ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GEORGES BOULIGAND

Sur les ensembles ponctuels entourés de points ordinaires et, en particulier, sur les courbes et les surfaces à courbure bornée

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 2 (1934), p. 135-148

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_2_135_0>

SUR LES ENSEMBLES PONCTUELS ENTOURÉS DE POINTS ORDINAIRES ET, EN PARTICULIER, SUR LES COURBES ET LES SURFACES À COURBURE BORNÉE

par M. GEORGES BOULIGAND (Poitiers).

I. - Les recherches sur la construction de CANTOR-MINKOWSKI (ou C. M.) ont montré dès leur origine l'intérêt qui s'attache à l'étude de conditions particulières, imposées à l'ensemble ponctuel E donné ou encore à la situation d'un point M relativement à E, en vue d'affirmer qu'en ce point M, certaines propriétés locales de l'ensemble des points isodistants de E se trouvent réalisées ([1]). Dans cette direction, les récentes recherches de M. LUCIEN CHAMARD ont déterminé des progrès très importants ([2]) en donnant notamment des critères pour l'exclusion des points de la classe (β) et de la classe (γ).

Les théorèmes établis par M. GASTON VERGNÈRES ([3]) montrent que tout point de l'aire d'un triangle PMM' ou du volume d'un tétraèdre $PMM'M''$, ayant sur E un sommet P projection commune aux autres sommets est ordinaire. On peut se demander avec M. G. VERGNÈRES, comment il faut particulariser l'ensemble E pour que les points de l'espace, occupant relativement à E une position soumise à une condition préalablement donnée, soient ordinaires; cette condition peut consister, par exemple, dans le fait de ne considérer que les points dont la distance à l'ensemble E ne dépasse pas une longueur l donnée.

Je me propose ici de tirer, des propriétés générales établies au sujet de la

---

([1]) G. BOULIGAND: *Sur la Construction de Cantor-Minkowski.* Ann. Soc. Pol. Math., t. IX, année 1930 (pp. 21-31). Ce mémoire établit notamment ces théorèmes:

A) Tout point frontière de E_ϱ, non situé sur la frontière extérieure, est un point de multifurcation.

A') Soit M un point ordinaire, soit P sa projection sur E (qu'on peut toujours supposer fermé). Tout point de MP est ordinaire (p. 25).

Voir aussi: G. DURAND: *Sur une généralisation des surfaces convexes.* Journ. de Math., t. X, 1931, ou *Thèse*, Paris, 1931, n.os 58 et 59.

([2]) L. CHAMARD: *Sur la Construction de Cantor-Minkowski.* (Bull. Ac. Polon. des Sc. et des Lettres, année 1932, pp. 14-22); *Sur les points* (a) *de M. G. Durand.* (Rendic. dei Lincei, 6, XVI, pp. 396-400, Oct. 1932). Des développements plus complets sont donnés dans la *Thèse* de cet auteur (Poitiers, 1933). Voir aussi les Mém. de la Soc. Royale des Sc. de Liège).

([3]) *Sur l'unicité du minimum de la distance d un point à un ensemble.* (Rend. Accad. Lincei, 1934) et C. R. Ac. Sc. Paris, 27 novembre 1933. On écarte les points du côté MM' ou de la face $MM'M''$.

construction C. M. et de la distance d'un point à un ensemble, des conséquences immédiates relatives à ce problème:

Quelles conditions faut-il imposer à un ensemble ponctuel E, pour que tout point situé à la distance l de E soit ordinaire?

D'après le théorème A' de mon mémoire cité (fait que chaque point d'une projetante, distinct d'une extrémité, est ordinaire), la même propriété vaudra pour les points distants de moins de l.

Au problème précédent, se rattachera la recherche de critères permettant de distinguer, au sein de vastes catégories d'ensembles, les courbes et les surfaces à courbure bornée. Nous nous placerons d'ailleurs dans l'espace euclidien à trois dimensions. Les resultats obtenus montreront que la construction C. M., souvent invoquée dans les questions de géométric des ensembles, offre un grand intérêt au point de vue de la sélection des variétés. Avant d'aborder l'examen des conditions demandées, notons aussi l'apparentement du sujet avec la comparaison des deux notions: *parallèlisme C. M. et parallèlisme au sens classique* ([4]). Le premier est la relation irréversible entre la frontière extérieure d'un ensemble et le lieu des points l-distants de cet ensemble, lequel est, en géométrie plane, de longueur bornée. Tout le monde connait, dans le plan, la notion des courbes parallèles. Mais si l'on part d'une courbe C astreinte seulement à l'unicité de la paratingente en chaque point M, en portant sur la normale MN une longueur MP constante, P décrit un continu de JORDAN sur lequel l'image d'un arc de C n'est pas en général de longueur bornée, faute d'une hypothèse spécifiant par exemple que la pente de la tangente à C est une fonction à variation bornée de l'arc de cette courbe. Ainsi se révêle, en géométrie plane, la différence profonde entre parallèlisme C. M. et parallèlisme au sens classique. Mais justement, nous verrons dans le plan ces notions se rejoindre pour deux courbes, dont chacune, isodistante d'un ensemble de la catégorie étudiée, en est distante de moins de l; et dans l'espace, il en sera de même, les surfaces se substituant aux courbes.

Par là, nous serons encore amenés à considérer des congruences de normales dont il passe une droite et une seule par un point d'une certaine région, en nous plaçant à un grand degré de généralité; par là encore, nous atteindrons les cas où les enveloppes par réunion de certaines sphères sont aussi des enveloppes au sens ordinaire.

A la suite de ces préliminaires, qui nous fixent sur la tendance générale de notre étude à se rapprocher de conditions réalisées en géométrie infinitésimale classique, nous allons aborder le problème ci-dessus énoncé.

II. - Soit E_l l'ensemble ouvert obtenu en réunissant les sphères de rayon l centrées sur E. La frontière F de E_l est encore le lieu des points situés à une

---

([4]) Cf. G. BOULIGAND, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 197, année 1933, séance du 27 novembre.

distance l de E. Tout point de F est ordinaire: donc F, prise dans sa totalité joue aussi (théorème A de mon mémoire cité) le rôle de frontière extérieure de E_l. De chaque point de F est issue, par hypothèse, une projetante et une seule, laquelle aboutit en un point frontière de E. En vertu de la semi-continuité supérieure d'inclusion [5] à laquelle obéit la répartition des projetantes, cette répartition est continue.

Quel que soit l'ensemble E fermé et borné, j'ai d'ailleurs montré que l'ensemble des points ordinaires (à distance positive de E) est la réunion de segments ouverts disjoints: ces segments sont des projetantes [6]. Par tout point de E_l, même s'il est pris à distance arbitrairement petite de E, pourvu que cette distance soit positive, il passe dans l'hypothèse actuelle, une projetante, qui, dans le sens où elle s'éloigne de E, peut être prolongée jusqu'à F, sans qu'il se présente (même à son extrémité située sur F) de point de multifurcation. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants:

1°) Par chaque point de l'ensemble $F+E_l-E$, passe une seule projetante dépendant continument de ce point;

2°) Ces projetantes sont deux à deux disjointes. Leurs extrémités à distance nulle de l'ensemble E forment un ensemble partout dense sur la frontière de E, prise relativement à l'extérieur de cet ensemble, c'est-à-dire l'ensemble des points de E vers lesquels tendent des points extérieurs à E [7]; soit e cet ensemble.

Grâce à l'hypothèse, chaque projetante ne se termine (lorsqu'on vient de E) qu'après avoir coupé F. Il en résulte que le front de l'ensemble e pour la distance l est partout dense sur e. Comme ce front est un ensemble fermé, nous avons ce résultat:

3°) *L'ensemble e formé par les points de E qui sont limites de points extérieurs à E est son propre front, ainsi que celui de E, pour la distance l.*

Il importe de préciser cet énoncé en notant que chaque point P_0 de e, appartient au front de cet ensemble, relativement à la distance l, cela dans chaque constituant de l'ensemble des points extérieurs à E, et situés à une distance ϱ suffisamment petite de E. L'impossibilité de plus de deux sphères ouvertes disjointes ayant un point périphèrique commun s'oppose à ce que, pour ϱ suffisamment petit, cet ensemble ait plus de deux constituants.

---

(5) G. BOULIGAND: *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe* (abréviativement G. I. D.) p. 75 et note de la p. 92. Voir aussi l'*Enseignement mathématique* (t. XXXI, 1932, pp. 14-23); et *L'Essai sur l'unité des méthodes directes*, Liège, Mém. Soc. Roy. 1934.

(6) G. I. D.: énoncé au bas de la p. 93 et p. 94.

(7) Lorsque l'ensemble E est quelconque, il peut y avoir sur la frontière de E (prise quant à l'extérieur de E) des points qui ne soient accessibles par aucun segment de droite. En ces points n'aboutit aucune projetante. Mais le dérivé de l'ensemble des points où aboutissent des projetantes coincide avec la frontière précédente. Quoi qu'il en soit, l'énoncé 3° montre que ce genre d'inaccessibilité ne se produira jamais pour les ensembles E actuels.

III. - Soit M un point de $E_l - E$. La projetante abaissée de M sur l'ensemble E, soit MP, coupe F en un point Q. Rapportons le point M, non plus à l'ensemble E, mais à l'ensemble F. Un autre point Q' de F ne peut être intérieur à la sphère de centre P et de rayon l; mais MQ est le minimum de distance de M aux points situés sur cette sphère ou à l'extérieur; on a donc $MQ' > MQ$; par suite MQ est minimum strict de la distance du point M à l'ensemble F.

D'où ce résultat:

4°) *Tout point de $E_l - E$ est ordinaire, relativement à l'ensemble F; sa distance à cet ensemble est moindre que l.*

Complétons-le par ces remarques:

5°) *Les points de l'ensemble e sont à la distance l de l'ensemble F; dans l'ensemble ouvert E_l, ils possèdent cette propriété à l'exclusion de tout autre point* ([8]).

6°) *Le système des projetantes relatives à E et celui des projetantes relatives à F coincident dans $E_l - E$.*

Nous pourrons, d'après ces énoncés, étudier e comme la partie, intérieure à l'ensemble ouvert E_l, de l'ensemble des points qui sont situés à la distance l de la frontière F de cet ensemble. Nous nous trouvons ainsi ramenés à des applications immédiates des propriétés établies dans le mémoire cité de la Société Polonaise de Mathématique, ou dans l'Introduction à la Géométrie infinitésimale directe, ou dans la Thèse de M. G. DURAND.

IV. - Si l'ensemble E_l présente plusieurs constituants il en résulte une décomposition de E en ensembles disjoints mutuellement distants d'au moins $2l$.

Nous allons nous limiter, division du travail toujours permise, à étudier l'un de ces ensembles, ce qui revient à faire cette nouvelle hypothèse: *E_l est un domaine.*

Jointe à l'hypothèse initiale, je vais montrer qu'elle déclanche cette nouvelle propriété:

7°) *E est un continu.*

Sinon, nous aurions $E = A + B$, en appelant A et B des ensembles fermés disjoints. Alors les ensembles A_h et B_h déduits de A et de B par la construction C. M., avec le rayon h, pour h très petit, seraient à distance positive; puis, h ayant atteint en croissant une certaine valeur h_1, les frontières de A_h et B_h prendraient contact en un point au moins, situé à la distance h_1 de A ou

([8]) Au n.° 23 de sa *Thèse*, M. G. DURAND signale que la construction C. M., effectuée sur F avec le rayon l (pour E supposé quelconque) donne un ensemble ouvert dont la frontière se compose en général, outre le front φ_l de E et le lieu des point situés à la distance $2l$ de E, d'un troisième ensemble ψ. En vertu de notre hypothèse, l'ensemble ψ disparait. Les conditions pour la disparition de ψ sont étudiées par M. L. CHAMARD: *Sur quelques types de conditions imposées à la structure d'un ensemble ponctuel.* (Annali di Matematica, 1934).

aussi bien de B. Puisque A_l+B_l est un domaine, on a nécessairement $h_1<l$. Mais alors, le point commun aux frontières de A_{h_1} et de B_{h_1} serait un point de multifurcation contenu dans E_l, contrairement à notre hypothèse initiale.

Par suite, la nouvelle hypothèse introduite exige bien que E soit un continu.

V. - Il ne reste plus qu'à étudier le continu auquel se réduit l'ensemble E, à l'intérieur de chaque constituant de E_l: ce qui nous intéresse plus spécialement ici est la frontière de E, relativement à l'ensemble ouvert des points extérieurs à E.

Cette frontière n'est pas nécessairement un continu, comme on le voit en prenant pour E la couche pleine et fermée comprise entre deux sphères concentriques, dont la plus petite a son rayon supérieur à l, ce qui assure à tout point distant de l de E la propriété d'être ordinaire, en même temps qu'à E_l celle d'être un domaine. Mais la frontière e se compose de deux continus séparés.

Dans le cas où l'ensemble E ne contient pas de points intérieurs, on a $E=e$, et l'on est alors assuré de la continuité de la portion de e plongée dans un constituant de E.

VI. - Il ne peut se présenter sur e de points ordinaires, relativement à F, que si l'ensemble E offre des points intérieurs (cela, en vertu du théorème A de mon mémoire cité). On peut ajouter que les points ordinaires seront partout denses sur la partie de e comprenant les points de cet ensemble qui sont limites de points intérieurs à E.

Un cas particulier intéressant de cette circonstance est le cas où E est une figure convexe. M. LUCIEN CHAMARD a souligné l'importance de ce résultat presque évident: en *pareil cas, tout point extérieur à E est ordinaire*. Par rapport à l'ordre d'idée actuel, il se situe comme une solution du problème proposé, valable en prenant $l=+\infty$.

Pour établir la réciproque, on est amené à exprimer que l'ensemble E_l-E est formé de points ordinaires, quel que soit l. Pour l suffisamment grand, E_l ne peut offrir qu'un constituant. Donc E est nécessairement un continu.

Par suite E_l est un domaine quel que soit l. En outre, par chaque point extérieur à E passe encore une projetante et une seule. En tout point de e, aboutit au moins une telle projetante: une sphère arbitrairement grande, passant par ce point et ayant son centre sur ladite projetante, est toujours une sphère d'appui de E. Donc E admet un plan d'appui en chaque point de e, et par suite E est une figure convexe.

D'où cette réciproque du théorème de M. CHAMARD.

8°) *Un ensemble fermé E tel que tout point extérieur soit ordinaire est une figure convexe.*

Il est facile d'étudier des cas un peu plus généraux, et notamment celui où chaque point de e est limite de points intérieurs à l'ensemble E. On reprend ici le problème initial, après donnée préalable d'une longueur l. L'ensemble e appartient dès lors à la classe des surfaces où le paratingent se réduit à un plan, sur un ensemble partout dense de points.

Ces points sont les points ordinaires relativement à F: autour de chacun d'eux, dans un voisinage dont l'extension varie avec le point considéré, règne une représentation analytique explicite. Mais il se présente aussi sur e, dans le cas général, des points de multifurcation relativement à F: ceux d'où partent des projetantes non coplanaires sont ceux qui tombent sous le coup de l'application du théorème a) de M. VERGNÈRES, par lequel on pourrait retrouver une propriété de l'ensemble de ces points: il est dénombrable ([9]). Il y en a d'autres d'où sont issues des projetantes coplanaires; ces points, désignés par M. G. DURAND sous le nom de points de seconde espèce, sont ceux auxquels a trait le théorème b) de M. VERGNÈRES, visant le cas du triangle.

VII. - Nous nous en tiendrons désormais au cas où l'ensemble E est un continu dénué de points intérieurs. Alors, relativement à la frontière F de E_l, tout point de E est un point de multifurcation. Nous allons envisager deux cas particuliers dont l'étude préalable facilitera la suite de notre exposé.

Supposons d'abord qu'on introduise cette hypothèse: *de chaque point P de E suffisamment rapproché d'un point particulier P_0 de E, il part deux projetantes opposées, qui sont les seules projetantes issues de ce point.* Soient PM et PM' ces projetantes. On voit alors que le voisinage du point M_0 et celui du point M_0' sur F, lesquelles sont des portions de surface douées d'une représentation explicite par une fonction continument dérivable du premier ordre (c'est-à-dire à paratingent plan) correspondent biunivoquement au voisinage du point P_0 sur E: ce dernier se compose lui-même de points ordinaires relativement à la partie de F constituée par l'un des voisinages précédents. Le voisinage de P_0 sur E est donc lui-même une surface à représentation explicite par une fonction continument dérivable du premier ordre. Cette surface est bilatéralement C. M. pour la valeur l du rayon. En outre, nous avons ici parallélisme, au sens classique de ce terme, entre cette surface (limitée à une petite rondelle avoisinant P_0) et les rondelles correspondantes avoisinant M_0 et M_0': propriété bien remarquable, car en portant une longueur constante sur les normales à une surface représentable explicitement par une fonction continument dérivable du premier ordre, on obtient, en général, un continu des plus complexes ([10]).

La simplification qui se produit ici tient justement au fait que le lieu de M et celui de M', en tant que situés sur F, n'ont que des points ordinaires rela-

([9]) Les points qui composent cet ensemble sont des sommets de E, au sens de DENJOY.

([10]) Voir à ce sujet les remarques présentées au n.° 6 de mon Mémoire: *Sur les systèmes orthogonaux du plan et de l'espace à trois dimensions*, publié dans le volume de Jubilé tivement à E. De plus, on voit, que par rapport au lieu de M, restreint aux environs d'une position particulière de ce point, la position correspondante de M' est ordinaire (celle de P ou de tout point intermédiaire possédant la même propriété).

Il en découle une conséquence importante. Considérons deux positions P_1 et P_2 de P, auxquelles correspondent les positions M_1 et M_2 de M et les positions M_1' et M_2' de M'. Le point M_1 est ordinaire relativement au couple M_1', M_2' et sa projection sur ce couple étant M_1' on a $M_1M_2' > M_1M_1'$; de même, le point M_2 est ordinaire par rapport au couple M_1', M_2' et sa projection sur ce couple étant M_2' on a $M_2M_1' > M_2M_2'$. Il résulte de ces inégalités que, par rapport au plan médiateur du segment $M_1'M_2'$, le point M_1 est du même côté que M_1', et le point M_2 du même côté que M_2'. Donc l'angle des vecteurs M_1M_2 et $M_1'M_2'$ est aigu. Leur demi-somme géométrique P_1P_2 est plus longue que leur demi-différence géométrique, c'est-à-dire le vecteur joignant, sur une sphère fixe s de rayon l les extrémités de rayons parallèles à nos projetantes. Il en résulte que l'arc décrit par un point P a toujours pour image sur la sphère de rayon l, un arc dont la longueur ne peut dépasser la sienne. La surface décrite par le point P est donc douée d'un champ continu de normales, l'angle de deux de ces normales admettant une limitation proportionnelle à la longueur du chemin minimum unissant les pieds de ces normales sur la surface. C'est la notion usuelle des surfaces à courbure bornée.

VIII. - Conservant l'hypothèse que E est un continu privé de points intérieurs, cherchons ce qui arrive lorsque, d'un point P de E, on peut abaisser sur F deux projetantes PM_1 et PM_2 qui ne soient pas en prolongement. Chaque point de F étant ordinaire relativement à E, il en part, vers ce dernier ensemble, une projetante et une seule, en dépendance continue de son origine. Utilisons cette propriété pour obtenir, en totalité ou en partie, le voisinage de P sur E. A cet effet, considérons les points de E voisins de P et qui sont des projections sur E de points d'un certain voisinage v_1 (sur F) de M_1 ou aussi bien, sont projections sur E de points d'un certain voisinage v_2 (sur F) de M_2. Tous les points ainsi distingués sont sur la partie commune à un voisinage w_1 de P sur le lieu des points l-distants de v_1 et à un voisinage w_2 de P sur le lieu des points l-distants de v_2. Si v_1 et v_2 étaient des points, w_1 et w_2 seraient des calottes sphériques dont les plans paratingents en P, étant distincts, n'auraient qu'une droite commune. En fait, v_1 et v_2 sont ici de petites aires superficielles, prélevées sur F

Mathématique de MM. Pompéiu et Tzitzeica (pp. 115-125). Ces remarques sont relatives à la complexité acquise par le continu lieu de l'extrémité d'un segment de longueur constante issu d'un point d'une courbe plane à paratingente unique et demeurant constamment normal à cette courbe, complexité qui peut être très grande si l'on ne fait d'autre hypothèse sur la courbe.

dont les diamètres pourront être pris assez petits pour que toute paratingente en P à w_1, soit aussi peu inclinée qu'on voudra sur le plan perpendiculaire en P à PM_1, et que toute paratingente en P à w_2 soit aussi peu inclinée qu'on voudra sur le plan perpendiculaire en P à PM_2. Donc chaque paratingente de E en P fera, dans les conditions précédentes un angle arbitrairement petit avec la perpendiculaire en P au plan PM_1M_2. Au point P, l'ensemble E admet donc une paratingente unique. Il s'ensuit que l'intersection de w_1 et de w_2 est un arc simple, ayant une paratingente unique en P et *sur laquelle le point P peut jouer ou non le rôle d'extrémité.* Cet arc est commun à une infinité de portions de surfaces w_i obtenues en substituant à PM_1 ou à PM_2 l'une des projetantes coplanaires abaissées de P sur F dont les théorèmes de M. VERGNÈRES révèlent l'existence.

Nous allons, avant de poursuivre cette recherche, donner un exemple montrant l'objectivité de la remarque soulignée et révélant la possibilité de n'obtenir, dans la voie précédente, qu'une partie du voisinage du point P (lorsque les points M_1 et M_2 choisis sont tels que les points voisins fassent trouver des points de E distincts de P).

Prenons pour l'ensemble E une plaque carrée. En choisissant P sur l'un des côtés, nous pourrons choisir les points M_1 et M_2 d'une manière quelconque sur une demi-circonférence en évitant que M_1 et M_2 se trouvent simultanément aux extrémités du diamètre. Tous ces choix de M_1 et M_2 nous feront retrouver, dans la voie qui précède les environs de P sur le côté du carré qui y passe. Mais le voisinage de P comprend aussi des points de la plaque carrée distincts de points du bord. Notons aussi que si l'on prend pour P un sommet du carré, il existera tout un fuseau sphérique limité par deux demi-méridiens rectangulaires, tels que les points de ce fuseau compris (au sens strict) entre ces deux demi-méridiens aient pour projection commune le point P, de sorte que le voisinage de P s'obtiendra en prenant M_1 et M_2 sur un de ces demi-méridiens limites; d'où nos deux segments de droite (à paratingentes distinctes) contribuant avec d'autres points étrangers au bord, à former ici le voisinage de P sur l'ensemble E.

L'exemple ci-dessus et d'autres du même genre (plaque convexe) montrent la nécessité de distinguer les points de E, considérés relativement à F, suivant leur *espèce*, au sens que M. GEORGES DURAND a donné à ce terme.

Tous ces points de E, dans la construction C. M. effectuée sur l'extérieur de F sont des points frontières intérieurs de l'ensemble ouvert résultant de cette construction (puisque E est dépourvu de points intérieurs). Aucun point de E ne peut donc être point (α). Et, puisque E est un continu, ces points (γ) sont exclus; donc tous les points de E appartiennent à la classe β [11]. En les classant

---

[11] On sait en effet que les points de la classe (γ) sont isolés.

par espèces, nous les distinguerons en points β_1 ayant deux projetantes opposées, en points β_2 ayant des projetantes coplanaires donnant lieu à des projections localisables ou non sur une demi-circonférence, à des points β_3 ayant des projetantes non coplanaires. D'après les théorèmes de M. VERGNÈRES, les points de E qui sont β_2 relativement à F auront leurs projections réparties sur une demi-circonférence ou une circonférence entière, quant aux points de E qui sont β_3 relativement à F, leurs projections recouvriraient un fuseau sphérique inférieur ou égal à un hémisphère. Nous savons d'ailleurs que l'ensemble de ces derniers points est nécessairement dénombrable.

Considérons sur E un point qui soit β_1 relativement à F. En raison de la semi-continuité supérieure d'inclusion et des caractères de nos points β_2 ou β_3 actuels, ce point ne peut être limite que d'autres points β_1. Il s'ensuit que s'il se présente sur E des points β_1, l'ensemble E incluera des portions de surface doublement C. M., ce qui nous ramène aux conditions locales supposées réalisées au n.° VII.

Il est donc important d'examiner ce qui se passe lorsque l'ensemble E est dépourvu de points β_1. De chaque point de l'ensemble E, il devient possible d'abaisser sur F un système de deux projetantes non opposées. L'ensemble E possède en pareil cas la propriété suivante: en chacun de ses points qui est β_2, le paratingent de E se compose d'une droite unique, perpendiculaire au plan contenant les projetantes de ce point sur F. En effet, en vertu du raisonnement fait au premier alinéa du présent paragraphe VIII, chaque paratingente au point considéré est la perpendiculaire au plan de deux projetantes, lequel est ici indépendant du choix de ces projetantes.

Il s'ensuit que le voisinage de chaque point β_2 sur E est un arc simple. Comme les points β_3 forment un ensemble dénombrable, E est donc lui-même un arc simple: d'ailleurs, le demi-arc antérieur et le demi-arc postérieur à un point β_3 ont chacun une paratingente unique, perpendiculaire au plan d'un demi-méridien limite du fuseau recouvert par les projections, sur F, de notre point β_3 (ceci, parce que ces méridiens limites ont le privilège exclusif de contenir des projetantes de notre point β_3), vers lesquelles tendent des projetantes de points β_2 ou β_3, ait sujet desquelles on peut reprendre le même raisonnement que ci-dessus (début du parag. VIII).

Nous obtenons donc finalement pour E un arc simple doué en chaque point d'une paratingente unique, exeception faite d'une infinité dénombrable de points où le paratingent antérieur et le paratingent postérieur se composent chacun d'une droite unique, mais différente pour l'un et pour l'autre.

Je dis que ces points (c'est-à-dire les points β_3) ne peuvent exister. En effet, en un tel point A, nous aurons deux demi-tangentes non en prolongement. Séparons les deux petits arcs qui partent tangentiellement à ces demi-droites. Ils forment deux ensembles, et le lieu des points équidistants de ces ensembles comprend des points arbitrairement voisins de E. En effet, prenons sur le demi-arc antérieur un point S, sur le demi-arc postérieur un point T, tels que $\overset{\frown}{AS}=\overset{\frown}{AT}$ et joignons ST. Nous pourrons toujours prendre $\overset{\frown}{AS}$ assez petit pour que $\overset{\frown}{AS}$ et $\overset{\frown}{AT}$ soient situés dans deux cônes droits arbitrairement déliés de sommet A ayant pour axe les demi-tangentes. Alors les distances à nos arcs des points de ST, situés à l'intérieur d'un dièdre Δ compris dans le supplémentaire de l'angle plan des demi-tangentes, mais qui, pour $\overset{\frown}{AS}$ assez petit, peut en être pris aussi voisin qu'on veut, ces distances, dis-je, auront une différence d'un certain signe, à l'entrée de Δ, quand on parcourt la portion ST intérieure à ce dièdre (ST peut lui être, dans certains cas, tout entier intérieur), le signe contraire à la sortie; comme cette différence varie d'une manière continue, le changement de signe exige qu'elle passe par la valeur zéro. Le point A serait donc point d'accumulation de points de multifurcation, ce que notre hypothèse rend impossible. De cette contradiction résulte sur E l'absence de points β_3. Ainsi, en l'absence de point β_1 nous identifions finalement le voisinage de P sur E avec un arc d'une courbe ayant une seule paratingente en chaque point.

Soit maintenant C une telle courbe et M un point quelconque de l'espace distant de moins de l d'un point A de C. Ce point a au moins une projection P. Si MP n'était pas normal en P à la courbe, on pourrait trouver, infiniment près de P sur PM, un point N dont la distance à la tangente serait un infiniment petit équivalent à la distance de P à la courbe. On en conclut facilement que toute projetante abaissée d'un point de C sur F est ici dans le plan normal en ce point. Et finalement, nous obtenons comme solution la classe des courbes à paratingente unique décrites par le centre d'un disque de rayon l dont le plan demeure normal à la courbe, tous ces disques étant deux-à-deux disjoints: c'est là une des définitions possibles des courbes à courbure bornée. Il convient d'apporter à cet égard quelques précisions. Et c'est à cela que nous allons nous attacher quelques instants.

IX. - Considérons deux des disques précédents. Ils se trouvent dans les deux faces d'un dièdre dont l'angle plan $\Delta\varphi$ est aussi celui des tangentes à la courbe étudiée, au centre du premier disque et au centre du second. La corde ayant pour extrémités ces deux centres a sa longueur au moins égale à

$$2l \sin \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Nous aurons donc

$$\Delta s > 2l \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$$

d'où

$$\frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s} < \frac{1}{l}.$$

Par suite, un arc de la courbe sur lequel l'oscillation totale de φ reste inférieure à π satisfait toujours à une inégalité

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| < \frac{\pi}{2l}$$

qui définit, d'une manière usuelle, les courbes à courbure bornée.

Réciproquement, considérons un arc simple doué en chaque point d'une paratingente unique, tel que l'inégalité

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| < \frac{1}{l}$$

ait lieu pour chaque arc partiel prélevé sur le premier. Supposons que celui-ci soit de longueur tolale $<\pi l$. Nous allons prouver que les points, à la distance l_1 de cet arc inférieure à l, qui se trouvent dans un de ses plans normaux sont ordinaires.

A cet effet, nous adapterons à notre objet une méthode de raisonnement récemment donnée par M. C. CARATHÉODORY ([12]). Partons à son exemple de la propriété suivante (ERHARDT SCHMIDT): la corde d'un arc de longueur Δs prélevé sur notre arc donné $\overparen{AB}$ sera au moins égale à la corde de l'arc Δs du cercle de rayon l, c'est-à-dire au moins égale à

$$2l \sin \frac{\Delta s}{2l}.$$

Il s'ensuit qu'aucune portion de l'arc initial ne peut être tout entière hors d'une sphère de rayon l passant par ses deux extrémités (car la considération de l'arc $\Delta\sigma$ de grand cercle unissant ces deux points viendrait aussitôt infirmer la propriété de SCHMIDT).

Prenons sur $\overparen{AB}$ un point P distinct des extrémités. Sur l'arc $\overparen{PB}$, marquons une suite $\{P_i\}$ de points tendant vers P. Menons par P une sphère Σ' de rayon l à laquelle la demi-tangente postérieure en P soit extérieure et non tangente. Il existe une suite partielle $\{P_{m_j}\}$ de la précédente telle que les vecteurs PP_j soient extérieurs à cette sphère. Aucun arc $\overparen{P_{m_j}B}$ ne peut dès lors avoir de point dans ou sur Σ' et finalement, on en conclut que $\overparen{PB}$, exception faite du point P, est à l'extérieur de Σ'.

Soit maintenant Σ une sphère de rayon l tangente en P à la demi-tangente postérieure: elle est la limite d'une suite de sphères Σ_j' dont chacune répond aux conditions que nous imposions à Σ'. L'ensemble $\overparen{PB}-P$ extérieur à tous les Σ_j' ne peut donc contenir aucun point intérieur à Σ' ([13]).

([12]) C. CARATHÉODORY: *Die Kurven mit beschrankten Biegungen; Sitzungsberitche der preuszischen Akademie der Wissenschaften*, 1933, III (pp. 102-125).

([13]) Un raisonnement analogue montre la coincidence de la classe des courbes à courbure bornée, au sens usuel, avec celle *des continus tels que le cercle passant par trois de leurs*

De cette propriété des sphères de rayon l tangentes à l'arc $\overset{\frown}{AB}$, il résulte que tout point du rayon aboutissant au point de contact, sauf peut être le centre, est un point ordinaire. Donc tous les disques de rayon l, centrés sur la courbe et dont les plans lui sont normaux, se composent, sauf peut-être sur le bord, de points ordinaires. Ces disques ne peuvent donc avoir en commun que des points situés sur leurs bords. Considérons en particulier les deux disques d_A et d_B dans les plans normaux menés aux extrémités A et B de l'arc. Ils se trouvent dans les faces d'un dièdre contenant aussi, à son intérieur, tous les points ordinaires que nous venons de définir. Cette remarque permet de se représenter ici la configuration de l'ensemble ouvert $(\overset{\frown}{AB})_l$ obtenu en réunissant au système de points ordinaires défini à l'instant les points intérieurs aux hémisphères de rayon l décrits à l'extérieur de notre dièdre sur d_A et d_B comme grands cercles.

Nous voyons finalement, qu'étant donné un arc dont la courbure moyenne est partout au plus égale à $\frac{1}{l}$ et dont la longueur est moindre que πl, tout point distant de cet arc de moins de l est ordinaire.

X. - A la suite de ces digressions, reprenons l'étude d'un continu E dépourvu de points intérieurs et tel que tout point qui s'en trouve à la distance l soit ordinaire. Appelant P_0 quelque point de E, considérons l'ensemble ouvert des points extérieurs à E et distants de P_0 de moins de ϱ: soit $\Omega(P_0, \varrho)$ cet ensemble. On peut se proposer de reconnaitre l'influence qu'exerce, sur la structure locale de E, le nombre des constituants de $\Omega(P_0, \varrho)$. Nous approfondirons seulement les deux cas suivants:

a) Pour chaque point P_0 de E, et pour ϱ suffisamment petit, $\Omega(P_0, \varrho)$ présente plus d'un constituant;

b) Pour chaque point P_0 de E, et pour ϱ suffisamment petit, $\Omega(P_0, \varrho)$ ne présente qu'un seul constituant.

Cette manière de faire laisse encore échapper les cas complexes où, pour certains points P_0 de E, c'est la circonstance *a*) qui se produit, tandis que, pour

---

points ait son rayon supérieur à une longueur l donnée. J'ai montré (voir, par ex., G. I. D. ex. n.[os] 10 et 11, p. 220, et note pp. 85-86) qu'un tel continu est un arc simple dont le paratingent en chaque point se réduit à une droite unique. Cela posé une sphère de rayon l ne peut couper un tel arc $\overset{\frown}{AB}$ en plus de deux points: prenons sur $\overset{\frown}{AB}$ un point P et considérons une sphère S quelconque de rayon l, tangente en ce point à la courbe; on peut toujours (en conservant les notations ci-dessus) faire passer par P et P_i une sphère S_i dont le centre C_i tend vers le centre C de la précédente. Comme l'arc postérieur à P_i est formé de points non intérieurs à S, ce qui nous ramène, en vertu du mémoire cité de M. CARATHÉODORY, à une propriété caractéristique des courbes à courbure bornée. Au sujet de ces mêmes courbes, dans le plan, voir aussi un remarquable mémoire de M. ERRERA (Mém. Ac. Sc. Belgique, t. XII, 1932, pp. 1-45).

certains autres, c'est la circonstance b). De tels cas existent effectivement, considérons, dans le plan des xy la figure obtenue en enlevant, de l'aire d'un carré dé côté $2a$, symétrique par rapport à l'axe des x, et par rapport à l'axe des y, les points intérieurs aux cercles de rayon a décrits des sommets comme centres, et en ajoutant à l'aire restante les segments,

$$a \leqslant x \leqslant 2a, \qquad -2a \leqslant x \leqslant -a$$

de l'axe des y et des segments

$$a \leqslant y \leqslant 2a, \qquad -2a \leqslant y \leqslant -a$$

de l'axe des x. Nous réalisons bien un continu E obéissant à nos conditions initales et pour lequel l'ensemble $\Omega(P_0, \varrho)$ offre, pour ϱ assez petit, deux constituants en un point intérieur à notre aire entaillée, un seul constituant aux points des bords de cette aire et aux points des segments.

XI. - Occupons-nous du cas, où pour P quelconque sur E et pour ϱ suffisamment petit, $\Omega(P_0, \varrho)$ offre plus d'un constituant. D'après les remarques consécutives à l'énoncé 3°) (fin du paragraphe II), $\Omega(P_0, \varrho)$ offrira donc partout, pour ϱ suffisamment petit, deux constituants et deux seulement; de chaque point de E, partiront deux projetantes opposées: nous nous retrouvons donc dans les conditions du n.° VII, lesquelles donnent, comme solution, une surface bilatéralement C. M. ou encore, à courbure bornée.

De ce résultat, on déduit immédiatement le suivant:

Dans l'étude de la distance d'un point à une portion (projetée par exemple sur le plan des xy suivant une aire convexe) de la surface

$$z = f(x, y)$$

la propriété d'être point d'accumulation de points de multifurcation appartient à tout point de cette surface où se produit l'une des circonstances suivantes:

1°) Le paratingent en ce point n'est pas plan.

2°) Le contingent circulaire relatif à ce point et à une certaine demi-tangente au moins comprend au moins un cercle de rayon nul.

XII. - Dans le cas où, pour P_0 arbitraire sur le continu E, et pour ϱ assez petit, l'ensemble $\Omega(P_0, \varrho)$ n'a qu'un constituant, il n'y a donc sur E aucun point β_1.

Dès lors, nous trouvons pour E un arc simple à courbure bornée, conformément à ce que nous avons vu au n.° VIII.

Il s'ensuit incidemment qu'en prenant pour E, soumis aux conditions précédentes, un continu non irréductible entre deux de ces points, ou bien encore un continu irréductible offrant au moins un continu de condensation, ou bien un arc simple en certains points duquel le paratingent comprend plus d'une droite, ou bien l'un des contingents circulaires comprend un cercle de rayon nul, on pourra mettre en évidence des points de E où il y aura une accumulation de points de multifurcation.

REMARQUE. - Dans le cas auquel se rapporte l'exemple donné au n.° X, l'ensemble E comprendra simultanément des points β_1, β_2, β_3. Puisque E est d'aire totale bornée, les portions connexes saturées de l'ensemble des points β_1 (c'est-à-dire ici les constituants superficiels de E) forment au plus une collection dénombrable. Sur les bords correspondants peuvent se présenter des points β_3 et des points β_2. Les portions de surfaces à courbure bornée, mises ainsi en évidence, étant enlevées, il ne restera plus sur l'ensemble résiduel de point β_1. Chaque sous-continu prélevé sur cet ensemble sera donc (n.° VIII) un arc simple à courbure bornée.

XIII. - Les considérations précédentes ont permis à M. LUCIEN CHAMARD d'aborder avec succès l'étude des ensembles ponctuels entourés par des points de la seule classe (a). Son travail est sous presse aux *Annali di Matematica.*