, se $|t| \leq \bar{t}$, sulla curva C_t è definito il funzionale u_C , basta provare che esiste un \bar{t} tale che, se $|t| \leq \bar{t}$, sull'arco β_t esiste la soluzione dell'equazione integrale

$$(25) \quad u(\xi; t) = u_{C_0}(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{\xi} f(\xi, \eta_i(\xi), \eta_i'(\xi), u(\xi; t)) d\xi,$$

e che il valore di tale soluzione nel punto $\xi = x_{i+1}$ tende a $u_{C_0}(x_{i+1})$. Ciò si vede considerando l'equazione integrale relativa alla curva C_t separatamente nei tre intervalli (a, x_{i-1}) , (x_{i-1}, x_{i+1}) , (x_{i+1}, b) .

Posto

$$(26) \quad v(x; t) = u(x + t\varphi_i(x); t),$$

l'equazione (25), risulta equivalente all'equazione

$$(27) \quad v(x; t) = u_{C_0}(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^x f\left(x + t\varphi_i(x), y_0(x), \frac{y_0'(x)}{1 + t\varphi_i'(x)}, v(x; t)\right)(1 + t\varphi_i'(x)) dx.$$

Indicando con E'_N l'insieme dei punti di (x_{i-1}, x_{i+1}) nei quali è $\varphi_i'(x) \neq 0$, e con E''_N l'insieme complementare, si ha

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| f\left(x + t\varphi_i(x), y_0(x), \frac{y_0'(x)}{1 + t\varphi_i'(x)}, u_{C_0}(x)\right)(1 + t\varphi_i'(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x)) \right| dx = \\ & = \int_{E'_N} \left| f\left(x + t\varphi_i(x), y_0(x), \frac{y_0'(x)}{1 + t\varphi_i'(x)}, u_{C_0}(x)\right)(1 + t\varphi_i'(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x)) \right| dx + \\ & + \int_{E''_N} |t\varphi_i(x) f_x(x + t\varphi_i(x), y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x))| dx, \end{aligned}$$

con θ funzione di x in valore assoluto sempre minore di 1. Poichè in E'_N è sempre $|y_0'(x)| \leq N$, il primo dei due integrali del secondo membro dell'uguaglianza scritta tende a zero con t , e dalla condizione α) segue facilmente che tende a zero con t anche il secondo integrale.

Dopo ciò basta risolvere la (27) col metodo delle approssimazioni successive, prendendo come prima approssimazione $u_{C_0}(x)$, per ottenere il risultato voluto ⁽²⁰⁾.

(20) Vedi B. MANIÀ: *Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva*, loc. cit.

Applicando poi noti teoremi sulle equazioni differenziali ⁽²¹⁾, si vede che esiste la derivata $\left(\frac{\partial v(x; t)}{\partial t}\right)_{t=0}$ e soddisfa all'equazione

$$(28) \quad \left(\frac{\partial v(x; t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \int_{x_{i-1}}^x \left\{ f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i' + f_u \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0} \right\} dx.$$

Dalla formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari segue, allora,

$$\left(\frac{\partial v(x; t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\exp \int_{x_{i-1}}^x f_u dx \right) \int_{x_{i-1}}^x [f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'] \left(\exp - \int_{x_{i-1}}^x f_u dx \right) dx,$$

da cui per n sufficientemente grande

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial v(x; t)}{\partial t}\right)_{t=0} - \int_{x_{i-1}}^x [f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'] dx \right| &\leq \\ &\leq 2e^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_y \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'| dx. \end{aligned}$$

Di qua e dalla (28) si ha quindi

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial v(x; t)}{\partial t}\right)_{t=0} - \int_{x_{i-1}}^x \left\{ f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i' + f_u \int_{x_{i-1}}^x [f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'] dx \right\} dx \right| &\leq \\ &\leq 2e^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_u| dx \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f_x \varphi_i + (f - y_0' f_{y'}) \varphi_i'| dx. \end{aligned}$$

A questo punto non resta che procedere come nella dimostrazione del n.º 7, sostituendo le derivate f_y ed $f_{y'}$, che compaiono ivi nelle formule, rispettivamente con f_x ed $f - y_0' f_{y'}$.

11. - Come dal Teorema I abbiamo ottenuto il Teorema II sostituendo le ipotesi $b)$ e $c)$ mediante le ipotesi $b')$ e $c')$, così dal Teorema III ora dimostrato possiamo ottenere un nuovo teorema che ora enunceremo. Questo teorema è applicabile quando fissata comunque una parte limitata e chiusa A' di A e una parte limitata e chiusa Δ' di Δ , per (x, y) variabile in A' , u variabile in Δ' e y' finito qualunque, l'espressione $f - y' f_{y'}$ resta limitata. Ciò si verifica, per esempio, se è

$$f(x, y, y', u) = \varphi(x, y, u) + \psi(x, y, u) \sqrt{1 + y'^2},$$

⁽²¹⁾ Vedi C. CARATHÉODORY, loc. cit.

con $\psi(x, y, u) > 0$, nel qual caso

$$f - y'f_{y'} = \varphi + \psi \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

TEOREMA IV. - *Il teorema del numero precedente resta ancora vero se si sostituiscono le ipotesi β) e γ), con le seguenti:*

$\beta')$ *per (x, y) appartenente a una parte limitata e chiusa A' di A , u appartenente a una parte limitata e chiusa Δ' di Δ e y' finito qualunque l'espressione $f(x, y, y', u) - y'f_{y'}(x, y, y', u)$ resta limitata;*

$\gamma')$ *ad ogni parte limitata e chiusa A' di A e ad ogni parte limitata e chiusa Δ' di Δ si possono far corrispondere quattro numeri $\tilde{M}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$, con $\tilde{M} > 0$, tali che se (x, y) è un punto qualunque di A' e u un punto qualunque di Δ' , per ogni φ con $|\varphi| \leq \tilde{M}$ e $(x + \varphi, y)$ appartenente ad A , e per ogni y' finito, sia*

$$|f_u(x + \varphi, y, y', u)| \leq \tilde{N}_1 |y'| + \tilde{N}_2 \Lambda(x, y, y') + \tilde{N}_3,$$

essendo $\Lambda(x, y, y')$ il minimo di $|f(x, y, y', u)|$ per (x, y, y') fissato e u variabile in Δ' .

La dimostrazione di questo teorema si deduce da quelle del precedente come la dimostrazione del Teorema II, da quella del Teorema I. Resta soltanto da dimostrare che, anche nelle nuove ipotesi, per t sufficientemente piccolo la soluzione $v(x; t)$ dell'equazione (27) esiste, e, per $t \rightarrow 0$, tende uniformemente a $u_{C_0}(x)$ in tutto l'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) . Per questo si osserva ancora che è

$$(29) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| f\left(x + t\varphi_i(x), y_0(x), \frac{y_0'(x)}{1 + t\varphi_i'(x)}, u_{C_0}(x)\right) - f(x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x)) \right| dx = 0,$$

e poi che, per t sufficientemente piccolo in valore assoluto,

$$(30) \quad |f_u(x + t\varphi_i(x), y_0(x), y_0'(x), u)| \leq \tilde{N}_1 |y_0'| + \tilde{N}_2 \Lambda(x, y_0(x), y_0'(x)) + \tilde{N}_3$$

e, per la definizione di $\Lambda(x, y, y')$,

$$(30') \quad |f_u(x + t\varphi_i(x), y_0(x), y_0'(x), u)| \leq \tilde{N}_1 |y_0'| + \tilde{N}_2 |f(x, y_0(x), y_0'(x), u_{C_0}(x))| + \tilde{N}_3$$

essendo x variabile nell'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) e u variabile in un intervallo Δ' contenuto in Δ e contenente nel suo interno tutti i valori di $u_{C_0}(x)$.

Dalla (30') segue che, assegnato un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un $\delta > 0$ tale che, in ogni insieme misurabile E di (x_{i-1}, x_{i+1}) di misura $m(E) < \delta$, sia

$$\int_E \left| f_u\left(x + t\varphi_i(x), y_0(x), \frac{y_0'(x)}{1 + t\varphi_i'(x)}, u_1(x)\right) \right| dx < \varepsilon$$

per ogni funzione $u_i(x)$ i cui valori appartengano a Δ' e per la quale esista l'integrale qui scritto. Infatti, nei punti in cui $\varphi_i'(x) \neq 0$ la $y_0'(x)$ è limitata e quindi è limitata anche la funzione integranda, e nei punti rimanenti vale la (30').

Osservato ciò, basta applicare il metodo delle approssimazioni successive prendendo come prima approssimazione $u_{C_0}(x)$, per assicurarsi che la (27), per t sufficientemente piccolo in valore assoluto, ammette una soluzione $v(x; t)$ in tutto l'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}) , e che tale soluzione tende uniformemente a $u_{C_0}(x)$ per t tendente a zero ⁽²²⁾.

12. - I criteri dati dal TONELLI nella Memoria citata affinché una *pseudoe-stremaloide* relativa a un integrale I_C sia lipschitziana si estendono facilmente ai problemi di MAYER da noi considerati.

Diremo che una curva assolutamente continua

$$C_0: y = y_0(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

del campo A è una *pseudo-estremaloide* per il problema di MAYER relativo all'equazione

$$u' = f(x, y, y', u)$$

se esiste una funzione assolutamente continua $u_0(x)$, definita nell'intervallo (a, b) , con $u_0(x)$ sempre appartenente a Δ , per la quale sia in quasi tutto questo intervallo

$$u_0'(x) = f(x, y_0(x), y_0'(x), u_0(x)),$$

e, inoltre, in tutto l'intervallo sieno integrabili $f_x + f_u(f_y - y'f_{y'})$, ed $f - y'f_{y'}$, e si abbia

$$\int_a^x \{f_x + f_u(f_y - y'f_{y'})\} dx - \frac{d}{dx} \int_a^x (f - y'f_{y'}) dx = c \text{ (cost).}$$

I criteri del TONELLI ricordati sopra, estesi a queste *pseudoe-stremaloidi*, danno, insieme coi due teoremi precedenti, dei criteri affinché una curva estremante per un problema di MAYER del tipo considerato sia lipschitziana; ma qui tralasciamo di dare esplicitamente tali estensioni che sono immediate.

⁽²²⁾ Cfr. B. MANIÀ: *Sopra le equazioni differenziali dipendenti da una curva*, loc. cit.