

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

NICOLAS THÉODORESCO

**Le problème de Cauchy pour une classe de systèmes d'équations
aux dérivées partielles. Application aux équations de Dirac**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 4, n° 1
(1935), p. 51-70

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_51_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR UNE CLASSE
DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
APPLICATION AUX ÉQUATIONS DE DIRAC

par NICOLAS THÉODORESCO (Bucarest).

L'examen des différents systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles intervenant en Physique mathématique conduit, dans le plupart des cas, à une remarque fort simple : qu'il s'agisse de problèmes d'équilibre d'un milieu isotrope, de petits mouvements stationnaires d'un milieu visqueux, de tourbillons, des équations de MAXWELL, ou de celles proposées par DIRAC pour l'électron magnétique, on peut, par des combinaisons linéaires de dérivées partielles des premiers membres des systèmes en question, arriver à montrer que leurs intégrales ont une structure homogène, c'est-à-dire qu'elles satisfont toutes à une certaine équation aux dérivées partielles.

C'est là une observation connue depuis longtemps et employée par les physiciens soit pour trouver des intégrales particulières des systèmes ci-dessus, soit pour en former d'autres susceptibles de traduire analytiquement des problèmes physiques.

Elle peut conduire, au point de vue du mathématicien, à des méthodes d'intégration se plaçant entre le point de vue purement théorique et celui purement pratique.

M. GR. C. MOISIL, ayant réussi à mettre en évidence les caractères communs de ces systèmes et à trouver, à l'aide des matrices, des algorithmes simples permettant de rapprocher l'étude de ceux d'entre eux qui conduisent à l'équation de LAPLACE, des propositions qui sont à la base de la théorie des fonctions holomorphes ⁽¹⁾, a pu donner la forme générale de leurs intégrales et envisager des méthodes d'intégration, que nous avons adaptées à certains problèmes physiques ⁽²⁾.

Il reste à examiner le cas des systèmes conduisant à l'équation des ondes (ou, plus généralement, à des équations hyperboliques).

⁽¹⁾ GR. C. MOISIL: *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique*. Bucarest, Göbl & fils et C. R., t. 191, 1930. — Voir aussi, GR. C. MOISIL et N. THÉODORESCO: *Fonctions holomorphes dans l'espace*. Mathematica, Cluj, t. V, p. 1, 1931.

⁽²⁾ N. THÉODORESCO: *Sur l'emploi de relations globales dans quelques problèmes physiques*. Annali di Matematica, s. IV, t. XI, pp. 325-362, 1933.

Dans ce qui suit, nous allons entreprendre l'étude du problème de Cauchy pour ces systèmes, à l'aide d'une extension de la méthode que M. Hadamard a découverte, pour intégrer les équations aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique normal ⁽³⁾.

À cet effet, il nous faudra, dès le début, faire une distinction entre le cas d'un nombre impair et celui d'un nombre pair de variables indépendantes.

Étant donné le système :

$$(1) \quad \sum_{k,h} \gamma_{ih}^k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} = \psi_i \quad \left(\begin{array}{l} i, h = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, p \end{array} \right)$$

où les γ_{ih}^k sont des coefficients numériques, les ψ_i des fonctions régulières, désignons par $\gamma^k = \{\gamma_{ih}^k\}$ les matrices formées par les coefficients du système.

En y introduisant un langage conventionnel, nous pouvons dire que

$$\Phi_i^k = \sum_h \gamma_{ih}^k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k}$$

provient de la multiplication du demivecteur $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} \right)$ par la matrice γ^k et écrire cela sous la forme $\gamma^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \Phi^k$.

Grâce à ce symbolisme, le système (1) devient :

$$(2) \quad \sum_k \gamma^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \psi$$

avec ψ ($\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$) ou bien

$$(3) \quad F\varphi = \psi, \quad \text{avec} \quad F \equiv \sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

(φ et ψ ayant donc la signification de demivecteurs).

Introduisons maintenant la supposition que les intégrales de ce système satisfont à l'équation des ondes (avec second membre) que nous écrirons

$$\sum_i \varepsilon_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \quad (\text{avec } \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_n = -1).$$

Par conséquent, il existe des matrices $\bar{\gamma}^k = \{\bar{\gamma}_{ih}^k\}$ telles que l'opérateur

$$\bar{F} = \sum_k \bar{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appliqué au système (3) conduise justement à cette équation. On aura donc :

$$\bar{F}F\varphi \equiv \frac{1}{2} \sum_{k,h} (\bar{\gamma}^h \gamma^k + \bar{\gamma}^k \gamma^h) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_k} \equiv \sum_h \varepsilon_h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h^2}$$

⁽³⁾ J. HADAMARD : *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, Hermann, 1933.

d'où l'on tire les relations :

$$(4) \quad \boxed{\bar{\gamma}^h \gamma^k + \bar{\gamma}^k \gamma^h = 2\delta^{hk} e}$$

avec

$$\delta^{hk} = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq k, \\ \varepsilon_h & \text{si } h = k \end{cases}$$

e étant la matrice unité.

Les systèmes que nous allons étudier dans la suite, sont tous supposés *doués de cette propriété*.

Commençons par montrer que *le nombre n des équations et des fonctions inconnues doit être pair*.

En effet, formons l'équations des caractéristiques du système (1).

On aura :

$$\Delta f = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}, \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}, \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad a_{ih} = \sum_k \gamma_{ih}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Or, si l'on pose $\bar{\Delta} f = |\bar{a}_{ih}|$ où $\bar{a}_{ih} = \sum_k \bar{\gamma}_{ih}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}$, on en tirera, en vertu des suppositions faites

$$\bar{\Delta} f \cdot \Delta f \equiv P^n, \quad \text{avec} \quad P = \sum_h \varepsilon_h \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} \right)^2.$$

En posant $\frac{\partial f}{\partial x_h} = \pi_h$, on peut considérer $\bar{\Delta}$, Δ et P comme des formes algébriques et, puisque P est irréductible, remarquer que

$$\bar{\Delta} f \equiv P^{\frac{n}{2}}, \quad \Delta f \equiv P^{\frac{n}{2}}$$

ce qui exige que n soit pair.

1. - Cas d'un nombre impair de variables indépendantes. — Soient Ω et Σ un domaine et sa frontière (supposée douée d'une normale unique et continue en chaque point). Désignons par n (n_1, n_2, \dots, n_p) le vecteur normal intérieur à Σ .

Si u_1, u_2, \dots, u_p sont les composantes d'un vecteur u et que l'on pose

$$\text{div}^* u = \sum_h \varepsilon_h \frac{\partial u_h}{\partial x_h}$$

on a l'identité

$$(5) \quad \int_{\Sigma} (u\bar{\gamma})(n\gamma)\varphi d\sigma + \int_{\Omega} (u\bar{\gamma})F\varphi d\omega + \int_{\Omega} [e \text{div}^* u - (\bar{\gamma} \cdot \text{rot} u \cdot \gamma)]\varphi d\omega = 0$$

avec les notations

$$\begin{aligned} (u\bar{\gamma}) &= \bar{\gamma}^1 u_1 + \bar{\gamma}^2 u_2 + \dots + \bar{\gamma}^p u_p \\ \text{rot}_{ik} u &= \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ (\bar{\gamma} \cdot \text{rot} u \cdot \gamma) &= \sum_{i,k} \bar{\gamma}^i \text{rot}_{ik} u \cdot \gamma^k. \end{aligned}$$

À partir de ce moment, on supposera partout $p=2m+1$. Donnons-nous sur une surface S , telle que le problème de CAUCHY pour l'équation des ondes soit « *correctement posé* » (le plan tangent ne coupe jamais le cône à 45° dont le sommet est sur la surface), *les valeurs régulières* ⁽⁴⁾ *des intégrales* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Supposons, en outre, que S soit régulière au sens de la théorie de M. HADAMARD, c'est-à-dire que l'une des coordonnées admet par rapport aux autres, des dérivées partielles jusqu'à un certain ordre q .

Prenons pour Ω' le domaine limité par le cône caractéristique ayant son sommet en un point $P(a_1, \dots, a_{2m+1})$, la portion S_0 que ce cône découpe sur S et une petite surface auxiliaire σ dans la proximité de P , ayant avec ce point un voisinage d'ordre m .

Posons

$$\mu_k = \varepsilon_k(x_k - a_k), \quad \varrho = \sum \varepsilon_i(x_i - a_i)^2$$

et prenons

$$u = \frac{\mu_k}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}}.$$

On s'aperçoit immédiatement que

$$\text{rot}_{ik} u = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}^* u = 0$$

ce qui permet d'écrire l'identité (5) sous la forme

$$(6) \quad \overline{\int_{S_0} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M} + \overline{\int_{\Omega'} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} F\varphi_M d\omega_M} = 0$$

grâce à la notion de « *partie finie* » de M. HADAMARD.

Le symbole $\overline{}$ signifie que, dans le calcul d'une intégrale qui comporte des termes infiniment grands d'ordre fractionnaire — comme il en est de celles qui forment le premier membre de (6), à cause de la frontière singulière $\varrho=0$, qui est justement le cône caractéristique — il faut ne faire attention qu'aux termes résultant après soustraction des infinis, ou mieux, à la limite obtenue par addition de termes singuliers convenables.

On se rend compte, en particulier, que la contribution du cône caractéristique ainsi calculée est nulle, puisqu'elle est de la forme d'une somme d'infiniments grands de l'ordre $m+\frac{1}{2}$.

La formule (6) devient donc :

$$\overline{\int_{S_0} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M} + \overline{\int_{\Omega'} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\omega_M} - \overline{\int_{\sigma} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M} = 0.$$

⁽⁴⁾ Nous entendons par là qu'elles admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre m .

Il importe de calculer, en premier lieu, le dernier terme et sa limite lorsque σ se resserre autour du point P .

Afin de simplifier les calculs, prenons comme surface σ la portion de la surface $\varrho = \lambda^2$ qui est à l'intérieur du cône caractéristique, limitée par un plan parallèle à $x_{2m+1} = 0$ dont le rôle est de la compléter.

On aura

$$n_h = \varepsilon_h \frac{x_h - a_h}{r} = \frac{\mu_h}{r}, \quad r^2 = \sum_h (x_h - a_h)^2,$$

$$(\mu\bar{\gamma})(n\gamma) = \frac{1}{r} \sum_{h,k} \mu_h \mu_k \bar{\gamma}^h \gamma^k = \frac{1}{2r} \sum_{k,h} \mu_h \mu_k (\bar{\gamma}^h \gamma^k + \bar{\gamma}^k \gamma^h) = \frac{1}{r} \sum \varepsilon_i (x_i - a_i)^2 = \frac{\lambda^2}{r}$$

et

$$A \equiv \int_{\sigma} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M = \int_{\sigma} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\lambda^{2m+1}} \varphi_M d\sigma_M = \frac{e}{\lambda^{2m-1}} \int_{\sigma} \frac{\varphi_M}{r} d\sigma_M = \frac{\varphi_{P'}}{\lambda^{2m-1}} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r}$$

P' étant un point dans le voisinage de P .

L'élément de volume pour la portion d'hyperspace limitée par $\varrho = 0$, $\varrho = \lambda^2$ et l'hyperplan envisagé, peut s'écrire

$$(2m+1)d\omega = r \cos(r, n) d\sigma = \frac{\sum \varepsilon_i (x_i - a_i)^2}{r} d\sigma = \frac{\lambda^2}{r} d\sigma$$

($d\sigma$ étant l'élément de surface sur $\varrho = \lambda^2$).

Par conséquent, l'intégrale étendue à σ représente, à un facteur près, le volume compris entre cette surface et le cône caractéristique

$$A = \frac{(2m+1)e\varphi_{P'}}{\lambda^{2m+1}} \int_{\omega} d\omega.$$

Par une homothétie, on ramène ce calcul à celui du volume compris entre $\varrho = 1$ et $\varrho = 0$. Désignons par $d\Omega_{2m-1}$ l'élément de surface de la sphère unité dans l'espace à $2m$ dimensions (5).

On aura

$$dx_1 dx_2 \dots dx_{2m} = r^{2m-1} dr d\Omega_{2m-1}$$

d'où

$$A = e\varphi_{P'} (2m+1) \Omega_{2m-1} \iint r^{2m-1} dr dx_{2m+1}$$

l'intégrale double étant étendue à la surface comprise entre l'arc de l'hyperbole $x_{2m+1} - r^2 = 1$, ses asymptotes et deux segments de droite dont la distance à l'origine est de l'ordre de λ^{-1} .

Posons

$$x_{2m+1} = rz, \quad \varrho = \sqrt{r^2 - x_{2m+1}^2}.$$

Il vient :

$$\overline{A} = (2m+1)e\varphi_{P'} \Omega_{2m-1} \frac{1}{2m+1} \int_1^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}}$$

(5) Se reporter au livre précité de M. HADAMARD, p. 211.

et puisque

$$\Omega_{2m-1} = 2 \frac{\pi^m}{(m-1)!}$$

$$\overline{A} = \frac{(-1)^m 2^m \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)} e\varphi_P.$$

Cette limite calculée, il nous reste, pour achever les calculs, à montrer qu'on peut substituer Ω à Ω' quelle que soit la position de P dans une région où les ψ_i sont réguliers et que, par conséquent, l'intégrale étendue à Ω' converge uniformément lorsque σ s'approche de P (le voisinage étant toujours de l'ordre m).

À cet effet, prenons comme coordonnées les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m}$ définissant un système de géodésiques issues de P de l'élément linéaire

$$ds^2 = \sum \varepsilon_i dx_i^2$$

et l'arc s de ces courbes.

On a :

$$\int_{\omega} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\omega_M = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{D(x_1 \dots x_{2m+1})}{D(\lambda_1 \dots \lambda_{2m}, s)} ds.$$

Or, ϱ contient s^2 comme facteur, les μ sont de l'ordre de s et le Jacobien de l'ordre de s^{2m} (6). On voit donc que ce paramètre disparaît du dénominateur.

Par intégration, on obtiendra une expression de l'ordre de s ou bien de l'ordre du rayon de la plus petite sphère renfermant σ .

La contribution du terme en question est négligeable quel que soit P dans la région dont il s'agit. On a donc droit de remplacer partout Ω' par Ω et d'écrire :

$$(7) \quad \boxed{\varphi_P = \frac{(-1)^m}{\pi^m} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right) \left[\int_{\dot{S}_0} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M + \int_{\Omega} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\omega_M \right]}.$$

Cela ne nous dispense pas de vérifier que le système (1) est bien satisfait par ces valeurs des φ_i et que, en plus, les conditions aux limites sont remplies effectivement.

2. - La vérification du système serait simple si les seconds membres étaient nuls. En effet, on sait qu'on a droit de dériver directement sous les symboles « *partie finie* » tant que la variété singulière n'a que des points réguliers.

Il vient donc

$$F \int_{\dot{S}_0} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M = \int_{\dot{S}_0} F \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M = 0$$

(6) J. HADAMARD, loc. cit., p. 225.

car

$$F \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\rho^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{i,k} \bar{\gamma}^i \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_k}{\rho^{m+\frac{1}{2}}} \right) \equiv 0.$$

Quant à la contribution de l'autre terme, remarquons que

$$\frac{\mu_i}{\rho^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{-2m+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho^{m-\frac{1}{2}}}$$

et qu'on a, par suite, dans ω

$$\int_{\omega} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\rho^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\omega_M = \frac{1}{-2m+1} \int_{\omega} \left(\bar{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{\rho^{m-\frac{1}{2}}} \right) \psi_M d\omega_M.$$

Compte tenu de la convergence uniforme de cette intégrale, elle peut être transformée à l'aide de la formule de GREEN :

$$\int_{\omega} \left(\bar{\gamma}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho^{m-\frac{1}{2}}} \right) \psi_M d\omega_M = - \int_{\omega} \left(\bar{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{1}{\rho^{m-\frac{1}{2}}} d\omega_M + \int_{\sigma} \frac{(n\bar{\gamma})}{\rho^{m-\frac{1}{2}}} \psi_M d\sigma_M.$$

Il vient donc

$$F \int_{\omega} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\rho^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\omega_M = - \frac{1}{-2m+1} \int_{\omega} F \left(\bar{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{1}{\rho^{m-\frac{1}{2}}} d\omega_M + \\ - \frac{1}{-2m+1} \int_{\sigma} (n\bar{\gamma}) F \frac{\psi}{\rho^{m-\frac{1}{2}}} d\sigma_M = - \int_{\omega} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\rho^{m+\frac{1}{2}}} \left(\bar{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\omega_M + \int_{\sigma} \frac{(n\bar{\gamma})(\mu\bar{\gamma})}{\rho^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\sigma_M,$$

grâce au fait que l'élément différentiel relatif à l'intégrale étendue à ω ne contient plus s en dominateur, comme il est facile de s'en assurer.

En faisant tendre σ vers P , on constate que le premier terme tend uniformément vers zéro — en vertu des remarques déjà faites — tandis que le second a pour limite, à l'exemple de l'intégrale analogue calculée plus haut

$$\frac{(-1)^m}{\pi^m} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2} \right) \psi_P.$$

Quant à la contribution de Ω' , on s'aperçoit aisément qu'elle est nulle. Par conséquent, l'expression (7) représente bien une intégrale du système (1).

Pour les conditions aux limites, remarquons que l'intégrale de volume fournit une contribution infiniment petite, dès que P s'approche de S .

Il nous reste à répéter les calculs faits pour obtenir la limite du terme concernant σ , afin d'examiner la contribution de l'intégrale de surface. C'est là qu'on a besoin de restreindre la généralité de S : les plans tangents à S vont couper les cônes caractéristiques des points qui se trouvent au voisinage de la surface suivant des courbes fermées, de sorte que l'aire découpée soit infiniment petite en même temps que la distance de P aux plans tangents voisins.

On peut écrire

$$(\mu\bar{\gamma})(n\gamma) = \sum_i \varepsilon_i n_i \mu_i + \sum_{h,k} \bar{\gamma}^h \gamma^k \mu_h \mu_k = e \sum_i n_i (x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{h,k} \bar{\gamma}^h \gamma^k (\mu_h n_k - \mu_k n_h).$$

avec, cette fois, $h \neq k$.

On aura à calculer des termes de la forme

$$\bar{\gamma}^h \gamma^k \sqrt{\int_{\sigma} \frac{\mu_h n_k - \mu_k n_h}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M}$$

ainsi qu'une intégrale de la forme

$$\sqrt{\int_{\sigma} \frac{\sum n_i (x_i - a_i)}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M}.$$

Or, on a

$$\sqrt{\int_{\sigma} \frac{\mu_h n_k - \mu_k n_h}{\varrho^{m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M} = \frac{1}{-2m+1} \sqrt{\int_{\sigma} \left(n_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}} - n_h \frac{\partial}{\partial x_h} \cdot \frac{1}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}} \right) \varphi_M d\sigma_M}$$

ce qu'on a droit d'écrire en vertu des propriétés du symbole $\sqrt{\quad}$, compte tenu de la régularité de σ .

En même temps :

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{\sigma} \left(\frac{\partial \frac{1}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}}}{\partial x_h} n_k - \frac{\partial \frac{1}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}}}{\partial x_k} n_h \right) \varphi_M d\sigma_M} &= - \sqrt{\int_{\sigma} \frac{1}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} n_k - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} n_h \right) d\sigma_M} + \\ &+ \sqrt{\int_{\sigma} \left(\frac{\partial \frac{\varphi}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}}}{\partial x_h} n_k - \frac{\partial \frac{\varphi}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}}}{\partial x_k} n_h \right) d\sigma_M}. \end{aligned}$$

Mais par l'application de la formule de STOKES au dernier terme — ce qui évite les difficultés que pourrait susciter l'emploi de la formule de GREEN — on se rend compte qu'on obtient une intégrale étendue à la variété singulière commune au cône caractéristique et à σ , ce qui ne donne lieu qu'à des termes infiniment grands d'ordre fractionnaire, que l'on doit négliger.

On a donc

$$\sqrt{\int_{\sigma} \left(\frac{\partial \frac{\varphi}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}}}{\partial x_h} n_k - \frac{\partial \frac{\varphi}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}}}{\partial x_k} n_h \right) d\sigma_M} = \sqrt{\int_{\varrho, \sigma} \frac{\varphi}{\varrho^{m-\frac{1}{2}}} d(x_h, x_k)} \equiv 0$$

$d(x_h, x_k)$ désignant l'élément dx_1, \dots, dx_{2m+1} , à l'exclusion de dx_h et dx_k .

La contribution de l'autre terme devient petite, ce qu'on voit encore en employant les coordonnées λ_i avec, cette fois, s = fonction des λ_i .

En conclusion, les intégrales considérées n'introduisent que des termes qui s'évanouissent, soit directement, soit par l'emploi du symbole \square .

Examinons l'autre intégrale :

$$\sum_i n_i(x_i - a_i) = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 \dots & x_{2m+1} - a_{2m+1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_{2m}} & \dots & \dots & \frac{\partial x_{2m+1}}{\partial \lambda_{2m}} \end{vmatrix}.$$

Posons $x_i - a_i = a_i s$, les a_i et s étant des fonctions des $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m}$.

On aura :

$$\int_{\sigma} \frac{\sum n_i(x_i - a_i)}{\rho^{m + \frac{1}{2}}} \varphi_M d\sigma_M = \varphi_{P'} \int \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots \\ \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_1} & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \frac{d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m}}{(\sum \varepsilon_i a_i^2)^{m + \frac{1}{2}}}.$$

Or, on démontre (7) que

$$\frac{1}{2m + 1} \int \begin{vmatrix} a_1 \dots & a_{2m+1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_1} & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} s^{2m+1} d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m}$$

représente précisément le volume compris entre la surface Σ décrite par le point M et le cône qui a pour base une ligne convenable tracée sur Σ et pour sommet l'origine.

Si Σ est la surface d'équation

$$\sum_i \varepsilon_i (x_i - a_i)^2 = 1,$$

on aura

$$s^{2m+1} = \frac{1}{(\sum \varepsilon_i a_i^2)^{2m+1}},$$

d'où l'on déduit que l'intégrale qui nous occupe, représente, au facteur $2m + 1$ près, la partie finie du volume compris entre Σ et le cône caractéristique du point P (8).

(7) J. HADAMARD, loc. cit., p. 226.

(8) Remarquons que les calculs faits, pour obtenir les intégrales au point P , ne diffèrent point de ceux qu'on a effectués ci-dessus. Les limites sont indépendantes du choix de σ (à condition de respecter le voisinage imposé).

Par conséquent, on retombe justement sur la valeur de φ_P ; les conditions indéfinies et celles aux limites sont vérifiées et le problème de CAUCHY résolu ⁽⁹⁾.

3. - Cas d'un nombre pair de variables indépendantes. — Supposons maintenant $p=2m$. Les raisonnements employés dans le cas impair reposant sur l'emploi du symbole « *partie finie* », ne seront plus applicables parce que les infiniments grands ne sont plus fractionnaires.

La solution du problème de CAUCHY pour ces systèmes s'en déduit pourtant facilement, grâce à l'application de « *la méthode de descente* » de M. HADAMARD.

Celle-ci consiste à supposer qu'une variable supplémentaire t s'introduit dans le système en question, mais que ni les fonctions ψ , ni les conditions aux limites ne dépendent de cette variable.

Le système s'écrit, par conséquent :

$$(8) \quad \sum_{h,k} \gamma_{ih}^k \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_k} + \sum_h \gamma_{ih}^0 \frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = \psi_i(x_1, \dots, x_{2m})$$

ou bien

$$E\varphi = \psi, \quad \text{avec} \quad E \equiv \sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t}.$$

Supposons que la matrice $\gamma^0 = \{\gamma_{ih}^0\}$ satisfasse aux mêmes conditions (4) que les autres.

Cela nous assure que les intégrales de (8) satisfont à l'équation des ondes dans l'espace E_{2m+1} .

Remarquons, que les intégrales de (1) — où l'on suppose $p=2m$ — vérifient aussi (8).

Réciproquement, la solution du problème de CAUCHY pour (8) ne peut contenir la variable t car, si elle la contenait, $\varphi(x_1, \dots, x_{2m}, t+h)$ avec $h = \text{constante arbitraire}$ serait, elle aussi, une solution de (8) satisfaisant aux mêmes conditions aux limites.

On a donc droit de déduire l'intégrale de (8) de celle de (1) qui correspond aux mêmes données à la frontière.

Nous allons prendre dans l'espace E_{2m+1} , comme surface portant les données de CAUCHY, l'hypercylindre \bar{S} obtenu en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque $(x_1, x_2, \dots, x_{2m})$ décrit la surface S de l'espace E_{2m} .

Le point P , sommet du cône caractéristique, aura pour coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}, 0$, compte tenu du fait que l'intégrale demandée ne dépend pas de t .

On peut, afin de mieux voir ces choses, faire une sorte de représentation graphique, en prenant pour E_{2m} le plan xoy de l'espace ordinaire.

⁽⁹⁾ Les résultats, développés dans le présent Mémoire, ont fait l'objet de deux Notes aux C. R. Voir : N. THÉODORESCO, C. R., t. 194, p. 583 et p. 1147, 1932.

Cela étant, on aura pour (8)

$$\varphi_P = \frac{(-1)^m}{\pi^m} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right) \left[\int_{\bar{S}_0} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} \varphi_M d\bar{\omega}_M + \int_{\bar{\Omega}} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M \right]$$

avec $\bar{\varrho} = \varrho - t^2$ ⁽¹⁰⁾.

Occupons-nous d'abord du terme regardant $\bar{\Omega}$. On aura, si l'on partage ce domaine en deux portions $\bar{\Omega}_1$ et $\bar{\Omega}_2$ à l'aide d'un cylindre ayant comme base $\varrho = \lambda$ ($\lambda =$ paramètre assez petit), complété par une petite surface σ dans la proximité de P ,

$$\int_{\bar{\Omega}} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M = \int_{\bar{\Omega}_1} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M + \int_{\bar{\Omega}_2} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M.$$

Dans $\bar{\Omega}_1$, qui ne contient pas le sommet P , on intègre facilement par rapport à t :

$$\int_{\bar{\Omega}_1} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M = \int_{\bar{\Omega}_1} (\mu\bar{\gamma}) \psi_M d\omega_M \int_{-\sqrt{\bar{\varrho}}}^{+\sqrt{\bar{\varrho}}} \frac{dt}{(\varrho - t^2)^{m+\frac{1}{2}}} - \bar{\gamma}_0 \int_{\bar{\Omega}_1} \psi_M d\omega_M \int_{-\sqrt{\bar{\varrho}}}^{+\sqrt{\bar{\varrho}}} \frac{t dt}{(\varrho - t^2)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Or, on a ⁽¹¹⁾

$$(9) \quad I_p = \int_{-\sqrt{\bar{\varrho}}}^{+\sqrt{\bar{\varrho}}} \frac{t^{p-1}}{(\varrho - t^2)^{m+\frac{1}{2}}} dt = B\left(\frac{1}{2} - m, \frac{p}{2}\right) \varrho^{\frac{p-1}{2} - m}$$

pour $p =$ impair et

$$m \leq \frac{p-1}{2}$$

et

$$I_p = 0$$

pour $p =$ impair et

$$m > \frac{p-1}{2}.$$

Si $p =$ pair,

$$I_p = 0.$$

Par conséquent, la contribution de $\bar{\Omega}_1$ est nulle.

Cette méthode n'est plus applicable dans $\bar{\Omega}_2$ à cause de la restriction qu'il

⁽¹⁰⁾ Nous ne marquerons pas d'un nouveau symbole la présence des termes concernant la variable t dans les produits tels que $(\mu\bar{\gamma})$, $(n\gamma)$. Elle y est sous-entendue, si besoin est.

⁽¹¹⁾ J. HADAMARD, loc. cit., pp. 209-211.

faut imposer aux lignes d'intégration de couper la surface singulière sous des angles finis.

En effet, les projetantes des points de $\bar{\Omega}_2$ sur Ω_2 coupent la surface $\bar{\varrho}$ sous un angle qui devient infinitésimal au voisinage de ϱ .

Il nous faudra prendre sur $\varrho=0$, un point de coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m-1}$, le joindre par une ligne à un point de $\varrho=\lambda$, puis, par le plan $t=\text{const.}$ mettre en évidence les sections successives.

Un point de $\bar{\Omega}_2$ sera donc défini par les coordonnées $\lambda_1, \lambda_{2m-1}, \varrho, t$.

Soit J le jacobien dans l'espace E_{2m} (résultant du changement des x_i en λ_k, ϱ).

On aura :

$$d\omega_M = J d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m-1} d\varrho, \quad d\bar{\omega}_M = d\omega_M dt.$$

Nous allons intégrer d'abord par rapport à ϱ , ce qui est permis, car les lignes correspondantes :

$$\lambda_1 = \text{const.} \dots \lambda_{2m-1} = \text{const.}, \quad t = \text{const.}$$

coupent $\varrho=0$ sous des angles finis.

Ensuite, nous ferons varier t de $-\sqrt{\varrho}$ à $+\sqrt{\varrho}$.

Il viendra :

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}_2} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M &= \int d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m-1} dt \int_{t^2}^{\lambda} \frac{(\mu\bar{\gamma}) J \psi_M}{(\varrho - t^2)^{m+\frac{1}{2}}} d\varrho \\ &\quad - \bar{\gamma}^0 \int d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m-1} dt \int_{t^2}^{\lambda} \frac{J \psi_M}{(\varrho - t^2)^{m+\frac{1}{2}}} d\varrho. \end{aligned}$$

Posons $H = (\mu\bar{\gamma}) J \psi$ et $G = J \psi$. On a

$$\frac{1}{(\varrho - t^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^m}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)} \frac{d^m}{d\varrho^m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varrho - t^2}}.$$

Une intégration par parties généralisée donne :

$$\int_{t^2}^{\lambda} \frac{H d\varrho}{(\varrho - t^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^m}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)} \int_{t^2}^{\lambda} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho - t^2}} \frac{d^m H}{d\varrho^m} + [R]_{t^2}^{\lambda}$$

avec

$$R = \frac{(-1)^m H}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)} \frac{d^{m-1}}{d\varrho^{m-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varrho - t^2}} + \dots - \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\varrho - t^2}} \cdot \frac{d^{m-1} H}{d\varrho^{m-1}}.$$

Le premier terme du second membre conduit à une intégrale ordinaire qui, étant de l'ordre de $\sqrt{\varrho}$, s'évanouira en même temps que ce paramètre.

Quant à $[R]_{t^2}^{\lambda}$, nous allons négliger les termes infiniment grands d'ordre frac-

tionnaire obtenus à la limite inférieure, de sorte qu'on ne gardera plus que la somme

$$[R]_{e=\lambda} = -\frac{H}{m - \frac{1}{2}} \frac{1}{(\lambda - t^2)^{m - \frac{1}{2}}} - \dots - \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m - \frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda - t^2}} \frac{d^{m-1}H}{d\lambda^{m-1}}$$

qu'on devra intégrer de $-\sqrt{\lambda}$ à $+\sqrt{\lambda}$.

Or, les intégrales de la forme I_0 sont nulles sauf pour $m=0$.

La contribution de R , après cette nouvelle remarque, se réduit à

$$-\frac{\pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m - \frac{1}{2})} \frac{d^{m-1}H}{d\lambda^{m-1}}.$$

Par conséquent, on aura obtenu un terme de la forme

$$-\frac{\pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m - \frac{1}{2})} \int \frac{d^{m-1}H}{d\lambda^{m-1}} d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m-1} =$$

$$-\frac{\pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m - \frac{1}{2})} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \int (\mu\bar{\gamma}) J \psi_M d\lambda_1 d\lambda_2 \dots$$

Remarquons ⁽¹²⁾ que

$$\int (\mu\bar{\gamma}) J \psi d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m-1} = \frac{d}{d\lambda} \int_{\Omega_2} (\mu\bar{\gamma}) \psi_M d\omega_M$$

ce qui permet d'écrire la même quantité sous une forme plus maniable

$$-\frac{\pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m - \frac{1}{2})} \frac{d^m}{d\lambda^m} \int_{\Omega_2} (\mu\bar{\gamma}) \psi_M d\omega_M.$$

En passant maintenant à l'autre terme concernant $\bar{\Omega}_2$, on remarque que la suite des raisonnements est la même; il faut seulement changer H en G puis remarquer qu'on aura à intégrer par rapport à t des termes de la forme

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{tdt}{(\lambda - t^2)^{p + \frac{1}{2}}},$$

ce qui donne, soit des termes infiniment grands fractionnaires, dont on ne tiendra pas compte, soit un terme en $\sqrt{\lambda}$ qui disparaît aussi.

Il est aisé de constater que les mêmes calculs amènent à la valeur de l'intégrale relative à \bar{S}_0 .

⁽¹²⁾ J. HADAMARD, loc. cit., p. 313.

Il s'ensuit que la solution cherchée est :

$$(10) \quad \varphi_P = \left(-\frac{1}{\pi} \right)^{m-1} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[\int_{S_2} (\mu\bar{\gamma})(n\gamma) \varphi_M d\sigma_M + \int_{\Omega_2} (\mu\bar{\gamma}) \psi_M d\omega_M \right]$$

où S_2 est la variété obtenue par la section de S par $\varrho = \lambda$. Après dérivations, il faut faire $\lambda = 0$.

Le système de Dirac. - Afin de donner un exemple pour illustrer la méthode employée dans ce qui précède, nous allons poser et résoudre le problème de CAUCHY pour le système que M. DIRAC a proposé pour la mécanique ondulatoire de l'électron magnétique :

$$(11) \quad \begin{cases} f_1 \equiv \frac{1}{ic} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + i \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{m_0 c}{h} \varphi_1 = 0, \\ f_2 \equiv \frac{1}{ic} \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} - i \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} + \frac{m_0 c}{h} \varphi_2 = 0, \\ f_3 \equiv \frac{1}{ic} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + i \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{m_0 c}{h} \varphi_3 = 0, \\ f_4 \equiv \frac{1}{ic} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{m_0 c}{h} \varphi_4 = 0, \end{cases}$$

$\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ étant le demivecteur de l'onde polarisée, m_0 la masse de l'électron, h la constante de PLANCK, c la vitesse de la lumière.

Ce système jouit de la propriété que les combinaisons linéaires

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{ic} \frac{\partial f_3}{\partial t} + i \frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial y} + i \frac{\partial f_3}{\partial z} - \frac{m_0 c}{h} f_1 \equiv \hat{\Delta} \varphi_1 = 0, \\ \frac{1}{ic} \frac{\partial f_4}{\partial t} - i \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} - i \frac{\partial f_4}{\partial z} - \frac{m_0 c}{h} f_2 \equiv \hat{\Delta} \varphi_2 = 0, \\ \frac{1}{ic} \frac{\partial f_1}{\partial t} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - i \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{m_0 c}{h} f_3 \equiv \hat{\Delta} \varphi_3 = 0, \\ \frac{1}{ic} \frac{\partial f_2}{\partial t} - i \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{m_0 c}{h} f_4 \equiv \hat{\Delta} \varphi_4 = 0, \end{cases}$$

où
(13)

$$\hat{\Delta} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m_0 c^2}{h^2}.$$

Posons

$$\varphi_i = \Phi_i e^{-\frac{m_0 c i}{h} u}$$

u étant une variable auxiliaire (réelle).

Le système (11) se ramènera à l'aide des opérateurs (12) à l'équation des ondes dans l'espace à cinq dimensions

$$\hat{\Delta} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} = 0.$$

C'est ce qui nous a suggéré l'idée de déduire la solution du problème de

CAUCHY pour ce système de celle que nous avons donnée dans la première partie de ce travail, pour les systèmes conduisant à l'équation des ondes.

Par le changement de fonctions et par l'introduction de la nouvelle variable u , nous sommes arrivés au cas des systèmes à un nombre impair de variables.

4. - Soit donc un système de la forme

$$(14) \quad \sum_k \gamma^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - i\alpha \gamma^0 \varphi = \psi$$

où $j, h = 1, 2, \dots, n = \text{pair}, k = 1, 2, \dots, 2m$.

Les coefficients γ_{jh}^k sont des constantes complexes, les fonctions ψ régulières et complexes, le cas échéant, α une constante complexe.

Au sujet des matrices γ^0 et γ^k supposons que l'on ait

$$\bar{\gamma}^h \gamma^k + \bar{\gamma}^k \gamma^h = 2\delta^{hk} e$$

avec

$$\delta^{hk} = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq k \\ \varepsilon_h & \text{si } h = k \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} h, k = 0, 1, \dots, 2m \\ e = \text{matrice unité} \end{array} \right).$$

Supposons en outre que

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \varepsilon_1 &= 1 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{2m} &= -1. \end{aligned}$$

Par le changement de fonctions

$$\Phi = \varphi e^{\alpha u} \quad \text{et} \quad \Psi = \psi e^{\alpha u},$$

le système devient

$$F\Phi \equiv \sum_k \gamma^k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - i\gamma^0 \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \Psi$$

et l'on a

$$\bar{F}F \equiv \sum \varepsilon_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

On est, par conséquent, dans le cas d'un système à un nombre impair de variables, se ramenant à l'équation des ondes.

On n'aura qu'à y appliquer la formule (7). Les données au contour contiendront la variable u . Au lieu du domaine Ω à $2m$ dimensions, nous aurons à considérer un domaine à $2m + 1$ dimensions, obtenu en prenant le cône caractéristique de sommet $P(a_1, \dots, a_{2m}, u_0)$ et d'équation

$$\bar{\varrho} = \varrho - (u - u_0)^2$$

et en le limitant à l'aide du cylindre ayant S comme directrice et les génératrices parallèles à l'axe ou . Dans le plan $u = u_0$, il nous faudra répéter les calculs et raisonnements faits au § 3, au sujet de l'application de la méthode de descente.

On aura :

$$\Phi_P = \left(\frac{-1}{\pi}\right)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right) \left[\int_{\bar{S}_0} \frac{(\mu\bar{\gamma})(n\gamma)}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} e^{au} \varphi_M d\bar{\sigma}_M + \int_{\bar{\Omega}} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} e^{au} \psi_M d\bar{\omega}_M \right].$$

Occupons-nous du terme concernant $\bar{\Omega}$, qu'on peut écrire

$$e^{au_0} \int_{\bar{\Omega}} \frac{(\mu\bar{\gamma}) e^{\alpha(u-u_0)}}{[\varrho - (u-u_0)^2]^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M = e^{au_0} \int_{\bar{\Omega}} \frac{(\mu\bar{\gamma})}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} e^{av} \psi_M d\bar{\omega}_M$$

en posant $u - u_0 = v$. (Il est supposé, bien entendu, que dans les $(\mu\bar{\gamma})$, $(n\gamma)$, il faut tenir compte aussi de l'apport de $-\gamma^0$.)

On aura donc à calculer une expression de la forme

$$\int_{\bar{\Omega}} \frac{(\mu\bar{\gamma}) e^{av}}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M = \int_{\bar{\Omega}_1} (\mu\bar{\gamma}) \psi_M d\omega_M \int_{-\sqrt{\varrho}}^{+\sqrt{\varrho}} \frac{e^{av} dv}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Dans $\bar{\Omega}_1$, qui ne contient pas le sommet P , on intégrera facilement en commençant par u :

$$\int_{\bar{\Omega}_1} \frac{(\mu\bar{\gamma}) e^{av}}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} \psi_M d\bar{\omega}_M = \int_{\bar{\Omega}_1} (\mu\bar{\gamma}) \psi_M d\omega_M \int_{-\sqrt{\varrho}}^{+\sqrt{\varrho}} \frac{e^{av} dv}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Or,

$$A \equiv \int_{-\sqrt{\varrho}}^{+\sqrt{\varrho}} \frac{e^{av} dv}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\sqrt{\varrho}}^{+\sqrt{\varrho}} \frac{v^{n-1} dv}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{p=m}^{\infty} \frac{\alpha^{2p}}{2^p p!} B\left(\frac{1}{2} - m, p + \frac{1}{2}\right) \varrho^{p-m}.$$

En effet, l'application de la formule (9) aux différents termes obtenus, montre que tous ceux qui contiennent ϱ à une puissance négative ou fractionnaire disparaissent.

Les symboles B sont les fonctions eulériennes de première espèce.

Il est aisé de montrer que

$$A = \frac{(-1)^m \pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)} \sum_{p=m}^{\infty} \frac{\alpha^{2p}}{2^{2p} p! (p-m)!} \varrho^{p-m}.$$

Quant à la légitimité du développement en série sous le signe \int , on remarque que celui-ci ne porte que sur un nombre fini de termes du développement, ou bien que la fonction e^{av} étant holomorphe, l'opération partie finie pouvait se faire à l'aide d'un lacet convenable décrit autour des points $-\sqrt{\varrho}$ et $+\sqrt{\varrho}$.

On aura de même :

$$B \equiv \int_{-\sqrt{\varrho}}^{+\sqrt{\varrho}} \frac{v e^{av} dv}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!} \int_{-\sqrt{\varrho}}^{+\sqrt{\varrho}} \frac{v^{n-1} dv}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(-1)^m \pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m-\frac{1}{2})} \sum_{p=m}^{\infty} \frac{\alpha^{2p-1} \cdot 2p}{2^{2p} p! (p-m)!} \varrho^{p-m}.$$

En introduisant maintenant la fonction de BESSEL,

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2^2 \cdot 1} + \dots + (-1)^p \frac{\xi^{2p}}{2^{2p} (p!)^2} + \dots,$$

on remarque que

$$1 + \frac{\alpha^2 \varrho}{2^2 \cdot 1} + \dots + \frac{\alpha^{2p} \varrho^p}{2^{2p} \cdot (p!)^2} + \dots = J_0(\alpha \sqrt{-\varrho})$$

et que, par conséquent,

$$J_0^m(\alpha \sqrt{-\varrho}) = \sum_{p=m}^{\infty} \frac{\alpha^{2p} \varrho^{p-m}}{2^{2p} p! (p-m)!}, \quad J_1^m(\alpha \sqrt{-\varrho}) = \sum_{p=m}^{\infty} \frac{\alpha^{2p} \cdot 2p}{2^{2p} \cdot p! (p-m)!} \varrho^{p-m}$$

où les indices supérieurs et inférieurs désignent des dérivations respectivement par rapport à ϱ et à α .

Cela étant, on a

$$A = \frac{(-1)^m \pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m-\frac{1}{2})} J_0^m(\alpha \sqrt{-\varrho}) \quad \text{et} \quad B = \frac{(-1)^m \pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m-\frac{1}{2})} J_1^m(\alpha \sqrt{-\varrho}).$$

Il nous reste à calculer les termes relatifs à $\bar{\Omega}_2$

$$e^{\alpha u_0} \int_{\bar{\Omega}_2} \frac{(\mu \bar{\gamma})}{\varrho^{-m+\frac{1}{2}}} e^{\alpha v} \psi_M d\bar{\omega}_M = e^{\alpha u_0} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m-1} e^{\alpha v} dv \int_{v^2}^{\lambda} \frac{(\mu \bar{\gamma}) J \psi_M}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} d\varrho$$

$$- e^{\alpha u_0} \bar{\gamma}_0 \int d\lambda_1 \dots d\lambda_{2m-1} v e^{\alpha v} dv \int_{v^2}^{\lambda} \frac{J \psi_M}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} d\varrho.$$

Une intégration par parties généralisée donnera :

$$\int_{v^2}^{\lambda} \frac{H d\varrho}{(\varrho - v^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^m}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (m-\frac{1}{2})} \int_{v^2}^{\lambda} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho - v^2}} \frac{d^m H}{d\varrho^m} + [R]_{v^2}^{\lambda}.$$

Cette fois-ci, il faudra faire attention à tous les termes de R , après avoir négligé les infiniment grands d'ordre fractionnaire

$$[R]_{e=\lambda} = - \sum_{p=1}^{p=m} \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2}\right) \dots \left(m - p + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(\lambda - u^2)^{m-p+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d^{p-1}H}{d\lambda^{p-1}}.$$

Par suite,

$$C = \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} e^{av} [R] dv = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^n \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\frac{d^{p-1}H}{d\lambda^{p-1}}}{\left(m - \frac{1}{2}\right) \dots \left(m - p + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} \frac{v^{n-1} dv}{(\lambda - v^2)^{m-p+\frac{1}{2}}}.$$

En vertu de ce qu'on a déjà constaté au sujet de A , les intégrales ainsi calculées ne contiendront que des puissances positives ou nulles de λ .

Donc, pour $\lambda \rightarrow 0$, in ne nous faudra tenir compte que des termes indépendants de λ .

Par conséquent

$$C = \sum_{p=1}^m \frac{\alpha^{2(m-p)} B\left(\frac{1}{2} - m + p, \frac{1}{2} + m - p\right)}{2(m-p)! \left(m - \frac{1}{2}\right) \dots \left(m - p + \frac{1}{2}\right)} \frac{d^{p-1}H}{d\lambda^{p-1}}$$

et puisque

$$B\left(\frac{1}{2} - m + p, \frac{1}{2} + m - p\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - m + p\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + m - p\right) = \frac{\pi}{\cos \pi(m-p)} = (-1)^{m-p} \pi,$$

$$C = \frac{(-1)^m \pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)} \sum_{p=1}^m \frac{\alpha^{2(m-p)} (-1)^p}{2^{2(m-p)} (m-p)!} \cdot \frac{d^{p-1}H}{d\lambda^{p-1}}.$$

D'une manière analogue, on a :

$$D = \int_{-\sqrt{\lambda}}^{+\sqrt{\lambda}} v e^{av} [R]_{e=\lambda} dv = \frac{(-1)^m \pi}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)} \sum_{p=1}^{m-1} \frac{\alpha^{2(m-p)-1} (-1)^p}{2^{2(m-p)-1} (m-p-1)!} \frac{d^{p-1}J}{d\lambda^{p-1}}.$$

Les mêmes calculs répétés pour les intégrales relatives à \bar{S}_0 nous conduisent à la formule finale, obtenue après nous être débarrassés des facteurs e^{au_0}

$$\begin{aligned} \pi^{m-1} \varphi_P &= \int_{\bar{S}_0} (\mu\bar{\gamma})(n\gamma) J_0^m(\alpha\sqrt{-\varrho}) \varphi_M d\sigma_M + \int_{\bar{\Omega}} (\mu\bar{\gamma}) J_0^m(\alpha\sqrt{-\varrho}) \psi_M d\omega_M \\ &\quad - \bar{\gamma}_0 \left[\int_{\bar{S}_0} (n\gamma) J_1^m(\alpha\sqrt{-\varrho}) \varphi_M d\sigma_M + \int_{\bar{\Omega}} J_1^m(\alpha\sqrt{-\varrho}) \psi_M d\omega_M \right] \\ &\quad - \sum_{p=1}^m \frac{\alpha^{2(m-p)} (-1)^p}{2^{2(m-p)} (m-p)!} \frac{d^p}{d\lambda_{(\lambda=0)}^p} \left[\int_{\bar{S}_2} (\mu\bar{\gamma})(n\gamma) \varphi_M d\sigma_M + \int_{\bar{\Omega}_2} (\mu\bar{\gamma}) \psi_M d\omega_M \right] \\ &\quad + \bar{\gamma}_0 \sum_{p=1}^{m-1} \frac{\alpha^{2(m-p)-1} (-1)^p}{2^{2(m-p)-1} (m-p-1)!} \frac{d^p}{d\lambda^p} \left[\int_{\bar{S}_2} (n\gamma) \varphi_M d\sigma_M + \int_{\bar{\Omega}_2} \psi_M d\omega_M \right]. \end{aligned}$$

5. - Ce résultat obtenu, revenons au système de M. DIRAC.

On aura :

$$m=2, \quad \psi \equiv 0, \quad a = \frac{m_0 c i}{h}.$$

La surface S qui porte les données de CAUCHY sera l'espace euclidien ordinaire et puisque

$$\varrho = c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2$$

S_0 sera la sphère

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2 t_0^2,$$

S_2 étant la couche sphérique comprise entre S_0 et

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2 t^2 - \lambda.$$

Quant aux matrices γ , il est aisé de voir que

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \frac{m_0 c}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_0 c}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_0 c}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_0 c}{h} \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{ic} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ic} \\ \frac{1}{ic} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{ic} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\gamma}^0 = \gamma^0, \quad \bar{\gamma}^1 = -\gamma^1, \quad \bar{\gamma}^2 = -\gamma^2, \quad \bar{\gamma}^3 = -\gamma^3, \quad \bar{\gamma}^4 = -\gamma^4.$$

Dans ces conditions, on peut écrire pour l'intégrale du problème de CAUCHY.

$$\pi \varphi_P = \int_{\check{S}_0} (\mu \bar{\gamma}) \gamma^4 J_0^2(a \sqrt{-\varrho}) \varphi_M d\sigma_M - \bar{\gamma}^0 \gamma^1 \int_{\check{S}_0} J_1^2(a \sqrt{-\varrho}) \varphi_M d\sigma_M$$

$$+ \frac{a^2}{4} \frac{d}{d\lambda} \int_{\check{S}_2} (\mu \bar{\gamma}) \gamma^4 \varphi_M d\sigma_M - \frac{d^2}{d\lambda^2} \int_{\check{S}_2} (\mu \bar{\gamma}) \gamma^4 \varphi_M d\sigma_M$$

$$- \bar{\gamma}^0 \gamma^4 \frac{a}{2} \frac{d}{d\lambda} \int_{\check{S}_2} \varphi_M d\sigma_M.$$

L'application de la méthode de M. HADAMARD à cette classe de systèmes conduit à des formules de résolution excessivement simples. Les intégrales ont été obtenues à l'aide seulement de quadratures.

La marche à suivre, que nous avons développée dans ce qui précède, s'impose toute seule dans bien des problèmes qui exigent des solutions consistant dans

plusieurs fonctions appelées à représenter des êtres physiques ayant même structure et même rôle.

Tout au moins, de tels problèmes semblent indiquer eux-mêmes la voie à suivre pour arriver à leur résolution, aussitôt que l'on connaît la manière dont ils ont été formulés physiquement.