Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Gustav Doetsch

Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 1 (1935), p. 71-84

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_71_0>

DER FALTUNGSSATZ IN DER THEORIE DER LAPLACE-TRANSFORMATION

Von GUSTAV DOETSCH (Freiburg i. B.).

§ 1. - Faltung und Laplace-Transformation.

Unter der *Faltung* (1) zweier Funktionen $F_1(t)$ und $F_2(t)$ verstehen wir die Integralverbindung

$$(a) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t-\tau) F_2(\tau)\, d\tau.$$

Verschwinden die Funktionen für $t<0$, so erhält das Faltungsintegral die Form

$$(b) \qquad \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau)\, d\tau.$$

Wir bezeichnen die Faltung symbolisch mit $F_1 * F_2$. Es gilt das *kommutative Gesetz*: $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$.

Damit das Integral einen Sinn hat, kann man die Funktionen z. B. als quadratisch integrabel voraussetzen. Für viele Anwendungen reicht das allerdings nicht aus, da man es im Falle (b) häufig mit Funktionen zu tun hat, die nicht quadratisch integrierbar sind (2). Man legt dann zweckmässig den Bereich derjenigen Funktionen zugrunde, die in jedem Intervall $0 < T_1 \leqq t \leqq T_2$ eigentlich und bis zum Nullpunkt uneigentlich absolut integrabel im Riemannschen Sinn sind (3).

---

(1) Dieser Name, der daher rührt, dass durch Zusammenfalten der Strecke $0 \ldots. t$ in der Mitte gerade die beiden Argumentwerte τ und $t-\tau$ zur Deckung gebracht werden, dürfte zuerst von F. BERNSTEIN und mir seit 1920 gebraucht worden sein und ist heute allgemein adoptiert. N. WIENER hat in seinem Buch: *The Fourier-Integral and certain of its applications*; Cambridge 1933, S. 45, das Wort ohne Angabe seiner Herkunft auch ins Englische übernommen, weil es sich kaum übersetzen lasse.

(2) So z. B. die Thetafunktion. Die Faltung dieser Funktion mit sich selbst führt zu merkwürdigen Relationen; vgl. G. DOETSCH: *Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion*, Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2), **2** (1933), S. 325-342.

(3) Sie sind in meiner Arbeit: *Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus*, Math. Ann., **89** (1923), S. 192-207, als $\mathfrak{J}$-Funktionen bezeichnet.

Man kann den Faltungsprozess iterieren: $(F_1 * F_2) * F_3$. Hierbei gilt das *assoziative Gesetz*: $(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3)$, sodass ein symbolisches Produkt $F_1 * F_2 * \ldots * F_n$ ohne weitere Angabe einen eindeutigen Sinn hat.

Die Funktion $F_1 * F_2$ ist immer *stetig*. Für die $\mathfrak{J}$-Funktionen ist das in der unter (3) zitierten Arbeit bewiesen, für quadratisch Lebesgue-integrierbare Funktionen folgt es, wie man sich an Hand des letzteren Beweises überlegt, aus der SCHWARZschen Ungleichung und dem bekannten Satz, dass $\int_\alpha^\beta |\Phi(x+\delta) - \Phi(x)|^2 dx$ mit δ gegen 0 strebt.

Die Faltung spielt eine ausgezeichnete Rolle in der Theorie der *LAPLACE-Transformation* (4)

$$\mathfrak{L}\{F\} \equiv \int e^{-st} F(t)\,dt = f(s),$$

die einer Klasse von Funktionen F (Objektfunktionen) eine andere Klasse von Funktionen f (Resultatfunktionen) zuordnet. Die Integrationsgrenzen sind $-\infty$ und $+\infty$: « zweiseitige », oder 0 und $+\infty$: « einseitige » Laplace-Transformation (5). Die erstere ist mit der FOURIER-Transformation $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} F(x)\,dx$ äquivalent, die letztere entspricht dem Spezialfall, dass $F(t)$ für $t<0$ verschwindet. - Die LAPLACE-Transformation hat die Eigenschaft, unter gewissen Voraussetzungen die *transzendente Faltung* in das *elementare Produkt* überzuführen, und zwar besorgt das die zweiseitige LAPLACE-Transformation für die Form (a) und die einseitige für die Form (b). Wir nennen diese Tatsache den

Faltungssatz: $$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}.$$

Wir beschränken uns im Folgenden auf die einseitige LAPLACE-Transformation und das Faltungsintegral (b).

In der angegebenen glatten Gestalt gilt der Faltungssatz nur unter sehr engen Voraussetzungen. Wir geben solche in § 2 an und suchen uns dann in zweierlei Richtung von diesen Beschränkungen zu befreien. In § 3 ersetzen wir die Faltung durch kompliziertere Verbindungen, die durch die LAPLACE-Transformation wieder in ein Produkt übergeführt werden. In § 4 dagegen lassen wir die Faltung, wie sie ist, ersetzen aber das LAPLACE-Integral durch eine kompliziertere Trans-

(4) Wollen wir gelegentlich das Argument s, für das die LAPLACE-Transformation zu nehmen ist, zum Ausdruck bringen, so schreiben wir $\mathfrak{L}_s\{F\}$.

(5) Es sei daran erinnert, dass, wenn die einseitige LAPLACE-Transformation in einem Punkt s_0 der komplexen Ebene einfach, bzw. absolut konvergiert, sie auch für alle s mit $\Re s > \Re s_0$ und daher stets in einer Halbebene einfach, bzw. absolut konvergiert. Bei der zweiseitigen LAPLACE-Transformation tritt an die Stelle einer Halbebene ein Parallelstreifen.

formation, die die Kraft hat, die Faltung *stets* in ein Produkt überzuführen. Dabei werden wir die Aussagen noch insofern auf eine breitere Basis stellen, als wir auch für F_1 und F_2 nicht die Existenz der LAPLACE-Transformation, sondern nur jener Verallgemeinerung voraussetzen ([6]).

Diese Resultate sind z. B. für die Theorie derjenigen *Integralgleichungen* von Bedeutung, in denen die vorkommenden Integrale (erstreckt über bekannte und unbekannte Funktionen) die Form von Faltungen (in beliebig oftmaligen Iterationen) haben. Diese Integralgleichungen « vom Faltungstypus » kann man, wie früher gezeigt wurde ([7]), vermittels der LAPLACE-Transformation in algebraische Gleichungen überführen, wenn die vorkommenden Funktionen die Voraussetzungen des Faltungssatzes erfüllen. Auf Grund unserer Sätze lässt sich diese Methode auf Gleichungen erweitern, in denen die beteiligten Funktionen einer allgemeineren Klasse als früher angehören.

§ 2. - Gültigkeitsgrenzen des Faltungssatzes.

Der Faltungssatz ist eigentlich nichts anderes als das Analogon zur (CAUCHYschen) Multiplikation von *Potenzreihen* (als deren Verallgemeinerung das LAPLACE-Integral aufgefasst werden kann):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}\Big) x^n.$$

$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}$ ist genau das dem Faltungsintegral entsprechende summatorische Gebilde. - Die Multiplikationsregel für Potenzreihen ist nicht bedingungslos richtig,

---

([6]) Bezeichnet man die Umkehrung der LAPLACE-Transformation, die sich unter gewissen Voraussetzungen durch ein komplexes Integral ausdrücken lässt, mit $\overline{\mathfrak{L}}$, so kann man den Faltungssatz auch in der Gestalt $\overline{\mathfrak{L}}\{f_1 \cdot f_2\} = \overline{\mathfrak{L}}\{f_1\} * \overline{\mathfrak{L}}\{f_2\}$ schreiben. W. VON KOPPENFELS: *Der Faltungssatz und seine Anwendung bei der Integration linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, Math. Ann., **105** (1931), S. 694-706, hat Bedingungen für f_1 und f_2 angegeben, unter denen der Satz in dieser Form richtig ist. Sie sind ziemlich einschneidend und lassen sich nur unvollkommen in entsprechende Bedingungen für F_1 und F_2 umsetzen.

([7]) Siehe die vollständige Darstellung dieser Theorie in der unter ([3]) zitierten Arbeit. Sie hat im Fall der *linearen* Integralgleichung einige Vorläufer gehabt, vgl. meine: *Bemerkung zu der Arbeit von* V. FOCK: *Über eine Klasse von Integralgleichnngen*, Math. Zschr., **24** (1926), S. 785-788. - Vor kurzem hat SILVIA MARTIS IN BIDDAU: *Studio della trasformazione di Laplace e della sua inversa dal punto di vista dei funzionali analitici*, Rend. Circ. Mat. di Pal., **57** (1933), S. 1-70 [S. 65-68] durch Beschränkung auf den Fall analytischer Funktionen die explizite Darstellung der Lösung weiter gefördert. - Die Arbeiten von S. BOCHNER und N. WIENER-E. HOPF über den speziellen Fall der linearen Integralgleichung vom Faltungstypus (Sitzungsber. Berl. Akad., 1930 und 1931) verwenden dieselbe Idee, vermittels der aber doch z. B. für diejenigen x, wo beide Faktorenreihen absolut konvergieren (also sicher im Innern des kleineren der beiden Konvergenzkreise). Ganz analog gilt auch der der Faltungssatz nicht allgemein in dem Sinne, dass, wenn $\mathfrak{L}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}\{F_2\}$ für ein bestimmtes s konvergieren, auch $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$ für dieses s konvergierte und gleich $\mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}$ wäre. So ist z. B. $\mathfrak{L}\{J_0\}$, wo J_0 die BESSELsche Funktion 0[ter] Ordnung ist, für $s=0$ konvergent, denn bekanntlich gilt:

$$\mathfrak{L}_{s=0}\{J_0\} = \int_0^\infty J_0(t)\,dt = 1,$$

während [8]

$$J_0 * J_0 = \sin t$$

ist und $\mathfrak{L}\{\sin t\}$ für $s=0$ divergiert. Aber er gilt wie bei Potenzreihen unter Beschränkung auf absolute Konvergenz:

SATZ I. - *Sind $\mathfrak{L}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}\{F_2\}$ für dasselbe $s=s_0$ absolut konvergent, so konvergiert auch $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$ für $s=s_0$ absolut und ist gleich $\mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}$.*

Der Faltungssatz gilt also z. B. im Durchschnitt der Halbebenen absoluter Konvergenz von $\mathfrak{L}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}\{F_2\}$, falls solche vorhanden sind.

Der Beweis ergibt sich einfach aus folgenden, unter den Voraussetzungen des Satzes I legitimen Umformungen:

$$\int_0^\infty e^{-s_0 u} F_1(u)\,du \cdot \int_0^\infty e^{-s_0 v} F_2(v)\,dv = \iint e^{-s_0(u+v)} F_1(u) F_2(v)\,du\,dv,$$

wobei das Doppelintegral über die Viertelebene $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ zu erstrecken ist. Die Substitution

$$u+v=t$$
$$v=\tau$$

führt es über in das Doppelintegral

$$\iint e^{-s_0 t} F_1(t-\tau) F_2(\tau)\,dt\,d\tau,$$

erstreckt über die Achtelebene zwischen der t-Achse und der Geraden $\tau=t$. Dies ist aber gleich dem iterierten, absolut konvergenten Integral

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t} \left\{ \int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau)\,d\tau \right\} dt.$$

LAPLACE-FOURIER-Transformation, bzw. einer gewissen Verallgemeinerung die Faltung in ein Produkt « aufzulösen », ohne zu vermerken, dass diese Idee schon seit längerem als allgemeine Methode zur Lösung von Integralgleichungen herausgestellt worden war.

(8) Siehe G. N. WATSON: *A treatise on the theory of Bessel functions*; Cambridge 1922, S. 380.

Aus Satz I ergibt sich übrigens ein sehr einfacher Beweis für das assoziative Gesetz der Faltung. Sind nämlich drei Funktionen $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ in einem endlichen Intervall $0 < t \leqq T$ gegeben, so definieren wir sie für $t > T$ gleich 0. Dann existieren ihre LAPLACE-Transformierten für jedes s und konvergieren absolut. Es ist also

$$\mathfrak{L}\{(F_1 * F_2) * F_3\} = \mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} \cdot \mathfrak{L}\{F_3\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\} \cdot \mathfrak{L}\{F_3\}.$$

Dasselbe Resultat liefert aber $\mathfrak{L}\{F_1 * (F_2 * F_3)\}$. Mithin ist

$$\mathfrak{L}\{(F_1 * F_2) * F_3\} = \mathfrak{L}\{F_1 * (F_2 * F_3)\},$$

und daraus folgt nach dem bekannten Satz von LERCH wegen der Stetigkeit des Faltungsintegrals, dass

$$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3)$$

ist. Im Intervall $0 < t \leqq T$ liefert das unsere Behauptung.

Für *Potenzreihen* gilt nun weiter folgender, manchmal nach ABEL benannter Multiplikationssatz: Sind die drei Reihen

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \mathfrak{P}_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad \mathfrak{P}_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

mit

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}$$

für dasselbe $x = x_0$ konvergent, so ist $\mathfrak{P}_3(x_0) = \mathfrak{P}_1(x_0) \cdot \mathfrak{P}_2(x_0)$.

Der Beweis läuft bekanntlich so: $\mathfrak{P}_1(x)$ und $\mathfrak{P}_2(x)$ sind für $|x| < |x_0|$ absolut konvergent, also ist für diese x

$$\mathfrak{P}_1(x) \cdot \mathfrak{P}_2(x) = \mathfrak{P}_3(x).$$

Lässt man in dieser Gleichung x (geradlinig) gegen x_0 streben, so ergibt sich nach dem ABELschen Stetigkeitssatz $\mathfrak{P}_1(x_0) \cdot \mathfrak{P}_2(x_0) = \mathfrak{P}_3(x_0)$.

Ganz analog gilt für die LAPLACE-Transformation folgender Satz:

SATZ II. - *Sind* $\mathfrak{L}\{F_1\}$, $\mathfrak{L}\{F_2\}$ *und* $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$ *für dasselbe* $s = s_0$ *konvergent, so ist*

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}.$$

Der Beweis lässt sich nicht unmittelbar so wie bei Potenzreihen führen, da aus der Konvergenz von $\mathfrak{L}\{F\}$ für $s = s_0$ nicht die absolute Konvergenz für $\Re s > \Re s_0$ folgt. Man kann aber jedes für $s = s_0$ *einfach* konvergente LAPLACE-Integral in ein für $\Re s > \Re s_0$ *absolut* konvergentes umformen und dann den obigen Gedankengang anwenden. Dies leistet folgender

HILFSSATZ 1. - *Ist* $\mathfrak{L}\{F\} = f(s)$ *für* $s = s_0$ *einfach konvergent, so ist für* $\Re s > \Re s_0$

$$\mathfrak{L}\{F\} = (s - s_0)\mathfrak{L}\{e^{s_0 t} * F\},$$

wobei das LAPLACE-*Integral auf der rechten Seite absolut konvergiert.*

Der Beweis stimmt mit dem überein, durch den man zu zeigen pflegt, dass ein für $s = s_0$ konvergentes LAPLACE-Integral auch für $\Re s > \Re s_0$ konvergiert. Setzt man

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-s_0 \tau} F(\tau)\, d\tau,$$

so folgt durch verallgemeinerte partielle Integration:

$$\int_0^T e^{-st} F(t)\, dt = \int_0^T e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} F(t)\, dt = e^{-(s-s_0)t} \Phi(t) \Big|_0^T + (s - s_0) \int_0^T e^{-(s-s_0)t} \Phi(t)\, dt.$$

Wegen

$$\lim_{t \to 0} \Phi(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \Phi(t) = f(s_0)$$

geht diese Gleichung beim Grenzübergang $T \to \infty$ für $\Re s > \Re s_0$ über in

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \Phi(t)\, dt,$$

wobei das Integral rechts absolut konvergiert, weil $\Phi(t)$ für $t \to \infty$ einen Grenzwert hat, also beschränkt ist. Da aber Φ in der Gestalt geschrieben werden kann:

$$\Phi(t) = e^{-s_0 t} \int_0^t e^{s_0(t-\tau)} F(\tau)\, d\tau = e^{-s_0 t} [e^{s_0 t} * F],$$

so ergibt sich die Behauptung.

Zum Beweis (⁹) von Satz II setzen wir nun $F = F_1 * F_2$ und falten beiderseits zweimal mit $e^{s_0 t}$:

$$e^{s_0 t} * (e^{s_0 t} * F) = (e^{s_0 t} * F_1) * (e^{s_0 t} * F_2).$$

Da für $\Re s > \Re s_0$ das LAPLACE-Integral der Funktion $e^{s_0 t}$ und nach Hilfssatz 1 auch aller drei Klammern absolut konvergiert, so ist nach Satz I:

$$\mathfrak{L}_s\{e^{s_0 t}\} \cdot \mathfrak{L}_s\{e^{s_0 t} * F\} = \mathfrak{L}_s\{e^{s_0 t} * F_1\} \cdot \mathfrak{L}_s\{e^{s_0 t} * F_2\}.$$

Das bedeutet, abermals nach Hilfssatz 1:

$$\frac{1}{s - s_0} \cdot \frac{\mathfrak{L}_s\{F\}}{s - s_0} = \frac{\mathfrak{L}_s\{F_1\}}{s - s_2} \cdot \frac{\mathfrak{L}_s\{F_2\}}{s - s_0},$$

also

$$\mathfrak{L}_s\{F\} = \mathfrak{L}_s\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}_s\{F_2\}.$$

(⁹) Wir werden am Schluss der Arbeit noch einen weiteren Beweis kennen lernen.

Nun gilt aber folgendes Analogon zum ABELschen Stetigkeitssatz ([10]): « Wenn $\mathfrak{L}\{F\}=f(s)$ an einer Stelle s_0 einfach konvergent ist, so strebt $f(s)$ gegen $f(s_0)$, wenn s in dem Winkelraum $|\arg(s-s_0)|\leqq\vartheta<\frac{\pi}{2}$ gegen s_0 wandert ». Der Grenzübergang $s\rightarrow s_0$ liefert also die Behauptung.

§ 3. - Erweiterung des Faltungssatzes durch Verallgemeinerung der Faltung.

In diesem Paragraphen werden wir das Faltungsintegral, bevor wir es der LAPLACE-Transformation unterwerfen, mit gewissen Hilfsfunktionen falten und es dadurch wieder reif zur Aufspaltung machen. Der Faltungssatz wird dann allerdings nicht mehr für s_0, sondern nur für $\Re s>\Re s_0$ ausgesprochen werden können. Zunächst verwenden wir e^{s_0t} als Hilfsfunktion.

SATZ III. - *Wenn $\mathfrak{L}\{F_1\}$ für s_0 einfach und $\mathfrak{L}\{F_2\}$ für $\Re s>\Re s_0$ absolut konvergiert, so ist für $\Re s>\Re s_0$:*

$$\mathfrak{L}\{e^{s_0t}*F_1*F_2\}=\frac{1}{s-s_0}\,\mathfrak{L}\{F_1\}\cdot\mathfrak{L}\{F_2\},$$

wobei das LAPLACE-Integral auf der linken Seite absolut konvergiert.

Beweis:

$$F=F_1*F_2,$$
$$e^{s_0t}*F=(e^{s_0t}*F_1)*F_2.$$

Da nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{L}\{e^{s_0t}*F_1\}$ für $\Re s>\Re s_0$ absolut konvergiert und gleich $\frac{1}{s-s_0}\,\mathfrak{L}\{F_1\}$ ist, so ist Satz I anwendbar und ergibt:

$$\mathfrak{L}\{e^{s_0t}*F\}=\frac{1}{s-s_0}\,\mathfrak{L}\{F_1\}\cdot\mathfrak{L}\{F_2\{.$$

SATZ IV. - *Wenn $\mathfrak{L}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}\{F_2\}$ für s_0 einfach konvergieren, so ist für $\Re s>\Re s_0$:*

$$\mathfrak{L}\{(te^{s_0t})*F_1*F_2\}=\frac{1}{(s-s_0)^2}\,\mathfrak{L}\{F_1\}\cdot\mathfrak{L}\{F_2\},$$

wobei des LAPLACE-Integral auf der linken Seite absolut konvergiert.

Beweis:

$$F=F_1*F_2,$$
$$te^{s_0t}=e^{s_0t}*e^{s_0t}.$$

Mithin

$$(te^{s_0t})*F=(e^{s_0t}*F_1)*(e^{s_0t}*F_2).$$

Nach Hilfssatz 1 ist Satz I anwendbar und liefert die Behauptung.

Nun wollen wir als Hilfsfunktion die Funktion 1 verwenden ([11]). Dabei stützen wir uns auf folgenden

---

([10]) G. DOETSCH: *Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung*, Journ. f. d. reine u. angew. Math., **167** (1932), S. 274-293 [S. 281, Anm. ([8])].

([11]) Mit 1 falten bedeutet von 0 bis t integrieren.

HILFSSATZ 2 ([12]). - *Wenn* $\mathfrak{L}\{F\}$ *für ein reelles* $s_0>0$ *einfach konvergiert, so konvergiert auch* $\mathfrak{L}\{F*1\}$ *für* s_0, *und es ist*

$$s_0\mathfrak{L}_{s_0}\{F*1\}=\mathfrak{L}_{s_0}\{F\}.$$

(*Natürlich gilt dies dann erst recht für alle* s *mit* $\Re s>s_0$). - *Überdies ist*

$$F*1=o(e^{s_0 t}),$$

sodass $\mathfrak{L}\{F*1\}$ *für* $\Re s>s_0$ *sogar absolut konvergiert.*

Bemerkung: Die letzte Aussage gilt auch für $s_0=0$. Denn wenn $\mathfrak{L}\{F\}$ für $s=0$ konvergiert, so bedeutet das, dass $\int\limits_0^\infty F(\tau)d\tau$ existiert, also $\int\limits_0^t F(\tau)d\tau=F*1$ einen Grenzwert für $t\to\infty$ besitzt. Dann ist aber $\mathfrak{L}\{F*1\}$ für $\Re s>$ o sicher absolut konvergent.

Beweis: Wir setzen

$$\Psi(t)=\int\limits_0^t e^{-s_0\tau}(F*1)d\tau$$

und wenden den STOLZschen Grenzwertsatz an: « Wenn $H(t)$ reell ist und für $t\to\infty$ gegen ∞ strebt, so ist

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(t)}{H(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{G'(t)}{H'(t)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert ». Mit

$$G(t)=e^{s_0 t}\Psi(t), \qquad H(t)=e^{s_0 t}$$

ist $H(t)\to\infty$ für $t\to\infty$ (hier wird $s_0>0$ gebraucht) und ferner

$$\frac{G'(t)}{H'(t)}=\frac{e^{s_0 t}(s_0\Psi+\Psi')}{s_0 e^{s_0 t}}=\frac{1}{s_0}(s_0\Psi+\Psi').$$

Ψ' existiert, da $F*1$ stetig ist. Explizit ist:

$$\frac{1}{s_0}(s_0\Psi+\Psi')=\frac{1}{s_0}\left[s_0\int\limits_0^t e^{-s_0\tau}(F*1)d\tau+e^{-s_0 t}(F*1)\right],$$

was sich durch verallgemeinerte partielle Integration so umformen lässt:

$$\frac{1}{s_0}\left[-e^{-s_0\tau}(F*1)\Big|_0^t+\int\limits_0^t e^{-s_0\tau}F(\tau)d\tau+e^{-s_0 t}(F*1)\right]=\frac{1}{s_0}\int\limits_0^t e^{-s_0\tau}F(\tau)d\tau.$$

([12]) Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung und Präzisierung des Satzes III, S. 198, der unter ([3]) zitierten Arbeit dar. Nahezu in der obigen Gestalt (nämlich für den Fall, dass F die Ableitung von $F*1$ ist) findet er sich bewiesen in der unter ([10]) zitierten Arbeit, S. 285, Anm. ([13]). Der dortige Beweis liesse sich auch unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 2

Da $\mathfrak{L}_{s_0}\{F\}$ konvergiert, so besitzt dieser Ausdruck für $t \to \infty$ den Grenzwert $\frac{1}{s_0}\mathfrak{L}_{s_0}\{F\}$; also hat $\frac{G}{H} = \Psi$ denselben Grenzwert, d. h.

$$\int_0^\infty e^{-s_0\tau}(F*1)\,d\tau = \frac{1}{s_0}\int_0^\infty e^{-s_0\tau}F(\tau)\,d\tau.$$

(Ist $\mathfrak{L}_{s_0}\{F\}$ absolut konvergent, so ist diese Formel eine direkte Folge von Satz I.) Aus dem Resultat

$$\lim_{t\to\infty}\Psi = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{s_0}(s_0\Psi + \Psi')$$

folgt noch:

$$\lim_{t\to\infty}\Psi' = \lim_{t\to\infty} e^{-s_0 t}(F*1) = 0.$$

Damit ist Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

Satz V. - *Wenn $\mathfrak{L}\{F_1\}$ für ein reelles $s_0 \geqq 0$ einfach und $\mathfrak{L}\{F_2\}$ für $\Re s > s_0$ absolut konvergiert, so ist für $\Re s > s_0$:*

$$\mathfrak{L}\{1 * F_1 * F_2\} = \frac{1}{s}\mathfrak{L}\{F_1\}\cdot\mathfrak{L}\{F_2\},$$

wobei das Laplace-Integral auf der linken Seite absolut konvergiert ([13]).

Beweis:

$$F = F_1 * F_2,$$
$$1 * F = (1 * F_1) * F_2.$$

Da nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{L}\{1 * F_1\}$ für $\Re s > s_0$ absolut konvergiert und gleich $\frac{1}{s}\mathfrak{L}\{F_1\}$ ist ([14]), so folgt aus Satz I die Behauptung.

Satz VI. - *Wenn $\mathfrak{L}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}\{F_2\}$ für ein reelles $s_0 > 0$ einfach konvergieren, so ist für $\Re s > s_0$:*

$$\mathfrak{L}\{t * F_1 * F_2\} = \frac{1}{s^2}\mathfrak{L}\{F_1\}\cdot\mathfrak{L}\{F_2\},$$

wobei das Laplace-Integral auf der linken Seite absolut konvergiert.

Beweis:

$$F = F_1 * F_2,$$
$$t = 1 * 1,$$

---

durchführen. Ich gebe aber jetzt einen anderen, der noch elementarer ist, da er nicht von dem Perronschen, sondern nur von dem bekannten Stolzschen Grenzwertsatz Gebrauch macht. - Übrigens ist Hilfssatz 2 für $s_0 < 0$ falsch. So ist z. B. $\mathfrak{L}\{e^{-t}\}$ für $s = -\frac{3}{4}$ konvergent, $\mathfrak{L}\{e^{-t} * 1\} = \mathfrak{L}\{1 - e^{-t}\}$ aber nicht.

([13]) Für $s_0 < 0$ ist der Satz V falsch. So ist z. B. $\mathfrak{L}\{e^{-t}\}$ für jedes $s > -1$ absolut konvergent, aber $\mathfrak{L}\{1 * e^{-t} * e^{-t}\} = \mathfrak{L}\{1 - e^{-t} - te^{-t}\}$ konvergiert erst für $s > 0$.

([14]) Letzteres ist für $s_0 = 0$ zwar in Hilfssatz 2 nicht mitbewiesen. Da aber nach der «Bemerkung» zu Hilfssatz 2 auch in diesem Fall $\mathfrak{L}\{1 * F_1\}$, ferner $\mathfrak{L}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}\{1\}$ für $\Re s > 0$ existieren, so ist nach Satz II:

$$\mathfrak{L}\{1 * F_1\} = \mathfrak{L}\{1\}\cdot\mathfrak{L}\{F_1\} = \frac{1}{s}\mathfrak{L}\{F_1\}.$$

also
$$t * F = (1 * F_1) * (1 * F_2).$$

Hilfssatz 2 und Satz I liefern die Behauptung.

Aus den Sätzen I, V, VI folgt:

SATZ VII. - *Werden die Abszissen der einfachen Konvergenz von* $\mathfrak{L}\{F_1\}$ *und* $\mathfrak{L}\{F_2\}$ mit α_1, *bzw.* α_2, *die der absoluten Konvergenz mit* β_1, *bzw.* β_2 *bezeichnet, so ist*

die Abszisse absoluter Konvergenz von $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} \leqq \operatorname{Max}(\beta_1, \beta_2)$,

» » » » » $\mathfrak{L}\{1 * F_1 * F_2\} \leqq \begin{cases} \operatorname{Max}(\alpha_1, \beta_2, 0) \\ \operatorname{Max}(\alpha_2, \beta_1, 0), \end{cases}$

» » » » » $\mathfrak{L}\{t * F_1 * F_2\} \leqq \operatorname{Max}(\alpha_1, \alpha_2, 0)$.

§ 4. - Erweiterung des Faltungssatzes durch Verallgemeinerung der Laplace-Transformation.

Wenn auch das CAUCHYsche Produkt zweier Reihen nicht zu konvergieren braucht, so hat doch bekanntlich das arithmetische Mittel der Partialsummen einen Grenzwert, d. h. die Produktreihe ist CESÀRO-summabel 1. Ordnung. Diese Analogie verweist uns darauf, auch das LAPLACE-Integral durch Mittelbildung zu summieren. Wir wollen aber gleich die Theorie der Funktionsmittel beliebiger positiver (auch nichtganzer) Ordnung anwenden, wie ich sie früher ([15]) entwickelt habe. Wir werden dadurch eine Verallgemeinerung der LAPLACE-Transformation erhalten, die deren Konvergenzbereich erweitert und für die der Faltungssatz eine glatte und durch keine Zusatzvoraussetzung eingeschränkte Gestalt gewinnt.

Die $\mathfrak{L}^k$-Transformation.

$G(t)$ sei für $t \geqq 0$ definiert und in jedem endlichen Intervall beschränkt und integrabel, k sei eine reelle Zahl >0. Dann nennen wir die Funktion

$$\mu^{(k)}(t;\, G) = \begin{cases} \dfrac{kG * t^{k-1}}{t^k} & \text{für } t > 0 \\ G(0) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

das *CESÀROsche Mittel* k^{ter} *Ordnung* von $G(t)$. Für $k=0$ setzen wir

$$\mu^{(0)}(t;\, G) = G(t).$$

Hat $\mu^{(k)}$ für $t \to \infty$ einen Grenzwert, so nennen wir $G(t)$ *CESÀRO-mediabel* k^{ter}

([15]) G. DOETSCH: *Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen*, Inaugural-Dissertation Göttingen, 1920, 56 S. [S. 12 flg.].

Ordnung oder kurz (C, k)-*mediabel* [16]; den Grenzwert von $\mu^{(k)}$ bezeichnen wir als den (C, k)-*Mittelwert* von G.

Mediabilität 0^{ter} Ordnung ist dasselbe wie Konvergenz. - Ist eine Funktion (C, k)-mediabel, so ist sie erst recht (C, k')-mediabel mit $k'>k$ und zwar zum gleichen Mittelwert [17].

Diesen Begriff wenden wir nun auf die Funktion

$$\Phi(t, s)=\int_0^t e^{-s\tau}F(\tau)\,d\tau$$

an, wo $F(t)$ eine Funktion ist, für die dieses Integral für $t \geqq 0$ einen Sinn hat, also z. B. eine $\mathfrak{J}$-Funktion. Ist Φ für ein s (C, k)-mediabel, so nennen wir seinen (C, k)-Mittelwert die $\mathfrak{L}^k$-*Transformierte* von F für den Wert s; explizit:

$$\mathfrak{L}^k\{F\}=\lim_{t\to\infty}\frac{k}{t^k}\left[t^{k-1} * \int_0^t e^{-s\tau}F(\tau)\,d\tau\right] \qquad \text{für } k>0.$$

$\mathfrak{L}^0$ ist die gewöhnliche Laplace-Transformation $\mathfrak{L}$. - Wegen

$$\int_0^t e^{-s\tau}F(\tau)\,d\tau=1 * (e^{-st}F(t))$$

und

$$t^{k-1} * 1=\frac{t^k}{k}$$

kann man auch schreiben:

$$\mathfrak{L}^k\{F\}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^k * (e^{-st}F(t))}{t^k}.$$

Diese Gestalt hat auch für $k=0$ Gültigkeit.

Existiert $\mathfrak{L}^k$ für ein s, so konvergiert erst recht $\mathfrak{L}^{k'}$ mit $k'>k$ für dieses s. $\mathfrak{L}^k$ mit $k>0$ existiert also gewiss mindestens in demselben Gebiet der s-Ebene wie $\mathfrak{L}$.

Ein Beispiel, wo der Konvergenzbereich von $\mathfrak{L}^k$ *grösser* ist als der von $\mathfrak{L}$, wird durch $F(t)=e^{it}$ geliefert. $\mathfrak{L}\{e^{it}\}$ ist genau für $\Re s>0$ konvergent. Dagegen ist $\mathfrak{L}^k\{e^{it}\}$ mit jedem $k>0$ auch noch auf der Geraden $\Re s=0$, d. h. für alle $s=yi$

---

(16) Der Ausdruck «mediabel» ist in der unter (15) zitierten Arbeit eingeführt. Warum ich den später von anderer Seite vorgeschlagenen Ausdruck «limitierbar» für unzweckmässig halte, habe ich in der Note: *Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace-und Stieltjes-Transformation*, Sitzungsber. Berl. Akad., 1930, S. 144-157 [S. 144, Anm. (2)] auseinandergesetzt.

(17) Siehe l. c. (15), S. 16.

konvergent, mit Ausnahme der Stelle $s=i$, wo die LAPLACE-Transformierte von e^{it}, d. i. $\frac{1}{s-i}$, einen Pol hat. Denn für $s=yi$ mit $y\neq 1$ ist

$$\int_0^t e^{-s\tau}F(\tau)\,d\tau=\int_0^t e^{(1-y)i\tau}d\tau=\frac{e^{(1-y)it}-1}{(1-y)i}.$$

Die Konstante 1 hat natürlich den Mittelwert 1, während $e^{(1-y)it}$ für jedes $k>0$ den (C,k)-Mittelwert 0 hat ([18]). Also ist bei $k>0$ für alle s mit $\mathfrak{R}s\geqq 0$ mit Ausnahme von $s=i$: $\mathfrak{L}^k(e^{it})=\frac{1}{s-i}$.

Der Faltungssatz für die $\mathfrak{L}^k$-Transformation.

Der Formulierung dieses Satzes schicken wir einige Hilfssätze voraus.

HILFSSATZ 3 ([19]). - *Die Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$ seien $\mathfrak{J}$-Funktionen (oder auch quadratisch integrierbar). Wir setzen für $k_1\geqq 0$, $k_2\geqq 0$:*

$$k_0=k_1+k_2+1;$$

$$\Phi_1(t)=\varphi_1*1,\qquad \Phi_0(t)=\varphi_1*\Phi_2;$$

$$\Psi_1(t)=\frac{1}{\Gamma(k_1)}\,\Phi_1*t^{k_1-1},\qquad \Psi_2(t)=\frac{1}{\Gamma(k_2)}\,\Phi_2*t^{k_2-1},\qquad \Psi_0(t)=\frac{1}{\Gamma(k_0)}\,\Phi_0*t^{k_0-1}$$

(für $k_1=0$, bzw. $k_2=0$ sei $\Psi_1=\Phi_1$, bzw. $\Psi_2=\Phi_2$). Dann ist

$$\Psi_0(t)=\Psi_1*\Psi_2.$$

Beweis: Nehmen wir zunächst $k_1>0$, $k_2>0$ an, so ist

$$t^{k_0-1}=\frac{\Gamma(k_0)}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\,t^{k_1-1}*t^{k_2-1}*1,$$

was man am einfachsten vermittels LAPLACE-Transformation der rechten Seite beweist. Denn für $\mathfrak{R}s>0$ ergibt das nach Satz I:

$$\frac{\Gamma(k_0)}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\,\frac{\Gamma(k_1)}{s^{k_1}}\cdot\frac{\Gamma(k_2)}{s^{k_2}}\cdot\frac{1}{s}=\frac{\Gamma(k_0)}{s^{k_0}}=\mathfrak{L}\{t^{k_0-1}\}.$$

Folglich ist nach der Definition von Ψ_0:

$$\Psi_0(t)=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\,\varphi_1*\Phi_2*t^{k_1-1}*t^{k_2-1}*1=\frac{1}{\Gamma(k_1)}\,(\varphi_1*1*t^{k_1-1})*\frac{1}{\Gamma(k_2)}\,(\Phi_2*t^{k_2-1}).$$

Das ist die Behauptung. - Sind k_1 oder k_2 oder beide gleich 0, so ist der Beweis in leicht ersichtlicher Weise zu modifizieren.

([18]) Vgl. den l. c. ([15]), S. 14, 15, für sin t durchgeführten Beweis.

([19]) Vgl. den etwas spezielleren und umständlicher bewiesenen Satz l. c. ([15]), S. 28.

HILFSSATZ 4. - *Sind $\Psi_1(t)$ und $\Psi_2(t)$ für $t \geqq 0$ in jedem endlichen Intervall eigentlich integrabel und ist bei $k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$:*

$$\Gamma(k_1+1)\frac{\Psi_1}{t^{k_1}} \to f_1, \qquad \Gamma(k_2+1)\frac{\Psi_2}{t^{k_2}} \to f_2 \qquad \text{für } t \to \infty,$$

so gilt mit $k_0 = k_1 + k_2 + 1$:

$$\Gamma(k_0+1)\frac{\Psi_1 * \Psi_2}{t^{k_0}} \to f_1 f_2 \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Dieser Satz ist l. c. ([15]), S. 30-32 bewiesen.

HILFSSATZ 5. - *$\varphi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$ seien $\mathfrak{J}$-Funktionen (oder quadratisch integrabel), $k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$. Die Funktion $\Phi_1(t) = \varphi_1 * 1$ sei (C, k_1)-mediabel zum Mittelwert f_1, $\Phi_2(t)$ sei (C, k_2)-mediabel zum Mittelwert f_2. Dann ist $\Phi_0(t) = \varphi_1 * \Phi_2$ (C, k_0)-mediabel zum Mittelwert $f_1 f_2$ mit $k_0 = k_1 + k_2 + 1$.*

Beweis: Wir definieren $\Psi_1(t)$ und $\Psi_2(t)$ wie in Hilfssatz 3. Dann bedeutet die Mediabilität von $\Phi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$, dass die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 erfüllt sind, also ist

$$\Gamma(k_0+1)\frac{\Psi_1 * \Psi_2}{t^{k_0}} \to f_1 f_2.$$

Nach Hilfssatz 3 ist aber

$$\Psi_1 * \Psi_2 = \frac{1}{\Gamma(k_0)} \Phi_0 * t^{k_0-1},$$

mithin ergibt sich:

$$k_0 \frac{\Phi_0 * t^{k_0-1}}{t^{k_0}} \to f_1 f_2.$$

Das ist die Behauptung.

Nun können wir zum eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen übergehen.

SATZ VIII. - (*Allgemeiner Faltungssatz*): *Wenn $\mathfrak{L}^{k_1}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}^{k_2}\{F_2\}$ mit $k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$ für $s = s_0$ konvergieren und gleich $f_1(s_0)$*, bzw. $f_2(s_0)$ *sind, so konvergiert $\mathfrak{L}^{k_0}\{F_1 * F_2\}$ mit $k_0 = k_1 + k_2 + 1$ ebenfalls für s_0 und ist gleich $f_1(s_0) \cdot f_2(s_0)$:*

$$\mathfrak{L}_{s_0}^{k_1+k_2+1}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}_{s_0}^{k_1}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}_{s_0}^{k_2}\{F_2\}.$$

Beweis: Wir setzen

$$\varphi_1(t) = e^{-s_0 t} F_1(t), \qquad \Phi_2(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} F_2(\tau)\, d\tau = (e^{-s_0 t} F_2) * 1.$$

Dann ist

$$\Phi_0(t) = \varphi_1 * \Phi_2 = (e^{-s_0 t} F_1) * (e^{-s_0 t} F_2) * 1 = \left\{ \int_0^t e^{-s_0\tau} F_1(\tau) e^{-s_0(t-\tau)} F_2(t-\tau)\, d\tau \right\} * 1$$

$$= \left\{ e^{-s_0 t} \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau \right\} * 1 = \int_0^t e^{-s_0\tau} F_1 * F_2\, d\tau.$$

Nach Voraussetzung sind $\Phi_1(t)=\varphi_1 * 1$ und $\Phi_2(t)$ mediabel (C, k_1), bzw. (C, k_2) zu den Mittelwerten $f_1(s_0)$, bzw. $f_2(s_0)$. Also ist nach Hilfssatz 3 die Funktion $\Phi_0(t)$ mediabel (C, k_0) zum Mittelwert $f_1(s_0) \cdot f_2(s_0)$. Das ist die Behauptung von Satz VIII ([20]).

Man kann sagen, dass *die Gesamtheit aller durch die Transformationen* $\mathfrak{L}^k$ *transformierbaren Funktionen hinsichtlich der Faltung ein abgeschlossenes System oder eine Gruppe* bildet: Sind zwei Funktionen durch gewisse $\mathfrak{L}^k$ transformabel, so ist es auch ihre Faltung.

Für $k_1=k_2=0$ erhalten wir das Analogon zu dem am Anfang von § 4 erwähnten Satz über Reihen:

SATZ IX. - *Ist die gewöhnliche* LAPLACE-*Transformation zweier Funktionen für* $s=s_0$ *konvergent, so existiert die* $\mathfrak{L}^1$-*Transformation ihrer Faltung für dasselbe* s_0 *und ist gleich dem Produkt jener Transformierten.*

Hieraus ergibt sich ein neuer Beweis von Satz II. Denn wenn $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$ existiert, so ist $\mathfrak{L}^1\{F_1 * F_2\}=\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$. Nach Satz IX ist aber

$$\mathfrak{L}^1\{F_1 * F_2\}=\mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}.$$

([20]) Satz VIII ist das Analogon zu dem Satz von CESÀRO (*Sur la multiplication des séries*, Bull. sc. math. (2), **14** (1890), S. 114-120) über Reihen: Sind zwei Reihen CESÀRO-summabel von $k_1$ter, bzw. $k_2$ter Ordnung, so ist ihre CAUCHYsche Produktreihe CESÀRO-summabel von der Ordnung k_1+k_2+1.