ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 2 (1934), p. 105-134

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_2_105_0>

SULLE CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LE SUCCESSIONI DI FOURIER [1]

di LAMBERTO CESARI (Pisa).

Sia

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n \operatorname{sen} nx) \tag{1}$$

una serie trigonometrica e sia

$$a_0,\quad a_1,\quad b_1,\quad a_2,\quad b_2,\ldots,\quad a_n,\quad b_n,\ldots \tag{2}$$

la successione dei suoi coefficienti. Si dice che la (2) è una successione di FOURIER, e quindi che la (1) è una serie di FOURIER, se esiste una funzione $f(x)$, periodica, di periodo 2π, integrabile secondo LEBESGUE in $(0, 2\pi)$ e tale che tutti i termini (2) si possano ottenere da essa mediante le note formule di EULERO-FOURIER. Data a caso una successione essa non è in generale di FOURIER. Noi ci occupiamo nel presente lavoro delle condizioni sufficienti affinchè una data successione sia di FOURIER.

È noto il seguente teorema di SZIDON [2]:

« Se $a_n \to 0$ e se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta a_n|\lg n$ converge, la serie $\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ è di FOURIER. Se $b_n\to 0$ e se la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|\lg n$ converge, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n \operatorname{sen} nx$ è di FOURIER ».

Sono noti inoltre i seguenti teoremi:

Teorema di YOUNG [3]: « Se $a_n\to 0$ e se per ogni n, $\Delta^2 a_n \geqslant 0$, la serie $\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ è di FOURIER ».

---

[1] Il presente lavoro costituisce la parte essenziale della mia tesi di Laurea, discussa nel giugno 1933, presso l'Università di Pisa. C. N. MOORE nel Bulletin of the American Math. Soc., p. 346, ha annunciato un teorema che compare anche nel mio lavoro (vedi § 3, n.° 21). Io ho preso conoscenza di ciò solo quando questa mia memoria era già pronta per la stampa.

[2] Vedi S. SZIDON: *Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen*. Math. Zeitschr., Bd. 10 (1921), pp. 121-127.

[3] Vedi W. H. YOUNG: *On the Fourier series of bounded function*. Proc. London Math. Soc., S. 2, Vol. 12 (1913), pp. 41-70.

Teorema di KOLMOGOROFF [4]: « Se $a_n \to 0$ e se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^2 a_n| n$ converge, la serie $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ è di FOURIER ».

Il teorema di YOUNG è un caso particolare del teorema di KOLMOGOROFF.

Per collegare, e possibilmente estendere, questi teoremi, noi facciamo uso, nel presente lavoro, del noto concetto delle *differenze di ordine reale qualunque di una successione.*

Mediante le differenze di ordine <1 delle successioni $[a_n]$ e $[b_n]$, stabiliremo (§ 2) nuove condizioni sufficienti sia per le serie di soli seni, sia per le serie di soli coseni, e indipendenti dal teorema di SZIDON.

Facendo uso invece delle differenze di ordine >1 della successione $[a_n]$ stabiliremo (§ 3), per le serie di soli coseni, due teoremi che generalizzano rispettivamente i teoremi di YOUNG e di KOLMOGOROFF.

Per giungere a questi risultati ci sarà necessario far precedere alcuni teoremi sulle differenze di ordine reale qualunque di una successione tendente a zero e che dimostreremo rapidamente (§ 1).

§ 1.

1. - Sia $[a_n]$ una successione limitata e sia $\sigma \geqslant 0$ un numero reale. Si dicono differenze di ordine σ della successione $[a_n]$ i numeri

$$\Delta^\sigma a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} a_{n+t}, \qquad (n=0, 1, 2, \dots) \text{ [5]}.$$

Essendo ϱ e σ due numeri reali e positivi è sempre $\Delta^\varrho(\Delta^\sigma a_n) = \Delta^{\varrho+\sigma} a_n$.

Nell'ipotesi poi che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, è anche, per ogni $\sigma > 0$, $\lim_{n\to\infty} \Delta^\sigma a_n = 0$.

2. - TEOREMA. - *Se* $a_n \to 0$, *per ogni* $0 \leqslant \sigma' \leqslant \sigma \leqslant 1$, *si ha*

$$\Delta^{\sigma'} a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \Delta^\sigma a_{n+t}. \tag{3}$$

Supponiamo $\sigma = 1$. Dall'ipotesi che $a_n \to 0$, segue la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n$. Poniamo $\varrho_{p,q} = \sum_{n=p}^{p+q} \Delta a_n$ e indichiamo con ε_p il limite superiore dei numeri $|\varrho_{p,q}|$, $(q=0, 1, 2, \dots)$. Manifestamente $\lim_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$.

---

(4) Vedi A. KOLMOGOROFF: *Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue.* Bulletin International de l'Ac. Pol. des sciences et des lettres, S. A (1923), pp. 83-86.

(5) Vedi HOBSON: *Theory of Functions of a Real Variable.* II ed., Vol. II (1926), pag. 79.

Consideriamo le serie

$$b_n = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{\sigma'-1}{s} \Delta a_{n+s}.$$

Poichè i numeri $(-1)^s \binom{\sigma'-1}{s}$, $(s=0, 1, 2, \ldots)$ sono positivi, minori di 1 e decrescenti, ogni resto $\varrho'_{p,q} = \sum_{s=p}^{p+q} (-1)^s \binom{\sigma'-1}{s} \Delta a_{n+s}$ è in modulo minore del massimo dei numeri $|\varrho_{n+p,\, n+p+q'}|$, $(q'=0, 1, 2, \ldots, q)$ e quindi $|\varrho'_{p,q}| \leqslant \varepsilon_{n+p}$ qualunque sia q e infine $\lim\limits_{p\to\infty} \varrho'_{p,q} = 0$. Le serie (3) dunque convergono. D'altronde $|b_n| \leqslant \varepsilon_n$ e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Osserviamo ora che

$$\Delta b_n = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{\sigma'}{s} a_{n+s} - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{\sigma'}{s} a_{n+1+s} =$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{\sigma'+1}{s} a_{n+s} = \Delta^{\sigma'+1} a_n = \Delta(\Delta^{\sigma'} a_n),$$

onde $b_n = \Delta^{\sigma'} a_n + C$, dove C è una costante opportuna. Ma poichè

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \Delta^{\sigma'} a_n,$$

si avrà $C=0$ e quindi $b_n = \Delta^{\sigma'} a_n$.

Sia ora $\sigma < 1$. Allora, per quanto si è dimostrato,

$$\begin{aligned}
(4) \qquad & \sum_{t=0}^{q} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \Delta^{\sigma} a_{n+t} = \sum_{t=0}^{q} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{\sigma-1}{s} \Delta a_{n+t+s} = \\
& = \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \Delta a_{n+m} \sum_{t+s=m} \binom{\sigma'-\sigma}{t} \binom{\sigma-1}{s} + \\
& \qquad + \sum_{m=q+1}^{\infty} \Delta a_{n+m} \cdot \sum_{t=0}^{q} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \cdot (-1)^{m-t} \binom{\sigma-1}{m-t} = \\
& = \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \binom{\sigma'-1}{m} \Delta a_{n+m} + \\
& \qquad + \sum_{m=q+1}^{\infty} \Delta a_{n+m} \cdot \sum_{t=0}^{q} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \cdot (-1)^{m-t} \binom{\sigma-1}{m-t}.
\end{aligned}$$

Ora per $q \to \infty$ la prima delle somme (4) tende, per quanto si è dimostrato, a $\Delta^{\sigma'} a_n$. Consideriamo ora i numeri $\sum_{t=0}^{q} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \cdot (-1)^{m-t} \binom{\sigma-1}{m-t}$, $(m = q+1, q+2, \ldots)$, che sono tutti positivi. Essi inoltre sono minori di

$$\sum_{t=0}^{m} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \cdot (-1)^{m-t} \binom{\sigma-1}{m-t} = (-1)^m \binom{\sigma'-1}{m} < 1.$$

Essi infine vanno decrescendo. Infatti la differenza tra uno di essi e il successivo è data dalla somma

$$\sum_{t=0}^{q}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma}{t}\left\{(-1)^{m-t}\binom{\sigma-1}{m-t}-(-1)^{m+1-t}\binom{\sigma-1}{m-t+1}\right\}=$$
$$=\sum_{t=0}^{q}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma}{t}\cdot(-1)^{m-t}\binom{\sigma}{m+1-t},$$

certamente positiva essendo positivi tutti i suoi termini. Ragionando come dianzi si vede che la seconda delle somme (4) tende a zero al crescere di q.

3. - *Osservazione.* - *Il teorema precedente vale per ogni* $\sigma \geqslant \sigma' \geqslant 0$, *tali che* $\sigma-\sigma' \leqslant 1$. Infatti è $\Delta^\sigma a_n=\Delta^{\sigma-\sigma'}(\Delta^{\sigma'}a_n)$, $\lim_{n\to\infty}\Delta^{\sigma'}a_n=0$, onde, per il teorema precedente,

$$\Delta^{\sigma'}a_n=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma}{t}\Delta^{\sigma-\sigma'}(\Delta^{\sigma'}a_n)=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma}{t}\Delta^{\sigma}a_n.$$

4. - L'osservazione precedente ci permette di dimostrare il seguente

TEOREMA. - *Se* $a_n\to 0$, *per ogni* $\sigma>\sigma'\geqslant 0$, *si ha*

$$\Delta^{\sigma'}a_{m_p}=\sum_{m_{p-1}=m_p}^{\infty}\ \sum_{m_{p-2}=m_{p-1}}^{\infty}\cdots\sum_{m_1=m_2}^{\infty}\ \sum_{n=m_1}^{\infty}\ \sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma+p}{t}\Delta^\sigma a_{n+t} \tag{5}$$

dove $p=E(\sigma-\sigma')$ ([6]).

Infatti è $\sigma \geqslant \sigma'+p$ e $\sigma-\sigma'-p<1$, quindi

$$\Delta^{p+\sigma'}a_n=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma+p}{t}\Delta^\sigma a_{n+t}.$$

Ma essendo $\Delta^{p+\sigma'}a_n=\Delta(\Delta^{p+\sigma'-1}a_n)$ si ha $\sum_{n=m_1}^{m_1+q}\Delta^{p+\sigma'}a_n=\Delta^{p+\sigma'-1}a_{m_1}-\Delta^{p+\sigma'-1}a_{m_1+q+1}$, e poichè, per $q\to\infty$, $\lim \Delta^{p+\sigma'-1}a_{m_1+q+1}=0$, è

$$\sum_{n=m_1}^{\infty}\Delta^{p+\sigma'}a_n=\Delta^{p+\sigma'-1}a_{m_1}.$$

Analogamente

$$\sum_{m_1=m_2}^{\infty}\Delta^{p+\sigma'-1}a_{m_1}=\Delta^{p+\sigma'-2}a_{m_2},\ldots,\qquad \sum_{m_{p-1}=m_p}^{\infty}\Delta^{\sigma'+1}a_{m_{p-1}}=\Delta^{\sigma'}a_{m_p},$$

e con ciò il teorema è dimostrato.

5. - TEOREMA. - *Se* $a_n\to 0$ *e se per un* $\sigma>0$ *e per ogni* n *si ha* $\Delta^\sigma a_n\geqslant 0$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\Delta^\sigma a_n\cdot n^{\sigma-1}$ *converge.*

([6]) Diciamo $E(x)$ il più grande intero contenuto in x.

Sia $\sigma' \geqslant 0$ un numero qualunque $< \sigma$, onde, per il teorema precedente, vale la (5). Essendo $\Delta^\sigma a_{n+t} \geqslant 0$, la serie $(p+1)^{\text{upla}}$ (5) ha i termini tutti non negativi, e poichè essa converge iterandone le somme nel modo indicato dalla (5) stessa, essa converge assolutamente e quindi converge anche iterandone le somme in un altro modo qualsiasi e le varie somme sono tutte uguali tra loro. Quindi si avrà:

$$\Delta^{\sigma'} a_{m_p} = \sum_{n=m_p}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma' - \sigma + p}{t} \Delta^\sigma a_{n+t} \sum_{m_{p-1}=m_p}^{n} \sum_{m_{p-2}=m_{p-1}}^{n} \cdots \sum_{m_2=m_3}^{n} \sum_{m_1=m_2}^{n} 1 =$$

$$= \sum_{n=m_p}^{\infty} \binom{n - m_p + p - 1}{p-1} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma' - \sigma + p}{t} \Delta^\sigma a_{n+t} =$$

$$= \sum_{m=m_p}^{\infty} \Delta^\sigma a_m \sum_{n+t=m} (-1)^t \binom{n - m_p + p - 1}{p-1} \binom{\sigma' - \sigma + p}{t}.$$

E infine

$$\Delta^{\sigma'} a_{m_p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\sigma' - \sigma}{n} \Delta^\sigma a_{m_p + n}.$$

La serie ora scritta converge per ciò che si è detto. Da qui segue in particolare la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\sigma}{n} \Delta^\sigma a_n$ ossia della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \binom{n+\sigma-1}{n}$.

Ricordiamo ora che, per ogni $\tau > -1$, è

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n+\tau}{n} : \frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} = 1 \quad [7], \tag{6}$$

onde, dalla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \binom{n+\sigma-1}{n}$, segue quella della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \cdot n^{\sigma-1}$.

6. - TEOREMA. - *Se $a_n \to 0$ e se, per un $\sigma > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| \cdot n^{\sigma-1}$ converge, per ogni $0 \leqslant \sigma' < \sigma$, si ha $\Delta^{\sigma'} a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma' - \sigma}{t} \Delta^\sigma a_{n+t}$.*

Per il teorema del n.° 4 vale la (5). La serie $(p+1)^{\text{upla}}$ che si ottiene sostituendo ai termini della (5) i loro valori assoluti è

$$\sum_{m_{p-1}=m_p}^{\infty} \sum_{m_{p-2}=m_{p-1}}^{\infty} \cdots \sum_{m_1=m_2}^{\infty} \sum_{n=m_1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma' - \sigma + p}{t} |\Delta^\sigma a_{n+t}|. \tag{7}$$

---

[7] $\Gamma(x)$ è la nota funzione di EULERO. Si veda al § 3 in nota una dimostrazione di questa formula.

Da qui, invertendo, nel modo che si è fatto nel teorema precedente, l'ordine delle sommatorie, si ha la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\sigma'-\sigma}{n}\,|\,\Delta^\sigma a_{m_p+n}\,|$ ossia la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\,\Delta^\sigma a_{m_p+n}\,|\binom{n+\sigma-\sigma'-1}{n}$ certamente minorante, per la (6), della serie convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,\Delta^\sigma a_{m_p+n}\,|\cdot n^{\sigma-1}$.

Sotto le ipotesi del nostro teorema la (7) dunque converge assolutamente, onde altrettanto accade della (5) e la somma di questa serie sarà indipendente dall'ordine delle sommazioni. Sarà cioè

$$\Delta^{\sigma'}a_{m_p}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\sigma'-\sigma}{n}\Delta^\sigma a_{m_p+n}.$$

7. - TEOREMA. - *Se* $a_n \to 0$ *e se per un* $\sigma>0$ *la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,\Delta^\sigma a_n\,|\cdot n^{\sigma-1}$ *converge e se* σ' *è un numero qualsiasi tale che* $0<\sigma'<\sigma$, *anche la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,\Delta^{\sigma'} a_n\,|\cdot n^{\sigma'-1}$ *converge.*

Infatti, per il teorema del n.° 6, si può scrivere

$$\Delta^{\sigma'}a_n=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_{n+t}.$$

D'altronde, dall'ipotesi fatta, segue che la serie $\sum\limits_{m=0}^{\infty}|\,\Delta^\sigma a_m\,|\binom{m+\sigma-1}{m}$ converge. Ora la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\sigma'}{n}|\,\Delta^{\sigma'}a_n\,|$ è minorante della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\sigma'}{n}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{\sigma'-\sigma}{t}|\,\Delta^\sigma a_{n+t}\,|, \tag{8}$$

la quale è una serie doppia, a termini tutti positivi, sommata per righe. Sommata per diagonali, questa dà la serie semplice convergente:

$$\sum_{m=0}^{\infty}|\,\Delta^\sigma a_m\,|\sum_{n+t=m}\binom{-\sigma'}{n}\binom{\sigma'-\sigma}{t}\equiv\sum_{m=0}^{\infty}|\,\Delta^\sigma a_m\,|\binom{m+\sigma-1}{m}.$$

La serie doppia (8) dunque converge e quindi altrettanto accade della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\sigma'}{n}|\,\Delta^{\sigma'}a_n\,|$. Da qui infine, per la (6), segue la convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,\Delta^{\sigma'}a_n\,|\cdot n^{\sigma'-1}$.

8. - In modo analogo si dimostra il

TEOREMA. - *Se* $a_n \to 0$ *e se, per un* $\sigma > 0$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| n^{\sigma-1} \lg n$ *converge e se* σ' *è un numero qualsiasi tale che* $0 < \sigma' < \sigma$, *anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^{\sigma'} a_n| n^{\sigma'-1} \lg n$ *converge.*

9. - TEOREMA. - *Se, per un* $\sigma \geqslant 0$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n|$ *converge, per ogni altro* $\sigma' \geqslant \sigma$, *anche la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^{\sigma'} a_n|$ *converge.*

Infatti, essendo

$$\Delta^{\sigma'} a_n = \Delta^{\sigma'-\sigma}(\Delta^\sigma a_n) = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \Delta^\sigma a_{n+t},$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^{\sigma'} a_n|$ è minorante della serie doppia $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left| (-1)^t \binom{\sigma'-\sigma}{t} \right| |\Delta^\sigma a_{n+t}|$ sommata per righe. Ma questa converge perchè è a termini tutti positivi e, sommata per diagonali, dà la serie $\sum_{m=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_m| \sum_{t=0}^{m} \left| \binom{\sigma'-\sigma}{t} \right|$, minorante della serie convergente $M \sum_{m=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_m|$, dove M è la somma della serie $\sum_{t=0}^{\infty} \left| \binom{\sigma'-\sigma}{t} \right|$. Dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^{\sigma'} a_n|$ converge.

§ 2. - Applicazioni alla teoria delle serie di Fourier.

10. - **Lemma I.** - *Siano* σ *un numero reale tale che* $0 < \sigma < 1$ *ed* n *e* p *due interi tali che* $0 < p \leqslant n$. *Sia inoltre* $0 < x < 2\pi$ *un nuovo numero reale. Posto*

$$\left\{ \begin{aligned} \theta(x; n, p) &= \frac{1}{2} (-1)^n \binom{-\sigma}{n} + \sum_{t=1}^{p} (-1)^{n-t} \binom{-\sigma}{n-t} \cos tx, \\ \theta'(x; n, p) &= \sum_{t=1}^{p} (-1)^{n-t} \binom{-\sigma}{n-t} \operatorname{sen} tx, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

si ha

$$|\theta(x; n, p)| < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}, \qquad |\theta'(x; n, p)| < \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}. \tag{10}$$

Dimostriamo la prima di queste disuguaglianze. Applichiamo alla prima delle (9) la trasformazione di BRUNACCI-ABEL. Posto

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{n} \cos tx, \qquad (n = 1, 2, ...),$$

si ha

$$\theta(x;\,n,p)=\sum_{t=0}^{p-1}\left\{(-1)^{n-t}\binom{-\sigma}{n-t}-(-1)^{n-t-1}\binom{-\sigma}{n-t-1}\right\}\sigma_t(x)+(-1)^{n-p}\binom{-\sigma}{n-p}\sigma_p(x)=$$

$$=\sum_{t=0}^{p-1}\left\{\binom{n-t+\sigma-1}{n-t}-\binom{n-t-1+\sigma-1}{n-t-1}\right\}\sigma_t(x)+\binom{n-p+\sigma-1}{n-p}\sigma_p(x)=$$

$$=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{n-t+\sigma-2}{n-t}\sigma_t(x)+\binom{n-p+\sigma-1}{n-p}\sigma_p(x).$$

Ora è

$$|\,\sigma_n(x)\,|=\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Essendo $0<\sigma<1$, i numeri $\binom{n-t+\sigma-2}{n-t}$ sono tutti negativi, mentre $\binom{n-p+\sigma-1}{n-p}$ è positivo. Sarà allora

$$|\,\theta(x;\,n,p)\,|<\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left\{\left|\sum_{t=0}^{p-1}\binom{n-t+\sigma-2}{n-t}\right|+\binom{n-p+\sigma-1}{n-p}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left\{2\binom{n-p+\sigma-1}{n-p}-\binom{n+\sigma-1}{n}\right\}<\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Analogamente si dimostra la seconda delle (10).

11. - **Lemma II.** - *Siano σ un numero reale tale che $0<\sigma<1$ ed n un intero $\geqslant 1$. Esiste una costante C, indipendente da n e tale che, per ogni n,*

$$\int_0^\pi|\,\theta(x;\,n,n)\,|\,dx<C,\qquad\int_0^\pi|\,\theta'(x;\,n,n)\,|\,dx<C.$$

Si osservi che

$$\theta(x;\,n,n)=\frac{1}{2}(-1)^n\binom{-\sigma}{n}+\sum_{t=1}^{n}(-1)^{n-t}\binom{-\sigma}{n-t}\cos tx=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^n\binom{-\sigma}{n}+\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\cos(n-t)x=$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^n\binom{-\sigma}{n}+\cos nx\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\cos tx+$$

$$+\operatorname{sen}nx\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\operatorname{sen}tx,$$

$$\theta'(x;\,n,n)=\sum_{t=1}^{n}(-1)^{n-t}\binom{-\sigma}{n-t}\operatorname{sen}tx=\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\operatorname{sen}(n-t)x=$$

$$=\operatorname{sen}nx\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\cos tx-\cos nx\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\operatorname{sen}tx.$$

Poniamo

$$\lambda(n,x)=\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\cos tx,\qquad \lambda'(n,x)=\sum_{t=0}^{n-1}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\operatorname{sen} tx.$$

Avremo, applicando la trasformazione di BRUNACCI-ABEL,

$$\lambda(n,x)=\sum_{t=0}^{n-2}\left\{(-1)^t\binom{-\sigma}{t}-(-1)^{t+1}\binom{-\sigma}{t+1}\right\}\sigma_t(x)+(-1)^{n-1}\binom{-\sigma}{n-1}\sigma_{n-1}(x),$$

dove ora è $\sigma_t(x)=1+\cos x+\ldots.+\cos tx$, e quindi

$$\lambda(n,x)=\sum_{t=0}^{n-2}(-1)^t\binom{1-\sigma}{t}\sigma_t(x)+\binom{n-1+\sigma-1}{n-1}\sigma_{n-1}(x),$$

$$\int_0^\pi|\lambda(n,x)|\,dx\leqslant\sum_{t=0}^{n-2}\left|(-1)^t\binom{1-\sigma}{t}\right|\int_0^\pi|\sigma_t(x)|\,dx+\binom{n-1+\sigma-1}{n-1}\int_0^\pi|\sigma_{n-1}(x)|\,dx.$$

Ma, come è noto, esistono due costanti A e B, indipendenti da n e tali che,

$$\int_0^\pi|\sigma_n(x)|\,dx<A+B\lg n \quad (^8),$$

e d'altronde esiste una costante T tale che, per ogni $n>0$, è

$$\binom{n+\sigma-1}{n}<T\cdot n^{\sigma-1} \quad (^9).$$

Di conseguenza

$$\int_0^\pi|\lambda(n,x)|\,dx<A\sum_{t=0}^{n-2}\left|\binom{1-\sigma}{t}\right|+B\sum_{t=1}^{n-2}\left|\binom{1-\sigma}{t}\right|\lg t+$$
$$+AT\frac{1}{(n-1)^{1-\sigma}}+BT\frac{\lg(n-1)}{(n-1)^{1-\sigma}},$$

ma poichè $1-\sigma>0$, le due serie $\sum_{t=0}^{\infty}\left|\binom{1-\sigma}{t}\right|$, $\sum_{t=1}^{\infty}\left|\binom{1-\sigma}{t}\right|\lg t$ convergono e, d'altra parte,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\sigma}}=0=\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n^{1-\sigma}},$$

onde esisterà una costante H, indipendente da n, tale che, per ogni n,

$$\int_0^\pi|\lambda(n,x)|\,dx<H.$$

In modo analogo si dimostra che esisterà una costante H' tale che, per ogni n,

$$\int_0^\pi|\lambda'(n,x)|\,dx<H',$$

---

(8) Vedi L. TONELLI: *Serie Trigonometriche*. Ediz. Zanichelli, pag. 263.

(9) Questa disuguaglianza si deduce immediatamente dalla (6) del § 1.

e poichè $0<(-1)^n\binom{-\sigma}{n}<1$, si avrà

$$\int_0^\pi |\theta(x;\,n,n)|\,dx<\frac{\pi}{2}+H+H', \qquad \int_0^\pi |\theta'(x;\,n,n)|\,dx<H+H'.$$

12. - TEOREMA I. - *Se $a_n\to 0$ e se, per un numero reale σ tale che $0<\sigma<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^\sigma a_n|$ converge, la serie $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ è di Fourier.*

TEOREMA II. - *Se $b_n\to 0$ e se, per un numero reale σ tale che $0<\sigma<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^\sigma b_n|$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}\,nx$ è di Fourier.*

Dimostriamo il primo di questi due teoremi.

Dalla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^\sigma a_n|$ segue in forza del teorema del n.° 9, dove si faccia $\sigma'=1$, quella della serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta a_n|$ e quindi la convergenza della serie $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ per ogni x interno a $(0,2\pi)$ ([10]).

Potremo dunque porre

$$s_p(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{p}a_n\cos nx, \qquad f(x)=\lim_{p\to\infty}s_p(x), \qquad (0<x<2\pi). \tag{11}$$

In forza del teorema del n.° 2, dove si faccia $\sigma'=0$, si può scrivere

$$a_n=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_{n+t},$$

onde

$$s_p(x)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_{n+t}.$$

Da qui

$$\begin{aligned}s_p(x)&=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=n}^{\infty}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t=\\&=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=n}^{p}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t+\\&+\frac{1}{2}\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t.\end{aligned}$$

Dunque

$$s_p(x)=S_p(x)+S_p^*(x).$$

([10]) Vedi L. TONELLI, loc. cit., pag. 42.

Ora è

$$(12)\quad S_p^*(x)=\frac{1}{2}\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{t=p+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_t\sum_{n=1}^{p}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\cos nx=$$
$$=\sum_{t=p+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_t\left\{\frac{1}{2}\binom{-\sigma}{t}+\sum_{n=1}^{p}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\cos nx\right\}=\sum_{t=p+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_t\cdot\theta(x;\,t,p)$$

e, per il lemma I,

$$|S_p^*(x)|<\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\sum_{t=p+1}^{\infty}|\Delta^\sigma a_t|,\qquad (0<x<2\pi).$$

Dunque

$$\lim_{p\to\infty}S_p^*(x)=0,\qquad (0<x<2\pi).$$

Infine, dalle (11) e (12), potremo scrivere

$$f(x)=\lim_{p\to\infty}S_p(x),\qquad (0<x<2\pi).$$

Ora è

$$S_p(x)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=n}^{p}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{t=0}^{p}\Delta^\sigma a_t\sum_{n=1}^{t}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\cos nx=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^\sigma a_n\left\{\frac{1}{2}(-1)^n\binom{-\sigma}{n}+\sum_{t=1}^{n}(-1)^{n-t}\binom{-\sigma}{n-t}\cos tx\right\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{p}\Delta^\sigma a_n\cdot\theta(x;\,n,n).$$

Onde

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^\sigma a_n\cdot\theta(x;\,n,n),$$

dove, per il lemma I, tale serie converge assolutamente e uniformemente in ogni intervallo interno a $(0,2\pi)$.

Sia ora ε un numero reale tale che $0<\varepsilon<\pi$. Potremo scrivere

$$\int_\varepsilon^\pi|f(x)|\,dx\leq\int_\varepsilon^\pi dx\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^\sigma a_n||\theta(x;\,n,n)|$$

e, per l'uniforme convergenza ora osservata, possiamo integrare termine a termine e quindi, per il lemma II,

$$\int_\varepsilon^\pi|f(x)|\,dx\leq\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^\sigma a_n|\int_\varepsilon^\pi|\theta(x;\,n,n)|\,dx<C\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^\sigma a_n|.$$

Esisterà dunque una costante M, indipendente da ε, tale che

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} |f(x)|\, dx < M.$$

La funzione $f(x)$ è dunque integrabile assolutamente in tutto l'intervallo $(0, \pi)$ e quindi anche in tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ essendo $f(x)$ funzione pari. Da qui, per il teorema di DE LA VALLÉE POUSSIN ([11]), l'asserto.

Analogamente si dimostra il teorema II.

13. - I teoremi I e II sono indipendenti dal teorema di SZIDON. Mostreremo ciò coi due seguenti esempi.

I. - *Esempio di successione soddisfacente alle condizioni del teorema di Szidon e non a quelle dei teoremi I e II.*

Si prenda una successione monotona $[a_n]$, tendente a zero, e tale che la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\Delta a_n| \lg n$ converga, mentre, per ogni numero σ, $0<\sigma<1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\Delta a_n| n^{1-\sigma}$ diverga. Ad esempio si ponga $a_n = \sum\limits_{m=n}^{\infty} \dfrac{1}{m[\lg m]^{2+\varepsilon}}$, $(\varepsilon>0)$.

La successione $[a_n]$ così definita soddisferà manifestamente alle condizioni del teorema di SZIDON. In forza del teorema del n.° 2, si ha

$$\Delta^\sigma a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma-1}{t} \Delta a_{n+t} = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t-\sigma}{t} \Delta a_{n+t}, \qquad (0<\sigma<1),$$

onde $\Delta^\sigma a_n > 0$ per ogni $n=0, 1, 2,....$ Ora la serie doppia

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t-\sigma}{t} \Delta a_{n+t},$$

ha i termini tutti positivi, onde essa convergerà o divergerà per righe allora e soltanto allora che essa convergerà o divergerà per diagonali. Sommando per diagonali si ha la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Delta a_m \sum_{t=0}^{m} \binom{t-\sigma}{t} = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta a_m \binom{m+1-\sigma}{m}$$

che diverge insieme alla serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \Delta a_m \cdot m^{1-\sigma}$ in forza della (6) del § 1.

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n|$ dunque diverge qualunque sia $0<\sigma<1$.

II. - *Esempio di successione soddisfacente alle condizioni dei teoremi I e II e non a quelle del teorema di Szidon.*

Sia $[a_n]$ una successione soddisfacente sia alle condizioni dei teoremi I e II

([11]) Vedi L. TONELLI, loc. cit., pag. 110, n.° 38, *a*).

sia alle condizioni del teorema di SZIDON. Si prenda ora una successione di interi sempre crescente

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \ldots, \quad q_n, \ldots$$

tale che $q_1 > 1$, $q_n - q_{n-1} > 2$ e tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lg q_n}$ converga.

Si consideri la successione

$$\bar{a}_n = a_n \quad \text{per} \quad n \neq q_1, \ q_2, \ldots, \ q_r, \ldots$$

$$\bar{a}_{q_r} = a_{q_r} + \frac{1}{\lg q_r} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sarà

$$\Delta\bar{a}_n = \Delta a_n \quad \text{per} \quad n \neq q_1, \ q_2, \ q_3, \ldots \quad \text{e per} \quad n \neq q_1 - 1, \ q_2 - 1, \ldots$$

$$\Delta\bar{a}_{q_r} = \Delta a_{q_r} + \frac{1}{\lg q_r}, \qquad \Delta\bar{a}_{q_r-1} = \Delta a_{q_r-1} - \frac{1}{\lg q_r} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Manifestamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\bar{a}_n| \lg n$ diverge poichè il suo termine generale non tende a zero. Consideriamo ora le $\Delta^\sigma a_n$ per un σ qualsiasi tale che $0 < \sigma < 1$. Sarà

$$\Delta^\sigma \bar{a}_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} \bar{a}_{n+t} = \Delta^\sigma a_n + \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} \delta_{n+t}$$

dove è $\delta_n = 0$ per $n \neq q_r$ e $\delta_{q_r} = \frac{1}{\lg q_r}$ $(r = 1, 2, \ldots)$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n|$ converge per ipotesi. Consideriamo ora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} \delta_{n+t} \right|.$$

La serie doppia $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} \delta_{n+t}$ ha tutti i termini negativi eccetto quelli per cui è $t = 0$ che sono positivi e insieme costituiscono la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\lg q_r}$, per ipotesi convergente.

Detta serie doppia d'altra parte sommata per diagonali dà la serie semplice

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \sum_{t=0}^{m} \binom{t - \sigma - 1}{t} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m \binom{m - \sigma}{m},$$

la quale, essendo minorante, almeno da un certo momento in poi, della serie $\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m$, certamente converge. La serie doppia ora considerata converge dunque assolutamente, onde converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\sigma}{t} \delta_{n+t} \right|$ e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma \bar{a}_n|$.

14. - Sempre in forza del teorema del n.° 9 si vede che se una serie soddisfa alle condizioni dei teoremi I e II per un dato $0<\sigma<1$, vi soddisfa anche per ogni altro numero σ' tale che sia $\sigma<\sigma'<1$. Viceversa esistono esempi di successioni soddisfacenti alle condizioni dei teoremi I e II per un dato $0<\sigma<1$, ma non per un altro σ' tale che $\sigma'<\sigma<1$. Basterà nell'esempio I del n.° 13 supporre che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta a_n|n^{1-\sigma}$ converga, mentre diverga la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta a_n|n^{1-\sigma'}$.

Ad esempio si prenda

$$a_n=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^{1-\sigma}\cdot m[\lg m]^{1+\varepsilon}}.$$

Dunque quando il numero σ si avvicina indefinitamente ad $1-0$, i teoremi I e II danno proposizioni via via più generali, ma tutte indipendenti dal teorema di SZIDON.

15. - *Corollario* I. - *Se* $a_n\to 0$ *e se per un* σ *tale che* $0<\sigma<1$, *tutte le* $\Delta^\sigma a_n$ *sono non negative e la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}$ *converge, la serie* $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ *è di Fourier.*

Corollario II. - *Se* $b_n\to 0$ *e se per un* σ *tale che* $0<\sigma<1$ *tutte le* $\Delta^\sigma b_n$ *sono non negative e la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^\sigma}$ *converge, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\mathrm{sen}\,nx$ *è di Fourier.*

Per la (6) del § 1, dalla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}$ segue quella della serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\binom{n-\sigma}{n}$. D'altronde per il teorema del n.° 2 dove si faccia $\sigma'=0$, è

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{q}a_n\binom{n-\sigma}{n}&=\sum_{n=0}^{q}\binom{n-\sigma}{n}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_{n+t}=\\&=\sum_{m=0}^{q}\Delta^\sigma a_m\cdot(-1)^m\sum_{n+t=m}\binom{\sigma-1}{n}\binom{-\sigma}{t}+\\&+\sum_{m=q+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_m\sum_{n=0}^{q}\binom{n-\sigma}{n}\cdot(-1)^{m-n}\binom{-\sigma}{m-n}=\\&=\sum_{m=0}^{q}\Delta^\sigma a_m+\sum_{m=q+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_m\cdot\sum_{n=0}^{q}\binom{n-\sigma}{n}\cdot(-1)^t\binom{-\sigma}{t}.\end{aligned}$$

Ma la seconda somma è positiva, onde

$$\sum_{m=0}^{q}\Delta^\sigma a_m<\sum_{n=0}^{q}a_n\binom{n-\sigma}{n},$$

da cui la convergenza della serie $\sum_{m=0}^{\infty}|\Delta^\sigma a_m|$. Il corollario I è dunque dimostrato.

Analogamente si dimostra il corollario II.

§ 3. - Ulteriori applicazioni alle serie di Fourier.

16. - In questo paragrafo ci proponiamo di utilizzare le differenze di ordine $\sigma > 1$ della successione dei coefficienti di una serie di soli coseni o di soli seni, per trovare nuove condizioni sufficienti. Noi giungeremo in tal modo a generalizzare i noti teoremi di YOUNG e di KOLMOGOROFF.

Per far ciò ci sono necessari alcuni lemmi che subito dimostreremo.

17. - **Lemma I.** - *Siano* $\sigma > 1$ *un numero reale ed* n *e* p *due interi tali che* $0 < p \leq n$. *Sia inoltre* $0 < x < 2\pi$ *un nuovo numero reale. Posto*

$$\theta(x\,;\,n,p) = \frac{1}{2}(-1)^n\binom{-\sigma}{n} + \sum_{t=1}^{p}(-1)^{n-t}\binom{-\sigma}{n-t}\cos tx,$$

esiste una costante T *indipendente da* p *e da* x *tale che*

$$|\,\theta(x\,;\,n,p)\,| < \frac{T}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\,n^{\sigma-1}.$$

Applicando la trasformazione di BRUNACCI-ABEL si ottiene

$$\theta(x\,;\,n,p) = \sum_{t=0}^{p-1}\binom{n-t+\sigma-2}{n-t}\sigma_t(x) + \binom{n-p+\sigma-1}{n-p}\sigma_p(x),$$

dove, essendo $\sigma > 1$, tutti questi coefficienti binomiali sono positivi. Onde,

$$|\,\theta(x\,;\,n,p)\,| < \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left\{\sum_{t=0}^{p}\binom{n-t+\sigma-2}{n-t} + \binom{n-p+\sigma-1}{n-p}\right\} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\binom{n+\sigma-1}{n}$$

Ora, per la (6) del § 1, esisterà una costante T tale che, per ogni n,

$$\binom{n+\sigma-1}{n} < T\cdot n^{\sigma-1},$$

così che

$$|\,\theta(x\,;\,n,p)\,| < \frac{T}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\cdot n^{\sigma-1}.$$

18. - **Lemma II.** - *Siano* $\xi > 0$, $1 < \sigma < 2$, $0 < x < 2\pi$, *tre numeri reali. Posto*

$$\vartheta(x\,;\,\xi) = \int_0^{\xi}(\xi-\varrho)^{\sigma-1}\cos\varrho x\,d\varrho,$$

si ha

$$|\,\vartheta(x\,;\,\xi)\,| < \frac{1}{x}\,\xi^{\sigma-1}.$$

Infatti, integrando per parti, si ha

$$\vartheta(x\,;\,\xi) = \int_0^{\xi}(\xi-\varrho)^{\sigma-1}\cos\varrho x d\varrho = (\sigma-1)\int_0^{\xi}(\xi-\varrho)^{\sigma-2}\frac{\operatorname{sen}\varrho x}{x}\,d\varrho$$

e quindi
$$|\mathfrak{J}(x;\,\xi)|<\frac{\sigma-1}{x}\int_0^{\xi}(\xi-\varrho)^{\sigma-2}d\varrho=\frac{1}{x}\,\xi^{\sigma-1}.$$

19. - Lemma III. - *Siano* $\xi>0$, $1<\sigma<2$, *due numeri reali,* Δ *un qualsiasi plurintervallo dell'intervallo* $(0, \pi)$. *Posto*
$$I(\xi)=\int_{\Delta}dx\int_0^{\xi}(\xi-\varrho)^{\sigma-1}\cos\varrho x d\varrho=\int_{\Delta}\mathfrak{J}(x;\,\xi)dx,$$
esiste una costante D *tale che, per ogni* Δ *e per ogni* ξ, *è*
$$|I(\xi)|<D\cdot\xi^{\sigma-1}.$$

Consideriamo il numero $\frac{\pi}{\xi}$ e il plurintervallo Δ. Consideriamo poi l'insieme degli intervalli o parti di intervalli di Δ che sono a sinistra del punto $\frac{\pi}{\xi}$, i quali costituiranno un plurintervallo Δ_1 e consideriamo gli intervalli o parti di intervalli di Δ a destra di $\frac{\pi}{\xi}$ che costituiranno un plurintervallo Δ_2. Manifestamente è

$$I(\xi)=\int_{\Delta_1}\mathfrak{J}(x;\,\xi)dx+\int_{\Delta_2}\mathfrak{J}(x;\,\xi)dx. \tag{13}$$

Studiamo separatamente questi due integrali che diremo rispettivamente $I_1(\xi)$ e $I_2(\xi)$. Intanto è, per quanto si è visto nella dimostrazione del lemma II,
$$I_1(\xi)=(\sigma-1)\int_{\Delta_1}\int_0^{\xi}(\xi-\varrho)^{\sigma-2}\frac{\operatorname{sen}\varrho x}{x}dxd\varrho.$$

Trasformiamo le variabili x e ϱ nelle seguenti t e v, ponendo
$$\begin{cases} v=\varrho x \\ t=(\xi-\varrho)x, \end{cases}$$
da cui
$$x=\frac{v+t}{\xi},\qquad \varrho=\frac{\xi v}{v+t}.$$
Il modulo della trasformazione è manifestamente
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\xi} & \frac{1}{\xi} \\ \frac{\xi t}{(v+t)^2} & -\frac{\xi v}{(v+t)^2}\end{vmatrix}=-\frac{v}{(v+t)^2}-\frac{t}{(v+t)^2}=-\frac{1}{v+t}.$$
Avremo
$$I_1(\xi)=-(\sigma-1)\iint\frac{\xi^{\sigma-2}\,t^{\sigma-2}}{(v+t)^{\sigma-2}}\cdot\frac{\xi}{v+t}\operatorname{sen} v\cdot\frac{1}{v+t}dvdt=$$
$$=-(\sigma-1)\xi^{\sigma-1}\iint\frac{1}{(v+t)^{\sigma}}\,\frac{1}{t^{2-\sigma}}\operatorname{sen} vdvdt=$$
$$=-(\sigma-1)\xi^{\sigma-1}\iint\frac{\operatorname{sen} v}{v}\,\frac{v}{v+t}\,\frac{1}{t^{2-\sigma}}\,\frac{1}{(v+t)^{\sigma-1}}dvdt.$$

Il campo d'integrazione per le variabili ϱ e x era definito dalle disuguaglianze

$$0 \leq \varrho \leq \xi, \qquad \delta_i' \leq x \leq \delta_i'' \quad (i=1, 2, 3,....), \qquad 0 \leq \delta_i' < \delta_i'' \leq \frac{\pi}{\xi},$$

dove (δ_i', δ_i''), $(i=1, 2, 3,....)$ è il plurintervallo Δ_1.

Il nuovo campo, per le variabili v e t, sarà definito dalle seguenti disuguaglianze

$$0 \leq \frac{\xi v}{v+t} \leq \xi, \qquad \delta_i' \leq \frac{v+t}{\xi} \leq \delta_i'',$$

ossia

$$v \geq 0, \qquad t \geq 0, \qquad \xi\delta_i' \leq v+t \leq \xi\delta_i'', \qquad 0 \leq \xi\delta_i' < \xi\delta_i'' \leq \pi.$$

Tale campo è manifestamente tutto contenuto nel triangolo

$$v \geq 0, \qquad t \geq 0, \qquad v+t \leq \pi,$$

e quindi nel quadrato

$$0 \leq v \leq \pi, \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Possiamo dunque maggiorare scrivendo

$$|I_1(\xi)| < (\sigma-1)\xi^{\sigma-1} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dt}{t^{2-\sigma}} \cdot \frac{dv}{v^{\sigma-1}},$$

dove l'integrale doppio rappresenta un numero fisso. Conglobando questo e il numero $\sigma-1$ in un'unica costante K_1, si può scrivere

$$|I_1(\xi)| < K_1 \cdot \xi^{\sigma-1}.$$

Studiamo ora il secondo integrale $I_2(\xi)$, che possiamo scrivere

$$I_2(\xi) = (\sigma-1) \int_{\Delta_2} \int_0^\xi (\xi-\varrho)^{\sigma-2} \frac{\operatorname{sen} \varrho x}{x} \, dx d\varrho.$$

Trasformiamo le variabili x e ϱ nelle seguenti t e v mediante la trasformazione

$$\begin{cases} v = \varrho x, \\ t = \xi x, \end{cases}$$

da cui

$$x = \frac{t}{\xi}, \qquad \varrho = \frac{\xi v}{t}.$$

Il modulo della trasformazione è

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\xi} \\ \frac{\xi}{t} & -\frac{\xi v}{t^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{t},$$

e quindi

$$I_2(\xi) = -(\sigma-1)\iint (t-v)^{\sigma-2}\frac{\xi^{\sigma-2}}{t^{\sigma-2}}\frac{\xi}{t}\,\text{sen}\,v\cdot\frac{1}{t}\,dtdv =$$
$$= -(\sigma-1)\xi^{\sigma-1}\iint \frac{\text{sen}\,v}{(t-v)^{2-\sigma}}\frac{1}{t^\sigma}\,dtdv.$$

Il campo d'integrazione per le variabili ϱ ed x era definito dalle disuguaglianze

$$0\leqslant\varrho\leqslant\xi,\qquad \delta_i'\leqslant x\leqslant\delta_i'',\qquad \frac{\pi}{\xi}\leqslant\delta_i'<\delta_i''\leqslant\pi,\qquad (i=1,2,3,....),$$

dove ora (δ_i', δ_i''), $(i=1,2,3,....)$ è il plurintervallo Δ_2.

Il nuovo campo, per le variabili v e t, sarà definito dalle seguenti disuguaglianze

$$0\leqslant\frac{\xi v}{t}\leqslant\xi,\qquad \delta_i'\leqslant\frac{t}{\xi}\leqslant\delta_i'',$$

ossia

$$0\leqslant v\leqslant t,\qquad \xi\delta_i'\leqslant t\leqslant\xi\delta_i'',\qquad \pi\leqslant\xi\delta_i'<\xi\delta_i'',\qquad (i=1,2,3,....).$$

Indichiamo con $\overline{\Delta}_2$ il plurintervallo $(\xi\delta_i', \xi\delta_i'')$, $(i=1,2,3,....)$. Avremo

$$I_2(\xi)=(\sigma-1)\xi^{\sigma-1}\int_{\overline{\Delta}_2}\frac{dt}{t^\sigma}\int_0^t\frac{\text{sen}\,v}{(t-v)^{2-\sigma}}\,dv.$$

Ma è

$$\left|\int_0^t\frac{\text{sen}\,v}{(t-v)^{2-\sigma}}\,dv\right| < \int_{t-\pi}^t\frac{|\text{sen}\,v|}{(t-v)^{2-\sigma}}\,dv < \int_{t-\pi}^t\frac{dv}{(t-v)^{2-\sigma}} = \int_0^\pi\frac{dv}{v^{2-\sigma}},$$

che rappresenta un numero fisso K_3. È dunque

$$|I_2(\xi)| < (\sigma-1)\xi^{\sigma-1}\int_{\overline{\Delta}_2}\frac{dt}{t^\sigma}\left|\int_0^t ....\,dv\right| < (\sigma-1)K_3\cdot\xi^{\sigma-1}\cdot\int_{\overline{\Delta}_2}\frac{dt}{t^\sigma} < (\sigma-1)K_3\xi^{\sigma-1}\int_\pi^{+\infty}\frac{dt}{t^\sigma},$$

dove l'ultimo integrale, essendo $\sigma>1$, rappresenta un numero fisso, che, conglobato coi numeri $\sigma-1$ e K_3, dà una unica costante K_2. È dunque

$$|I_2(\xi)| < K_2\cdot\xi^{\sigma-1},$$

e quindi, per la (13),

$$|I(\xi)| < |I_1(\xi)| + |I_2(\xi)| < (K_1+K_2)\cdot\xi^{\sigma-1},$$

che è quanto volevamo dimostrare.

20. - **Lemma IV.** - *Esiste una costante E tale che, per ogni n e per ogni $0<x<\pi$, si ha*

$$\left|\frac{\text{sen}\,x}{x}\,\theta(x;\,n,n) - \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\,\vartheta(x;\,n+1)\right| < E\cdot n^{\sigma-1}.$$

Infatti è

$$\vartheta(x;\, n+1)=\sum_{t=0}^{n}\int_{t}^{t+1}(n+1-\varrho)^{\sigma-1}\cos \varrho x d\varrho=\sum_{t=0}^{n}(n-t)^{\sigma-1}\int_{t}^{t+1}\cos \varrho x d\varrho+$$
$$+\sum_{t=0}^{n}\int_{t}^{t+1}\{(n+1-\varrho)^{\sigma-1}-(n-t)^{\sigma-1}\}\cos \varrho x d\varrho=$$
$$=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\sum_{t=0}^{n}(n-t)^{\sigma-1}\cos tx-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sum_{t=0}^{n}(n-t)^{\sigma-1}\operatorname{sen} tx+$$
$$+\sum_{t=0}^{n}\int_{t}^{t+1}\{(n+1-\varrho)^{\sigma-1}-(n-t)^{\sigma-1}\}\cos \varrho x d\varrho.$$

$$\theta(x;\, n, n)=\frac{1}{2}(-1)^{n}\binom{-\sigma}{n}+\sum_{t=1}^{n}(-1)^{n-t}\binom{-\sigma}{n-t}\cos tx=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{t=0}^{n}(n-t)^{\sigma-1}\cos tx+\frac{1}{2}(-1)^{n}\binom{-\sigma}{n}+$$
$$+\sum_{t=1}^{n}\left\{\binom{n-t+\sigma-1}{n-t}-\frac{(n-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\right\}\cos tx.$$

Dunque

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\theta(x;\, n, n)-\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\,\vartheta(x;\, n+1)= \tag{14}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}(-1)^{n}\binom{-\sigma}{n}+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\sum_{t=1}^{n}\left\{\binom{n-t+\sigma-1}{n-t}-\frac{(n-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\right\}\cos tx+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sum_{t=0}^{n}(n-t)^{\sigma-1}\operatorname{sen} tx-$$
$$-\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{t=0}^{n}\int_{t}^{t+1}\{(n+1-\varrho)^{\sigma-1}-(n-t)^{\sigma-1}\}\cos \varrho x d\varrho.$$

Ora è

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}(-1)^{n}\binom{-\sigma}{n}\right|<\frac{1}{2}\binom{n+\sigma-1}{n}<\frac{T}{2}\cdot n^{\sigma-1}.$$

Inoltre è, applicando la trasformazione di BRUNACCI-ABEL,

$$\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sum_{t=0}^{n}(n-t)^{\sigma-1}\operatorname{sen} tx=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sum_{t=0}^{n}\Delta(n-t)^{\sigma-1}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{tx}{2}\operatorname{sen}\frac{t+1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sum_{t=0}^{n}\Delta(n-t)^{\sigma-1}\cdot\operatorname{sen}\frac{tx}{2}\operatorname{sen}\frac{t+1}{2}x,$$

e quindi

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sum(n-t)^{\sigma-1}\operatorname{sen}tx\right|<\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{t=0}^{n}\Delta(n-t)^{\sigma-1}=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\cdot n^{\sigma-1}.$$

Ancora

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{t=0}^{n}\int_{t}^{t+1}\{(n+1-\varrho)^{\sigma-1}-(n-t)^{\sigma-1}\}\cos\varrho x d\varrho\right|<$$

$$<\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{t=0}^{n}\int_{t}^{t+1}\{(n+1-t)^{\sigma-1}-(n-t)^{\sigma-1}\}d\varrho<$$

$$<\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\sum_{t=0}^{n}\{(n+1-t)^{\sigma-1}-(n-t)^{\sigma-1}\}=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\cdot n^{\sigma-1}.$$

Infine

$$\left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\sum_{t=0}^{n}\left\{\binom{n-t+\sigma-1}{n-t}-\frac{(n-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\right\}\cos tx\right|< \tag{15}$$

$$<\sum_{t=0}^{n}\left|\binom{n-t+\sigma-1}{n-t}-\frac{(n-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\right|.$$

Ora ricordiamo che, per ogni n e per ogni $\tau>0$, è

$$\binom{n+\tau}{n}>\frac{n^{\tau}}{\Gamma(1+\tau)}$$

e che inoltre esiste una costante N tale che, per ogni n, è

$$\binom{n+\tau}{n}-\frac{n^{\tau}}{\Gamma(1+\tau)}<N\cdot n^{\tau-1},$$

o anche

$$\binom{n+\tau}{n}-\frac{n^{\tau}}{\Gamma(1+\tau)}<N\binom{n+\tau-1}{n} \quad [12].$$

---

[12] Vogliamo studiare, essendo $\tau>-1$ un numero reale qualsiasi ed n intero, la differenza

$$\delta_n=\binom{n+\tau}{n}-n^{\tau}:\Gamma(1+\tau).$$

Prendendo i logaritmi naturali e derivando rispetto a τ, si ha

$$\lg\binom{n+\tau}{n}=\lg\prod_{r=1}^{n}\left(1+\frac{\tau}{r}\right)=\sum_{r=1}^{n}\lg\left(1+\frac{\tau}{r}\right),\qquad \lg\frac{n^{\tau}}{\Gamma(1+\tau)}=\tau\lg n-\lg\Gamma(1+\tau),$$

$$D_{\tau}\lg\binom{n+\tau}{n}=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r+\tau},\qquad D_{\tau}\lg\frac{n^{\tau}}{\Gamma(1+\tau)}=\lg n-D_{\tau}\lg\Gamma(1+\tau).$$

Ma per la definizione della funzione Γ (vedi E. CESARO: *Calcolo infinitesimale*, II ed., Alvano, Napoli, 1905, pag. 11 e pag. 70):

$$D_x\lg\Gamma(x)=-C+\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{x+r}\right),$$

Dunque
$$0<\binom{t+\sigma-1}{t}-\frac{t^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}<N\binom{t+\sigma-2}{t}.$$

L'espressione (15) risulta perciò in valore assoluto minore di
$$N\sum_{t=0}^{n}\binom{t+\sigma-2}{t}=N\binom{n+\sigma-1}{n}<NT\cdot n^{\sigma-1}.$$

---

dove C è la costante di EULERO, e ricordando che
$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}=\lg n+\frac{1}{2n}-\frac{\theta}{12n^2}+C,\qquad (0<\theta<1),$$
si ha
$$D_\tau\lg\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}-\frac{1}{2n}+\frac{\theta}{12n^2}-\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+\tau}\right).$$
Infine

(α)
$$D_\tau\lg\binom{n+\tau}{n}-D_\tau\lg\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}=\sum_{r=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+\tau}\right)+\frac{1}{2n}-\frac{\theta}{12n^2}.$$

Supponiamo ora $\tau>0$. Questa differenza è sempre >0 per $\tau>0$ e poichè, per $\tau=0$, è
$$\lg\binom{n+\tau}{n}=0=\lg\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)},$$
sarà anche
$$\lg\binom{n+\tau}{n}-\lg\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}>0,$$
onde anche $\delta_n>0$. D'altronde è

(β)
$$D_\tau\lg\binom{n+\tau}{n}-D_\tau\lg\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}<\tau\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r(r+\tau)}+\frac{1}{2n}<\tau\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{1}{r(r-1)}+\frac{1}{2n}<\frac{\tau}{n}+\frac{1}{2n},$$
onde
$$\lg\binom{n+\tau}{n}-\lg\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}<\frac{\tau^2+\tau}{2n},$$
$$\lim_{n\to\infty}\lg\left\{\binom{n+\tau}{n}:\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}\right\}=0$$
e infine

(γ)
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\binom{n+\tau}{n}:\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}\right\}=1\qquad(\tau>0),$$
formula da noi ricordata nel n.° 5 del § 1.

Ma poichè $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+x)}{x}=1$, si ha
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg\left\{\binom{n+\tau}{n}:\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}\right\}}{\binom{n+\tau}{n}:\frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)}-1}=1$$

Dunque, ricordando la (14) si ha

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \theta(x;\, n,\, n) - \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \vartheta(x;\, n+1) \right| < \left\{ \frac{2}{\Gamma(\sigma)} + \frac{T}{2} + NT \right\} n^{\sigma-1},$$

che è quanto occorreva dimostrare.

21. - TEOREMA III. - *Se $a_n \to 0$ e, per un $\sigma > 1$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| \cdot n^{\sigma-1}$$

---

e infine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\tau \cdot \lg \left\{ \binom{n+\tau}{n} : \dfrac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} \right\}}{\delta_n} = \Gamma(1+\tau).$$

Ma per la (β) il numeratore della frazione sopra scritta è inferiore a $\frac{1}{2}(\tau^2+\tau)\cdot n^{\tau-1}$ onde dovrà esistere una costante M tale che, per ogni n, sia

$$0 < \delta_n < M \cdot n^{\tau-1}.$$

Supponiamo ora invece $0 > \tau > -1$. Dalla (α) si deduce

$$D_\tau \lg \binom{n+\tau}{n} - D_\tau \lg \frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} > \tau \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r(r-1)} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} = \frac{\tau}{n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2},$$

da cui, integrando tra τ e 0 ($\tau < 0$) e ricordando che per $\tau = 0$ è

$$\lg \binom{n+\tau}{n} = 0 = \lg \frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)},$$

si ha

$$\lg \frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} - \lg \binom{n+\tau}{n} > \int_\tau^0 \left(\frac{\tau}{n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \right) d\tau = \frac{(-\tau)}{2n} \left\{ (1+\tau) - \frac{1}{6n} \right\}$$

e per $n > \frac{1}{6}\frac{1}{1+\tau}$, il secondo membro di questa disuguaglianza è certamente positivo, onde $\delta_n < 0$ per n abbastanua grande e $0 > \tau > -1$.

Sempre dalla (α) si deduce poi, sempre per $0 > \tau > -1$,

$$\left| D_\tau \lg \binom{n+\tau}{n} - D_\tau \lg \frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{3}{2n},$$

onde, per n abbastanza grande,

$$\lg \frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} - \lg \binom{n+\tau}{n} < \frac{3\tau}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

e quindi

(γ)
$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \binom{n+\tau}{n} : \frac{n^\tau}{\Gamma(1+\tau)} \right\} = 1, \qquad (0 > \tau > -1).$$

Procedendo ora in modo analogo a quanto si è fatto sopra, si otterrà l'esistenza di una costante M tale che, per ogni n, sia

$$|\delta_n| < M \cdot n^{\tau-1}.$$

converge, la serie

(16) $$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

è di Fourier.

La proposizione da noi enunciata è certamente vera per ogni $\sigma \geqslant 2$.

Infatti, supposto $\sigma \geqslant 2$, in forza del teorema del n.° 7 segue senz'altro la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^2 a_n| \cdot n$ e quindi si rientra nelle condizioni del teorema di KOLMOGOROFF.

Supponiamo dunque $1<\sigma<2$. Sempre per il teorema del n.° 7 dove si faccia $\sigma'=1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta a_n|$ converge, onde la serie (16) converge uniformemento in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$. Possiamo dunque scrivere

$$s_p(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{p} a_n \cos nx, \qquad f(x)=\lim_{p\to\infty} s_p(x), \qquad (0<x<2\pi).$$

D'altronde in forza del teorema del n.° 6, dove si faccia $\sigma'=0$, si può scrivere

$$a_n=\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_{n+t},$$

onde

$$\begin{aligned}
s_p(x)&=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_{n+t}=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=n}^{\infty}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{p}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=n}^{p}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t=\\
&=S_p(x)+S_p^*(x).
\end{aligned}$$

Ora è

$$\begin{aligned}
S_p^*(x)&=\frac{1}{2}\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{n=1}^{p}\cos nx\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\Delta^\sigma a_t=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{t=p+1}^{\infty}(-1)^t\binom{-\sigma}{t}\Delta^\sigma a_t+\sum_{t=p+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_t\sum_{n=1}^{p}(-1)^{t-n}\binom{-\sigma}{t-n}\cos nx=\\
&=\sum_{n=p+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_n\left\{\frac{1}{2}(-1)^n\binom{-\sigma}{n}+\sum_{t=1}^{p}(-1)^{n-t}\binom{-\sigma}{n-t}\cos tx\right\}=\\
&=\sum_{n=p+1}^{\infty}\Delta^\sigma a_n\cdot\theta(x;n,p).
\end{aligned}$$

Ma, per il lemma I, si ha

$$|\theta(x;\, n, p)| < \frac{T}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\, n^{\sigma-1}, \qquad (0 < x < 2\pi),$$

onde

$$|S_p^*(x)| < \frac{T}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \sum_{n=p+1}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| \cdot n^{\sigma-1},$$

e infine

$$\lim_{p\to\infty} S_p(x) = 0, \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Dunque

$$f(x) = \lim_{p\to\infty} S_p(x), \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Ora è

$$\begin{aligned} S_p(x) &= \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{p} (-1)^t \binom{-\sigma}{t} \Delta^\sigma a_t + \sum_{n=1}^{p} \cos nx \sum_{t=n}^{p} (-1)^{t-n} \binom{-\sigma}{t-n} \Delta^\sigma a_t = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{p} (-1)^t \binom{-\sigma}{t} \Delta^\sigma a_t + \sum_{t=1}^{p} \Delta^\sigma a_t \sum_{n=1}^{t} (-1)^{t-n} \binom{-\sigma}{t-n} \cos nx = \\ &= \sum_{n=0}^{p} \Delta^\sigma a_n \left\{ \frac{1}{2}(-1)^n \binom{-\sigma}{n} + \sum_{t=1}^{n} (-1)^{n-t} \binom{-\sigma}{n-t} \cos tx \right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{p} \Delta^\sigma a_n \cdot \theta(x;\, n, n), \end{aligned}$$

onde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \cdot \theta(x;\, n, n), \qquad (0 < x < 2\pi),$$

dove, sempre per il lemma I, tale serie converge assolutamente e uniformemente in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$.

Ora osserviamo che si può scrivere

$$\begin{aligned} \text{(17)} \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} &\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \cdot \vartheta(x;\, n+1) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \left\{ \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, \theta(x;\, n, n) - \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\, \vartheta(x;\, n+1) \right\}, \end{aligned}$$

dove la funzione rappresentata dalla seconda serie certamente esiste ed è continua in tutto $(0, 2\pi)$, estremi inclusi, dato che tale serie è minorante della serie

$$E \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \cdot n^{\sigma-1},$$

in forza del lemma IV.

In forza del lemma II, d'altra parte, la prima delle serie (17) converge uniformemente in ogni intervallo interno a $(0, 2\pi)$ e quindi la funzione $\varphi(x)$, da essa rappresentata, è continua in tutto $(0, 2\pi)$ aperto.

Sia ora (ε, π), $(0<\varepsilon<\pi)$ un intervallo qualsiasi e sia $\Delta(\varepsilon)$ un qualunque plurintervallo dell'intervallo (ε, π). Nell'intervallo (ε, π), chiuso, la $\varphi(x)$ è certo continua, onde si potranno considerare i due plurintervalli $\Delta_1(\varepsilon)$ e $\Delta_2(\varepsilon)$ in cui la funzione $\varphi(x)$ è rispettivamente $\geqslant 0$ e $\leqslant 0$.

Manifestamente è

$$\int_\varepsilon^\pi |\varphi(x)|\,dx = \int_{\Delta_1(\varepsilon)} \varphi(x)dx - \int_{\Delta_2(\varepsilon)} \varphi(x)dx.$$

Ora è

$$\int_{\Delta_1(\varepsilon)} \varphi(x)dx = \int_{\Delta_1(\varepsilon)} dx \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \cdot \vartheta(x\,;\, n+1)$$

e, per l'uniforme convergenza ora osservata in tutto (ε, π), si può integrare per serie, onde

$$\int_{\Delta_1(\varepsilon)} \varphi(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\sigma a_n \int_{\Delta_1(\varepsilon)} \vartheta(x\,;\, n+1)dx$$

e, per il lemma III,

$$\int_{\Delta_1(\varepsilon)} \varphi(x)dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| \left| \int_{\Delta_1(\varepsilon)} \vartheta(x\,;\, n+1)dx \right| < D \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| n^{\sigma-1} = DS,$$

avendo indicata con S la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| n^{\sigma-1}$. Analoga disuguaglianza vale estendendo l'integrazione al plurintervallo $\Delta_2(\varepsilon)$.

La costante DS non dipende da ε. Dunque, qualunque sia ε,

$$\int_\varepsilon^\pi |\varphi(x)|\,dx = \int_{\Delta_1(\varepsilon)} \varphi(x)dx - \int_{\Delta_2(\varepsilon)} \varphi(x)dx < 2DS.$$

La funzione $\varphi(x)$ è dunque integrabile assolutamente in tutto $(0, \pi)$ e per la (17) altrettanto sarà della funzione

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} f(x),$$

e quindi, della funzione $f(x)$, almeno in tutto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ma questa è certo integrabile assolutamente in tutto $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ onde tale proprietà sussiste in tutto $(0, \pi)$ e quindi in tutto $(0, 2\pi)$ essendo $f(x)$ funzione pari.

Da qui, per il teorema di De la Vallée Poussin, l'asserto.

22. - A corollario del teorema III segue il

Teorema IV. - *Se* $a_n \to 0$ *e per un* $\sigma > 1$ *tutte le* $\Delta^\sigma a_n$ *sono non negative, la serie* $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ *è di Fourier.*

Infatti per il teorema del n.° 5 segue, dalle ipotesi fatte, la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta^\sigma a_n| n^{\sigma-1}$, e quindi si rientra nelle condizioni del teorema III.

23. - Dimostriamo ora che i teoremi III e IV generalizzano rispettivamente il teorema di KOLMOGOROFF e il teorema di YOUNG.

I teoremi III e IV non sono infatti più restrittivi rispettivamente dei teoremi di KOLMOGOROFF e di YOUNG.

Viceversa i seguenti esempi mostreranno che le condizioni del teorema IV possono essere soddisfatte senza che lo siano quelle del teorema di YOUNG e, analogamente, le condizioni del teorema III possono essere soddisfatte senza che lo siano quelle del teorema di KOLMOGOROFF.

24. - *Esempi di successioni soddisfacenti alle condizioni del teorema IV e non a quelle del teorema di Young.*

I. - Si ponga

$$a_n = \frac{1}{\varrho^{n+E(n:2)}}, \qquad (n=0, 1, 2,....), \qquad \text{dove } \frac{3}{2} < \varrho < 2.$$

Questa successione è monotona, onde $\Delta a_n \geqslant 0$, $(n=0, 1, 2,....)$.

Le $\Delta^2 a_n$ sono negative o positive secondo che n è pari o dispari. Infatti

$$\Delta^2 a_{2m} = \frac{1}{\varrho^{3m}} - \frac{2}{\varrho^{3m+1}} + \frac{1}{\varrho^{3m+3}} = \frac{1}{\varrho^{3m+3}} (\varrho^2 - 2\varrho^2 + 1) < 0,$$

$$\Delta^2 a_{2m+1} = \frac{1}{\varrho^{3m+1}} - \frac{2}{\varrho^{3m+3}} + \frac{1}{\varrho^{3m+4}} = \frac{1}{\varrho^{3m+4}} (\varrho^3 - 2\varrho + 1) < 0.$$

Dimostriamo che invece è $\Delta^\varrho a_n \geqslant 0$ per $\frac{3}{2} < \varrho < 2$ e $n=0, 1, 2,....$

Infatti è $\Delta^\varrho a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\varrho}{t} a_{n+t}$ ed essendo $1 < \varrho < 2$ e $a_{n+t} > 0$, il primo e tutti i termini della serie ora scritta, dal terzo in poi, sono positivi, mentre il secondo è negativo. Ma la somma del primo e del secondo è sempre positiva o nulla perchè

$$a_n - \varrho a_{n+1} = \frac{1}{\varrho^{3m}} - \varrho \frac{1}{\varrho^{3m+1}} = 0, \quad \text{per } n=2m,$$

$$= \frac{1}{\varrho^{3m+1}} - \varrho \frac{1}{\varrho^{3m+3}} > 0, \quad \text{per } n=2m+1.$$

Dunque è, come si è detto, $\Delta^\varrho a_n \geqslant 0$.

II. - Sia

$$n_1, \quad n_2, ..., \quad n_r, ...$$

una successione di interi positivi tali che $n_1 > 1$ e $n_r - n_{r-1} > 3$, e consideriamo la successione

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\lg n} & \text{per } n \neq n_1, n_2, ..., n_r, ... \\ a_{n_r} = \dfrac{1}{2} \left\{ \dfrac{1}{\lg (n_r - 1)} + \dfrac{1}{\lg (n_r + 1)} \right\}, & r = 1, 2, ..., \end{cases}$$

la quale ha tutte le $\Delta_2 a_n \geqslant 0$. Se ora è ϱ un numero reale, $1<\varrho<2$, si potrà scrivere

(18) $$\Delta^\varrho a_n = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\varrho-2}{t} \Delta^2 a_{n+t} > \binom{\varrho-2}{2} \Delta^2 a_{n+2}$$

dato che $\Delta^2 a_{n+t} \geqslant 0$ e $(-1)^t \binom{\varrho-2}{t} \geqslant 0$ per ogni t.

Si prenda ora una successione di interi

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots, \quad p_r, \ldots,$$

monotona, crescente e che assoggetteremo in seguito ad una ulteriore condizione. Definiamo ora la nuova successione:

$$\begin{cases} \bar{a}_n = \dfrac{1}{\lg n} \quad \text{per } n \neq n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots \\ \bar{a}_{n_r} = \dfrac{1}{2}\left\{ \dfrac{1}{\lg(n_r-1)} + \dfrac{1}{\lg(n_r+1)} \right\} + \dfrac{1}{2p_r}\left(\dfrac{1}{\lg(n_r-1)} - \dfrac{1}{\lg(n_r+1)} \right). \end{cases}$$

Manifestamente sarà

$$\begin{aligned} &\Delta \bar{a}_n > 0 && \text{per } n=0, 1, 2, \ldots, \\ &\Delta^2 \bar{a}_n > 0 && \text{per } n \neq n_1-1, n_2-1, \ldots, \\ &\Delta^2 \bar{a}_{n_r-1} < 0 && \text{per } r=1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Studiamo ora le $\Delta^\varrho \bar{a}_n$. Si avrà, per ogni $n \neq n_1-1, n_2-1, \ldots$,

$$\Delta^\varrho \bar{a}_n = \bar{a}_n - \varrho \bar{a}_{n+1} + \sum_{t=2}^{\infty} (-1)^t \binom{\varrho}{t} \bar{a}_{n+t} > a_n - \varrho a_{n+1} + \\ + \sum_{t=2}^{\infty} (-1)^t \binom{\varrho}{t} a_{n+t} = \Delta^\varrho a_n > 0,$$

dato che, al solito, per $t \geqslant 2$, è $(-1)^t \binom{\varrho}{t} > 0$. Per $n = n_1-1, n_2-1, \ldots$, invece, si ha

$$\bar{a}_n - \varrho \bar{a}_{n+1} + \sum_{t=2}^{\infty} (-1)^t \binom{\varrho}{t} \bar{a}_{n+t} > -\varrho \frac{1}{2p_r} \left\{ \frac{1}{\lg(n_r-1)} - \frac{1}{\lg(n_r+1)} \right\} + \\ + \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\varrho}{t} a_{n+t} > -\varrho \frac{1}{2p_r} \left\{ \frac{1}{\lg(n_r-1)} - \frac{1}{\lg(n_r+1)} \right\} + \binom{\varrho-2}{2} \Delta^2 a_{n+1}.$$

Se ora si pone, fissato ϱ, $(1<\varrho<2)$,

$$p_r \geqslant \frac{\varrho}{2\binom{\varrho-2}{2}} \frac{\Delta a_{n_r-1} + \Delta a_{n_r}}{\Delta^2 a_{n_r+1}} \geqslant \frac{\varrho}{(2-\varrho)(3-\varrho)} \frac{\dfrac{1}{\lg(n_r-1)} - \dfrac{1}{\lg(n_r+1)}}{\dfrac{1}{\lg(n_r+1)} - \dfrac{2}{\lg(n_r+2)} + \dfrac{1}{\lg(n_r+3)}},$$
$$(r=1, 2, 3, \ldots),$$

si avrà, per quel dato ϱ fisso,

$$\Delta^\varrho \bar{a}_n \geqslant 0, \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

25. - *Esempio di successione soddisfacente alle ipotesi del teorema III e non a quelle del teorema di Kolmogoroff.*

Basterà considerare il secondo esempio da noi dato dianzi (n.° 24) imponendo alle n_r opportune condizioni. Si osservi intanto che la (18) si può rendere più forte nel seguente modo:

$$\Delta^\varrho a_n > \sum_{t=0}^{n+1}(-1)^t\binom{\varrho-2}{t}\Delta^2 a_{n+t} = \sum_{t=0}^{n+1}\binom{t-\varrho+1}{t}\Delta^2 a_{n+t} > n\binom{n-\varrho+2}{n+1}\Delta^2\left(\frac{1}{\lg(2n+1)}\right).$$

Ma è

$$\binom{n-\varrho+2}{n+1} = \frac{n^{1-\varrho}}{\Gamma(2-\varrho)}\,\theta_n, \qquad \lim_{n\to\infty}\theta_n = 1,$$

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\lg n}\right) = \frac{\theta'_n}{n^2(\lg n)^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\theta'_n = 1.$$

Ne risulterà

$$\Delta^\varrho a_n > n\frac{n^{1-\varrho}}{\Gamma(2-\varrho)}\,\theta_n \cdot \frac{\theta'_{2n+1}}{(2n+1)^2[\lg(2n+1)]^2}$$

e quindi, per n abbastanza grande,

$$\Delta^\varrho a_n > \frac{1}{16}\,\frac{1}{n^\varrho(\lg n)^2}.$$

Procedendo come si è fatto nel numero precedente potremo scrivere

$$\Delta^\varrho \bar{a}_{n_r-1} > -\varrho\frac{1}{2p_r}\left\{\frac{1}{\lg(n_r-1)} - \frac{1}{\lg(n_r+1)}\right\} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{(n_r-1)[\lg(n_r-1)]^2},$$

o anche, per n abbastanza grande,

$$\Delta^\varrho \bar{a}_{n_r-1} > -2\varrho\frac{1}{p_r}\,\frac{1}{(n_r-1)[\lg(n_r-1)]^2} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{(n_r-1)[\lg(n_r-1)]^2}.$$

Ora noi definiremo i numeri p_r ponendo

$$p_r = E\{32\varrho(n_r-1)^\varrho[\lg(n_r-1)]^2 : (n_r-1)[\lg(n_r-1)]^2\} + 1 =$$
$$= E\{32\varrho(n_r-1)^{\varrho-1}\} + 1.$$

Ne risulterà subito $\Delta^\varrho \bar{a}_{n_r-1} > 0$ per ogni r. Inoltre vogliamo mostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^2 a_n|\,n$ divergerà quando si imponga alle n_r una opportuna condizione.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^2\bar{a}_n|\,n$ si può subito spezzare nella somma delle due seguenti

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\Delta^2 a_n|\,n + 4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2p_r}\left\{\frac{1}{\lg(n_r-1)} - \frac{1}{\lg(n_r+1)}\right\}n_r.$$

La prima converge perchè $[a_n]$ soddisfa alle condizioni del teorema di YOUNG. La seconda invece si può scrivere

$$4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2\{E[32\varrho(n_r-1)^{\varrho-1}]+1\}}\,\frac{2\theta''_{n_r}}{(n_r-1)[\lg(n_r-1)]^2}\,n_r, \qquad \lim_{n\to\infty}\theta''_n = 1,$$

o meglio,

(19) $$\frac{1}{8\varrho}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\theta'''_{n_r}}{n_r^{\varrho-1}(\lg n_r)^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\theta'''_n=1.$$

Ma poichè la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\varrho-1}(\lg n)^2}$$
diverge, si potrà sempre scegliere la successione $[n_r]$ in modo che anche la serie
$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{n_r^{\varrho-1}(\lg n_r)^2}$$
diverga, da cui ne risulterà la divergenza della serie (19) e quindi della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}|\varDelta_2\bar{a}_n|\,n.$$

Basterà ad esempio prendere $n_r=4r$, $(r=1, 2, 3,....)$.

26. - Il teorema del n.° 5 mostra che se una successione soddisfa alle ipotesi del teorema IV soddisfa necessariamente anche a quelle del teorema III. Il teorema III non è dunque più restrittivo del teorema IV.

Però si può affermare che il teorema III è effettivamente più generale del teorema IV come si può vedere con facili esempi.

27. - Se le condizioni del teorema IV o del teorema III sono soddisfatte per un dato $\sigma>1$, in forza dei n.[i] 4 e 6, per ogni altro $1<\sigma'<\sigma$, sono soddisfatte le ipotesi dei teoremi stessi. Esempi analoghi a quelli da noi dati nei n.[i] 24 e 25 mostrano invece che il viceversa non è vero. Dunque il teorema IV e il teorema III danno una classe di proposizioni via via più generali man mano che il numero σ si avvicina ad $1+0$.

28. - Per le serie di soli seni non valgono teoremi analoghi ai teoremi III e IV. Usando le differenze d'ordine $\sigma>1$ della successione $[b_n]$ si può stabilire, tuttavia, il seguente

TEOREMA V. - *Se* $b_n\to 0$ *e se per un* $\sigma>1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}|\varDelta^{\sigma}b_n|\,n^{\sigma-1}\lg n$ *converge, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}b_n \operatorname{sen} nx$ *è di Fourier.*

Infatti, per il teorema del n.° 8 dove si faccia $\sigma'=1$, segue la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}|\varDelta b_n|\lg n$, e quindi si rientra nelle ipotesi del teorema di SZIDON.

Il teorema V è dunque un caso particolare del teorema di SZIDON.

Se le condizioni del teorema V sono soddisfatte per un dato numero $\sigma > 1$, esse sono soddisfatte anche per ogni altro numero $1 \leqslant \sigma' < \sigma$, sempre in forza del teorema del n.° 8. Viceversa si potrebbero dare esempi di successioni soddisfacenti alle ipotesi del teorema V per un dato $\sigma > 1$ e non per un altro $\sigma' > \sigma$, e ciò in modo analogo a quanto si è fatto per il teorema III.

Dunque il teorema V dà per $\sigma \geqslant 1$ tutta una classe di proposizioni via via più generali man mano che il numero σ si avvicina ad $1+0$, tutte però casi particolari del teorema di SZIDON.