ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

MARIA CIBRARIO

# Intorno ad una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-ellittica

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 3, nº 3-4 (1934), p. 255-285

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_3-4_255_0>

# INTORNO AD UNA EQUAZIONE LINEARE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO MISTO IPERBOLICO-ELLITTICA

di MARIA CIBRARIO (Torino).

In un lavoro precedente ([1]) si sono classificati i tipi distinti ai quali si può ridurre, con opportuni cambiamenti di variabili, una equazione lineare alle derivate parziali di tipo misto; una delle equazioni trovate, che si era detta iperbolico-ellittica del secondo tipo, è la seguente:

$$xz_{xx}+z_{yy}=0, \tag{A}$$

che ci proponiamo qui di studiare ([2]). La (A) è di tipo iperbolico per $x<0$ e di tipo ellittico per $x>0$; l'asse $y$ costituisce la *curva parabolica* della (A).

Le caratteristiche della (A), reali per $x\leqslant 0$, sono le parabole:

$$(y-y_0)^2+4x=0, \tag{1}$$

di cui la parte corrispondente a $y>y_0$ costituisce la caratteristica di un sistema per il punto $(0, y_0)$, mentre la parte corrispondente a $y<y_0$ costituisce quella del secondo sistema per il punto $(0, y_0)$; esse hanno come inviluppo l'asse $y$, cioè la curva parabolica dell'equazione.

Nel semipiano $x\leqslant 0$ il cambiamento di variabili:

$$\xi=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}, \qquad \eta=y+2(-x)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

muta la (A) nella:

$$z_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}(z_\xi-z_\eta)=0, \tag{3}$$

che è l'equazione di EULERO-POISSON: $z_{\xi\eta}-\frac{\beta}{\xi-\eta}(z_\xi-z_\eta)=0$, per $\beta=-\frac{1}{2}$; la (3) nel lavoro citato sopra era detta ridotta iperbolica della (A). Però dalle

---

([1]) M. CIBRARIO: *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto.* Rendic. del R. Istituto Lombardo, vol. LXV (1932).

([2]) Alcuni dei risultati contenuti nel presente lavoro sono già stati pubblicati nella nota: *Alcuni teoremi di esistenza e di unicità per l'equazione*: $xz_{xx}+z_{yy}=0$. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 68 (1932-1933).

proprietà della (3) non si possono ricavare i teoremi di esistenza e di unicità per la (A) nel semipiano iperbolico; per $x=0$ il jacobiano del cambiamento di variabili (2), che è $2(-x)^{-\frac{1}{2}}$ diviene infinito. Si dovrà dunque studiare direttamente la (A), servendosi delle proprietà della (3) solo per $x<0$.

Nel semipiano $x \geqslant 0$ il cambiamento di variabili:

(4) $$X=2x^{\frac{1}{2}}, \qquad Y=y$$

muta la (A) nella:

(5) $$z_{XX}+z_{YY}-\frac{z_X}{X}=0,$$

che nel lavoro precedente si era chiamata ridotta ellittica della (A). Poichè: $\frac{dX}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}$, dallo studio della (5) si potranno ricavare proprietà analoghe per la (A) solo per $x>0$.

È molto notevole il fatto che i valori di una soluzione della (A), $D^{\text{II}}$ (3) anche per $x=0$, sull'asse $y$ *non possono essere arbitrari*; invero per $x=0$ la (A) si riduce a $z_{yy}=0$, da cui segue: $z(0,y)=my+n$, dove $m$ ed $n$ sono costanti.

Prendendo dunque come incognita $z(x,y)-my-n$, ci si riduce a supporre $z(0,y)=0$, e a ricercare in tutti i teoremi di esistenza gli integrali della (A) nulli sull'asse $y$. Tale circostanza lascia presumere fin d'ora che i teoremi di unicità e di esistenza per la (A) varranno sotto condizioni diverse da quelle che abitualmente si incontrano nel campo delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine.

Il dominio $D$ in cui si studiano i teoremi di esistenza e di unicità per la (A) è limitato da una curva $\gamma$ posta nel semipiano ellittico e terminata a due punti $M$ e $N$ dell'asse $y$, e dagli archi $MR$ e $NR$ di caratteristiche nel semipiano iperbolico (vedi fig. 1); $D$ è dunque un dominio dello stesso tipo di quello considerato dal prof. TRICOMI (4) a proposito dell'equazione:

$$yz_{xx}+z_{yy}=0.$$

Nel seguito indicheremo sempre con $D$ tale dominio, con $C$ il dominio (posto nel semipiano $x \geqslant 0$) limitato da $\gamma$ e dall'asse $y$, e con $T$ il trilatero (posto nel semipiano $x \leqslant 0$) limitato dall'asse $y$ e dagli archi $MR$ e $NR$, così che $D$ è costituito dalle due parti $C$ e $T$.

Scopo principale del presente lavoro è di dimostrare che esiste ed è unica nel dominio $D$ la funzione $z(x,y)$, che all'interno del dominio stesso è funzione $D^{\text{II}}$ e soddisfa la (A), e che assume valori assegnati *soltanto sulla curva* $\gamma$; però

(3) Con funzioni $D^n$ intendiamo, qui e in seguito, le funzioni finite e continue con tutte le loro derivate continue, fino a quelle di ordine $n$ incluse.

(4) F. TRICOMI: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto.* Memorie della R. Acc. dei Lincei, S. 5ª, vol. XIV, fasc. VII, 1923.

nel corso del lavoro sono dimostrati parecchi altri risultati relativi agli integrali della (A).

Precisamente nel § 1 si studia l'equazione nel semipiano iperbolico, dimostrando, anzi tutto, che esiste ed è unico nel trilatero $T$ l'integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti sul segmento $MN$:

$$z(0, y) = 0, \qquad z_x(0, y) = \nu(y),$$

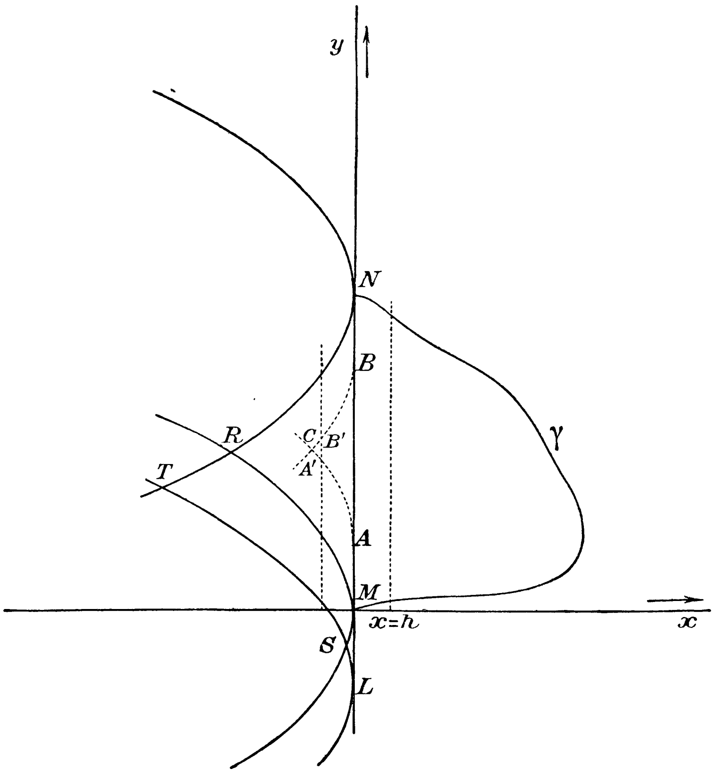


Fig. 1.

dove $\nu(y)$ è una funzione assegnata; si dimostra pure che nel trilatero $T$ esiste ed è unico l'integrale della (A), che si riduce ad una funzione assegnata su *uno solo* degli archi di caratteristiche $MR$ o $NR$ (vedi fig. 1), e se ne ricava subito una conseguenza notevole.

Nel § 2 si inizia lo studio dell'intiero dominio $D$, si dimostra che *in tutto* $D$ (e non solo nel dominio $C$) è unico l'integrale della (A), che assume valori dati su $\gamma$; si dimostra poi il teorema di esistenza di un integrale della (A), che è definito in un dominio posto nel semipiano ellittico, e si riduce ad una funzione assegnata sul contorno del dominio stesso, prima quando tale dominio non ha punti a comune coll' asse $y$ e poi per il dominio $C$, limitato da una curva $\gamma$ e dall' asse $y$, caso in cui basta che la funzione sia data su $\gamma$ soltanto.

Per estendere il teorema di esistenza a quest' ultimo caso è seguito un metodo dovuto al prof. ASCOLI (5), metodo che si rivela molto conveniente in questo tipo di problemi; non si presenta nessuna particolare difficoltà per dimostrare che la funzione $z(x, y)$ costruita con tale metodo soddisfa la (A) e si riduce ai valori assegnati su $\gamma$; invece si è dovuto tenere un procedimento nuovo per dimostrare che la $z(x, y)$ si annulla sull' asse $y$ (come si è visto in principio ci si riduce sempre al caso $z(0, y)=0$).

Per provare che, data $z(x, y)$ su $\gamma$, essa è determinata in tutto $D$, basta provare che la $z_x(0, y)$ esiste ed è funzione $D^{\text{II}}$ nei punti del segmento $MN$, perchè note $z(0, y)$ e $z_x(0, y)$, la $z(x, y)$ è determinata nel trilatero $T$. La dimostrazione che $z_x(0, y)$ esiste ed è funzione $D^{\text{II}}$ costituisce una delle difficoltà della presente ricerca.

A tale scopo nel § 3 si introducono delle soluzioni particolari della (A), in cui compaiono le funzioni sferiche generalizzate del GEGENBAUER, già utilizzate dal prof. TRICOMI nel suo lavoro (6).

Si dimostra poi nel § 4 il teorema più generale di esistenza, prima nel caso in cui la curva $\gamma$ ha una forma particolare, è cioè quella che diremo *una curva normale per la* (A), e poi in generale. L' integrale della (A) di cui si è dimostrata così l'esistenza è funzione analitica di $x$, $y$ nei punti interni a $D$, sia nel semipiano iperbolico, che nel semipiano ellittico. Si ottiene pure il risultato notevole che ogni integrale della (A), definito in un dominio attraversato dall' asse $y$, è analitico.

Si dimostra anche che all' interno del dominio limitato da una curva normale $c$ nel semipiano $x \geqslant 0$ e dalle caratteristiche per gli estremi di questa nel semipiano $x \leqslant 0$, esiste ed è unico l' integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0, y)=0, \qquad z_x(0, y)=\nu(y),$$

dove $\nu(y)$ è una funzione analitica, risolvendo così il problema di CAUCHY anche nel semipiano ellittico, e si ricavano di qui alcune conseguenze interessanti, che permettono di estendere al semipiano ellittico i risultati trovati alla fine del § 1 per il semipiano iperbolico.

---

(5) G. ASCOLI: *Sull' equazione di Laplace nello spazio iperbolico*. Math. Zeitschrift, B. 31, H. 1, pp. 45-96; vedi per questo metodo pp. 76-81.

(6) F. TRICOMI, l. c., pp. 172-175. Pare dunque che gli sviluppi in serie di funzioni di GEGENBAUER abbiano una notevole importanza in questo tipo di problemi.

## § 1.

Iniziamo lo studio della (A) nel semipiano iperbolico, e diamo, anzi tutto, la formula di RIEMANN direttamente per la (A) in un caso che ci servirà nel seguito del presente paragrafo. L'equazione aggiunta della (A) è, indicando con $X$, $Y$ le coordinate correnti:

$$Xu_{XX}+u_{YY}+2u_X=0. \tag{1}$$

Si vede subito che:

$$\begin{aligned} u(Xz_{XX}+z_{YY})-z(Xu_{XX}+u_{YY}+2u_X)= \\ =\frac{\partial}{\partial X}(Xuz_X-Xzu_X-uz)+\frac{\partial}{\partial Y}(uz_Y-zu_Y)=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Sia $C(x,y)$ un punto del semipiano iperbolico ($x<0$); le caratteristiche per $C$ hanno equazioni:

$$Y-2(-X)^{\frac{1}{2}}=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}=a; \qquad Y+2(-X)^{\frac{1}{2}}=y+2(-x)^{\frac{1}{2}}=b; \tag{3}$$

$a$ e $b$ risultano essere le ordinate delle intersezioni $A$ e $B$ (vedi fig. 1) delle due caratteristiche per $C$ coll'asse $Y$. Intersechiamo tali caratteristiche colla retta:

$$X=-\lambda^2, \qquad (0<\lambda^2<-x).$$

Le ordinate dei punti $A'$ e $B'$ di intersezione saranno:

$$a'=a+2\lambda; \qquad b'=b-2\lambda. \tag{4}$$

Se $z$ è un integrale della (A) e $u$ un integrale della (1), per la (2) risulta:

$$\iint\limits_{A'B'C}\left\{\frac{\partial}{\partial X}(Xuz_X-Xzu_X-uz)+\frac{\partial}{\partial Y}(uz_Y-zu_Y)\right\}dXdY=0,$$

dove l'integrale è esteso al trilatero $A'B'C$, cioè:

$$\begin{aligned} \int_{a'}^{b'}(-\lambda^2uz_X+\lambda^2zu_X-uz)_{X=-\lambda^2}dY+\int_{B'C}(Xuz_X-Xzu_X-uz)dY- \\ -(uz_Y-zu_Y)dX+\int_{CA'}(Xuz_X-Xzu_X-uz)dY-(uz_Y-zu_Y)dX=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Il secondo integrale è fatto lungo la caratteristica $B'C$, di equazione $Y+2(-X)^{\frac{1}{2}}=b$; dunque:

$$\begin{aligned} &\int_{B'C}(Xuz_X-Xzu_X-uz)dY-(uz_Y-zu_Y)dX= \\ &=\int_{-\lambda^2}^{x}\left[(-X)^{\frac{1}{2}}\left(z\frac{du}{dX}-u\frac{dz}{dX}\right)-uz(-X)^{-\frac{1}{2}}\right]dX= \\ &=\int_{-\lambda^2}^{x}(-X)^{\frac{1}{2}}z\left[2\frac{du}{dX}+\frac{3}{2X}u\right]dX-(-x)^{\frac{1}{2}}(uz)_C+\lambda(uz)_{B'}, \end{aligned}$$

dove l'ultima espressione è ottenuta dalla precedente integrando per parti il termine $(-X)^{\frac{1}{2}} u \frac{dz}{dX}$. Analogamente:

$$\int_{CA'} (Xuz_X - Xzu_X - uz)dY - (uz_Y - zu_Y)dX =$$

$$= \int_x^{-\lambda^2} \left[(-X)^{\frac{1}{2}}\left(u\frac{dz}{dX} - z\frac{du}{dX}\right) + (-X)^{-\frac{1}{2}} uz\right] dX =$$

$$= -\int_x^{-\lambda^2} (-X)^{\frac{1}{2}} z \left[2\frac{du}{dX} + \frac{3}{2X} u\right] dX + \lambda(uz)_{A'} - (-x)^{\frac{1}{2}}(uz)_C.$$

Se $u$ è un integrale della (1), che lungo le caratteristiche $CA'$ e $CB'$ soddisfa la:

$$2\frac{du}{dX} + \frac{3}{2X} u = 0,$$

cioè si riduce a:

$$u = k(-X)^{-\frac{3}{4}},$$

dove $k$ è una costante, dalla (5) si ottiene la formula:

$$(6)\qquad 2(-x)^{\frac{1}{2}}(uz)_C = \lambda(uz)_{A'} + \lambda(uz)_{B'} + \int_{a'}^{b'} (-\lambda^2 uz_X + \lambda^2 zu_X - uz)_{X=-\lambda^2} dY.$$

Ora, posto $Xu = v$, la (1) si trasforma nella:

$$Xv_{XX} + v_{YY} = 0,$$

cioè nella (A). Un integrale particolare di questa è [7]:

$$v(X, Y; x, y) = D^{\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right),$$

dove:

$$(7)\qquad \begin{aligned} D &= 4[(-x)^{\frac{1}{2}} + (-X)^{\frac{1}{2}}]^2 - (y - Y)^2 = \\ &= [y + 2(-x)^{\frac{1}{2}} - Y + 2(-X)^{\frac{1}{2}}][Y + 2(-X)^{\frac{1}{2}} - y + 2(-x)^{\frac{1}{2}}] = \\ &= (b - A)(B - a), \end{aligned}$$

in cui si è posto:

$$A = Y - 2(-X)^{\frac{1}{2}}, \qquad B = Y + 2(-X)^{\frac{1}{2}};$$

$A$ e $B$ sono le ordinate delle intersezioni coll'asse $Y$ delle caratteristiche per il punto variabile $(X, Y)$, e $a$ e $b$, date dalle (3), quelle delle intersezioni coll'asse $Y$

---

(7) Con uno dei cambiamenti di variabili dati nell'introduzione del presente lavoro (formule (2)), la (A) si muta nell'equazione di EULERO-POISSON (equazione (3) dell'introduzione); nei punti del trilatero $A'B'C$ è $X \neq 0$, e quindi si può eseguire il cambiamento di variabili indicato; l'integrale particolare $v(X, Y; x, y)$ è dato dal DARBOUX: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2e edit., p. 2, livre IV, chap. III (t. II, pp. 83 e seg.).

delle caratteristiche per il punto fisso $(x, y)$; $F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)$ è la funzione ipergeometrica e $\sigma$ è il birapporto dei quattro punti $A$, $B$, $a$, $b$, cioè:

$$(8) \qquad \sigma = \frac{(a-A)(B-b)}{(b-A)(B-a)} = \frac{4[(-x)^{\frac{1}{2}} - (-X)^{\frac{1}{2}}]^2 - (y-Y)^2}{4[(-x)^{\frac{1}{2}} + (-X)^{\frac{1}{2}}]^2 - (y-Y)^2};$$

$v(X, Y; x, y)$ è reale, finita e continua per:

$$(9) \qquad D \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Nel nostro caso, poichè per $(X, Y)$ variabile nel trilatero $ABC$ risulta:

$$a \leqslant A \leqslant B \leqslant b,$$

queste due condizioni sono certo soddisfatte ([8]); è $\sigma = 0$ per $A = a$ o per $B = b$, cioè sulle caratteristiche per il punto $C(x, y)$; è $\sigma = 1$ per $X = 0$. Si ha:

$$(10) \qquad F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = 1,$$

$$(11) \qquad F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{4}{\pi}.$$

Si ottiene dunque:

$$(12) \qquad u(X, Y; x, y) = \frac{D^{\frac{1}{2}}}{X} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right).$$

Si verifica subito che sulle caratteristiche $CA$ e $CB$ è:

$$u(X, Y; x, y) = -4(-x)^{\frac{1}{4}}(-X)^{-\frac{3}{4}}.$$

Nella formula (6) compare anche la $u_X(X, Y; x, y)$, di cui dovremo dunque studiare l'andamento. Per una nota formula sulle funzioni ipergeometriche:

$$(13) \qquad \frac{dF\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)}{d\sigma} = \frac{1}{4} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right),$$

dove la $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right)$ è certo finita e continua per $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Con qualche riduzione si ottiene:

$$\sigma_X = \frac{8(-x)^{\frac{1}{2}}[4(X-x) - (y-Y)^2]}{(-X)^{\frac{1}{2}} D^2}.$$

---

([8]) La condizione $\sigma \leqslant 1$ equivale alla:

$$(a-A)(B-b) \leqslant (b-A)(B-a); \qquad aB - AB - ab + Ab \leqslant bB - AB - ab + Aa;$$
$$0 \leqslant (B-A)(b-a),$$

certo soddisfatta.

Dunque:

$$\frac{\partial F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right)}{\partial X} = 2(-x)^{\frac{1}{2}}(-X)^{-\frac{1}{2}} D^{-2}[4(X-x)-(y-Y)^2] F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right). \tag{14}$$

Infine:

$$\frac{\partial u(X, Y; x, y)}{\partial X} = 2[(-x)^{\frac{1}{2}} + (-X)^{\frac{1}{2}}](-X)^{-\frac{3}{2}} D^{-\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right) - \tag{15}$$
$$- X^{-2} D^{\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\right) -$$
$$- 2(-X)^{-\frac{3}{2}} D^{-\frac{3}{2}} (-x)^{\frac{1}{2}} [4(X-x)-(y-Y)^2] F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\right).$$

Tale funzione è reale, finita e continua per $D>0$, $X \neq 0$, cioè certamente per $(X, Y)$ variabile nel trilatero $ABC$, tolto il segmento $AB$. Sostituendo a $u(X, Y; x, y)$ il suo valore nella formula (6) si ottiene la:

$$z(x, y) = (-x)^{\frac{1}{4}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \frac{z(-\lambda^2, b') + z(-\lambda^2, a')}{2} + \frac{1}{8} \int_{a'}^{b'} (\lambda^2 u z_X - \lambda^2 z u_X + uz)_{X=-\lambda^2} dY, \tag{16}$$

che è appunto la relazione, necessaria per quanto segue, di cui si era parlato in principio.

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA I. - *Data una funzione* $D^{\mathrm{II}}$ $\nu(y)$, *definita per* $m \leq y \leq n$, *esiste uno e un solo integrale della* (A), *che è funzione* $D^{\mathrm{II}}$ *anche per* $x=0$, *e soddisfa le condizioni ai limiti:*

$$z(0, y) = 0; \qquad z_x(0, y) = \nu(y) \qquad (m \leq y \leq n); \tag{17}$$

*tale integrale è definito nel trilatero* $T$ *limitato dal segmento* $MN$ *dell'asse* $y$ (*dove* $M$ *e* $N$ *hanno ordinate* $m$ *e* $n$) *e dagli archi di caratteristiche* $MR$ *e* $NR$ (fig. 1) *ed è dato dalla formula:*

$$\boxed{z(x, y) = \frac{8x}{\pi} \int_0^1 \nu[Y(t)] t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt} \tag{B}$$

*dove:*

$$Y(t) = a + (b-a)t = y - 2(-x)^{\frac{1}{2}} + 4(-x)^{\frac{1}{2}} t. \tag{18}$$

Se esiste una funzione $z(x, y)$, che soddisfa il teorema, dalla condizione $z(0, y)=0$, segue che si può porre:

$$z(x, y) = xM(x, y),$$

dove $M(x, y)$ è finita e continua anche per $x=0$, cioè tale che in particolare potrà trovarsi un numero positivo $R$ in modo da aversi:

$$(19) \qquad |M(x, y)| < R.$$

La $z(x, y)$, se esiste, soddisfa la relazione (16); nel secondo membro della (16) poniamo:

$$z(-\lambda^2, Y) = -\lambda^2 M(-\lambda^2, Y),$$

e per $u$ e $u_X$ sostituiamo le loro espressioni (12) e (15) in cui si faccia $X = -\lambda^2$. Si ottiene così:

$$(20) \qquad z(x, y) = -(-x)^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{3}{2}} \frac{M(-\lambda^2, b') + M(-\lambda^2, a')}{2} +$$

$$+\frac{1}{8}\int_{a'}^{b'} \Big\{ -z_X(-\lambda^2, Y) D^{\frac{1}{2}} F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big) +$$

$$+ 2\lambda D^{-\frac{1}{2}} [(-x)^{\frac{1}{2}} + \lambda] F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big) M(-\lambda^2, Y) +$$

$$+ 2\lambda(-x)^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{3}{2}} [4(\lambda^2 + x) + (y - Y)^2] F\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\Big) M(-\lambda^2, Y) \Big\} dY$$

dove, tenendo conto delle (3) e (7), è:

$$(21) \qquad D = (b + 2\lambda - Y)(2\lambda + Y - a).$$

Nel secondo membro della (20) facciamo tendere $\lambda$ a zero; i termini integrati tendono a zero; così pure si vede subito che tendono a zero, per $\lambda$ tendente a zero, i termini:

$$\lambda I_1 = \lambda \int_{a'}^{b'} (b + 2\lambda - Y)^{-\frac{1}{2}} (2\lambda + Y - a)^{-\frac{1}{2}} F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big) M(-\lambda^2, Y) dY$$

$$\lambda I_2 = \lambda \int_{a'}^{b'} (b + 2\lambda - Y)^{-\frac{3}{2}} (2\lambda + Y - a)^{-\frac{3}{2}} [4(\lambda^2 + x) + (y - Y)^2] F\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\Big) M(-\lambda^2, Y) dY.$$

Infatti si può determinare una quantità $K$ tale che in tutto $T$ sia:

$$F\Big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \sigma\Big) < K, \qquad F\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \sigma\Big) < K;$$

inoltre per $a \leqslant Y \leqslant b$ risulta [9]:

$$|4(\lambda^2 + x) + (y - Y)^2| < 4|x|,$$

---

[9] La funzione $\varphi(Y) = 4(\lambda^2 + x) + (Y - y)^2$ ha un minimo per $Y = y$; dunque $|\varphi(Y)|$ nell'intervallo $a \leqslant Y \leqslant b$ assume il massimo valore per $Y = y$, o per $Y = a$ o per $Y = b$; ma $|\varphi(y)| = 4|x| - 4\lambda^2$; $\varphi(a) = \varphi(b) = 4\lambda^2$, e poichè $\lambda^2 < |x|$, segue che:

$$|\varphi(Y)| < 4|x| \qquad \text{per } a \leqslant Y \leqslant b.$$

e tenendo presenti la (19) e le (4), si ottiene:

$$\lambda\,|I_1| < \lambda KR \int_{a+2\lambda}^{b-2\lambda} (b+2\lambda-Y)^{-\frac{1}{2}}(2\lambda+Y-a)^{-\frac{1}{2}}dY$$

$$\lambda\,|I_2| < 4\lambda KR\,|x| \int_{a+2\lambda}^{b-2\lambda} (b+2\lambda-Y)^{-\frac{3}{2}}(2\lambda+Y-a)^{-\frac{3}{2}}dY,$$

e si è già dimostrato in un lavoro precedente ([10]) che le espressioni che compaiono a secondo membro tendono a zero. Allora:

$$z(x,y) = -\frac{1}{8}\lim_{\lambda\to 0}\int_{a+2\lambda}^{b-2\lambda}(b+2\lambda-Y)^{\frac{1}{2}}(2\lambda+Y-a)^{\frac{1}{2}}F\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2},\,1,\,\sigma\right)z_X(-\lambda^2,\,Y)dY.$$

Per $\lambda=0$, è $\sigma=1$, come si verifica facilmente; tenendo conto della (11) si trova:

$$z(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b (b-Y)^{\frac{1}{2}}(Y-a)^{\frac{1}{2}}\nu(Y)dY,$$

e, posto: $Y=a+(b-a)t$, ricordando che: $b-a=4(-x)^{\frac{1}{2}}$, si ottiene la formula cercata:

$$\text{(B)}\qquad z(x,y) = \frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu[Y(t)]dt,$$

dove $Y(t)$ è dato dalla (18).

La formula così trovata mostra che il valore di $z(x,y)$ in un punto $C$ di $T$ dipende dai valori, che assume $\nu(y)$ nei *soli* punti del segmento $a\leqslant y\leqslant b$ dell'asse $y$, avente per estremi i punti $A$ e $B$ in cui questo tocca la caratteristiche per il punto $C$ (vedi fig. 1).

Se dunque esiste una funzione $z(x,y)$, che soddisfa il teorema, essa è data in $T$ dalla formula (B), ed è quindi unica (se cioè $\nu(y)=0$ per $m\leqslant y\leqslant n$, è $z(x,y)=0$, in tutto $T$). Viceversa la funzione $z(x,y)$, data dalla formula (B), è $D^{II}$ anche per $x=0$, è integrale della (A) e soddisfa le condizioni ai limiti (17).

Infatti si ha $z(0,y)=0$; inoltre:

$$z_x(x,y) = \frac{8}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu[Y(t)]dt + \frac{8}{\pi}(-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu'[Y(t)]dt$$

---

([10]) M. CIBRARIO: *Primi studii intorno alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-paraboliche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. LVI (1932), § 1, formule (3) e (6), in cui si ponga $\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$ e $2\lambda$ al posto di $\lambda$.

e per $x=0$:

$$z_x(0, y)=\frac{8}{\pi}\nu(y)\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\nu(y).$$

Così:

$$z_y(x, y)=\frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu'[Y(t)]dt$$

$$(22)\qquad z_{xx}(x, y)=-\frac{12(-x)^{-\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu'[Y(t)]dt-$$
$$-\frac{8}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^2\nu''[Y(t)]dt.$$

$$z_{yy}(x, y)=\frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu''[Y(t)]dt.$$

Deve essere soddisfatta la (A), cioè, con qualche riduzione:

$$3(-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \nu'[Y(t)]t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)dt+8x\int_0^1 \nu''[Y(t)]t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=0,$$

e una semplice integrazione per parti permette di verificare questa relazione.

Dimostriamo ancora che:

$$z_{xx}(0, y)=-\nu''(y).$$

Il primo integrale che compare in $z_{xx}(x, y)$ si può scrivere nella forma:

$$\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu'[a+(b-a)t]-\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\nu'[a+(b-a)t]dt=$$
$$=\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\{\nu'[a+(b-a)t]-\nu'[b-(b-a)t]\}dt=$$
$$=4(-x)^{\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu''[y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}(t-2\vartheta t+\vartheta)]dt,$$

perchè:

$$\nu'[b-(b-a)t]-\nu'[a+(b-a)t]=$$
$$=\{b-a-2(b-a)t\}\nu''[a+(b-a)t+\vartheta(b-a)-2\vartheta(b-a)t]=$$
$$=-4(-x)^{\frac{1}{2}}(2t-1)\nu''[y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}(t-2\vartheta t+\vartheta)],$$

dove $\vartheta$ è compreso tra zero e uno. Sostituendo nella (22) e facendo ivi $x=0$, si trova:

$$z_{xx}(0, y)=-\frac{48\nu''(y)}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)dt-\frac{8}{\pi}\nu''(y)\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^2dt=$$

$$= -\frac{64}{\pi}\nu''(y)\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)dt=$$

$$= -\frac{64}{\pi}\nu''(y)\left[\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt - \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt\right] = -\nu''(y).$$

È dunque soddisfatta, per $x=0$, l'equazione che si ottiene derivando la (A).

La formula (B) permette di dimostrare il seguente

TEOREMA II. - *Esiste uno e un solo integrale della* (A), *definito nel trilatero* $T$, *che è funzione* $D^{II}$ *in esso, e che su uno dei due archi di caratteristiche, che limitano* $T$, *per esempio su* $MR$ (vedi fig. 1), *si riduce ad una funzione* $D^{IV}$ *assegnata* $f(y)$.

Non è restrittivo supporre che il punto $M$ coincida coll'origine; se $f(0)=n$, $f'(0)=m$, e se $z(x,y)$ è $D^{II}$ anche per $x=0$, deve essere:

$$z(0,y)=my+n\,;$$

sostituendo a $z(x,y)$ e a $f(y)$ rispettivamente le funzioni:

$$z(x,y)-my-n, \qquad f(y)-my-n,$$

ci si riduce alle ipotesi:

$$z(0,y)=0, \qquad f(0)=f'(0)=0.$$

L'equazione dell'arco $MR$ di caratteristica è:

$$y-2(-x)^{\frac{1}{2}}=0\,; \qquad x=-\frac{y^2}{4}.$$

Se esiste una funzione $z(x,y)$ che soddisfa il teorema, essa si può mettere nella forma (B), ed esiste una funzione $D^{II}$, $\nu(y)$, che soddisfa la:

$$z\left(-\frac{y^2}{4},\,y\right)=f(y)=-\frac{2y^2}{\pi}\int_0^1 \nu(2yt)t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$$

$\left(0\leq y\leq \frac{l}{2},\right.$ se $l$ è la lunghezza del segmento $\left.MN\right)$.

Posto: $2y=Y$; $Yt=u$, si ottiene:

$$f\left(\frac{Y}{2}\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^Y u^{\frac{1}{2}}(Y-u)^{\frac{1}{2}}\nu(u)du \qquad (0\leq Y\leq l). \tag{23}$$

Prendiamo come incognita:

$$Z(u)=\int_0^u \nu(u)u^{\frac{1}{2}}du.$$

Integrando per parti si ha l'equazione di ABEL:

$$f\left(\frac{Y}{2}\right) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^Y \frac{Z(u)}{(Y-u)^{\frac{1}{2}}}\,du.$$

Colla formula di ABEL risulta:

$$Z(Y) = -2\int_0^Y \frac{f'\left(\frac{u}{2}\right)}{(Y-u)^{\frac{1}{2}}}\,du,$$

cioè integrando per parti:

$$Z(Y) = -2\int_0^Y (Y-u)^{\frac{1}{2}} f''\left(\frac{u}{2}\right) du,$$

e derivando rispetto a $Y$, e poi ponendo $u = Yt$:

$$\nu(Y)\,Y^{\frac{1}{2}} = -\int_0^Y \frac{f''\left(\frac{u}{2}\right)}{(Y-u)^{\frac{1}{2}}}\,du = -Y^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{f''\left(\frac{Yt}{2}\right)}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,dt,$$

cioè:

(24)
$$\nu(Y) = -\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} f''\left(\frac{Yt}{2}\right) dt \qquad (0 \leqslant Y \leqslant l).$$

È così determinata, in modo unico, la funzione $\nu(Y)$, certo $D^{\text{II}}$, perchè $f$ è funzione $D^{\text{IV}}$; la $\nu(Y)$ risolve l'equazione integrale (23), e l'integrale della (A), definito nel trilatero $T$, che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0, y) = 0, \qquad z_x(0, y) = \nu(y),$$

sull'arco di caratteristica $MR$ si riduce a $f(y)$, cioè soddisfa il teorema.

Il teorema ora dimostrato ammette una generalizzazione immediata. La funzione $f(y)$ sia assegnata, oltre che sull'arco $MR$ di caratteristica, anche sull'arco $MS$, e il punto $S$ abbia ordinata $-\frac{m}{2}$ (vedi fig. 1); $f(y)$ sia dunque definita per $-\frac{m}{2} \leqslant y \leqslant \frac{l}{2}$; per il teorema precedente la funzione $\nu(y)$ è determinata nei punti del segmento: $-m \leqslant y \leqslant l$ ($LN$ nella figura 1), è ivi funzione $D^{\text{II}}$, e, come si vede facilmente, è data dalla formula (24). Per il Teorema I in tutto il trilatero limitato dal segmento $LN$ dell'asse $y$ e dagli archi di caratteristiche $LT$ e $NT$ per i suoi estremi è individuato l'integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0, y) = 0, \qquad z_x(0, y) = \nu(y),$$

e che dunque assume valori dati sui due archi di caratteristiche $MR$ ed $MS$, archi che appartengono ad una stessa parabola. Dunque:

TEOREMA III. - *In un trilatero, limitato da un segmento dell'asse $y$ e dagli archi di caratteristiche per i suoi estremi, esiste ed è unico l'inte-*

*grale della* (A), *che è funzione* $D^{II}$ *nel trilatero stesso e che si riduce ad una funzione* $D^{IV}$ *assegnata* $f(y)$ *sulla parte interna al trilatero di una qualsiasi delle parabole caratteristiche che lo attraversano.*

## § 2.

**Lemma.** - *Se* $\delta$ *è un dominio posto nel semipiano* $x \geqslant 0$ (*e del cui contorno* $\sigma$ *può dunque far parte un segmento dell'asse* $y$), *e* $z(x, y)$ *è un integrale della* (A), *funzione* $D^{II}$ *in* $\delta$ (*e su* $\sigma$) *e nullo su* $\sigma$, $z(x, y)$ *è nullo in tutto* $\delta$.

Dall'identità:

$$z(xz_{xx}+z_{yy})=\frac{\partial}{\partial x}\left(xzz_x-\frac{z^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(zz_y)-xz_x^2-z_y^2$$

e dall'ipotesi che $z(x, y)$ è un integrale della (A) in $\delta$, segue:

$$\iint_\delta \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(xzz_x-\frac{1}{2}z^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}(zz_y)\right]dxdy=\iint_\delta (xz_x^2+z_y^2)dxdy,$$

cioè:

$$\int_\sigma \left(xzz_x-\frac{1}{2}z^2\right)dy-zz_ydx=\iint_\delta (xz_x^2+z_y^2)dxdy,$$

ed essendo per ipotesi $z(x, y)=0$ su $\sigma$, segue:

$$\iint_\delta (xz_x^2+z_y^2)dxdy=0,$$

e questo è possibile solo se: $z_x=z_y=0$ in tutto $\delta$, e quindi $z=0$ in tutto $\delta$.

Si dimostra subito allora il:

TEOREMA IV. - *Se* $\tau$ *è un dominio di contorno* $\gamma$, *posto nel semipiano* $x \geqslant 0$, *e se* $z(x, y)$ *è un integrale della* (A), *che è funzione* $D^{II}$ *nei punti interni a* $\tau$ *ed è continua su* $\gamma$, *la* $z(x, y)$ *ha il suo massimo e il suo minimo valore in punti di* $\gamma$; *se quindi* $z(x, y)$ *è nulla su* $\gamma$, $z(x, y)$ *è pure nulla in tutto* $\tau$ (11).

Il Teorema IV vale non solo per la (A), ma per qualsiasi equazione che sia soddisfatta da una costante arbitraria, e per cui si possa dimostrare il Lemma.

Se $D$ è un dominio, limitato nel semipiano $x \geqslant 0$ da una curva $\gamma$ terminata a due punti $M$ e $N$ dell'asse $y$ e nel semipiano $x \leqslant 0$ dagli archi di caratteristiche $MR$ e $NR$ (vedi fig. 1), un integrale $z(x, y)$ della (A) nullo su $\gamma$ e su $MN$ e funzione $D^{II}$ nei punti interni a $D$, è nullo nel dominio $C$ limitato da $\gamma$ e da $MN$; allora $z_x(0, y)=0$ nei punti del segmento $MN$ e per il Teorema I del § 1 $z(x, y)$ è nullo in tutto il trilatero $MNR$. È dunque dimostrato il teorema fondamentale di unicità:

---

(11) Per la dimostrazione vedi, per esempio, TRICOMI, l. c., p. 182, nota (1).

TEOREMA V. - *Esiste al più un integrale della* (A), *che è definito nel dominio $D$, è funzione $D^{\text{II}}$ nei punti interni a $D$ e assume valori dati su $\gamma$.*

Dobbiamo ora passare ai teoremi di esistenza, corrispondenti ai Teoremi IV e V di unicità.

TEOREMA VI. - *Se $\delta$ è un dominio di contorno $\sigma$* ([12]), *appartenente al semipiano $x>0$* (*senza punti a comune coll'asse $y$*) *esiste un integrale della* (A), $z(x, y)$, *funzione $D^{\text{II}}$ nei punti interni a $\delta$ e che si riduce ad una funzione continua data ad arbitrio su $\sigma$.*

La (A) col cambiamento di variabili:

$$X=2x^{\frac{1}{2}}, \qquad Y=y, \qquad (x>0), \tag{1}$$

diviene:

$$z_{XX}+z_{YY}-\frac{z_X}{X}=0. \tag{2}$$

Posto

$$z(X, Y)=\bar{z}(X, Y)X^{\frac{1}{2}},$$

si ha l'equazione:

$$\bar{z}_{XX}+\bar{z}_{YY}-\frac{3}{4X^2}\bar{z}=0. \tag{3}$$

Il cambiamento di variabili (1) muta il dominio $\delta$ e la curva $\sigma$ in un dominio $\delta_1$ e in una curva $\sigma_1$ interni al semipiano $X>0$. Se $G(X, Y;\ \xi, \eta)$ è l'ordinaria funzione di GREEN per il contorno $\sigma_1$, posto:

$$\int_{\sigma_1} \bar{z}\frac{dG}{dn}\,ds=A(X, Y), \tag{4}$$

dove $A(X, Y)$ è una funzione armonica, nota, che assume i valori dati su $\sigma_1$, la $\bar{z}(X, Y)$ soddisfa l'equazione integrale:

$$2\pi\bar{z}(X, Y)=A(X, Y)-\frac{3}{4}\iint_{\delta_1} G(X, Y;\ \xi, \eta)\frac{\bar{z}(\xi, \eta)}{\xi^2}\,d\xi d\eta. \tag{5}$$

In $\delta_1$: $\xi\neq 0$; alla (5) si può dunque applicare la teoria di FREDHOLM ([13]), se $-\frac{3}{8\pi}$ non è un parametro del nucleo stesso, caso da escludersi perchè se $-\frac{3}{8\pi}$ fosse un parametro del nucleo, l'equazione ottenuta dalla (5), facendo in essa $A=0$ avrebbe delle soluzioni non nulle; ora questo è assurdo perchè se $\bar{z}(X, Y)$ è nullo su $\sigma_1$, è certo nulla la funzione $A(X, Y)$, e, per il teorema di unicità deve essere in tutto $\delta_1$: $\bar{z}(X, Y)=0$. Consideriamo ora il dominio $C$ limitato dall'asse $y$ e da una curva $\gamma$, posta nel semipiano $x\geqslant 0$ e avente gli estremi $M$ e $N$ sull'asse $y$; siano $x=x(t)$, $y=y(t)$ le equazioni parametriche di $\gamma$. Allora:

---

([12]) Qui e nel seguito si suppone che tutti i contorni considerati siano tali che ad essi possano applicarsi le formule fondamentali della teoria delle funzioni armoniche.

([13]) GOURSAT: *Cours d'Analyse.* T. III$^{\text{e}}$, Chap. XXXIII, pp. 524-527.

TEOREMA VII. - *In tutto il dominio $C$ esiste un integrale della* (A), *che è funzione $D^{II}$ all'interno di $C$, è nullo sul segmento $MN$ e si riduce su $\gamma$ ad una funzione continua assegnata ad arbitrio $f(t)$, colla sola condizione che sia: $f(t)=x(t)\varphi(t)$, dove $\varphi(t)$ è finita e continua anche nei punti $M$ e $N$* [14]; *all'interno di $C$ tale integrale è funzione analitica di $x$, $y$.*

Nella dimostrazione di questo teorema ci serviremo di un metodo molto semplice dovuto al prof. ASCOLI [15].

Osserviamo, in primo luogo, che non è restrittivo supporre che i valori dati su $\gamma$ di $f(t)$ (e di $\varphi(t)$) siano non negativi, perchè se ciò non avviene la $f(t)$ (o la $\varphi(t)$) si può considerare come differenza di due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ non negative, e l'integrale $z(x, y)$ cercato si ottiene come differenza di due che assumono su $\gamma$ rispettivamente i valori $f_1(t)$ e $f_2(t)$. Sia dunque: $0 \leqslant f(t) \leqslant M$, dove $M$ è una costante positiva; per il Teorema IV l'integrale $z(x, y)$, se esiste, soddisfa la diseguaglianza:

$$0 \leqslant z(x, y) \leqslant M. \tag{6}$$

Si considerino i dominii $C_h$ limitati da $\gamma$ e dalle rette $r_h$ di equazioni $x=h$, e si determinino le funzioni $z(x, y; h)$, che in $C_h$ soddisfano la (A), su $\gamma$ si riducono a $f(t)$ e sono nulle sulla $x=h$, funzioni certo esistenti per il Teorema V. Dico che esiste il

$$\lim_{h \to 0} z(x, y; h);$$

Se $h_1 > h_2$ in $C_{h_1}$ sono definite sia la $z(x, y; h_1)$ che la $z(x, y; h_2)$; su $\gamma$ le due funzioni sono eguali, sulla retta $x=h_1$ è: $z(x, y; h_1)=0$, mentre: $z(x, y; h_2) \geqslant 0$, perchè, per quanto si è visto, per tutte le funzioni $z(x, y; h)$ vale la:

$$0 \leqslant z(x, y; h) \leqslant M.$$

Allora su tutto il contorno del dominio $C_h$ la differenza: $z(x, y; h_2)-z(x, y; h_1)$ è positiva o nulla, e perciò in tutto $C_h$:

$$M \geqslant z(x, y; h_2) \geqslant z(x, y; h_1).$$

La $z(x, y; h)$ per $h$ tendente a zero non decresce, ma resta limitata; esiste dunque il:

$$\lim_{h \to 0} z(x, y; h)=z(x, y).$$

Si tratta ora di provare che la $z(x, y)$, così ottenuta, soddisfa la (A) (all'interno del dominio $C$) e le condizioni ai limiti imposte. Sia $\delta$ un dominio tutto

---

[14] Se la $f(t)$ non fosse nulla nei punti $M$ e $N$, basterebbe costruire la funzione lineare $my+n$, che nei punti $M$ e $N$ assume i valori $f(M)$ e $f(N)$, poi prendere come incognita la $z(x, y)-my-n$ e sostituire a $f(y)$ la $f(y)-my-n$ per ridursi al caso studiato nel teorema.

[15] ASCOLI, l. c., pp. 76-81.

interno a $C$, senza punti a comune coll'asse $y$, e sia $\sigma$ il suo contorno; si considerino quei valori $h$ corrispondenti a dominii $C_h$, contenenti $\delta$ all'interno. Col cambiamento di variabili (1) e la posizione:

$$z(X, Y;\, h) = X^{\frac{1}{2}}\bar{z}(X, Y;\, h),$$

la (A) si trasforma nella (3). Allora le $\bar{z}(X, Y;\, h)$ soddisfano la:

$$(7) \qquad 2\pi\bar{z}(X, Y;\, h) = \int_\sigma \bar{z}(\xi, \eta;\, h)\frac{dG(X, Y;\, \xi, \eta)}{dn}\, ds - \\ - \frac{3}{4}\iint_\delta G(X, Y;\, \xi, \eta)\frac{\bar{z}(\xi, \eta;\, h)}{\xi^2}\, d\xi d\eta,$$

dove $G(X, Y;\, \xi, \eta)$ è l'ordinaria funzione di GREEN per il dominio $\delta$. Per $h$ tendente a zero le $\bar{z}(X, Y;\, h)$ tendono alla:

$$\bar{z}(X, Y) = X^{-\frac{1}{2}}z(X, Y).$$

La $\bar{z}(X, Y)$ è dunque integrabile nel senso di LEBESGUE, e quindi soddisfa la (7), dove gli integrali vanno intesi nel senso di LEBESGUE ([16]). Ne segue che la $\bar{z}(X, Y)$ soddisfa la (3) nelle coordinate $X$, $Y$, che la $z(X, Y)$ soddisfa la (2) e che quindi nelle coordinate $x$, $y$ soddisfa la (A).

Poichè all'interno di $C$ la (A) è di tipo ellittico, la $z$ è funzione analitica di $x$, $y$ per una proprietà generale delle equazioni lineari di tipo ellittico ([17]).

La dimostrazione che la funzione $z(x, y)$, così costruita, assume i valori dati su $\gamma$ è identica a quella data dal prof. ASCOLI nel suo lavoro ([18]), al quale rimandiamo il lettore.

Per dimostrare che:

$$\lim_{x \to 0} z(x, y) = 0,$$

consideriamo le funzioni:

$$u(x, y;\, h) = \frac{z(x, y;\, h)}{x},$$

definite ognuna nel relativo dominio $C_h$; esse soddisfano l'equazione trasformata della (A):

$$(8) \qquad x u_{xx} + u_{yy} + 2u_x = 0,$$

---

([16]) Vedi, per esempio, DE LA VALLÉE-POUSSIN: *Intégrales de Lebesgue.* Parte prima, cap. III, p. 44.

([17]) Vedi PICARD: *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre*, etc. Journal de l'École Polytéchnique, pp. 89-105 e Comptes Rendus, CXI, pp. 487-492. Vedi, anche, PICARD: *Sur les équations linéaires aux dériveés partielles et la généralisation du problème de Dirichlet.* Acta Math., t. 25, 1902, pp. 121-137 (vedi, per questo p. 131).

([18]) ASCOLI, l. c., p. 79; non riportiamo qui la dimostrazione, che si potrebbe ripetere parola per parola.

sono nulle sulla retta $x=h$, e sulla curva $\gamma$ assumono i valori $\varphi(t)$. Poichè per la (8) si può dimostrare il Lemma enunciato al principio del presente paragrafo ([19]), e la (8) è soddisfatta da una qualsiasi costante, per un integrale $u$ della (8) vale il Teorema III; la $u$ è dunque estremata al contorno e quindi limitata; ma

$$z(x, y\,;\,h)=xu(x, y\,;\,h).$$

Dunque esiste una quantità positiva $\mu$ tale che:

$$0\leqslant z(x, y\,;\,h)\leqslant x\mu,$$

e per $h$ tendente a zero:

$$0\leqslant z(x, y)\leqslant x\mu, \qquad \text{da cui } \lim_{x\to 0} z(x, y)=0.$$

Se si pone $z(0, y)=0$, la $z(x, y)$ risulta continua anche per $x=0$.

Bisognerebbe ora dimostrare che l'integrale $z(x, y)$ è determinato non solo nel dominio $C$, ma anche nel trilatero $T$ (limitato dal segmento $MN$ e dagli archi $MR$ e $NR$ di caratteristiche, vedi fig. 1), cioè in tutto $D$; per dimostrare l'esistenza di $z(x, y)$ in $T$ basterebbe provare che nei punti del segmento $MN$ la $z_x(0, y)$ esiste ed è funzione $D^{\text{II}}$, e applicare poi il Teorema del § 1; tale dimostrazione è piuttosto laboriosa, e non potrà essere fatta che in seguito, alla fine del § 4, dopo avere nel § 3 introdotte certe soluzioni particolari della (A). Qui ci limitiamo a dimostrare ancora che in un dominio $\delta$, limitato da una curva $\sigma$, vale il teorema di HARNACK:

TEOREMA VIII. - *Se una serie di soluzioni della* (A)

$$\sum_n z_n(x, y) \tag{9}$$

*converge uniformemente su $\sigma$ e se le soluzioni stesse sono nulle sulla eventuale parte che $\sigma$ ha in comune coll'asse $y$, la serie converge uniformemente in $\delta$ e ivi rappresenta una soluzione della* (A).

Che la serie converga uniformemente all'interno di $\sigma$ segue senz'altro dal fatto che il massimo di una somma del tipo:

$$|z_{n+1}+z_{n+2}+\dots+z_{n+p}|$$

è raggiunto sul contorno di $\sigma$.

---

([19]) Dalla:
$$u(xu_{xx}+u_{yy}+2u_x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xuu_x+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)-xu_x^2-u_y^2,$$

segue che un integrale della (8) nullo sul contorno $\sigma$ di un dominio $\delta$ posto nel semipiano $x\geqslant 0$ soddisfa la:
$$\iint_\delta (xu_x^2+u_y^2)dxdy=0,$$

da cui $u=u_x=u_y=0$ in tutto $\delta$.

Si consideri un dominio $\bar{\delta}$, di contorno $\bar{\sigma}$, tutto interno a $\delta$, si passi a coordinate $X$, $Y$, e si ponga

$$\bar{z}_n(X, Y) = X^{\frac{1}{2}} z_n(X, Y);$$

allora vale la (vedi sopra):

$$2\pi \bar{z}_n(X, Y) = \int_{\bar{\sigma}_1} \bar{z}_n \frac{dG}{dn} ds - \frac{3}{4} \iint_{\bar{\delta}_1} G \frac{\bar{z}_n(\xi, \eta)}{\xi^2} d\xi d\eta.$$

Segue dunque, poichè la serie (9) converge uniformemente:

$$2\pi \sum_n \bar{z}_n(X, Y) = \int_{\bar{\sigma}_1} \sum_n \bar{z}_n \frac{dG}{dn} ds - \frac{3}{4} \iint_{\bar{\delta}_1} \left[ G(X, Y; \xi, \eta) \frac{1}{\xi^2} \sum_n \bar{z}_n(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta.$$

La

$$\sum_n \bar{z}_n(X, Y) = \bar{z}(X, Y)$$

soddisfa la (3); dunque la:

$$X^{-\frac{1}{2}} \bar{z}(X, Y) = X^{-\frac{1}{2}} \sum_n \bar{z}_n(X, Y) = \sum_n X^{-\frac{1}{2}} \bar{z}_n(X, Y) = \sum_n z_n(X, Y)$$

soddisfa la (2) nelle coordinate $X$, $Y$, e la:

$$z(x, y) = \sum_n z_n(x, y)$$

soddisfa la (A) in ogni dominio $\bar{\delta}$ interno a $\delta$.

## § 3.

Introduciamo qui delle nuove variabili $\varrho$ e $\varphi$ legate alle $x$, $y$ dalle relazioni:

(1) $$x = \frac{\varrho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{4}, \qquad y = \varrho \cos \varphi \quad [20],$$

cioè:

(1′) $$\varrho = \sqrt{4x + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{y},$$

e cerchiamo degli integrali particolari della (A) della forma:

(2) $$z(x, y) = R(\varrho) T(\varphi),$$

integrali che ci serviranno, nel paragrafo che segue, a dimostrare il teorema di esistenza più generale per la (A). Col cambiamento di variabili (1), la (A) diviene:

$$\varrho^2 z_{\varrho\varrho} + z_{\varphi\varphi} - \operatorname{cotg} \varphi \, z_\varphi = 0,$$

---

[20] Questo cambiamento di variabili è ottenuto ponendo prima: $X = 2x^{\frac{1}{2}}$; $Y = y$ e poi passando nel piano $X$, $Y$ a coordinate polari: $X = \varrho \operatorname{sen} \varphi$, $Y = \varrho \cos \varphi$.

e se $z$ ha la forma particolare (2):

$$\varrho^2 R'' T + R T'' - \operatorname{cotg} \varphi R T' = 0,$$

da cui:

$$\frac{\varrho^2 R''}{R} = \frac{T' \operatorname{cotg} \varphi - T''}{T} = k,$$

dove $k$ è una costante arbitraria, che porremo nella forma $\lambda(\lambda-1)$. Si hanno così le due equazioni:

$$\varrho^2 R'' - \lambda(\lambda-1) R = 0 \tag{3}$$

$$T'' - \operatorname{cotg} \varphi T' + \lambda(\lambda-1) T = 0. \tag{4}$$

L'equazione (3) ammette soluzioni particolari della forma: $R=\varrho^\lambda$ (e $R=\varrho^{1-\lambda}$, la quale seconda soluzione non ci servirà nel seguito).

La (4) posto $\tau = \cos \varphi$ diviene:

$$(1-\tau^2)\frac{d^2 T}{d\tau^2} + \lambda(\lambda-1) T = 0. \tag{5}$$

Se:

$$T(\tau) = (1-\tau^2) S(\tau),$$

la $S(\tau)$ soddisfa l'equazione:

$$(1-\tau^2)\frac{d^2 S}{d\tau^2} - 4\tau \frac{dS}{d\tau} + (\lambda-2)(\lambda+1) S = 0.$$

Supposto $\lambda$ intero questa equazione ammette come integrale la funzione sferica generalizzata, che si suole indicare con $C_{\lambda-2}^{\frac{3}{2}}(\tau)$ ([21]).

Si hanno dunque le soluzioni particolari della (5):

$$T(\tau) = (1-\tau^2) C_{\lambda-2}^{\frac{3}{2}}(\tau) = \operatorname{sen}^2 \varphi\, C_{\lambda-2}^{\frac{3}{2}}(\cos \varphi);$$

e ponendo $\lambda - 2 = n$ si hanno le soluzioni particolari della (A):

$$z_n = \varrho^{n+2} \operatorname{sen}^2 \varphi\, C_n^{\frac{3}{2}}(\cos \varphi). \tag{6}$$

---

([21]) Vedi, per esempio, l'articolo di A. WANGERIN-A. LAMBERT: *Fonctions sphériques* in Encycl. des sciences mathém., II, 5 (28) e l'articolo seguente (28 a) di P. APPELL-A. LAMBERT: *Généralisations diverses des fonctions sphériques.* Le formule che occorrono nel seguito sono quasi tutte riportate da TRICOMI, l. c., pp. 172-175. Nei lavori citati sono date formule per le funzioni sferiche generalizzate $C_n^\nu(\tau)$; qui $\nu = \frac{3}{2}$. Una trattazione completa di tali funzioni e di altre più generali si trova in NIELS NIELSEN: *Théorie des fonctions métasphériques.* Gauthier-Villars, Paris, 1911. NIELSEN indica le $C_n^\nu(\tau)$ con $P^{\nu, n}(\tau)$. Vedi pure APPELL-KAMPÉ DE FÉRIET: *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques. Polynomes d'Hermite.* Paris, Gauthier-Villars, 1926. Note I, pp. 389-391 (le $C_n^{(\nu)}(\tau)$ sono ivi indicate con $V_n^{(s)}(\tau)$). Le $C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)$ sono le derivate delle ordinarie funzioni sferiche, cioè dei polinomi di LEGENDRE.

Le soluzioni particolari (6) della (A) sono polinomi in $x, y$; infatti dalla formula ([22]):

$$C_n^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-s\right)}{s!\,(n-2s)!}\,2^{n-2s}(\cos\varphi)^{n-2s} \tag{7}$$

dove $m=\frac{n}{2}$ o $m=\frac{n-1}{2}$, secondo che $n$ è pari o dispari, si trae:

$$\varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-s\right)}{s!\,(n-2s)!}\,2^{n-2s}\varrho^{2s}(\varrho\cos\varphi)^{n-2s}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\Gamma\left(\frac{3}{2}+n-s\right)}{s!\,(n-2s)!}\,2^{n-2s}(4x+y^2)^s y^{n-2s}.$$

Porremo:

$$\varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi)=P_n(x,y), \tag{8}$$

dove le $P_n(x,y)$ sono polinomi di grado $n$, e avremo le soluzioni particolari della (A):

$$z_n(x,y)=xP_n(x,y), \tag{9}$$

che, come polinomii, soddisfano la (A) in tutto il piano, mentre il primo membro della (8) è definito solo per $x\geqslant 0$, poichè le $\varrho$ e $\varphi$ sono definite dalla (1′) per $x\geqslant 0$. È noto che:

$$\left|C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)\right|\leqslant C_n^{\frac{3}{2}}(1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{10}$$

Dunque per $x\geqslant 0$ le $P_n(x,y)$ soddisfano la disuguaglianza:

$$|P_n(x,y)|\leqslant\frac{(n+1)(n+2)}{2}\varrho^n. \tag{11}$$

Per $x=0$, è $\varrho=|y|$, $\varphi=0$ per $y>0$, $\varphi=\pi$ per $y<0$; per $\varphi=0$ è $\tau=1$ e $C_n^{\frac{3}{2}}(1)$ è dato dalla (10); per $\varphi=\pi$ è $\tau=-1$ ed è noto che:

$$C_n^{\frac{3}{2}}(-1)=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dunque:

$$P_n(0,y)=\left[\frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x}\right]_{x=0}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}y^n. \tag{12}$$

Nel semipiano $x\leqslant 0$ le $z_n(x,y)$, come soluzioni della (A), sono date dalla formula (B) del § 1:

$$z_n(x,y)=\frac{4}{\pi}(n+1)(n+2)x\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}[Y(t)]^n\,dt, \tag{13}$$

---

([22]) NIELSEN, l. c., chap. VII, § XXXI, p. 94, form. (5).

dove:

$$Y(t)=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}t.$$

Si ha dunque:

$$(14)\qquad P_n(x,y)=\frac{4(n+1)(n+2)}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}[Y(t)]^n dt=$$

$$=\frac{4(n+1)(n+2)}{\pi}\Bigg[y^n\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt-$$

$$-2^2\binom{n}{2}y^{n-2}x\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^2dt+$$

$$+2^4\binom{n}{4}y^{n-4}x^2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^4dt-\dots$$

$$+(-1)^r2^{2r}\binom{n}{2r}y^{n-2r}x^r\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(2t-1)^{2r}dt+\dots\Bigg],$$

come si vede facilmente, tenendo conto che:

$$\int_0^1 (2t-1)^{2r+1}t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=0.$$

Per $0\leqslant t\leqslant 1$ è:

$$|Y(t)|\leqslant|y|+2|x|^{\frac{1}{2}};$$

si trova così la diseguaglianza valida in tutto il piano, e anche per $x$ e $y$ complessi:

$$(15)\qquad |P_n(x,y)|\leqslant\frac{(n+1)(n+2)}{2}(|y|+2|x|^{\frac{1}{2}})^n.$$

## § 4.

Consideriamo le parabole di equazione:

$$4x+(y-y_0)^2=k,\qquad (k \text{ costante}).$$

Tali parabole, aventi per asse la retta $y=y_0$, colla concavità rivolta dalla parte delle $x$ negative, saranno dette *curve normali* per la (A). Se $k=0$, le curve normali sono le caratteristiche della (A) nel semipiano iperbolico.

Supposto $k>0$, sia $\sigma$ una di tali curve normali; allora:

TEOREMA IX. - *Nell'area $D$* (vedi fig. 2) *limitata dall'arco $c$ di $\sigma$ posto nel semipiano $x\geqslant 0$, e dagli archi $MR$ e $NR$ di caratteristiche uscenti dagli estremi $M$ e $N$ di $c$ esiste ed è unico l'integrale $z(x, y)$, che su $c$ assume valori dati mediante una funzione della forma: $x\varphi(y)$, dove $\varphi(y)$*

*è finita e continua nei punti di c, estremi inclusi, e che è nullo sull'asse y; la $z(x,y)$ è funzione analitica nei punti interni a D.*

Non è restrittivo supporre $y_0=0$ e $k=1$ ([23]); si può dunque considerare la curva normale:

(1) $$4x+y^2=1.$$

Le formule (1) del § 3, posto $\tau=\cos\varphi$, si possono scrivere:

(2) $$x=\frac{\varrho^2(1-\tau^2)}{4},\qquad y=\varrho\tau,\qquad (-1\leqslant\tau\leqslant 1).$$

Le (2) definiscono un cambiamento di variabili, che muta la (1) nella:

$$\varrho^2=1,$$

e, in generale, le curve normali di equazioni:

$$4x+y^2=k$$

nelle $\varrho=\sqrt{k}$, per $k>0$.

Allora lungo $c$ è:

$$x\varphi(y)=\frac{1-\tau^2}{4}\varphi(\tau),$$

dove $\varphi(\tau)$ è finita e continua per $-1\leqslant\tau\leqslant 1$; esiste una quantità positiva $\mu$, tale che:

(3) $$|\varphi(\tau)|\leqslant\mu,\qquad \text{per } -1\leqslant\tau\leqslant 1.$$

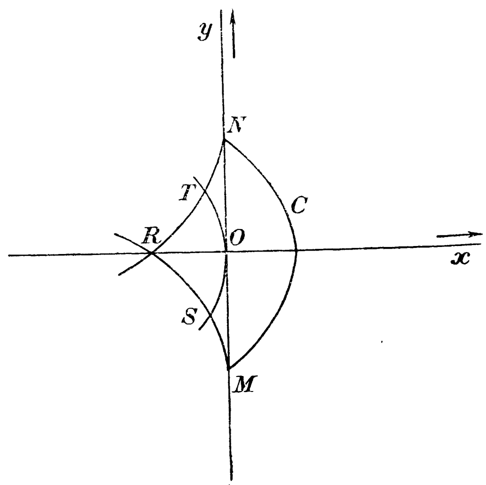

Fig. 2.

È noto che una tale funzione $\varphi(\tau)$ si può sviluppare in serie di funzioni $C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)$:

(4) $$\varphi(\tau)=\sum_n c_n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau),$$

dove la serie converge uniformemente per $-1\leqslant\tau\leqslant 1$, ed è:

(5) $$c_n=\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)\,C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)(1-\tau^2)\,d\tau.$$

Tenuto conto della (10) del § 3 e della (3) del presente paragrafo, si trova:

(6) $$|c_n|\leqslant\frac{2n+3}{3}\mu.$$

---

([23]) Il cambiamento di variabili:

$$x=kX;\qquad y=k^{\frac{1}{2}}Y+y_0$$

non muta la (A) e riduce l'equazione $4x+(y-y_0)^2=k$ alla forma $4X+Y^2=1$.

Formiamo la serie:

$$(7)\qquad \sum_n c_n \varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau) = \sum_n c_n P_n(x, y), \qquad (0 \leqslant \varrho \leqslant 1\,;\ -1 \leqslant \tau \leqslant 1),$$

dove le $P_n(x, y)$ sono i polinomi definiti dalla (8) del § 3. Per la (11) del § 3 e per la (6) precedente, i termini della serie (8) non superano in valore assoluto i termini della serie:

$$\frac{\mu}{6} \sum (2n+3)(n+1)(n+2)\varrho^n,$$

che converge uniformemente per $0 \leqslant \varrho \leqslant \delta$ $(\delta < 1)$.

La serie (7) converge dunque uniformemente per $0 \leqslant \varrho < 1$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$; converge pure uniformemente per $\varrho = 1$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$, perchè per $\varrho = 1$ la serie (7) si riduce alla (4), uniformemente convergente per ipotesi. Dunque la serie (7) converge uniformemente all'interno e sul contorno del dominio $C$ limitato dall'arco $c$ di curva normale e dal segmento $MN$ dell'asse $y$. Allora la funzione:

$$(8)\qquad z(x, y) = x \sum_n P_n(x, y),$$

che è uguale in $C$ a una serie uniformemente convergente di integrali della (A) è un integrale della (A) per il Teorema VIII del § 2; la $z(x, y)$ è nulla sull'asse $y$; sulla curva $c$, lungo cui $\varrho = 1$, si riduce a:

$$\frac{1-\tau^2}{4} \sum c_n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau) = \frac{1-\tau^2}{4}\varphi(\tau) = x\varphi(y),$$

Si è così ridimostrato, in un caso particolare, il Teorema VII del § 2, col vantaggio che qui si è data dell'integrale $z(x, y)$ una espressione esplicita, che ci servirà nello studio delle derivate di $z$ per $x = 0$.

Per una proprietà generale delle equazioni di tipo ellittico ([24]) la $z(x, y)$ è analitica e soddisfa dunque il teorema, almeno nella parte $C$ del dominio $D$, posta nel semipiano $x \geqslant 0$. Si tratta di dimostrare che la funzione $z(x, y)$ definita dalla (8) soddisfa il teorema in tutto il dominio $D$.

Tenuto conto della (12) del § 3 si trova:

$$(9)\qquad z_x(0, y) = \lim_{x \to 0} \frac{z(x, y)}{x} = \sum_n c_n P_n(0, y) = \sum_n c_n (n+1)(n+2) y^n = \nu(y).$$

La $z_x(0, y)$ è dunque rappresentata da una serie di potenze $\nu(y)$, il cui raggio di convergenza è almeno uno, ed è una funzione analitica di $y$, almeno per $|y| < 1$; la serie converge anche per $y = \pm 1$, poichè:

$$\begin{cases} \nu(1) = \frac{1}{2} \sum_n c_n (n+1)(n+2) = \varphi(1) \\ \nu(-1) = \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n c_n (n+1)(n+2) = \varphi(-1). \end{cases}$$

La serie (9) converge dunque uniformemente per $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

---

([24]) PICARD, l. c.

Per il Teorema I del § 1 nel trilatero $T$ posto nel semipiano iperbolico e limitato dal segmento $-1 \leqslant y \leqslant 1$ e dagli archi $MR$ e $NR$ di caratteristiche per gli estremi di questo (vedi fig. 2) è determinato l'integrale della (A), che soddisfa le condizioni ai limiti:

$$z(0, y)=0, \qquad z_x(0, y)=\nu(y), \qquad (-1 \leqslant y \leqslant 1);$$

esso è dato dalla formula (B) del § 1, cioè:

$$(10) \qquad z(x, y)=\frac{8x}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\nu[Y(t)]dt=$$

$$=\frac{4x}{\pi}\sum_n c_n(n+1)(n+2)\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}[Y(t)]^n dt=x\sum_n c_n P_n(x, y),$$

dove si è posto:

$$Y(t)=y-2(-x)^{\frac{1}{2}}+4(-x)^{\frac{1}{2}}t,$$

e si è tenuto conto della formula (14) del § 3.

La $z(x, y)$ è così definita in tutto $D$; dobbiamo ancora dimostrare che le sue derivate seconde sono continue per $x=0$ e che $z(x, y)$ è funzione analitica anche per $x \leqslant 0$; $z(x, y)$ deve dunque potersi definire, quando $x$, $y$ variano in un conveniente dominio complesso ([25]).

La diseguaglianza (15) del § 3 vale comunque siano $x$, $y$, reali o complessi; se $\delta$ è un numero qualsiasi, minore di uno, consideriamo i valori, reali o complessi, di $x$, $y$ per cui:

$$(11) \qquad |y|+2|x|^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta.$$

Se $x$, $y$ sono reali, questa diseguaglianza è soddisfatta all'interno e sul contorno dell'area limitata dagli archi delle caratteristiche:

$$y-2(-x)^{\frac{1}{2}}=-\delta, \qquad y+2(-x)^{\frac{1}{2}}=\delta,$$

compresi tra l'asse $y$ e il loro punto d'incontro, e dai loro simmetrici rispetto all'asse $y$. Comunque siano $x$, $y$, reali o complessi, purchè sia soddisfatta la (11), segue dunque, tenuto conto della diseguaglianza (15) del § 3 e della (6) del presente paragrafo:

$$|z(x, y)| \leqslant \frac{1}{6}\mu|x|\sum_n (2n+3)(n+1)(n+2)\delta^n.$$

Si è così determinato un dominio complesso, in cui converge uniformemente la serie (8), che dunque ivi rappresenta una funzione analitica di $x$, $y$ e può es-

([25]) Posto $x=x_1+ix_2$; $y=y_1+iy_2$, tale dominio si rappresenterà in un dominio conveniente nello spazio a quattro dimensioni, in cui le $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ sono coordinate cartesiane.

sere derivata termine a termine quante volte si vuole; a tale dominio appartiene la retta $y=0$, lungo cui le derivate di $z(x, y)$ di qualsiasi ordine sono finite e continue. In tutto $D$ la serie (8) rappresenta una stessa funzione analitica di $x, y$ che soddisfa il teorema.

Nella dimostrazione si è supposta $\varphi(\tau)$ continua anche per $\tau=\pm 1$; per la validità del Teorema IX basta però che esista una quantità positiva $\mu$ tale che sia:

$$|\varphi(\tau)|<\mu, \qquad \text{per } -1\leqslant\tau\leqslant 1$$

e che la $\varphi(\tau)$ ammetta lo sviluppo in serie (4) uniformemente convergente per $-1<\tau<1$. In queste ipotesi non si può più assicurare la convergenza per $\tau=\pm 1$ della serie (9), che rappresenta $\nu(y)$; segue però che:

$$|\nu(y)|<\mu, \qquad (-1\leqslant y\leqslant 1),$$

e questa condizione è sufficiente per poter esprimere $z(x, y)$ sugli archi di caratteristiche, che limitano $T$, mediante la formula (B) del § 1.

Si è nelle condizioni precedenti, per esempio, se $\varphi(\tau)$ è analitica per $|\tau|<1$, e non si sa nulla del comportamento di $\varphi(\tau)$ per $\tau=\pm 1$. Infatti una tale funzione per $-1<\tau<1$ si può sviluppare certamente in una serie uniformemente convergente di funzioni $C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)$ [26] e i coefficienti $c_n$ dello sviluppo sono dati dalla (5) [27].

Questa osservazione ci permette di completare la dimostrazione del teorema generale di esistenza lasciata sospesa nel § 3, Teorema VII.

Se $\gamma$ è una curva posta nel semipiano $x\geqslant 0$, avente gli estremi $M$ e $N$ sull'asse $y$ (vedi fig. 1), di equazioni parametriche: $x=x(t)$, $y=y(t)$, si trova che:

---

[26] Vedi NIELSEN, l. c., pp. 136-137.

[27] Per $-1<\tau<1$ è $\varphi(\tau)=\sum_n c_n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)$; non possiamo integrare per serie nell'intero intervallo $-1\leqslant\tau\leqslant 1$, in modo da ricavare per le $c_n$ la loro espressione (5), perchè nei punti $\tau=\pm 1$ non sappiamo come si comporti la serie. Però la formula (5) in questo caso si può dimostrare come segue. Sia:

$$F(\tau)=\int_0^\tau \varphi(\tau)d\tau.$$

La $F(\tau)$ è continua anche per $\tau=\pm 1$; sarà allora:

$$F(\tau)=\sum_n a_n C_n^{\frac{1}{2}}(\tau),$$

dove le $C_n^{\frac{1}{2}}(\tau)$ sono le ordinarie funzioni sferiche. Per $-1<\tau<1$ è:

$$F'(\tau)=\varphi(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{dC_n^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n C_{n-1}^{\frac{3}{2}}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} C_n^{\frac{3}{2}}(\tau),$$

TEOREMA X. - *In tutto il dominio $D$, limitato da $\gamma$ e dagli archi di caratteristiche $MR$ e $NR$ per i suoi estremi esiste uno e un solo integrale della* (A), *che è funzione analitica nei punti interni a $D$, è continua sul contorno di $D$, è nulla sul segmento $MN$ dell'asse $y$, e su $\gamma$ si riduce ad una funzione continua assegnata ad arbitrio: $f(t)=x(t)\varphi(t)$, dove $\varphi(t)$ è finita e continua anche nei punti $M$ e $N$ di $\gamma$* [28].

Nel Teorema VII si era dimostrata l'esistenza della funzione $z(x, y)$ che soddisfa il teorema nel dominio $C$ compreso tra $\gamma$ e l'asse $y$; se:

$$|\varphi(t)|<\mu, \tag{12}$$

si era visto che in tutto $C$ è:

$$\left|\frac{z(x, y)}{x}\right|<\mu \quad [29], \tag{13}$$

e che la funzione $z(x, y)$ è analitica nei punti interni a $C$. Si tratta ora di dimostrare che nei punti del segmento $MN$ $(m<y<n)$ la $z_x(0, y)=\nu(y)$ esiste ed è fun-

---

perchè:

$$\frac{dC_n^\nu(\tau)}{d\tau}=2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(\tau).$$

Deve essere dunque $c_n=a_{n+1}$; è noto che:

$$(*)\quad a_{n+1}=\frac{2n+3}{2}\int_{-1}^{1}F(\tau)C_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau=\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}F(\tau)\left[2\tau\frac{dC_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}-(1-\tau^2)\frac{d^2C_n^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau^2}\right]d\tau,$$

in cui si è sostituito a $C_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)$ il suo valore tratto dall'equazione differenziale delle funzioni sferiche. Ora:

$$2\tau\frac{dC_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}-(1-\tau^2)\frac{d^2C_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau^2}=\frac{d}{d\tau}\left[-(1-\tau^2)\frac{dC_{n+1}^{\frac{1}{2}}(\tau)}{d\tau}\right]=-\frac{d}{d\tau}[(1-\tau^2)C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)].$$

Sostituendo nella (*) e integrando per parti si trova:

$$c_n=a_{n+1}=\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}\varphi(\tau)(1-\tau^2)C_n^{\frac{3}{2}}(\tau)d\tau,$$

che è la (5).

[28] Le osservazioni precedenti ci permettono di supporre la curva $\gamma$ qualsiasi, realizzando, rispetto al Teorema V, p. 42, del lavoro precedente (M. CIBRARIO: *Alcuni teoremi di esistenza e di unicità per l'equazione $xz_{xx}+z_{yy}=0$*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 68, 1932, pp. 35-44), il progresso essenziale di aver tolta l'ipotesi che $\gamma$ finisca con due archetti finiti di curva normale.

[29] Nella dimostrazione del Teorema VII si era supposta $\varphi(t)\geqslant 0$, e quindi $\frac{z(x, y)}{x}\geqslant 0$; ma la diseguaglianza (13) vale comunque sia il segno di $\varphi(t)$.

zione $D^{II}$; sia $P$ un punto interno al segmento $MN$, di coordinate $0, y_0$ $(m<y_0<n)$; si potrà determinare una quantità positiva $h$, tale che l'arco $c$ della curva normale:

$$4x+(y-y_0)^2=h^2,$$

corrispondente a $x\geqslant 0$, sia interno a $C$; nei punti di $c$ si può porre:

$$z(x,y)=x\psi(y), \qquad (y_0-h<y<y_0+h),$$

dove è:

$$|\psi(y)|<\mu;$$

$\psi(y)$ è funzione analitica di $y$ per $y_0-h<y<y_0+h$, mentre per $y=y_0\pm h$ (cioè nelle intersezioni di $c$ coll'asse $y$) si sa solo che $\psi(y)$ resta limitata. Al dominio compreso tra $c$ e l'asse $y$ si può allora applicare il Teorema IX, che prova l'esistenza e l'analiticità della funzione $\nu(y)$ per $y_0-h<y<y_0+h$. Dunque in ogni punto $y$ $(m<y<n)$ la $\nu(y)$ esiste ed è funzione analitica; poichè:

$$\nu(y)=\lim_{x\to 0}\frac{z(x,y)}{x},$$

dalla (13) segue:

(13′) $$|\nu(y)|<\mu, \qquad (m\leqslant y\leqslant n).$$

Agli estremi del segmento $MN$ si sa solo che la $\nu(y)$ resta finita; però la $\nu(y)$ può non tendere ad alcun limite per $y=m$ o per $y=n$. Poichè $\nu(y)$ resta finita anche per $y=m$ e per $y=n$, si può applicare la formula (B) del § 1; la $z(x,y)$ è così definita all'interno e sul contorno del trilatero $T$, limitato dal segmento $MN$ dell'asse $y$ e dalle caratteristiche $MR$ e $NR$ per i suoi estremi. Dalla formula (B) e dalla (13′) segue che anche in $T$ vale la (13). La $z(x,y)$ è funzione analitica nei punti interni a $T$, e, per quanto si è visto nella dimostrazione del Teorema IX, anche nei punti del segmento $MN$, estremi esclusi; $z(x,y)$ è dunque funzione analitica in tutti i punti interni a $D$.

Da quanto si è dimostrato segue che un integrale della (A) definito in un dominio $D$, attraversato dall'asse $y$, è necessariamente una funzione analitica di $x, y$ almeno nella parte di $D$ corrispondente a $x\geqslant 0$ e nel trilatero (o nei trilateri) posto nel semipiano $x\leqslant 0$ e limitato dagli archi di caratteristiche uscenti dagli estremi del segmento (o dei segmenti) comuni all'asse $y$ e al dominio $D$.

Risulta anche che, se un integrale $z(x,y)$ della (A) è definito in un dominio posto nel semipiano $x\geqslant 0$ e del cui contorno fanno parte uno o più segmenti dell'asse $y$, è nullo su di essi ed è funzione $D^{II}$ all'interno del dominio stesso, è funzione $D^{II}$ (anzi analitica) anche nei trilateri posti nel semipiano $x\leqslant 0$ e limitati rispettivamente da uno di quei segmenti e dalle caratteristiche per i suoi estremi.

Si è visto nella dimostrazione dei Teoremi VII e X che se sull'arco di curva $\gamma$ è:

$$\left|\frac{z(x,y)}{x}\right|<\mu,$$

la stessa relazione vale in tutto il dominio $D$, contorno incluso.

Se dunque su $\gamma$ è data una serie uniformemente convergente di integrali della (A):

$$\sum_n z_n(x, y),$$

dove:

$$z_n(x, y) = xu_n(x, y),$$

e le $u_n(x, y)$ sono finite e continue anche per $x=0$, tale serie converge uniformemente in tutto $D$; in $C$ (cioè nella parte di $D$ compresa tra l'arco di curva $\gamma$ e l'asse $y$) la serie:

$$\sum_n z_n(x, y)$$

rappresenta un integrale $z(x, y)$ della (A) per il Teorema VIII.

In $D$ converge pure uniformemente la serie:

$$\sum_n u_n(x, y)$$

e posto:

$$\nu_n(y) = \left[\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x}\right]_{x=0}; \qquad \nu(y) = \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right]_{x=0},$$

è:

$$\sum_n u_n(0, y) = \sum_n \nu_n(y) = \nu(y).$$

Nel trilatero $T$ per la formula (B) del § 1 è:

$$z(x, y) = \frac{8x}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \sum_n \nu_n[Y(t)] dt =$$

$$= \sum_n \frac{8x}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \nu_n[Y(t)] dt = \sum_n z_n(x, y),$$

dove:

$$Y(t) = y - 2(-x)^{\frac{1}{2}} + 4(-x)^{\frac{1}{2}} t,$$

e la serie $\sum_n z_n(x, y)$ rappresenta in $T$ l'integrale $z(x, y)$ della (A). Dunque per l'intero dominio $D$ vale il teorema di Harnack:

Teorema XI. - *Se una serie di integrali della* (A), *nulli sull'asse $y$, converge uniformemente su un arco di curva $\gamma$, terminato a due punti $M$ e $N$ dell'asse $y$, la serie stessa converge uniformemente in tutto il dominio $D$, compreso tra $\gamma$ e gli archi di caratteristiche per i suoi estremi e ivi rappresenta un integrale della* (A).

Ricorderemo ancora alcuni risultati, di notevole interesse, che si possono dedurre dal Teorema IX.

Teorema XII. - *All'interno del dominio $D$ limitato da un arco $c$ di curva normale, posto nel semipiano* $x \geqslant 0$ (vedi fig. 2), *arco che si può supporre di equazione* $4x+y^2=1$, *e dagli archi $MR$ e $NR$ di caratteristiche* *per i suoi estremi, esiste ed è unico l'integrale della* (A), *che è nullo sull'asse y e inoltre soddisfa una delle seguenti condizioni ai limiti:*

1°) (14) $z_x(0,y)=\nu(y)$, $(-1<y<1)$, dove $\nu(y)=\sum_n a_n y^n$ ([30]),

*e la serie converge per* $|y|<1$. *Se* $\sum |a_n|$ *converge, allora* $z(x,y)$ *è definita ed è continua anche sul contorno di* $D$.

2°) *Sugli archi di caratteristiche OT, OS, interni a E e uscenti dal punto O, medio del segmento MN, si riduce ad una funzione (necessariamente analitica) assegnata*

$$f(y)=\sum_{n=2}^{\infty} b_n y^n, \tag{15}$$

*dove la serie converge per* $|y|<\frac{1}{2}$ *ed è* $f(0)=f'(0)=0$. *Se converge* $\sum \frac{n(n-1)|b_n|}{2^{n-2}}$ *la* $z(x,y)$ *è definita ed è continua anche sul contorno di* $D$.

3°) *Sull'arco MR, per esempio, si riduce ad una funzione assegnata* $f(y)$ $(-1\leqslant y\leqslant 0)$ *che è analitica per* $\left|y+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$, *è* $D^{\mathrm{II}}$ *anche per* $y=0$ *e* $y=-1$, *e soddisfa le condizioni* $f(-1)=f'(-1)=0$.

*L'integrale* $z(x,y)$ *è in ogni caso funzione analitica di x, y nei punti interni a D.*

1°) Posto:

$$c_n=\frac{2a_n}{(n+1)(n+2)},$$

è:

$$\nu(y)=\frac{1}{2}\sum_n (n+1)(n+2)c_n y^n,$$

e la serie:

$$z(x,y)=x\sum_n c_n P_n(x,y), \tag{16}$$

converge uniformemente all'interno di $D$ e rappresenta ivi un integrale della (A) che soddisfa le condizioni ai limiti (14); infatti per $x\geqslant 0$ la serie (16) si può scrivere:

$$x\sum_n c_n \varrho^n C_n^{\frac{3}{2}}(\tau), \qquad (-1\leqslant\tau\leqslant 1,\ 0\leqslant\varrho<1),$$

i cui termini in valore assoluto sono minori dei termini della serie:

$$x\sum_n |a_n|\varrho^n,$$

convergente per $\varrho<1$, mentre che per $x\leqslant 0$ la $z(x,y)$ è data dalla formula (10) (vedi sopra la dimostrazione del Teorema IX). Assicurata la convergenza della serie (16), la dimostrazione del presente teorema è del tutto analoga a quella del precedente Teorema IX.

---

([30]) L'analiticità della funzione $\nu(y)$, per ciò che si è detto sopra, è una condizione necessaria.

Se $\sum |a_n|$ converge, la serie (16) converge anche sul contorno di $D$. Si è così risolto il problema di CAUCHY anche nel semipiano ellittico.

2°) Si ricordi il Teorema III del § 1 e la formula (24) del § 1, che dà $\nu(y)$ in funzione di $f(y)$; sostituendo in tale formula per $f(y)$ la sua espressione tratta dalla (15) si trova:

$$\nu(y) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)b_n}{2^{n-2}} y^{n-2} \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} dt = \sum_{n=2}^{\infty} a_n y^{n-2}, \tag{17}$$

dove:

$$a_n = -\frac{n(n-1)b_n}{2^{n-2}} \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} dt = -\frac{n(n-1)(n-2)b_n}{2^{n-3}} \int_0^1 t^{n-3}(1-t)^{\frac{1}{2}} dt. \tag{18}$$

Si ha:

$$|a_n| < \frac{n(n-1)|b_n|}{2^{n-3}}.$$

I termini della serie (18) in valore assoluto sono dunque minori di:

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|b_n| \left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-2},$$

che per ipotesi converge per $\frac{|y|}{2} < \frac{1}{2}$, $|y| < 1$; la serie di potenze (17) ha dunque il raggio di convergenza eguale ad uno, almeno. Si è così ricondotti al caso 1° e si può determinare la funzione $z(x, y)$, che soddisfa il teorema nei punti interni a $D$. Se poi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)|b_n|}{2^{n-3}}$$

converge, converge pure $\sum |a_n|$ e la funzione $z(x, y)$ è definita ed è continua anche sul contorno di $D$.

3°) Si ricordi il Teorema II del § 1 e si tenga conto che la formula (24) del § 1 era ottenuta nell'ipotesi che il punto $M$ coincidesse coll'origine, mentre qui il punto $M$ ha ordinata $-1$. La formula (24) diviene:

$$\nu(y) = -\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} f''\left[\frac{(y+1)t}{2} - 1\right] dt, \qquad (-1 \leq y \leq 1). \tag{19}$$

Poichè $f(y)$ e quindi $f''(y)$ sono analitiche per $\left|y + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, dalla formula (19) segue che $\nu(y)$ è funzione analitica regolare per $|y| < 1$, e che quindi si può porre:

$$\nu(y) = \sum_n a_n y^n,$$

dove la serie converge per $|y| < 1$ e inoltre per $y = \pm 1$, perchè $\nu(1)$ e $\nu(-1)$ sono determinate dalla (19). Si ricade così nel caso 1°.

Poichè $\nu(y)$ è determinata dalla (19) per $-1 \leq y \leq 1$, la formula (B) del § 1 permette di calcolare $z(x, y)$ anche sugli archi di caratteristiche, che limitano il trilatero $T$.