ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BASILIO MANIÀ

Sulla curva di massima velocità finale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 3-4 (1934), p. 317-336
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_3-4_317_0>

SULLA CURVA DI MASSIMA VELOCITÀ FINALE (1)

di BASILIO MANIÀ (Pisa).

In un lavoro precedente (2) ho studiato il problema della curva di massima velocità finale e ho dimostrato l'esistenza dell'estremo assoluto ricorrendo al metodo delle successioni estremizzanti. In una Nota successiva (3) ho esteso la dimostrazione a una classe notevole di problemi di MAYER.

In tali lavori gli estremi di cui viene provata l'esistenza sono dati da curve continue e rettificabili, ma non vi si dimostra che le funzioni che le rappresentano ammettano derivata prima continua, e tanto meno che vi sia un'equazione di EULERO soddisfatta ovunque dalla curva estremante.

Riprendendo qui il problema della curva di massima velocità finale, ci proponiamo di dimostrare che, sotto certe condizioni già indicate nel primo lavoro citato, e che ora ripeteremo, esiste una curva C_0 di classe 2 di massima velocità finale fra tutte le curve continue e rettificabili congiungenti due punti fissi; sopra tale curva è sempre $\frac{dx}{ds} > 0$, essendo s la lunghezza dell'arco, e quindi, la si può rappresentare nella forma ordinaria

$$y = y(x);$$

infine, la funzione $y(x)$ soddisfa, insieme con la funzione che rappresenta il quadrato della velocità su C_0, a un sistema di due equazioni differenziali, una delle quali è l'equazione del problema e l'altra è una generalizzazione dell'equazione di EULERO relativa agli integrali semplici in forma ordinaria del Calcolo delle Variazioni.

Per giungere a questo risultato studieremo dapprima il problema in una classe di poligonali di un numero fisso n di lati e sulle quali il coefficiente angolare della tangente resta, in valore assoluto, sempre inferiore a un numero fisso H. Faremo poi tendere all'infinito successivamente n e H, e determineremo con questo processo la curva C_0.

---

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) *Esistenza dell'estremo assoluto in un classico problema di Mayer.* Annali della Scuola Normale Superiore, Serie II, Vol. 2 (1933), fasc. 4, pp. 343-354.

(3) *Sul problema di Mayer.* Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei, Serie VI, Vol. 18 (1933), fasc. 9, pp. 358-365.

Il metodo che seguiremo è, salvo alcune modificazioni, quello applicato da HANS LEWY [4] allo studio dei problemi liberi del Calcolo delle Variazioni relativi agli integrali semplici in forma ordinaria, che si riallaccia a lavori precedenti di LEBESGUE [5], FUBINI [6], COURANT [7].

1. - Ricordiamo alcuni risultati già stabiliti nel mio lavoro citato sul problema della curva di massima velocità finale.

Sia π un piano verticale e in esso sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y) con l'asse delle x orizzontale e l'asse delle y orientato verticalmente verso il basso; sieno P_1, P_2 due punti di π, il primo dei quali coincida con l'origine delle coordinate.

Considerata la classe $\mathcal{K}$ delle curve continue e rettificabili di π

$$\mathcal{C}: \quad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad (0 \leq s \leq L) \quad [8],$$

congiungenti i due punti P_1, P_2, e per le quali l'equazione

$$u' = 2gy' - 2R(\sqrt{u})\sqrt{x'^2 + y'^2} \tag{1}$$

ammette in quasi-tutto $(0, L)$ una soluzione $u = u(s)$ assolutamente continua e non negativa con $u(0) = u_0$, essendo u_0 un numero non negativo fissato, il problema della curva di massima velocità finale si riduce a determinare una curva della classe $\mathcal{K}$ per la quale il valore finale $u(L)$ della soluzione $u = u(s)$ della (1) ad essa corrispondente sia maggiore o uguale del valore analogo corrispondente a una qualunque altra curva di $\mathcal{K}$, supposto che u_0 sia uguale al quadrato della velocità iniziale che risulta assegnata nel problema.

Nelle notazioni poste $u(s)$ rappresenta il quadrato della velocità v lungo la curva $\mathcal{C}$ di un punto mobile sopra la curva, per l'azione della gravità, in un mezzo resistente, il quale si oppone al moto con una forza di intensità $R(v)$ funzione monotona non decrescente di v, finita e continua insieme con la sua derivata prima, e tale che sia $R(v) = 0$ per $v = 0$ e soltanto per questo valore di v. Infine, con g si indica l'accelerazione di gravità.

---

[4] H. LEWY: *Über die Methode der Differenzengleichungen zur Lösung von Variations- und Randwertproblemen.* Math. Ann., Bd. 98 (1928), pp. 107-124.

[5] H. LEBESGUE: *Intégrale, longuer, aire.* Ann. di Mat., Vol. 7 (1902), pp. 231-359.

[6] G. FUBINI: *Di un metodo per l'integrazione e lo studio delle equazioni alle derivate parziali.* Rend. Circ. Mat. di Palermo, Tomo XVII (1903), pp. 222-235; *Il problema di Dirichlet considerato come limite di un ordinario problema di minimo.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Serie V, Vol. 16 (1907), pp. 162-167.

[7] R. COURANT: *Über direkten Methoden bei Variations- und Randwertproblemen.* Jahresb. der Deutschen Mathematiker Ver. Bd. 34 (1926), pp. 90-117; *Über die Theorie der linearen partiellen Differenzengleichungen.* Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen (1925), pp. 98-109.

[8] Qui e nel seguito indichiamo con s la lunghezza dell'arco di $\mathcal{C}$, e con L la lunghezza dell'intera curva.

Detta $\bar{v}$ la velocità finale di un punto materiale che partendo da P_1 con la velocità iniziale $v_0 = \sqrt{u_0}$ assegnata, sale verticalmente fino ad avere velocità nulla in un punto Q e poi discende verticalmente fino al livello del punto P_2, supposto che questo non sia situato al disopra di Q, detto I il limite superiore di $u(L)$ nella classe $\mathcal{K}$, si ha in ogni caso

$$I \geqslant \bar{v}^2.$$

Se il punto P_2 è situato al disopra del punto Q la classe $\mathcal{K}$ risulta vuota e il problema proposto non ha più significato. Se P_2 non è situato al disopra del punto Q e la retta P_1P_2 coincide con l'asse delle y la curva di massima velocità finale è data dal segmento congiungente i punti P_1 e P_2. Supposto che non si verifichi nessuna di queste due circostanze, si distinguono due casi a seconda che

$$I = \bar{v}^2 \quad \text{oppure} \quad I > \bar{v}^2.$$

Nel primo caso la curva di massima velocità finale è data da una spezzata di tre lati: il primo verticale da P_1 a Q, il secondo orizzontale da Q a un punto R avente la stessa ascissa di P_2, e il terzo da R a P_2. Questo caso si verifica certamente se $u_0 = 0$ oppure se il punto P_2 appartiene alla retta orizzontale passante per Q.

Quando si verifica il caso ora indicato la soluzione del problema ha un significato puramente analitico poichè la velocità del punto materiale mobile risulta nulla sul lato orizzontale QR.

Nell'ultimo caso, che è quello che considereremo, esiste una soluzione del problema proposto, data da una curva continua e rettificabile sopra la quale si ha sempre $u(s) > 0$ e quasi dappertutto $x'(s) \geqslant 0$. Noi non supporremo l'esistenza di tale soluzione che risulterà dal seguito, dobbiamo però premettere ancora le seguenti osservazioni.

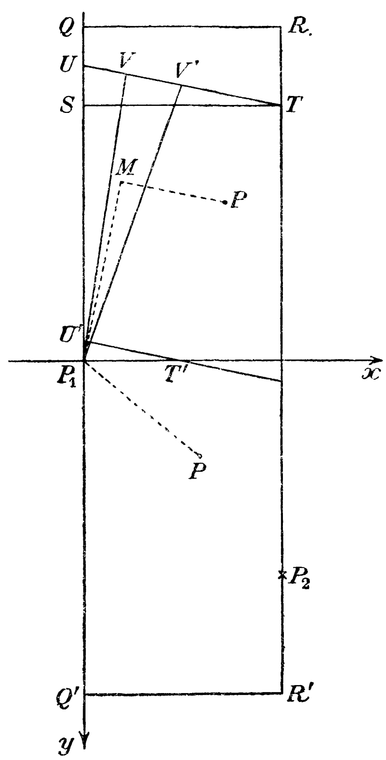

Fig. 1.

Le curve della classe $\mathcal{K}$ non hanno nessun punto al disopra della retta QR, e si può inoltre determinare una retta orizzontale $Q'R'$ (vedi figura) tale che tutte le curve della classe $\mathcal{K}$ sieno situate completamente al disopra di essa ([9]). Condotte le rette verticali passanti rispettivamente per P_1 e per P_2, queste, in-

([9]) Vedi loc. cit. nella nota ([2]).

sieme con QR e $Q'R'$, determinano un rettangolo, tale che nello studio del problema proposto ci si può limitare a considerare le curve della classe $\mathfrak{K}$ completamente appartenenti ad esso.

Poichè è $I > \bar{v}^2$, si può fissare sopra P_1Q un punto S, abbastanza vicino a Q, e sopra P_2R un punto T vicino ad R, tali che il segmento ST sia orizzontale e il valore finale $u(L)$ corrispondente a una qualunque curva della classe $\mathfrak{K}$ avente qualche punto su tale segmento sia inferiore a I di una quantità positiva costante.

Detto U il punto di mezzo di SQ conduciamo il segmento UT e su di esso fissiamo due punti V, V', disposti nell'ordine da U a T, abbastanza vicini a U affinchè l'equazione (1) ammetta una soluzione $u(s)$, con $u(0)=u_0$, sempre positiva, corrispondentemente a ogni segmento P_1P con l'estremo P appartenente al triangolo UP_1V'. Sia poi $U'T'$ un segmento parallelo a UT, con gli estremi U' e T' rispettivamente su P_1Q e sul segmento dell'asse delle x interno al rettangolo determinato sopra, abbastanza vicini a P_1 affinchè anche i segmenti P_1P con l'estremo P appartenente al triangolo $P_1U'T'$ soddisfino alla condizione indicata or ora.

Indichiamo con A la parte del rettangolo considerato che è limitata superiormente dal segmento UT e per ogni punto P di A appartenente al triangolo P_1UV' o situato sotto alla retta $U'T'$ consideriamo il segmento P_1P e la corrispondente soluzione della (1) con $u(0)=u_0$. Per i punti rimanenti di A consideriamo le spezzate di due lati P_1MP col lato MP parallelo a UT ed M appartenente al triangolo P_1VV', e anche per queste spezzate consideriamo le corrispondenti soluzioni dell'equazione (1) con $u(0)=u_0$.

Il limite inferiore dei valori di tutte queste funzioni $u(s)$ è positivo: sia $\bar{u}$ la metà di esso.

Indichiamo poi con H_0 un numero positivo maggiore dei moduli dei coefficienti angolari di P_1P_2, P_1V, UT, e con n_0 un numero intero positivo tale che dividendo l'intervallo dell'asse delle x interno ad A in n_0 parti uguali, ciascuna di queste abbia una lunghezza minore della proiezione ortogonale sull'asse delle x del segmento di $U'T'$ che ha gli estremi sulle rette P_1V e P_1V'.

Dalle osservazioni fatte segue evidentemente che per risolvere il problema della curva di massima velocità finale basta limitarsi a considerare la sottoclasse $\bar{\mathfrak{K}}$ delle curve di $\mathfrak{K}$ che appartengono ad A, o anche soltanto le curve di $\mathfrak{K}$ che appartengono ad A e per le quali è sempre $u(s) \geqslant 2\bar{u}$. Infatti, se sopra una curva $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{K}$ appartenente ad A non è sempre $u(s) \geqslant 2\bar{u}$, possiamo sostituire l'arco di C che ha il primo estremo in P_1 e il secondo nell'ultimo punto di $\mathfrak{C}$ nel quale $u(s) \leqslant 2\bar{u}$ con una delle spezzate considerate sopra, e ne risulta un incremento non negativo per $u(L)$.

Infine, poichè risolveremo il problema proposto mediante successive approssimazioni, ci occorre il seguente

Lemma. - *Sia* $\varphi(x, y, x', y', u)$ *una funzione finita e continua insieme con la sua derivata* $\varphi_u(x, y, x', y', u)$ *per* (x, y) *appartenente a un campo* A *limitato e chiuso,* x', y', *numeri finiti qualunque non entrambi nulli e* u *appartenente a un intervallo* (a, b) *finito o infinito;*

sia

$$\mathcal{C}_0: \quad x = x_0(s), \qquad y = y_0(s), \qquad (0 \leq s \leq L_0),$$

una curva continua e rettificabile, appartenente al campo A, *per la quale l'equazione*

$$u' = \varphi(x, y, x', y', u) \tag{1*}$$

ammetta una soluzione assolutamente continua $u_0(s)$ *nell'intervallo* $(0, L_0)$, *con* $u_0(0) = u_0$ *e* $a < u_0(s) < b$ *in tutto l'intervallo* $(0, L_0)$;

sia $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$ *una successione di curve continue e rettificabili del campo* A *convergenti uniformemente alla curva* $\mathcal{C}_0$ *e tali che le loro lunghezze* $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ *convergano alla lunghezza* L_0 *di* $\mathcal{C}_0$;

allora, esiste un intero positivo $\bar{n}$ *tale che per* $n \geq \bar{n}$ *la* (1*) *corrispondente a* $\mathcal{C}_n$ *ammette una soluzione* $u_n(s)$ *assolutamente continua nell'intervallo* $(0, L_n)$ *con* $u_n(0) = u_0$, *e la successione delle* $u_n(s)$ *converge uniformemente a* $u_0(s)$.

I valori di $u_0(s)$ appartengono a un intervallo (a', b') tutto interno ad (a, b), e quindi possiamo fissare un numero $\delta > 0$ tale che l'intervallo $(a' - \delta, b' + \delta)$ appartenga ad (a, b). Definiamo poi una funzione $\varphi_1(x, y, x', y', u)$ ponendo

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x, y, x', y', u) = \varphi(x, y, x', y', u) && \text{per } a' - \delta \leq u \leq b' + \delta,\\
&\varphi_1(x, y, x', y', u) = \varphi(x, y, x', y', a' - \delta) && \text{per } u < a' - \delta,\\
&\varphi_1(x, y, x', y', u) = \varphi(x, y, x', y', b' + \delta) && \text{per } u > b' + \delta.
\end{aligned}$$

Per ogni curva continua e rettificabile

$$\mathcal{C}: \quad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad (0 \leq s \leq L),$$

del campo A l'equazione

$$u' = \varphi_1(x, y, x', y', u) \tag{1**}$$

ammette un'unica soluzione $u = \bar{u}(s)$ assolutamente continua nell'intervallo $(0, L)$ con $\bar{u}(0) = u_0$ ([10]).

Ora, se la proposizione enunciata non fosse vera, si potrebbe estrarre dalla successione $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$ una successione parziale soddisfacente a tutte le condizioni dell'enunciato e tale che su ogni curva $\mathcal{C}_n$ di essa o non esisterebbe

---

([10]) Vedi, per esempio, CARATHÉODORY: *Vorlesungen über reelle Funktionen* (1927), p. 672 e p. 675.

in tutto l'intervallo $(0, L_n)$ la soluzione $u=u_n(s)$ della (1^*) con $u_n(0)=u_0$, oppure per qualche valore di s si avrebbe

$$|u_n(s)-u_0(s)|\geqslant \varepsilon,$$

essendo ε un numero positivo costante.

Per semplicità di scrittura indichiamo con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2,\dots, \mathcal{C}_n,\dots$ anche la successione parziale, e sia $\bar{u}_n(s)$ la soluzione della (1^{**}), con $\bar{u}_n(0)=u_0$, corrispondente alla curva $\mathcal{C}_n$. Le funzioni $\bar{u}_n(s)$ sono tutte egualmente limitate e ugualmente continue e quindi ammettono almeno una funzione di accumulazione $\bar{u}_0(s)$ per la quale si deve avere

$$\bar{u}_0(s)=u_0+\int_0^1 \varphi_1(x_0, y_0, x_0', y_0', \bar{u}_0)ds,$$

e possiamo supporre che le $\bar{u}_n(s)$ convergano uniformemente a $\bar{u}_0(s)$.

Dalla definizione della funzione $\varphi_1(x, y, x', y', u)$ e dal teorema di unicità per le soluzioni delle equazioni differenziali già ricordato si ha $\bar{u}_0(s)\equiv u_0(s)$.

Poichè i valori di $u_0(s)$ appartengono tutti ad (a', b'), da un certo indice n in poi i valori delle $\bar{u}_n(s)$ appartengono ad $(a'-\delta, b'+\delta)$, e quindi le $\bar{u}_n(s)$ sono anche soluzioni della (1^*) con $\bar{u}(0)=u_0$. Di qua e dal fatto che le $\bar{u}_n(s)$ convergono uniformemente a $u_0(s)$ segue un assurdo che dimostra il lemma enunciato.

2. - Se un arco γ di una curva della classe $\mathcal{K}$ si può rappresentare nella forma ordinaria

$$y=y(x), \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

con $y(x)$ funzione assolutamente continua di x, per γ l'equazione (1) è equivalente all'equazione

$$u'=2gy'-2R(\sqrt{u})\sqrt{1+y'^2} \tag{2}$$

nella quale gli apici indicano derivazione rispetto a x.

Osservato ciò, poniamo per semplicità di scrittura $P_2\equiv(1, c)$. Fissiamo quindi un numero $H\geqslant H_0$ e un intero $n\geqslant n_0$ della forma $n=2^m$, e, diviso l'intervallo $(0, 1)$ in n parti uguali mediante i punti $x_0=0, x_1,\dots, x_n=1$, indichiamo con $\mathcal{S}$ la classe delle poligonali di n lati appartenenti a $\bar{\mathcal{K}}$, con gli estremi in P_1, P_2 e i vertici

$$(x_i, y_i) \qquad (i=0, 1,\dots, n),$$

sulle quali è sempre

$$|n(y_i-y_{i-1})|\leqslant H \qquad (i=1,\dots, n),$$

e la soluzione $u(s)$ della (1) è sempre non minore di $\bar{u}$.

La classe $\mathcal{S}$ non è vuota poichè, per quanto abbiamo detto al numero precedente esiste o una poligonale di un solo lato o una poligonale di due lati congiungente i punti P_1 e P_2, per la quale la (1) ammette una soluzione $u(s)$ con $u(0)=u_0$ e $u(s)\geqslant 2\bar{u}$, e i cui lati hanno un coefficiente angolare in valore assoluto non maggiore di H_0; e se la poligonale ora indicata ha due lati, essa può essere scelta in modo che l'ascissa del secondo vertice sia uno dei punti di divisione dell'intervallo $(0, 1)$ in n parti uguali.

Il valore finale di u sopra una poligonale di $\mathfrak{F}$ è una funzione continua delle ordinate $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ dei vertici diversi dagli estremi, e poichè $\mathfrak{F}$ è una classe completa, cioè contenente tutte le sue curve di accumulazione, esiste una poligonale π_n di $\mathfrak{F}$ sulla quale il valore finale di u è massimo. Sopra la poligonale π_n deve essere sempre $u > \bar{u}$, poichè su ciascun lato di π_n il minimo e il massimo di u sono assunti negli estremi, e se in qualche vertice di π_n fosse $u = \bar{u}$, l'arco iniziale di π_n che va da P_1 a questo vertice potrebbe essere sostituito da una delle poligonali di uno o due lati indicate al n.° 1 e sulle quali è sempre $u \geqslant 2\bar{u}$. In questo modo non si uscirebbe dalla classe $\mathfrak{F}$ e si otterrebbe una poligonale sulla quale il valore di u nel punto P_2 risulterebbe maggiore del valore analogo relativo a π_n e ciò è assurdo.

Il valore finale di u sopra la poligonale π_n si può scrivere

$$u(L) = u_0 + \sum_{t=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi[n(y_i - y_{i-1}), u]\,dx, \tag{3}$$

avendo posto

$$\varphi(y', u) = 2gy' - 2R(\sqrt{u})\sqrt{1+y'^2}.$$

Fissato un intero i qualunque maggiore di 0 e minore di n, se variando in un intorno sufficientemente piccolo l'ordinata y_i del vertice (x_i, y_i) di π_n si ottengono ancora delle poligonali di $\mathfrak{F}$, il valore di u calcolato sopra π_n nel vertice (x_{i+1}, y_{i+1}) deve essere maggiore o uguale dei valori analoghi relativi alle poligonali ora indicate, e quindi, per la (3), si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi[n(y_i - y_{i-1}), u]\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi[n(y_{i+1} - y_i), u]\,dx\right\} = 0,$$

cioè

$$\begin{aligned} n\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{y'}[n(y_i - y_{i-1}), u]\,dx - n\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi[n(y_{i+1} - y_i), u]\,dx + \\ + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_u[n(y_i - y_{i-1}), u]\frac{\partial u}{\partial y_i}\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_u[n(y_{i+1} - y_i), u]\frac{\partial u}{\partial y_i}\,dx = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Se non si possono dare ad y_i che delle variazioni positive sufficientemente piccole senza uscire dalla classe $\mathfrak{F}$, nella (4) il segno di uguaglianza va sostituito col segno $\leqslant$; se, invece, non si possono dare ad y_i che delle variazioni negative sufficientemente piccole in valore assoluto, nella (4) il segno di uguaglianza deve essere sostituito dal segno $\geqslant$.

3. - A questo punto è necessario valutare le derivate $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ che compaiono sotto il segno di integrale nel terzo e nel quarto addendo della (4).

La derivata che compare nel terzo addendo è la soluzione dell'equazione integrale

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}=n\int_{x_{i-1}}^{x}\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),u]dx+\int_{x_{i-1}}^{x}\varphi_u[n(y_i-y_{i-1}),u]\frac{\partial u}{\partial y_i}dx. \tag{5}$$

Derivando rispetto a x e applicando la formula risolutiva per le equazioni differenziali lineari si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}=n\left(\exp\int_{x_{i-1}}^{x}\varphi_u[n(y_i-y_{i-1}),u]dx\right)\int_{x_{i-1}}^{x}\left\{\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),u]\exp\left(-\int_{x_{i-1}}^{x}\varphi_u[n(y_i-y_{i-1}),u]dx\right)\right\}dx.$$

Detto Φ un limite superiore per i valori di u sulle curve della classe $\overline{\mathfrak{K}}$ (alla quale appartengono le poligonali di $\mathfrak{P}$), sia M un numero maggiore del massimo modulo di $\varphi_{y'}(y',u)$ e $\varphi_u(y',u)$ per $|y'|\leqslant H$ e $\bar{u}\leqslant u\leqslant\Phi$. Allora si ha

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right|\leqslant Me^{2M} \tag{6}$$

e quindi

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}-n\int_{x_{i-1}}^{x}\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),u]dx\right|\leqslant\frac{M^2e^{2M}}{n}. \tag{7}$$

Per valutare la derivata $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ che compare nel quarto integrale della (4), osserviamo che sul lato $(i+1)$-mo di π_n è

$$u=u(x_i)+\int_{x_i}^{x}\varphi[n(y_{i+1}-y_i),u]dx, \tag{8}$$

avendo indicato con $u(x_i)$ il valore di u nel vertice (x_i, y_i), e quindi essendo $\frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i}$ data dalla (5) calcolata per $x=x_i$.

Dalla (8) si ha

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}=\frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i}-n\int_{x_i}^{x}\varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),u]dx+\int_{x_i}^{x}\varphi_u[n(y_{i+1}-y_i),u]\frac{\partial u}{\partial y_i}dx. \tag{9}$$

Derivando rispetto a x e applicando nuovamente la formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}=\left(\exp\int_{x_i}^{x}\varphi_u[n(y_{i+1}-y_i),u]dx\right)\left[\frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i}-\right.$$
$$\left.-n\int_{x_i}^{x}\left\{\varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),u]\exp\left(-\int_{x_i}^{x}\varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),u]dx\right)\right\}dx\right],$$

da cui segue
$$\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right| \leqslant 2Me^{3M},$$

e per la (9)

(10) $$\left|\frac{\partial u}{\partial y_i}-\frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i}+n\int_{x_i}^{x}\varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u]dx\right| \leqslant \frac{2M^2e^{3M}}{n}.$$

4. - Dalle disuguaglianze (7) e (10) si ha che la (4) si può scrivere

(4*) $$\begin{aligned} &n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),\, u]dx - n\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u]dx + \\ &\quad + n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{\varphi_u[n(y_i-y_{i-1}),\, u]\int_{x_{i-1}}^{x}\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),\, u]dx\right\}dx - \\ &\quad - n\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left\{\varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u]\int_{x_i}^{x}\varphi_u[n(y_{i+1}-y_i),\, u]dx\right\}dx + \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_u[n(y_{i+1}-y_i),\, u]\frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i}dx + \frac{3\vartheta M^3e^{3M}}{n^2} = 0, \end{aligned}$$

essendo $|\vartheta|<1$, ed essendo per $\frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i}$ valide la (6) e la (7).

Dalla (4*) segue ancora, supposto $M>1$,

(4**) $$n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),\, u]dx - n\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u]dx + \frac{6\bar\vartheta M^3e^{3M}}{n} = 0$$

con $|\bar\vartheta|<1$.

Applicando il teorema della media del calcolo integrale si ha
$$\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),\, u^{(i)}] - \varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u^{(i+1)}] + \frac{6\bar\vartheta M^3e^{3M}}{n} = 0,$$

essendo $u^{(i)}$ un valore di u sul lato i-esimo di π_n e $u^{(i+1)}$ un valore di u sul lato $(i+1)$-esimo di π_n.

L'equazione ottenuta si può scrivere anche
$$\begin{aligned} &\varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}),\, u^{(i)}] - \varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u^{(i)}] + \varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u^{(i)}] - \\ &\qquad - \varphi_{y'}[n(y_{i+1}-y_i),\, u^{(i+1)}] + \frac{6\bar\vartheta M^3e^{3M}}{n} = 0, \end{aligned}$$

e applicando il teorema del valor medio del calcolo differenziale si ha
$$\begin{aligned} &[n(y_i-y_{i-1}) - n(y_{i+1}-y_i)]\varphi_{y'y'}(\bar y',\, u^{(i)}) + \\ &\qquad + (u^{(i)}-u^{(i+1)})\varphi_{y'u}[n(y_{i+1}-y_i),\, \bar u] + \frac{6\bar\vartheta M^3e^{3M}}{n} = 0, \end{aligned}$$

dove $\bar{y}'$ rappresenta un valore compreso fra $n(y_i - y_{i-1})$ ed $n(y_{i+1} - y_i)$ e $\bar{u}$ rappresenta un valore fra $u^{(i)}$ e $u^{(i+1)}$.

Se il numero M è stato scelto anche maggiore del massimo modulo di $\varphi(y', u)$ e di $\varphi_{y'u}(y', u)$ per $|y'| \leq H$ e $\bar{u} \leq u \leq \Phi$, è

$$|(u^{(i)} - u^{(i+1)})\varphi_{y'u}[n(y_{i+1} - y_i), \bar{u}]| \leq \frac{2M^2}{n} < \frac{2M^3 e^{3M}}{n},$$

e quindi

$$[n(y_i - y_{i-1}) - n(y_{i+1} - y_i)]\varphi_{y'y'}[\bar{y}', u^{(i)}] + \frac{8\vartheta^* M^3 e^{3M}}{n} = 0 \tag{11}$$

con $|\vartheta^*| < 1$.

Dalla (11), essendo $\varphi_{y'y'}[\bar{y}', u^{(i)}] < 0$, si ha che *se il vertice (x_i, y_i) della poligonale π_n è interno al campo A e tale che i coefficienti angolari dei due lati di π_n ad esso adiacenti sieno inferiori in valore assoluto ad H, e quindi ad y_i si possono dare delle variazioni sufficientemente piccole di segno arbitrario senza uscire dalla classe $\mathfrak{F}$, il rapporto incrementale di questi coefficienti angolari*

$$n[n(y_{i+1} - y_i) - n(y_i - y_{i-1})]$$

è in valore assoluto minore di un numero positivo Λ dipendente soltanto da H.

Passiamo ora a studiare il caso che ad y_i non si possano dare delle variazioni di segno arbitrario senza uscire dalla classe $\mathfrak{F}$.

Se ad y_i si possono dare soltanto degli incrementi positivi, in luogo della (11) si può scrivere soltanto

$$n[n(y_i - y_{i-1}) - n(y_{i+1} - y_i)]\varphi_{y'y'}(\bar{y}', u^{(i)}) + 8\vartheta^* M^3 e^{3M} \leq 0, \tag{11*}$$

da cui, essendo $\varphi_{y'y'} < 0$, segue

$$n[n(y_i - y_{i-1}) - n(y_{i+1} - y_i)] \geq - \frac{8\vartheta^* M^3 e^{3M}}{\varphi_{y'y'}(\bar{y}', u^{(i)})}. \tag{12}$$

Ma nel caso che stiamo considerando, non essendo consentiti gli incrementi negativi di y_i non può essere contemporaneamente

$$n(y_i - y_{i-1}) > -H, \qquad n(y_{i+1} - y_i) < H,$$

e quindi si deve avere o

$$n(y_i - y_{i-1}) = -H,$$

oppure

$$n(y_{i+1} - y_i) = H,$$

donde segue

$$n[n(y_i - y_{i-1}) - n(y_{i+1} - y_i)] \leq 0. \tag{13}$$

Dalle (12) e (13) si può dedurre ancora che il rapporto incrementale

$$n[n(y_{i+1} - y_i) - n(y_i - y_{i-1})]$$

resta in valore assoluto minore di un numero dipendente soltanto da H.

Analogamente si ragiona se ad y_i si possono dare soltanto incrementi negativi senza uscire dalla classe $\mathfrak{S}$.

Infine, se non si possono dare a y_i nè incrementi positivi nè incrementi negativi senza uscire dalla classe $\mathfrak{S}$, deve essere

$$n(y_{i+1}-y_i)=n(y_i-y_{i-1})=\pm H,$$

e quindi la condizione indicata or ora è soddisfatta.

Se ne conclude che *se il vertice* (x_i, y_i) *della poligonale* π_n *è interno al campo* A, *il rapporto incrementale dei coefficienti angolari dei due lati di* π_n *adiacenti a quel vertice*

$$n[n(y_{i+1}-y_i)-n(y_i-y_{i-1})]$$

è in valore assoluto minore di un numero positivo Λ *dipendente soltanto da* H.

5. - Per quanto abbiamo detto al n.° 1, sopra le curve di $\overline{\mathfrak{K}}$ che hanno qualche punto sul lato UT di A il valore finale di u è inferiore di una quantità positiva costante al limite superiore dei valori finali di u nella classe $\overline{\mathfrak{K}}$. Ma, se H_0 ed n_0 sono stati scelti sufficientemente grandi, per ogni $H \geqslant H_0$ ed $n \geqslant n_0$ il massimo dei valori finali di u nella classe $\mathfrak{S}$ differisce in valore assoluto dal limite superiore di questi valori nella classe $\overline{\mathfrak{K}}$ per meno di un numero positivo prefissato ad arbitrio.

Ne segue che *se* H_0 *ed* n_0 *sono stati scelti sufficientemente grandi la poligonale* π_n *non può avere nessun vertice sui lati non verticali di* A, *e quindi la proposizione enunciata alla fine del numero precedente è vera per tutti i vertici di* π_n.

6. - Per il seguito è importante notare che il numero Λ della proposizione enunciata alla fine del n.° 4 dipende soltanto da H, e più precisamente ancora, soltanto dal massimo valore assoluto dei coefficienti angolari dei lati adiacenti al vertice (x_i, y_i).

7. - Ci proponiamo ora di dimostrare che *la successione delle poligonali* π_n *ammette almeno una curva di accumulazione* C_H *di classe* 1, *la quale appartiene alla classe* $\overline{\mathfrak{K}}$ *e dà il massimo dei valori finali di u nella classe delle curve di* $\overline{\mathfrak{K}}$ *rappresentabili nella forma ordinaria* $y=y(x)$ *con* $y(x)$ *assolutamente continua e* $y'(x)$, *dove esiste, in valore assoluto sempre non maggiore di* H.

Consideriamo per ogni poligonale π_n la funzione definita nell'intervallo $(0, 1)$ e che per ogni x di questo intervallo è uguale al coefficiente angolare della tangente a π_n nel punto che si proietta ortogonalmente sul punto di ascissa x

dell'intervallo (0, 1). Otteniamo così una funzione $f_n'(x)$ costante in ciascun intervallo $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$, e avente nei punti $x=\frac{i}{n}$ $(i=1,...., n-1)$ delle discontinuità di prima specie.

Le funzioni $f_n'(x)$ sono ugualmente oscillanti, cioè, assegnato ad arbitrio un numero $\varepsilon>0$, si possono determinare un numero $\delta>0$ e un intero $\overline{n}>n_0$, tali che per ogni $n \geqslant \overline{n}$ della forma 2^m e per ogni coppia di punti x', x'' dell'intervallo (0, 1) con

$$|x'-x''| \leqslant \delta$$

si abbia

$$|f_n'(x')-f_n'(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

Infatti, in un intervallo (x', x'') con $|x'-x''| \leqslant \delta$ vi sono al più $\delta n+2$ intervalli $\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ o parti di tali intervalli, e quindi, per la proposizione in fine del n.° 4, si ha

$$|f_n'(x')-f_n'(x'')| \leqslant (\delta n+1)\frac{A}{n}=\delta A+\frac{A}{n},$$

dove A dipende soltanto da H.

Quindi se

$$\delta<\frac{\varepsilon}{2A}, \quad \text{ed} \quad n>\frac{2A}{\varepsilon}$$

è

$$|f_n'(x')-f_n'(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

Dal fatto che le funzioni $f_n'(x)$ sono ugualmente oscillanti e dal fatto che è sempre $|f_n'(x)| \leqslant H$, segue, per un teorema di ARZELÀ, che l'insieme $\{f_n'(x)\}$ ammette almeno una funzione di accumulazione finita e continua.

Indicata con $f'(x)$ una tale funzione, si può estrarre dalla successione $\{f_n'(x)\}$ una successione parziale convergente uniformemente a $f'(x)$ e noi indicheremo, per semplicità di scrittura, con $f_n'(x)$ anche le funzioni di questa successione parziale.

L'equazione della poligonale π_n è

$$y=f_n(x)=\int_0^x f_n'(x)\,dx, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

e se poniamo

$$y=f(x)=\int_0^x f'(x)\,dx, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

la successione delle funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$.

Detta $u_n(x)$ la soluzione dell'equazione (2) con $u_n(0)=u_0$ relativa alla poligonale π_n, le funzioni $u_n(x)$ risultano ugualmente continue e ugualmente limitate, e quindi ammettono almeno una funzione di accumulazione $u(x)$ finita e continua nell'intervallo (0, 1), e possiamo supporre che le $u_n(x)$ convergano uniformemente a $u(x)$.

Essendo
$$u_n(x)=u_0+\int_0^x \varphi[f_n'(x),\, u_n(x)]dx, \qquad (0\leq x\leq 1),$$
è anche
$$u(x)=u_0+\int_0^x \varphi[f'(x),\, u(x)]dx, \qquad (0\leq x\leq 1),$$
e quindi per la curva
$$C_H:\quad y=f(x), \qquad (0\leq x\leq 1),$$
esiste una soluzione $u(x)$ dell'equazione (2) con $u(0)=u_0$ e $u(x)\geqq\bar{u}$.

Di più la curva C_H è di classe 1, ed è sempre $|f'(x)|\leq H$.

Notiamo ora che i valori finali $u_n(1)$ delle $u_n(x)$ formano una successione non decrescente la quale converge verso il valore finale $u(1)$ di $u(x)$. Inoltre, la successione $u_n(1)$ converge al limite superiore dei valori finali di $u(x)$ corrispondenti alle curve della classe $\overline{\mathfrak{K}}$ rappresentabili nella forma ordinaria $y=y(x)$ con $y(x)$ assolutamente continua e $y'(x)$, dove esiste, in valore assoluto non maggiore di H. Infatti, per quanto si è detto al n.° 1, questo limite superiore non cambia se ci limitiamo a considerare le sole curve soddisfacenti alle condizioni ora indicate e per le quali è sempre $u(x)\geqq 2\bar{u}$, e approssimando una tale curva $\overline{C}$ con delle poligonali inscritte $\bar{\pi}_n$, che corrispondono a una divisione dell'intervallo (0, 1) in n parti uguali, per n sufficientemente grande anche queste poligonali appartengono a $\overline{\mathfrak{K}}$ e la soluzione $u(x)$ della (2) ad esse corrispondente differisce dalla soluzione corrispondente a $\overline{C}$ per meno di un numero positivo ε fissato ad arbitrio. Ma, allora, per n sufficientemente grande le poligonali $\bar{\pi}_n$ appartengono alla classe $\mathfrak{F}$ che corrisponde a quel numero n e al valore H fissato, e perciò il valore finale di $u(x)$ su $\bar{\pi}_n$ è non maggiore del valore analogo su π_n, e questo perciò supera il valore finale di $u(x)$ relativo alla curva $\overline{C}$ diminuito di ε.

Essendo ε un numero positivo arbitrario, è dimostrato la convergenza dei valori $u_n(1)$ al limite superiore indicato, e di qua segue quanto abbiamo affermato al principio di questo numero.

8. - Fissiamo ora una successione di numeri positivi crescenti $H_1, H_2,\ldots, H_r,\ldots$ tendenti a $+\infty$ e consideriamo la corrispondente successione delle curve C_{H_1}, $C_{H_2},\ldots, C_{H_r},\ldots$ che, per semplicità, indicheremo con $C_1, C_2,\ldots, C_r,\ldots$

Sia
$$y=y_r(x), \qquad (0\leq x\leq 1),$$
l'equazione di C_r, e indichiamo con $y_r[s]$ la ordinata di un punto di C_r in funzione della lunghezza dell'arco. Poniamo inoltre
$$y_r'=\frac{dy_r}{dx}, \qquad \dot{y}_r=\frac{dy_r}{ds}, \qquad \dot{x}_r=\sqrt{1-\dot{y}_r^2}.$$

Dopo di ciò passiamo a dimostrare che le funzioni $\dot{y}_r$ sono ugualmente continue.

Se così non fosse, esisterebbe un numero positivo ε tale che per ogni $\delta > 0$ vi sarebbero infinite funzioni $\dot{y}_r$ per le quali si avrebbe

$$|\dot{y}_r[s'] - \dot{y}_r[s'']| \geqslant \varepsilon,$$

essendo s', s'' due numeri convenienti dell'intervallo $(0, L_r)$ tali che $|s' - s''| \leqslant \delta$. Allora, fissata una successione $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \ldots$ di numeri positivi decrescenti e tendenti a zero, sia r_1 il più piccolo intero positivo per il quale esiste un intervallo (s_1', s_1'') con $|s_1' - s_1''| \leqslant \delta_1$ tale che

$$|\dot{y}_{r_1}[s_1'] - \dot{y}_{r_1}[s_1'']| \geqslant \varepsilon,$$

e fra tutti gli intervalli soddisfacenti a questa condizione scegliamo quello di minima ampiezza per il quale s_1' è minimo. Sia r_2 il più piccolo intero $> r_1$ per il quale esiste un intervallo (s_2', s_2'') con $|s_2' - s_2''| \leqslant \delta_2$ e tale che

$$|\dot{y}_{r_2}[s_2'] - \dot{y}_{r_2}[s_2'']| \geqslant \varepsilon.$$

Così di seguito definiamo la successione $r_1 < r_2 < \ldots < r_p < \ldots$

Indicate con x_p', x_p'' le ascisse dei punti di C_{r_p} corrispondenti alle lunghezze s_p', s_p'' dell'arco, si ha

$$|y'_{r_p}(x_p') - y'_{r_p}(x_p'')| = \left| \frac{\dot{y}_{r_p}[s_p']}{\sqrt{1 - \dot{y}^2_{r_p}[s_p']}} - \frac{\dot{y}_{r_p}[s_p'']}{\sqrt{1 - \dot{y}^2_{r_p}[s_p'']}} \right| \geqslant |\dot{y}_{r_p}[s_p'] - \dot{y}_{r_p}[s_p'']|,$$

e quindi anche

(14) $$|y'_{r_p}(x_p') - y'_{r_p}(x_p'')| \geqslant \varepsilon$$

con

$$|x_p' - x_p''| \leqslant |s_p' - s_p''| \leqslant \delta_p.$$

Di qua segue che le coppie $y'_{r_p}(x_p')$, $y'_{r_p}(x_p'')$ devono essere formate (da un certo indice in poi) da numeri dello stesso segno e di modulo tendente a $+\infty$ per p tendente a $+\infty$, poichè nel caso contrario si potrebbero determinare una successione parziale della $C_{r_1}, C_{r_2}, \ldots, C_{r_p}, \ldots$ e degli intervalli contenuti negli intervalli (x_p', x_p'') per i quali varrebbero ancora le (14), e tali che in essi si avrebbe sempre $|y'_{r_p}(x)| < \Delta$ essendo Δ un numero positivo conveniente.

Ma le funzioni $y'_{r_p}(x)$ sono funzioni di accumulazione per le derivate $y'(x)$ calcolate sulle poligonali π_n corrispondenti a un valore $H = H_{r_p}$, e quindi, per ogni curva C_{r_p} della successione parziale indicata sopra, nell'intervallo (x_p', x_p'') le derivate $y'(x)$ calcolate sulle poligonali π_n da un certo indice n' in poi sono in valore assoluto minori di Δ. Allora, per quanto si è detto ai n.i 6 e 7, ad ogni numero positivo η si può far corrispondere un numero $\delta > 0$, *dipendente soltanto da* Δ, tale che per ogni $n \geqslant n''$, con n'' fissato convenientemente, l'oscillazione di $y'(x)$ calcolata su π_n in un intervallo parziale di (x_p', x_p'') avente ampiezza $\leqslant \delta$ sia minore di η. Ne viene che, per ogni $\eta > 0$ fissato, il numero $\delta > 0$ ora determinato, dipendente soltanto da Δ, soddisfa alla condizione enunciata anche per ciascuna funzione $y'_{r_p}(x)$ della successione parziale nell'intervallo (x_p', x_p''), cioè queste funzioni $y'_{r_p}(x)$ sono ugualmente continue nei rispettivi intervalli (x_p', x_p''). Ma ciò contraddice alle (14).

Dunque le coppie $y'_{r_p}(x_p')$, $y'_{r_p}(x_p'')$ sono formate da numeri che da un certo indice p in poi sono dello stesso segno e i cui valori assoluti tendono a $+\infty$ con p.

Ma allora

$$\lim_{p\to\infty} |\dot{y}_{r_p}[s_p'] - \dot{y}_{r_p}[s_p'']| = \lim_{p\to\infty} \left| \frac{y'_{r_p}(x')}{\sqrt{1+y'^2_{r_p}(x')}} - \frac{y'_{r_p}(x'')}{\sqrt{1+y'^2_{r_p}(x'')}} \right| = 0,$$

mentre per ipotesi

$$|\dot{y}_{r_p}[s_p'] - \dot{y}_{r_p}[s_p'']| \geqslant \varepsilon$$

per ogni p.

Se ne conclude che le funzioni $\dot{y}_{r_p}[s]$ sono ugualmente continue e quindi tali sono anche le funzioni $\dot{x}_{r_p}[s] = \sqrt{1-\dot{y}^2_{r_p}[s]}$.

Le curve C_r appartengono alla classe $\overline{\mathfrak{K}}$ e le soluzioni $u(x)$ della (2) con $u(0)=u_0$ ad esse corrispondenti soddisfano alla condizione $u(x) \geqslant \bar{u} > 0$, e quindi

$$u(1) = u(0) + \int_0^1 \{2gy' - 2R(\sqrt{u})\sqrt{1+y'^2}\}\, dx \leqslant u_0 + 2gc - 2R(\sqrt{\bar{u}})L_r$$

da cui

$$L_r \leqslant \frac{u_0 + 2gc}{R(\sqrt{\bar{u}})}.$$

Dunque le C_r hanno le lunghezze ugualmente limitate e perciò ammettono una curva di accumulazione $\mathcal{C}_\infty$ continua e rettificabile di classe 1, di cui indichiamo con

$$\mathcal{C}_\infty: \quad x = x[s], \qquad y = y[s], \qquad (0 \leqslant s \leqslant L)$$

la rappresentazione parametrica in funzione della lunghezza dell'arco.

Senza restrizioni di generalità possiamo supporre che sia $L_r \to L$, $\dot{x}_r[s] \to \dot{x}[s]$, $\dot{y}_r[s] \to \dot{y}[s]$, per $r \to +\infty$, essendo la convergenza uniforme.

Poichè

$$u_r(s) = u_0 + \int_0^s \{2g\dot{y}_r - 2R(\sqrt{u_r})\sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2}\}\, ds, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_r),$$

le funzioni $u_r(s)$ sono ugualmente limitate e ugualmente continue, e quindi ammettono una funzione di accumulazione finita e continua $u(s)$ per la quale

$$u(s) = u_0 + \int_0^s \{2g\dot{y} - 2R(\sqrt{u})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\}\, ds, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L),$$

e la curva $\mathcal{C}_\infty$ appartiene a $\overline{\mathfrak{K}}$.

Ricordando che nella ricerca della curva di massima velocità finale ci si può limitare a considerare le curve continue e rettificabili di $\overline{\mathfrak{K}}$ per le quali è sempre $\dot{x}[s] \geqslant 0$ [11] e $u(s) \geqslant \bar{u} > 0$, un ragionamento analogo a quello fatto in

[11] Vedi loc. cit. nella nota [2].

fine del numero precedente assicura che la curva $\mathcal{C}_\infty$ è una curva di massima velocità finale.

Risulta così dimostrato il

TEOREMA. - *Nell'ipotesi* $I > \bar{v}^2$ [12], *esiste nella classe delle curve continue e rettificabili congiungenti i due punti fissi* P_1, P_2 *almeno una curva di massima velocità finale*

$$\mathcal{C}_\infty:\quad x = x[s], \qquad y = y[s], \qquad (0 \leqslant s \leqslant L),$$

con $\dot{x}[s]$, $\dot{y}[s]$ *finite e continue e* $\dot{x}[s] \geqslant 0$ *nell'intervallo* $(0, L)$.

9. - Ci proponiamo ora di dimostrare che *se un arco* γ *della curva* $\mathcal{C}_\infty$ *del teorema precedente è rappresentabile nella forma ordinaria*

$$y = y(x), \qquad (x' \leqslant x \leqslant x''),$$

con $|y'(x)| < R$ *in tutto l'intervallo* (x', x''), *essendo* R *un numero positivo, si ha*

$$\int_{x'}^{x''} \varphi_{y'}[y'(x), u(x)]\varphi_u[y'(x), u(x)]dx = \varphi_{y'}[y'(x), u(x)]\Big|_{x'}^{x''}. \tag{15}$$

Per questo riprendiamo a considerare le curve C_H del n.° 7.

Se per un arco

$$\gamma:\quad y = y(x), \qquad (x' \leqslant x \leqslant x''),$$

di una tale curva è sempre $|y'(x)| < H$, considerata la successione delle poligonali π_n convergenti a C_H, la disuguaglianza $|y'(x)| < H$ risulta soddisfatta, da un certo indice n in poi, anche sugli archi di π_n proiettantisi ortogonalmente sull'intervallo (x', x''), e quindi per ogni vertice (x_i, y_i) di π_n appartenente a questo arco vale la (4*) del n.° 4.

Se i vertici di π_n appartenenti all'arco che si proietta sull'intervallo (x', x'') sono

$$(x_h, y_h), \quad (x_{h+1}, y_{h+1}), \ldots, \quad (x_k, y_k),$$

sommando le equazioni (4*) corrispondenti ad essi si ottiene

$$\begin{aligned} n\int_{x_{h-1}}^{x_h} \varphi_{y'}[n(y_h - y_{h-1}), u]dx - n\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{y'}[n(y_{k+1} - y_k), u]dx + \\ + n\int_{x_{h-1}}^{x_h} \left\{ \varphi_u[n(y_h - y_{h-1}), u] \int_{x_{h-1}}^{x} \varphi_{y'}[n(y_h - y_{h-1}), u]dx \right\} dx - \\ - n\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left\{ \varphi_u[n(y_{k+1} - y_k), u] \int_{x_k}^{x} \varphi_{y'}[n(y_{k+1} - y_k), u]dx \right\} dx + \\ + \sum_{i=h}^{i=k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_u[n(y_{i+1} - y_i), u] \frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i} dx + 3\sum \frac{\vartheta M^3 e^{3M}}{n^2} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

---

[12] Vedi n.° 1.

L'ultima somma qui scritta è formata al massimo da $k-h+1$ addendi, e poichè

$$\frac{k-h}{n} \leq x''-x',$$

si ha

$$3\sum \frac{\vartheta M^3 e^{3M}}{n^2} < \frac{3\vartheta' M^3(x''-x')e^{3M}}{n} + \frac{3\vartheta'' M e^{3M}}{n^2}$$

con $|\vartheta'|<1$ e $|\vartheta''|<1$.

La (16), passando al limite per $n \to +\infty$, dà

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=h}^{i=k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_u[n(y_{i+1}-y_i), u] \frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i} dx = \varphi_{y'}[y'(x''), u(x'')] - \varphi_{y'}[y'(x'), u(x')].$$

Tenendo conto della (7) del n.° 3, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=h}^{i=k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_u[n(y_{i+1}-y_i), u] \frac{\partial u(x_i)}{\partial y_i} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=h}^{i=k} n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \varphi_u[n(y_{i+1}-y_i), u] \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{y'}[n(y_i-y_{i-1}), u] dx \right\} dx =$$

$$= \int_{x'}^{x''} \varphi_u[y'(x), u(x)] \varphi_{y'}[y'(x), u(x)] dx,$$

e quindi l'arco γ di C_H soddisfa alla (15).

Consideriamo ora un arco γ della curva $\mathcal{C}_\infty$ determinata al n.° 8 rappresentabile nella forma ordinaria

$$\gamma: \quad y = y(x), \qquad (x' \leq x \leq x''),$$

con $|y'(x)| < R$ in tutto l'intervallo (x', x''), essendo R un numero positivo. Riprendiamo poi la successione delle curve $C_1, C_2, \ldots, C_r, \ldots$ convergenti a $\mathcal{C}_\infty$ considerata al numero precedente. Posto

$$C_r: \quad x = x_r[s], \qquad y = y_r[s], \qquad (0 \leq s \leq L_r),$$

indichiamo con γ_r l'arco di C_r corrispondente all'intervallo (s', s'') di $(0, L_r)$, essendo (s', s'') l'intervallo di $(0, L)$ a cui corrisponde γ.

Da un certo indice r in poi, in tutto l'intervallo (s', s'') è $\left|\frac{\dot y_r[s]}{\dot x_r[s]}\right| < R$ e quindi per l'arco γ_m vale la (15), che cambiando la variabile indipendente, si può scrivere

$$(15^*) \qquad \int_{s'}^{s''} \varphi_{y'}\left[\frac{\dot y_r[s]}{\dot x_r[s]}, u_r(s)\right] \varphi_u\left[\frac{\dot y_r[s]}{\dot x_r[s]}, u_r(s)\right] \dot x_r[s] ds = \varphi_{y'}\left[\frac{\dot y_r[s]}{\dot x_r[s]}, u_r(s)\right]\Bigg|_{s'}^{s''}.$$

Poichè $\dot{x}_r[s] \to \dot{x}[s]$, $\dot{y}_r[s] \to \dot{y}[s]$, $u_r(s) \to u(s)$, uniformemente nell'intervallo (s', s''), si ha

$$\int_{s'}^{s''} \varphi_{y'}\left[\frac{\dot{y}[s]}{\dot{x}[s]}, u(s)\right] \varphi_u\left[\frac{\dot{y}[s]}{\dot{x}[s]}, u(s)\right] \dot{x}(s) ds = \varphi_{y'}\left[\frac{\dot{y}[s]}{\dot{x}[s]}, u(s)\right]\Bigg|_{s'}^{s''},$$

e questa equazione, ritornando alla variabile indipendente x, coincide con la (15).

10. - Possiamo ancora dimostrare, ripetendo un'osservazione di HILBERT ([13]), che *l'arco γ del numero precedente è di classe 2, cioè ammette finita e continua anche la derivata seconda $y''(x)$ in tutto l'intervallo $(x'\ x'')$, e, se $R(v)$ ammette finite e continue le sue derivate fino a un ordine n, l'arco γ ammette finite e continue le derivate di $y(x)$ dei primi $n+1$ ordini.*

Infatti dalla (15) segue, con notazioni evidenti, per ogni x dell'intervallo (x', x''),

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi_{y'}(y' + \delta y', u + \delta u) - \varphi_{y'}(y', u)}{h} = \varphi_{y'}(y', u)\varphi_u(y', u),$$

da cui

$$\lim_{h \to 0}\left(\bar{\varphi}_{y'y'} \frac{\delta y'}{h} + \bar{\varphi}_{y'u} \frac{\delta u}{h}\right) = \varphi_{y'}(y', u)\varphi_u(y', u),$$

ed essendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta u}{h} = u', \quad \text{e} \quad \varphi_{y'y'}(y', u) < 0,$$

si ha

$$y'' = \lim_{h \to 0} \frac{\delta y'}{h} = \frac{\varphi_u \varphi_{y'} - \varphi_{y'u}\varphi}{\varphi_{y'y'}}.$$

Ricordando che

$$\varphi(y', u) = 2gy' - 2R(\sqrt{u})\sqrt{1 + y'^2}$$

ed eseguendo le sostituzioni si ottiene

$$y'' = \frac{gR'(\sqrt{u})(1 + y'^2)}{\sqrt{u}R(\sqrt{u})}. \tag{16}$$

Dalla (16) e dalla (2) segue immediatamente l'asserto.

11. - Dalla (16) si può dedurre che tutta la curva $\mathcal{C}_\infty$ indicata nel teorema del n.° 8 è rappresentabile nella forma ordinaria

$$y = y(x), \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

con $y'(x)$ limitata, e quindi che la (16) è soddisfatta sull'intera curva.

([13]) Vedi, per esempio, L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 96.

Per questo basta applicare il seguente teorema di TONELLI.

Se per ogni x soddisfacente alle condizioni $a<x<b$, la funzione $y=y(x)$:

1°) *è finita e continua insieme con le sue derivate $y'(x)$ e $y''(x)$;*

2°) *verifica la disuguaglianza*

$$|y''| \leq Q_1 y'^2 + Q_2,$$

dove Q_1 e Q_2 sono due costanti positive;

3°) *è limitata;*

allora la derivata $y'(x)$ resta anch'essa limitata ([14]).

Infatti vi è almeno un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di $\mathcal{C}_\infty$ nel quale la tangente alla curva non è parallela all'asse delle y, e quindi vi è un arco contenente $(\bar{x}, \bar{y})$ nel suo interno e rappresentabile nella forma ordinaria

$$y=y(x), \qquad (x' \leq x \leq x''),$$

sul quale la $y'(x)$ e sempre finita e continua. Considerato il massimo arco $\bar{\gamma}$ nel cui interno sono soddisfatte queste condizioni, nell'interno di esso vale la (16), e quindi è applicabile il teorema ora citato. Ne viene che su tutto l'arco $\bar{\gamma}$, gli estremi inclusi, la $y'(x)$ esiste limitata. Di qua e dal fatto che $\bar{\gamma}$ è il massimo arco soddisfacente alle condizioni poste, segue che $\bar{\gamma}$ coincide con $\mathcal{C}_\infty$.

Si ha perciò il

TEOREMA. - *La curva di massima velocità finale indicata nel teorema del n.° 8 è rappresentabile nella forma*

$$y=y(x), \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

con $y(x)$ finita e continua insieme con le sue derivate dei primi due ordini, e soddisfa, insieme con la funzione $u(x)$ ad essa corrispondente, alle due equazioni differenziali

$$\begin{cases} u'=2gy'-2R(\sqrt{u})\sqrt{1+y'^2}, \\ y''=\dfrac{gR'(\sqrt{u})(1+y'^2)}{\sqrt{u}R(\sqrt{u})}. \end{cases}$$

12. - Come applicazione dei risultati precedenti possiamo dimostrare un teorema di EULERO.

TEOREMA. - *Se la resistenza del mezzo è proporzionale alla velocità, la curva $\mathcal{C}_\infty$ di massima velocità finale coincide con la curva che descriverebbe un punto materiale libero sotto l'azione della gravità nel mezzo resistente* ([15]).

([14]) Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, p. 263.

([15]) Vedi EULERO: *Methodus inveniendi....*, p. 125; BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung* (1909), pp. 579-589.

Basta dimostrare che sulla curva di massima velocità finale la reazione delia curva è nulla. Ora tale reazione è data da

$$N = \frac{mv^2}{\varrho} - mg \cos \alpha \quad (^{16}),$$

essendo ϱ il raggio di curvatura ed α l'angolo che la direzione positiva della tangente alla curva forma con la direzione positiva dell'asse delle x. Di qua segue

$$N = \frac{mv^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{mg}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m[v^2y'' - g(1+y'^2)]}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sostituendo ad y'' l'espressione data dalla (16) e ricordando che $u = v^2$, si ha

$$N = \frac{mg[uR'(\sqrt{u}) - \sqrt{u}R(\sqrt{u})]}{\sqrt{u}R(\sqrt{u})(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{mg[vR'(v) - R(v)]}{R(v)(1+y^{2\prime})^{\frac{1}{2}}},$$

e se

$$R(v) = kv,$$

si vede che

$$N = 0,$$

e il teorema è dimostrato.

Osservazione. - La condizione che $R(v)$ sia proporzionale alla velocità è anche necessaria affinchè la curva di massima velocità finale abbia la proprietà dimostrata. Infatti deve essere

$$N = 0$$

e quindi

$$vR'(v) - R(v) = 0,$$

ed integrando questa equazione differenziale in $R(v)$ si ottiene $R(v) = kv$ con k costante.

---

(16) Vedi APPELL: *Traité de Mécanique Rationnelle*, I (1926), p. 459.