ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIACOMO ALBANESE

Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche (memoria prima)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 1 (1934), p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_1_1_0>

CORRISPONDENZE ALGEBRICHE FRA I PUNTI DI DUE SUPERFICIE ALGEBRICHE (*)

(MEMORIA PRIMA)

di GIACOMO ALBANESE (Pisa).

La teoria delle corrispondenze fra i punti di due curve algebriche ha formato oggetto di studi molto profondi, da parte di insigni geometri, sia italiani che stranieri, tanto che oggi, essa ha raggiunto uno sviluppo veramente imponente.

In confronto, la teoria delle corrispondenze (α, β) tra i punti di due superficie algebriche è ancora molto povera, si può dire essere ai primi passi.

Si conoscono importanti proprietà dovute ad ENRIQUES e SEVERI (1) sulle involuzioni appartenenti ad una superficie iperellittica, alcuni risultati dell'ENRIQUES (2) e del GODEAUX (3) sulle involuzioni cicliche doppiamente infinite, ma sulle trasformazioni generali (α, β) fra i punti di due superficie (se si eccettuano due note dello ZEUTHEN (4) sul principio di corrispondenza e un lavoro del SEVERI (5) sui legami che intercedono fra alcuni caratteri invariantivi delle due superficie) poco o nulla è stato fatto finora.

La ragione va ricercata in un duplice fatto: 1°) la mancanza di una teoria delle serie di gruppi di punti di una superficie; 2°) la mancanza sulle superficie del concetto di *corrispondenza a valenza*, che com'è noto, nel caso delle curve, ha una parte veramente fondamentale.

(*) Un sunto di questa memoria trovasi nel Boll. dell'Unione Matematica Italiana del 15 giugno 1932 (X), pag. 131 e seg.

(1) ENRIQUES-SEVERI: *Mémoire sur les surfaces Hyperelliptiques.* Acta Mathematica, XXXIV, 1907. Vedasi anche, CASTELNUOVO: *Sugli integrali appartenenti ad una superficie irregolare.* Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV, 1905.

(2) ENRIQUES: *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* Rend. della R. Accademia di Bologna, 1910.

(3) GODEAUX: *Sur les involutions douées d'un nombres fini de points unis.* Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, 1914. Vedasi anche dello stesso autore: *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini di coincidence appartenant ad un surface algébrique.* Bulletin de la Société mathématique de France, t. XLVII, 1919, dove trovansi altre citazioni.

(4) ZEUTHEN: *Le principe de corrispondance pour une surface algébrique.* Comptes Rendus, t. 143, 1906, pag. 491 e pag. 535.

(5) SEVERI: *Relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica.* Rend. R. Istituto Lombardo, 1903.

I due fatti sono collegati naturalmente l'uno all'altro e formano oggetto di questa memoria e di altre due in corso di pubblicazione.

Quando sopra una superficie si cerca d'introdurre il concetto di corrispondenza a valenza e particolarmente quello a valenza zero, s'incontrano, almeno per ora, non lievi difficoltà. Si vedrà, per esempio, che lo stesso teorema « *se una corrispondenza è a valenza zero in un senso, lo è anche in senso inverso* » che nel caso delle curve è presso chè evidente, per le superficie è tutt'altro che facile!

In ogni modo credo di aver superato le difficoltà con successo e inizio con questo, la pubblicazione di alcuni lavori, per uno studio sistematico delle corrispondenze fra i punti di due superficie e delle serie di gruppi di punti che ad esse appartengono.

Il lavoro è diviso in tre parti. In questa prima parte, data una corrispondenza algebrica $T \equiv (\alpha, \beta)$ fra i punti di due superficie algebriche, irriducibili F ed F', studio l'effetto che T ha sui sistemi continui di curve delle due superficie. Detti q l'irregolarità di F, $\{A\}$ un sistema di curve di F, continuo, completo, composto d'∞^q sistemi lineari distinti e Σ_r il più ampio sistema di curve di $\{A\}$ che per la T, hanno come omologhe su F', curve di uno stesso sistema lineare, dimostro che i sistemi lineari di $\{A\}$ si distribuiscono in due congruenze che in fondo non dipendono dal sistema $\{A\}$ di partenza e si rispecchiano in due congruenze h e k d'indice uno, della varietà di PICARD, V_q, relativa ad F.

Se r è la dimensione dei sistemi lineari di Σ_r, h si compone di ∞^r varietà V_{q-r} e k di ∞^{q-r} varietà V_r. Dimostro che le V_{q-r} e le V_r sono varietà abeliane. Corrispondentemente F possiede due sistemi regolari (complementari) di integrali semplici di prima specie riducibili; il primo definito da $q-r$ integrali indipendenti, con $2(q-r)$ periodi ridotti:

(I) $$I_1, \quad I_2 \quad ,\ldots, \quad I_{q-r},$$

provenienti dagli integrali di prima specie di una V_{q-r}; il secondo da r integrali indipendenti con $2r$ periodi:

(II) $$J_1, \quad J_2 \quad ,\ldots, \quad J_r,$$

provenienti dagli integrali di una V_r.

Detti q' l'irregolarità di F' ed r' il numero calcolato come r per la trasformazione inversa T^{-1}, si trova analogamente che la varietà di PICARD, $V'_{q'}$ di F', possiede due congruenze d'indice uno, di varietà abeliane $V'_{q'-r'}$, $V'_{r'}$ e corrispondentemente F', due sistemi d'integrali riducibili:

(III) $$I_1', \quad I_2' \quad ,\ldots, \quad I'_{q'-r'},$$
(IV) $$J_1', \quad J_2' \quad ,\ldots, \quad J_{r'}',$$

analoghi ai sistemi (I) e (II).

Il teorema fondamentale consiste nel dimostrare che V_{q-r} e $V'_{q'-r'}$ sono in corrispondenza birazionali fra di loro, oppure ognuna di esse possiede una involuzione di punti, priva di coincidenze, rappresentabile coi punti di una stessa varietà abeliana W_{q-r}.

Ne seguirà che:

$$q-r=q'-r', \tag{V}$$

che i sistemi d'integrali (I) e (III) sono in corrispondenza biunivoca fra di loro e che i periodi di due integrali corrispondenti I_k, $I'_{k'}$ sono combinazioni lineari a coefficienti razionali (indipendenti da k) gli uni degli altri.

Detta γ^2_β la serie dei gruppi di β punti di F', che per la T corrispondono ai punti di F, o come si dice la serie (birazionalmente identica ad F) che T induce su F', e con γ^2_α la serie analoga (identica ad F') che T^{-1} induce su F, dimostro che *gli integrali* (II) *dànno somma costante su tutti i gruppi* della γ^2_α, *gli integrali* (IV) *dànno somma costante su tutti i gruppi della* γ^2_β e che *tanto su* F, *quanto su* F', *nessun altro integrale gode di tale proprietà.*

Queste proprietà accostano la teoria delle corrispondenze fra i punti di due superficie a quella analoga fra i punti di due curve.

Per analogia chiamo $q-r$, rango o difetto di equivalenza di T e r l'indice di equivalenza.

Per la (V) si ha allora: *una corrispondenza* T *e la sua inversa hanno lo stesso rango.*

Interessanti sono i casi del rango massimo $r=0$, $r'=0$, oppure $r=r'=0$, ma ancora più importante è il caso delle trasformazioni T di *rango nullo* $q-r=q'-r'=0$.

Allora i sistemi (I) e (III) svaniscono e i sistemi (II) e (IV) si riducono ai sistemi totali degli integrali di F ed F'.

Le corrispondenze a rango nullo le chiamo anche *corrispondenze a valenza zero.*

Valgono le proprietà:

a) *Se* T *è una corrispondenza a valenza zero, tale è la sua inversa.*

b) *Una corrispondenza a valenza zero, fa corrispondere a tutte le curve di un qualunque sistema continuo di* F, *curve di* F' *appartenenti ad uno stesso sistema lineare e viceversa.*

c) *Se* T *è una corrispondenza a valenza zero tutti gli integrali di prima specie di* F' *dànno somma costante su tutti i gruppi della serie* γ^2_β *che* T *induce su* F' *e viceversa.*

Ciascuna delle proprietà *b*) e *c*) è *caratteristica* per le corrispondenza a valenza zero.

Dimostro poi che: *se* F *ed* F' *sono due distinte superficie a moduli generali, ogni corrispondenza* T *fra i loro punti, è necessariamente a valenza zero.*

Dalla *c*) ricavo che: data sopra una varietà algebrica V_k una serie regolare γ^d_a di gruppi G di a punti (rappresentabile, cioè, biunivocamente coi punti di una varietà V_d, d'irregolarità superficiale nulla) ogni integrale semplice di prima specie di V_k, dà somma costante (a meno di periodi) su tutti i gruppi G della serie.

La proprietà è stata dimostrata dal SEVERI nel caso che V_k sia una superficie ($k=2$) e γ_a^d sia *una involuzione*. Nelle stesse ipotesi il SEVERI ha dimostrato la proprietà inversa « se sopra i gruppi di una *involuzione* γ_a^d di una superficie, tutti gli integrali della superficie dànno somma costante, γ_a^d è regolare ». Questa proprietà si estende, almeno in generale, anche al caso di una γ_a^d non involutoria, ma a condizione che essa invada tutta la superficie, come dirò nella terza parte.

Chiudono la prima parte alcune osservazioni sulle corrispondenze T fra i punti di una stessa superficie: $F \equiv F'$.

Allora è $q=q'$ e dalla V segue $r=r'$.

Una corrispondenza e la sua inversa hanno lo stesso indice di equivalenza. Ma nel caso attuale la proprietà si completa dal punto di vista qualitativo; dimostro infatti che se alle curve A di un sistema algebrico S la T fa corrispondere curve A' di uno stesso sistema lineare, l'inversa T^{-1} alle stesse curve A di S fa corrispondere, pur essa, curve di uno stesso sistema lineare $|A^{-1}|$. Da cui si deduce che T e T^{-1} sono legate ai medesimi sistemi regolari d'integrali riducibili di F.

Nella seconda parte, che comparirà nel prossimo fascicolo di questi stessi Annali, mi occuperò più particolarmente di corrispondenze fra punti di una stessa superficie F.

Superate le difficoltà relative all'introduzione del concetto di corrispondenza a valenza zero è facile introdurre il concetto di valenza (ordinaria) intera *positiva* o *negativa* e successivamente quello di *corrispondenze dipendenti*. Valgono teoremi analoghi a quelli delle curve e dimostro che: *la totalità delle corrispondenze di F ammette una base* e *che il numero base è minore od uguale di* $2q^2$. *La base esiste anche per corrispondenze fra due distinte superficie F ed F' e il numero base è minore uguale del più piccolo dei due numeri* $2q^2$, $2q'^2$.

Dirò altra volta di un secondo modo di introdurre la base.

Una notevole applicazione dei nuovi concetti ottengo, estendendo il principio di corrispondenza per le superficie, dovuto allo ZEUTHEN.

Sia F nello spazio ordinario, d'ordine n, a singolarità ordinarie e T una corrispondenza che associa ad ogni punto P di F, i punti ove una curva C_P, variabile con P, incontra F (oltre P).

Supposto che C_P abbia in P un punto k-uplo e T abbia x punti uniti isolati, detti α e β gli indici di T, $n\gamma$ il numero delle coppie PP' di punti omologhi che si trovano su due sezioni piane L ed L' di F, I l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della superficie, lo ZEUTHEN dimostra la relazione:

$$x=\alpha+\beta+\gamma-k(I+1). \qquad \text{(VI)}$$

Se T, oltre gli x punti uniti isolati, sopra detti, possiede una curva U di punti uniti, si ha invece:

$$\text{(VII)} \qquad x+y+z-y_a=\alpha+\beta+\gamma-k(I+1),$$

essendo y l'ordine di U, z l'ordine della rigata R delle tangenti ad F nei punti P di U, che sono limiti delle corde PP' che uniscono due punti omologhi P e P' venuti a coincidere nel punto P e y_a il numero dei punti ove U incontra la curva di contatto di F col cono ad essa circoscritto, da un punto generico dello spazio.

Faccio vedere che i casi trattati dallo ZEUTHEN, corrispondono a quelli di corrispondenza a valenza k positiva o nulla e poi dimostro che *nelle stesse ipotesi*, la (VI) e la (VII) *valgono anche nel caso di corrispondenza a valenza k negativa.*

La (VI) e la (VII) esprimono perciò il principio di corrispondenza per trasformazioni T a valenza qualunque. Non manco di fare alcune osservazioni sulla giusta applicazione della (VI) e (VII), sul loro carattere invariantivo e qualche applicazione a certe classi di corrispondenze a valenza meno uno.

Nella stessa seconda parte studio la trasformazione che T induce sugli integrali semplici di prima specie di F, estendendo il noto procedimento di HURWITZ.

In seguito a noti risultati del SEVERI su tali integrali (sistema di cicli primitivi, integrali e periodi normali, etc.) l'estensione non presenta difficoltà concettuali. Bisogna però tener conto di due fatti che nel caso delle curve non si presentano:

1°) i divisori elementari della forma quadratica principale legata agli integrali di F non sono tutti uguali all'unità (o per lo meno non si sa se siano o no uguali all'unità);

2°) la base minima per i cicli lineari di F si compone di un sistema primitivo di $2q$ cicli indipendenti, costruiti alla maniera del SEVERI e dei divisori dello zero (se F non è a torsione nulla).

Lievi accorgimenti permettono di superare queste difficoltà.

Queste considerazioni mi portano a dimostrare che:

Sopra una superficie a moduli generali ogni corrispondenza T è a valenza.

Proprietà, certo non priva d'interesse e che mette in maggiore rilievo l'estensione delle formule (VI) e (VII) al caso generale di una valenza k qualunque.

Studio quindi la trasformazione che T opera sui cicli lineari e tridimensionali di F (o della sua riemanniana) e trovo il significato topologico del rango: $2(q-r)$ *è il numero dei cicli indipendenti che si trovano fra i trasformati di un qualunque sistema completo di $2q$ cicli indipendenti di F,* e ciò, *sia che si tratti di cicli lineari, sia che si tratti di cicli tridimensionali.*

In particolare si ha che: *le trasformazioni a valenza zero* (*e queste sole*) *trasformano ogni ciclo lineare o tridimensionale di F in un ciclo nullo o in un divisore dello zero.*

Queste proprietà valgono anche se T opera fra due superficie F ed F' distinte e per la loro dimostrazione seguo due vie, una è basata sulla rappresentazione trascendente di T, l'altra è di carattere puramente algebrico. Quest'ultima mette in migliore rilievo l'aspetto geometrico della questione e dal lato qualitativo conduce a risultati più espressivi.

Mi valgo a questo scopo di due teoremi che non credo del tutto privi d'interesse.

Il primo è l'estensione alle superficie di un criterio di equivalenza lineare dovuto sulle curve a ROSATI e CHISINI; dimostro cioè:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sopra una superficie F, le curve C di un sistema continuo S, appartengano (totalmente) ad uno stesso sistema lineare, è che S sia a variazione topologica nulla, nel senso che, facendo descrivere ad una curva C un qualunque cammino chiuso di S, il ciclo tridimensionale che corrispondentemente si genera sulla riemanniana di F, sia un ciclo nullo.

Ponendo il risultato in relazione colle ricerche del SEVERI, sui criteri di equivalenza lineare fra le curve di una superficie e particolarmente con quello che Egli chiama «*il primo teorema d'Abel sulle superficie algebriche*» il nuovo criterio, come per le curve, si può chiamare il *teorema d'Abel topologico* sopra le superficie algebriche.

L'altro teorema dice:

Se F è d'irregolarità q ed $\{A\}$ un suo sistema continuo, completo, composto d'∞^q sistemi lineari distinti, è sempre possibile far muovere A in $\{A\}$ in maniera da descrivere un sistema completo di $2q$ cicli tridimensionali $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2q}$ indipendenti; e se le curve di $\{A\}$ si distribuiscono in due congruenze rappresentabili coi punti di varietà abeliane V_r, V_{q-r} si può far in modo che, per esempio, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2r}$ siano generati da curve A corrispondenti a punti di V_r e gli altri $\Gamma_{2r+1}, \ldots, \Gamma_{2q}$ siano generati da curve A corrispondenti a punti di V_{q-r}.

Il teorema da modo di legare i cicli tridimensionali (e quindi anche quelli lineari) di F ai sistemi di curve algebriche esistenti su di essa.

Molte delle proprietà esposte, nella prima e seconda parte, si estendono senza difficoltà alle varietà superiori.

In una terza parte del lavoro (che comparirà nei rendiconti del Circolo Matematico di Palermo), ritorno alla proprietà *c*) delle corrispondenze a valenza zero.

Da essa nasce spontanea l'idea di considerare sopra una superficie F (come naturale estensione del concetto di serie lineari sopra una curva) le serie complete G_a^r di tutti i gruppi di a punti di F, dove tutti gli integrali semplici di prima specie della superficie, dànno somma costante (a meno, si intende di periodi).

Chiamo ogni serie G_a^r serie di livello costante per le somme abeliane relative alla superficie.

Se G_a^r è completa e invade tutta la superficie, dimostro che la varietà V_r che coi suoi punti rappresenta biunivocamente i gruppi di G_a^r, è algebrica e, almeno in generale, è una varietà regolare. Le G_a^r — almeno in generale — *sono perciò serie regolari della superficie*, e vale, come si è già detto, il viceversa.

Il concetto di serie G_a^r è invariante attraverso trasformazioni birazionali. Ogni corrispondenza algebrica trasforma una G_a^r in una $G_{a'}^{r'}$.

Una G_a^r completa è individuata da uno qualunque dei suoi gruppi.

Chiamando equivalenti due gruppi A e B appartenenti ad una stessa G_a^r, e scrivendo $A \equiv B$ oppure $A - B \equiv 0$, per il calcolo di queste relazioni, valgono le solite proprietà: se $A \equiv B$ e $B \equiv C$, è anche $A \equiv C$; se $A \equiv B$ e $C \equiv D$ è anche $A \pm C \equiv B \pm D$. Vale il teorema del resto.

Per la dimensione r di una G_a^r completa vale una formula analoga a quella di RIEMANN-ROCH: $r = 2a - q + i$.

Prima di trattare il caso generale, è necessario studiare la G_a^r appartenenti ad una superficie con un fascio irrazionale di genere q uguale all'irregolarità della superficie, e le G_a^r appartenenti ad una superficie ellittica. Per queste superficie è facile stabilire il significato geometrico del numero i che compare nella formula della dimensione.

Interessante è pure lo studio della G_a^r appartenenti ad una superficie iperellittica.

Caratterizzo le superficie che possiedono delle G_a^{2a}, G_a^{2a-1} e G_a^{2a-2}.

Se la superficie non è ellittica e non possiede un fascio irrazionale di curve di livello costante per tutti gli integrali semplici di prima specie, la varietà delle serie G_a^r, con a fisso e maggiore od uguale al massimo intero contenuto nella frazione $\frac{q+1}{2}$, o coincide con la varietà di PICARD V_q della superficie o possiede una involuzione rappresentabile coi punti di V_q.

L'indice ν di una G_a^r, dipende dalla superficie e non varia al variare di G_a^r su di essa.

In ordine ad un teorema di PICARD, ν è uguale ad uno per le superficie iperellittiche e maggiore di uno negli altri casi. In generale per le superficie viene perciò a mancare l'estensione diretta del teorema d'ABEL per le curve, vale però un teorema analogo al teorema d'inversione di JACOBI e l'indice ν è direttamente legato ad esso.

Il numero ν è invariante assoluto; ma sarà un nuovo invariante? O si potrà esprimere in funzione di quelli noti?

Come ho già accennato se la superficie è ellittica o possiede un fascio di genere q uguale alla sua irregolarità, alcune di queste proprietà cambiano leggermente di forma.

In queste considerazioni presentano comportamento diverso i casi di q pari e q dispari.

§ 1.

Considerazioni introduttive e trasformazioni dei sistemi continui.

1. - Date due superficie algebriche irriducibili F ed F', indichiamo con W la varietà delle coppie di punti di F ed F'.

Com'è noto W possiede due sistemi S ed S' di superficie, l'uno S, formato da ∞^2 superficie F'_P che si ottengono associando ad ogni punto P di F, tutti i punti di F' e l'altro S', formato dalle superficie $F_{P'}$ che si ottengono associando ad ogni punto P' di F' tutti i punti di F.

Per ogni punto di W passa una superficie di S ed una superficie di S', i due sistemi sono, cioè, d'indice uno.

Due superficie dello stesso sistema non hanno punti comuni, mentre una superficie F'_P di S ed una superficie $F_{P'}$ di S', hanno a comune il solo punto PP' (6).

2. - Sia T una corrispondenza algebrica $(\alpha\beta)$, fra i punti di F ed F'. La totalità delle coppie di punti PP' omologhi per la T, formano sopra W, una superficie algebrica F_1 che si può considerare come l'immagine della T.

Essa incontra ogni F'_P nei β punti PP'_1, $PP'_2, \ldots, PP'_\beta$ che nella T corrispondono a P e ogni superficie $F_{P'}$, negli α punti $P'P_1$, $P'P_2, \ldots, P'P_\alpha$ che nella T^{-1} corrispondono a P'.

La T si dirà irriducibile se tale è F_1. In generale i caratteri della F_1 (come invarianti, generi, irregolarità etc.) si considerano come altrettanti caratteri della T.

La superficie F è in corrispondenza $(1, \beta)$ con F_1 ed F_1 in corrispondenza $(\alpha, 1)$ con F' e la T si può considerare come il prodotto di queste due corrispondenze.

Se F ed F' coincidono, W diventa la varietà delle coppie ordinate di punti di F e fra le corrispondenze possibili vi è l'identità, rappresentata dalla superficie di tutte le coppie PP di punti coincidenti della F.

3. - Ciò detto, facciamo descrivere ad un punto P una curva A di F. I β punti corrispondenti descriveranno su F' una curva A'. Se sopra F' un punto P' descrive A', degli α punti ad esso corrispondenti, per la T^{-1}, uno solo, P, descrive β volte la curva A e gli altri $\alpha-1$ descriveranno una curva $\overline{A}$ che diremo associata ad A. Se $\alpha=1$, la curva $\overline{A}$ manca, e ad A' per la T^{-1} corrisponde la curva A contata β volte.

In modo analogo si ha: ad ogni curva B' di F' la T^{-1} fa corrispondere su F una curva B, alla quale poi per la T corrisponde, su F', la curva B' contata α volte e una curva $\overline{B}'$ associata a B' ($\overline{B}'$ manca quando è $\beta=1$).

---

(6) Vedi ALBANESE: *Sulla varietà delle coppie di punti di due superficie algebriche.* Atti del R. Istituto Veneto, t. LXXXIII, 1924.

4. - Facciamo variare A in un sistema lineare $|A|$, la corrispondente curva A' varierà in un sistema continuo che, essendo in corrispondenza biunivoca con le curve di $|A|$, sarà razionale e perciò formata di curve linearmente equivalenti fra di loro: *a curve linearmente equivalenti la corrispondenza associa curve pur esse linearmente equivalenti.*

La T associa ad ogni sistema lineare $|A|$ di F un sistema lineare $|A'|$ di F' e viceversa.

La corrispondenza che T induce fra questi sistemi lineari $|A|$ e $|A'|$, può essere di varia natura.

Supponiamo che F sia d'irregolarità q e facciamo variare $|A|$ in un sistema continuo completo $\{A\}$, composto d'∞^q sistemi lineari distinti.

Indicheremo con $[A']$ il sistema (generalmente incompleto) delle curve A' di F', corrispondenti alle curve A di $\{A\}$.

Per trattare il caso generale, supponiamo che alle curve A di un sistema Σ, composto d'∞^r $(0 \leqslant r \leqslant q)$ sistemi lineari distinti di $\{A\}$, corrispondano su F' curve di uno stesso sistema lineare $|A'|$.

Supporremo inoltre che Σ sia *il più ampio sistema continuo* di curve di $\{A\}$, aventi come omologhe curve di $|A'|$.

Indichiamo con $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ curve di Σ e consideriamo il sistema $\overline{\Sigma}$ di tutti i sistemi lineari

$$|\overline{A}| = |A + A_1 - A_2|$$

che si ottengono tenendo fisse A ed A_1 e facendo variare comunque A_2 in Σ.

Essendo $\{A\}$ composto d'∞^q sistemi lineari distinti, tutti questi sistemi $|\overline{A}|$ sono effettivi e sono distinti, perchè da una relazione:

$$A + A_1 - A_2 \equiv A + A_1 - A_3,$$

segue $A_2 \equiv A_3$. Perciò $\overline{\Sigma}$ è composto come Σ d'∞^r sistemi lineari distinti: Σ e $\overline{\Sigma}$ hanno poi a comune (almeno) le curve del sistema lineare $|A|$ che si ottiene da $|\overline{A}|$, facendo cadere A_2 in A_1. È chiaro infine che ad ogni curva $\overline{A}$ corrisponde su F' una curva $\overline{A}' \equiv A' + A_1' - A_2' \equiv A'$ del sistema $|A'|$.

Ne segue che $\overline{\Sigma}$ coincide con Σ, perchè ove ciò non fosse, facendo variare A in Σ, il sistema $\overline{\Sigma}$ descriverebbe un sistema continuo contenente Σ, ma *più ampio* di Σ e formato di curve aventi per omologhe sopra F', curve di $|A'|$; contro l'ipotesi fatta sull'ampiezza di Σ.

Per l'arbitrarietà di A e A_1 in Σ, ciò vuol dire che, applicando ad un qualunque sistema lineare $|A|$ di Σ, una qualsiasi operazione $+(A_1 - A_2)$, si ottiene sempre un sistema lineare $|\overline{A}|$ di Σ. Le operazioni $+(A_1 - A_2)$ al variare comunque di A_1 e A_2 in Σ sono ∞^r e riproducono Σ. Anzi fissati comunque due sistemi lineari $|A|$ e $|\overline{A}|$ di Σ è sempre possibile trovare una operazione $+(A_1 - A_2)$ che porti $|A|$ in $|\overline{A}|$: $|\overline{A}| = |A + A_1 - A_2|$. È chiaro anche

che le operazioni $+(A_1-A_2)$ sono due a due permutabili essendo

$$|A+(A_1-A_2)+(A_1-A_3)|\equiv|A+(A_1-A_3)+(A_1-A_2)|.$$

Il sistema Σ come totalità dei suoi sistemi lineari, ammette quindi un gruppo transitivo di ∞^r trasformazioni permutabili e possiamo dire: *il sistema Σ come totalità dei suoi sistemi lineari è una varietà abeliana.*

5. - Congruenze legate ad una corrispondenza. — Sia ora B una curva sempre di $\{A\}$, ma fuori di Σ, e consideriamo il sistema Σ_1 delle curve appartenenti ai sistemi lineari

$$|B+A-A_1|$$

che si ottengono, tenendo fisse B ed A e facendo variare comunque A_1 in Σ. Essi sono tutti effettivi, per la stessa ragione di sopra, e sono ∞^r perchè da una relazione del tipo $B+A-A_1\equiv B+A-A_2$, segue $A_1\equiv A_2$.

A tutte le curve di Σ_1 corrispondono su F' curve di uno stesso sistema lineare $|B'|$, perchè dalle ipotesi fatte su Σ, si ha $B'+A'-A_1'\equiv B'$.

I due sistemi Σ e Σ_1 non hanno alcuna curva a comune, perchè se $\overline{A}$ fosse una tale curva, per una posizione opportuna di A_1 in Σ, si dovrebbe avere:

$$B+A-A_1\equiv\overline{A},$$

e perciò: $B\equiv\overline{A}+A_1-A$, e B, per quanto è stato detto al numero precedente, apparterebbe a Σ, contro l'ipotesi (7).

È chiaro infine che Σ_1 è il più ampio sistema continuo di curve di $\{A\}$, aventi come omologhe su F' curve di $|B'|$, e come totalità dei suoi sistemi lineari è pur esso una varietà abeliana in corrispondenza biunivoca senza eccezione con quella relativa a Σ.

Sia ora C una curva di $\{A\}$ fuori di Σ e Σ_1 e si ripeta lo stesso ragionamento; il sistema Σ_2 di tutti i sistemi lineari $|C+A-A_1|$ sarà formato di ∞^r sistemi lineari distinti, e sarà il più ampio sistema di curve aventi per omologhe in F', curve di uno stesso sistema lineare $|C'|$. I sistemi Σ, Σ_1, Σ_2, due a due, non avranno alcuna curva a comune.

Concludendo: *gli ∞^q sistemi lineari di $\{A\}$ si distribuiscono in una congruenza H di ∞^{q-r} sistemi Σ. Ogni sistema Σ è composto d'∞^r sistemi lineari distinti. Per ogni curva di $\{A\}$ passa uno ed un solo sistema Σ, due sistemi Σ non hanno mai curve a comune, H è, cioè, una congruenza d'indice uno.*

In relazione poi alla nostra corrispondenza T, fra i punti di F ed F', si può

---

(7) La stessa proprietà è evidente se su F' i due sistemi $|B'|$ e $|A'|$ sono distinti, il ragionamento di sopra prova che essa è vera in generale anche quando su F' si verifica la relazione (non assurda) $|B'|=|A'|$.

dire che alle curve di ogni sistema Σ di H, corrispondono su F', curve di uno stesso sistema lineare di $[A']$; anzi in $\{A\}$, ogni sistema Σ è il più ampio sistema continuo che gode di tale proprietà. Fra i sistemi continui Σ di $\{A\}$ e i sistemi lineari $|A'|$ di $[A']$ esiste perciò una corrispondenza Ω.

Quanti sono i sistemi Σ che corrispondono ad uno stesso sistema $|A'|$?

Le condizioni che esprimono l'equivalenza lineare di due curve del sistema $[A']$ sono condizioni algebriche, perciò se i detti sistemi Σ fossero infiniti, essi dovrebbero distribuirsi in un numero finito di sistemi continui $S_1, S_2, \dots, S_\varepsilon$. Con l'uso delle solite operazioni $+(M-N)$, M ed N essendo curve di uno stesso sistema S_i, si trova subito che essi hanno tutti la stessa dimensione s e, ricordando l'ipotesi fatta sull'ampiezza di Σ, si ottiene che è $s=r$, ossia $S_1, S_2, \dots, S_s$ coincidano con altrettanti sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\varepsilon$. La corrispondenza Ω è perciò del tipo $(\varepsilon, 1)$.

Facciamo vedere che la Ω è priva di coincidenze. Supposto infatti che alle curve di $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\varepsilon$ corrispondano curve di $|A'|$, indichiamo con B una curva qualunque di $\{A\}$, fuori dei sistemi Σ_i e consideriamo i sistemi $\overline{\Sigma}_1, \overline{\Sigma}_2, \dots, \overline{\Sigma}_\varepsilon$ che si ottengono considerando i sistemi lineari $|B+M-N_i|$, M essendo una curva fissa di Σ_1 e N_i variando comunque in Σ_i $(i=1, 2, \dots, \varepsilon)$. I sistemi $\overline{\Sigma}_i$ sono tutti ∞^r, e sono due a due distinti, perchè ove fosse $B+M-N_i \equiv B+M-N_j$, si avrebbe $N_i \equiv N_j$; Σ_i, Σ_j avrebbero, cioè, curve a comune e sarebbe $\Sigma_i \equiv \Sigma_j$, contro l'ipotesi. È chiaro poi che a tutte le curve dei sistemi $\overline{\Sigma}_i$ corrispondono su F' curve dello stesso sistema lineare $|B'|$. Essendo $|B'|$ uno qualunque dei sistemi lineari di $[A']$, l'asserto è dimostrato.

I sistemi Σ di H si distribuiscono perciò in ∞^{q-r} gruppi G_ε di una involuzione I_ε priva di coincidenze. Le curve dei sistemi di ogni gruppo G_ε sono tutte e sole le curve di $\{A\}$ che hanno per omologhe su F', curve di un medesimo sistema lineare di $[A']$. La Ω si può interpretare come corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, fra i gruppi G_ε dell'involuzione I_ε e i sistemi lineari di $[A']$.

Ne segue che i sistemi lineari di $[A']$ sono ∞^{q-r} e che perciò, detta q' l'irregolarità di F', è $q-r \leqslant q'$, ossia $q \leqslant q'+r$.

6. - Introduzione delle varietà di Picard. — Verificate le proprietà precedenti per il sistema $\{A\}$, esse si verificano per qualunque sistema continuo $\{B\}$ di F, composto anch'esso d'∞^q sistemi lineari distinti.

Applicando infatti ad una curva B tutte le operazioni $+(A-A_1)$, con A e A_1 curve di $\{A\}$, i sistemi lineari $|B+A-A_1|$ riproducono in altro ordine i sistemi lineari di $\{B\}$.

E perciò anche le curve di $\{B\}$ si distribuiscono in sistemi del tipo Σ_r, formanti una congruenza come H, e dove i sistemi Σ_r individuano una involuzione del tutto identica a I_ε. Le curve di un gruppo di questa nuova I_ε sono tutte e sole le curve di $\{B\}$ alle quali corrispondono su F' curve di uno stesso sistema lineare.

Se $\{B\}$ è composto d'∞^p sistemi lineari con $p<q$, basta sostituire a $\{B\}$ il sistema virtuale V_B di tutte le curve $|B+A-A_1|$. Esso contiene $\{B\}$ ed è composto d'∞^q sistemi lineari effettivi o virtuali (8). Le sue proprietà sono identiche a quelle di $\{A\}$ (9).

7. - La proprietà si può perciò portare sulla varietà di PICARD V_q relativa ad F. I punti di $V\equiv V_q$ corrispondono biunivocamente ai sistemi lineari di $\{A\}$, dette perciò σ le varietà dei punti di V_q corrispondenti ai sistemi lineari Σ, si deve concludere:

La varietà V_q contiene una congruenza d'indice uno, h, composta d'∞^{q-r} varietà $\sigma\equiv V_r$. Ogni V_r è di dimensione r, e come V_q, è una varietà abeliana. Per ogni punto di V_q passa una ed una sola varietà V_r. Due qualunque varietà V_r non hanno mai punti a comune e sono in corrispondenza biunivoca fra di loro.

Per noti teoremi di CASTELNUOVO (10) esisterà allora in V_q una seconda congruenza k, d'indice uno, incidente ad h e formata da ∞^r varietà $s\equiv V_{q-r}$ di dimensioni $q-r$. Per ogni punto di V_q passerà una ed una sola V_{q-r}, due varietà V_{q-r} non hanno cioè punti comuni, mentre una V_r ed una V_{q-r} hanno un numero finito η ($\geqslant 1$) di punti comuni. Ad ogni varietà V_{q-r} corrisponderà in $\{A\}$ un sistema S formato d'∞^{q-r} sistemi lineari $|A|$. Il loro insieme formerà una congruenza K, d'indice uno, incidente alla congruenza H. Un sistema S ed un sistema Σ hanno η sistemi lineari a comune. Ne segue che i sistemi lineari di ogni S si distribuiscono in ∞^{q-r} gruppi $G_{\varepsilon\eta}$ di $\varepsilon\eta$ sistemi lineari, formanti una involuzione $I_{\varepsilon\eta}$. Ai sistemi lineari di uno stesso gruppo, e a questi soli, corrisponde per la T, su F', uno ed un solo sistema lineare di $[A']$. I sistemi lineari di $[A']$ e i gruppi di $I_{\varepsilon\eta}$ si corrispondono biunivocamente.

E lo stesso vale qualunque sia il sistema continuo di partenza $\{B\}$, $\{C\}$, etc.

8. - **Sistemi d'integrali riducibili legati ad una corrispondenza. Rango di una corrispondenza.** — L'esistenza sopra V delle due congruenze h e k porta notevoli conseguenze per gli integrali semplici di prima specie di F.

---

(8) ALBANESE: *Su alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve di una superficie algebrica.* Annali di matematica, t. XXIV, 1915.

(9) A proposito di sistema $\{B\}$ di una superficie d'irregolarità q, composti con ∞^p sistemi lineari distinti, con $p<q$, notiamo che $\{B\}$, come totalità dei suoi sistemi lineari, non è necessariamente una varietà abeliana. Per provarlo basta un esempio: si consideri la superficie Φ delle coppie (non ordinate) di punti di una curva C di genere $p>1$. Fra i sistemi continui di Φ vi è il sistema $\{C_p\}$ delle curve C_p che si ottengono accoppiando ad un punto P di C, tutti i punti di C stessa. Il sistema $\{C_p\}$ è ∞^1, d'indice due, di grado uno, completo e in corrispondenza coi punti della curva data C. Evidentemente esso non è abeliano.

(10) CASTELNUOVO, loc. cit. nella prefazione. Vedasi n.i 7, 8 e 9.

In ordine a ben noti teoremi di PICARD e PAINLEVÉ V *possederà due sistemi regolari d'integrali riducibili. L'uno* ∞^{q-r-1}, *con* $2(q-r)$ *periodi ridotti, formato dagli integrali di prima specie variabile sopra ogni varietà* V_{q-r} *e costanti sopra ogni varietà* V_r. *L'altro* ∞^{r-1}, *con* $2r$ *periodi ridotti, formato invece dagli integrali variabili sopra ogni varietà* V_r *e costanti sopra ogni varietà* V_{q-r}.

Ragionando alla maniera di HUMBERT-CASTELNUOVO ([11]), questi integrali dànno origine a due sistemi analoghi d'integrali sopra F.

Indicheremo sopra F con:

$$\text{(I)} \qquad I_1, \quad I_2, \ldots, \quad I_{q-r},$$

$q-r$ integrali indipendenti del primo sistema, e con

$$\text{(II)} \qquad J_1, \quad J_2, \ldots, \quad J_r,$$

r integrali analoghi del secondo sistema. I $2(q-r)$ periodi del sistema (I) e i $2r$ periodi del sistema (II), *sono combinazioni lineari a coefficienti interi dei corrispondenti integrali di* V. Ricordiamo infine che (I) e (II) formano un sistema completo di integrali di prima specie di F.

La corrispondenza T è evidentemente legata all'esistenza sopra F di questi due sistemi di integrali riducibili, in particolare T è legata ai due numeri $q-r$ ed r. Chiameremo il primo, *difetto d'equivalenza* o *rango* di T e il secondo *indice di equivalenza* della T stessa.

9. - Le considerazioni fin qui svolte per la T e la F si applicano inalterate alla T^{-1} e alla superficie F'. Detta perciò q' l'irregolarità di F', $V' \equiv V'_{q'}$ la sua varietà di PICARD e r' l'indice d'equivalenza relativo a T^{-1}, si può concludere: $V'_{q'}$ possiede due congruenze h' e k' incidenti, d'indice uno, la prima h', formata da $\infty^{q'-r'}$ varietà abeliane $V'_{r'}$ e la seconda da $\infty^{r'}$ varietà abeliane $V'_{q'-r'}$. Corrispondentemente sopra F' le curve di ogni sistema continuo completo $\{A'\}$, composto d'$\infty^{q'}$ sistemi lineari distinti, si distribuiscono in due congruenze H', K', incidenti, d'indice uno, la prima formata da $\infty^{q'-r'}$ sistemi Σ' e la seconda da $\infty^{r'}$ sistemi S'. Ogni sistema Σ' contiene $\infty^{r'}$ sistemi lineari distinti, e alle curve di questi sistemi corrispondono, per la T^{-1}, sopra F, curve di uno stesso sistema lineare. Ogni sistema S' è invece formato da $\infty^{q'-r'}$ sistemi lineari, distribuiti in gruppi $G'_{\varepsilon'\eta'}$ di una involuzione $I'_{\varepsilon'\eta'}$ priva di coincidenze. Ai sistemi di ogni gruppo $G'_{\varepsilon'\eta'}$ corrisponde, per la T^{-1}, sopra F, uno stesso sistema lineare, ma ai sistemi di due distinti gruppi corrispondono su F, sistemi lineari distinti.

([11]) HUMBERT: *Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques.* Journal de Mathématique, t. X, 1894; CASTELNUOVO, loc. cit. n.° 10.

In quanto agli integrali semplici di prima specie di F', come sopra, si trova che essi si distribuiscono in due sistemi regolari d'integrali riducibili (complementari l'uno dall'altro), il primo composto d'$\infty^{q'-r'-1}$ integrali distinti con $2(q'-r')$ periodi ridotti e il secondo d'$\infty^{r'-1}$ integrali con $2r'$ periodi ridotti.

Indicheremo con

(III) $$I_1',\quad I_2',\dots,\quad I'_{q'-r'},$$

(IV) $$J_1',\quad J_2',\dots,\quad J'_{r'},$$

due sistemi d'integrali indipendenti del primo e del secondo sistema rispettivamente. I periodi degli integrali (III) e (IV) sono rispettivamente combinazioni lineari a coefficienti interi degli integrali delle corrispondenti varietà $V'_{q'-r'}$ e $V'_{r'}$.

§ 2.

Teorema fondamentale. Una corrispondenza e la sua inversa hanno lo stesso rango.

10. - Vogliamo ora dimostrare che i numeri $q-r$ e $q'-r'$ sono uguali, che ogni varietà V_{q-r} è in corrispondenza biunivoca con ogni varietà $V'_{q'-r'}$ o che per lo meno, V_{q-r} e $V'_{q'-r'}$ contengono due involuzioni, prive di coincidenze I_ε, $I'_{\varepsilon'}$, rappresentabili biunivocamente coi punti di una stessa varietà abeliana W_{q-r}, che i sistemi integrali (I) e (III) (formati dallo stesso numero d'integrali $q-r=q'-r'$) si possono porre in corrispondenza biunivoca tale che i periodi ω_{ki} di ogni integrale I_k si esprimano per combinazioni lineari a coefficienti razionali dei periodi ω'_{ki} dell'integrale I_k' ad esso corrispondente:

$$\omega_{ki}=m_{1i}\omega'_{k1}+m_{2i}\omega'_{k2}+\dots+m_{2(q-r)i}\omega'_{k\cdot 2(q-r)}$$
$$(k=1, 2,\dots)$$

i numeri m_{ri} essendo *razionali* e indipendenti da k.

A tal uopo introduciamo la superficie F_1, del n.° 2, che con i suoi punti rappresenta le coppie PP' dei punti di F ed F', omologhi nella T.

Abbiamo visto che tra F ed F_1 intercede una corrispondenza $T_1\equiv(1\beta)$, e fra F_1 ed F' una corrispondenza $T_2\equiv(\alpha 1)$ e che la corrispondenza T si può considerare come il prodotto di T_1 per T_2. Supporremo che F_1 (e quindi T) sia irriducibile.

Dimostriamo che T_1 e T_2^{-1} hanno l'indice di equivalenza nullo.

Prendiamo in F un qualunque sistema continuo S di curve C linearmente distinte e sopra F_1 sia S_1 il sistema delle curve corrispondenti C_1.

Le curve C_1 sono linearmente distinte. Infatti la corrispondenza inversa T_1^{-1}, ad ogni curva C_1 fa corrispondere la curva C contata β volte (n.° 3), e perciò se le curve C_1 fossero linearmente equivalenti lo stesso sarebbe delle curve βC.

Applicando allora un noto teorema del SEVERI ([12]) si troverebbe che anche le curve C, singolarmente prese, apparterrebbero ad uno stesso sistema lineare, contro l'ipotesi.

Ne segue che in ogni corrispondenza unirazionale, (1β), a sistemi lineari distinti di un sistema continuo $\{A\}$, corrispondono sopra F_1, sistemi lineari distinti e perciò, se $\{A\}$ è composto d'∞^q sistemi lineari, anche il sistema $[A_1]$ delle curve corrispondenti, è composto d'∞^q sistemi lineari distinti. Anzi fra i sistemi lineari di $\{A\}$ e i sistemi lineari di $[A_1]$ correrà una corrispondenza $(\varepsilon 1)$ ([13]).

Concludiamo:

L'indice d'equivalenza di ogni corrispondenza T, unirazionale è nullo, e conseguentemente il suo difetto d'equivalenza sarà il massimo possibile, cioè, q, l'irregolarità della superficie F di partenza.

Il sistema $[A_1]$ delle curve corrispondenti alle curve di $\{A\}$, generalmente non è completo. È possibile infatti supporre che le curve A_1 siano aritmeticamente effettive. In tali condizioni il sistema completo $\{A_1\}$, individuato, su F_1, dalle curve A_1, è composto d'∞^{q_1} sistemi lineari distinti, q_1 essendo l'irregolarità di F_1 e sarà $q_1 \geqslant q$.

A tale sistema completo, per la T_1^{-1}, corrisponderà su F il sistema $\{\beta A\}$, composto come $\{A\}$, d'∞^q sistemi lineari distinti.

Dalle considerazioni precedenti risulta che i sistemi lineari del sistema continuo $\{A_1\}$ si distribuiscono in due congruenze H_1, K_1, d'indice uno. La prima H_1, sarà formata d'∞^q sistemi Σ_{q_1-q} e la seconda K_1, d'∞^{q_1-q} sistemi S_q (fra essi e il sistema $[A_1]$ di cui sopra). Ogni sistema Σ_{q_1-q} è composto d'∞^{q_1-q} sistemi lineari aventi per omologhi sopra F per la T_1^{-1}, uno stesso sistema lineare, mentre ogni sistema S_q sarà composto, come $[A_1]$, d'∞^q sistemi lineari distinti, aventi come omologhi sopra F altrettanti sistemi lineari distinti. E fra i sistemi lineari di $\{A\}$ e quelli di S_q, intercede una corrispondenza $(\varepsilon 1)$.

Le due congruenze H_1 e K_1 si rispecchiano in due congruenze h_1 e k_1, d'indice uno di varietà abeliane, W_{q_1-q}, W_q, della varietà di PICARD W_{q_1}, della superficie F_1. Ogni varietà W_q è perciò in corrispondenza $(\varepsilon 1)$ con la varietà di PICARD V_q di F.

Considerando analogamente la corrispondenza $T_2^{-1} \equiv (1, \alpha)$ che passa fra F' ed F_1, nella stessa varietà W_{q_1} viene determinata una seconda coppia di con-

---

([12]) SEVERI: *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard.* Rend. del Circolo matematico di Palermo, t. XXI, 1906, n.° 12.

([13]) Se ne deduce: Se F_1 è regolare tale è necessariamente F, ossia:

ogni involuzione sopra una superficie regolare è regolare, in particolare *ogni involuzione piana è regolare*; dopo di che si ha facilmente il classico teorema di CASTELNUOVO sulla *razionalità delle involuzioni piane.*

gruenze h_1', k_1' (eventualmente coincidenti con la prima), incidenti, d'indice uno: la prima formata da $\infty^{q'}$ varietà abeliane $W'_{q_1-q'}$, la seconda da $\infty^{q_1-q'}$ varietà $W'_{q'}$.

Ogni $W'_{q_1-q'}$ rappresenta sistemi lineari di curve di F_1 che per la T_2 hanno sopra F' come corrispondenti un unico sistema lineare, ogni $W'_{q'}$ rappresenta invece $\infty^{q'}$ sistemi lineari di F_1 che la T_2 trasforma in altrettanti sistemi lineari di F', e fra la varietà di PICARD $V'_{q'}$ di F' e una $W'_{q'}$ esiste una corrispondenza $(\varepsilon'1)$.

11. - Ciò detto, riprendiamo il numero r considerato nei paragrafi precedenti e supponiamo che i sistemi lineari di ogni sistema $\{A\}$ di F, si distribuiscano, com'è detto al n.° 5, nelle due congruenze H e K di sistemi Σ_r ed S_{q-r}.

Ai sistemi lineari di Σ_r per la T corrisponderà, sopra F', un unico sistema lineare, mentre agli ∞^{q-r} sistemi lineari di S_{q-r}, per la T corrisponderanno, sopra F', altrettanti sistemi lineari.

Se ne deduce che V_q conterrà due congruenze h e k di varietà V_r e V_{q-r} e quindi, sopra W_{q_1}, ogni W_q sarà anch'essa formata di due congruenze di varietà W_r e W_{q-r}.

Fra V_{q-r} e una W_{q-r} intercede una corrispondenza $(\varepsilon 1)$, e per il modo col quale $T=T_1T_2$ trasforma i sistemi lineari di Σ_r e S_{q-r}, ogni W_r sarà contenuta in una $W_{q_1-q'}$ ed ogni W_{q-r} in una $W'_{q'}$.

Sicchè W_{q-r} apparterrà all'intersezione di una W_q con una $W'_{q'}$. Ora è facile vedere che una W_q e una $W'_{q'}$ non possono tagliarsi in una varietà $W_{q-r+\alpha}$ più ampia di W_{q-r}. Se ciò fosse questa varietà $W_{q-r+\alpha}$ segherebbe ogni W_r in una varietà W_α corrispondente ad ∞^α sistemi lineari di uno stesso sistema Σ_r e aventi perciò, sopra F', come omologhi un unico sistema lineare. D'altra parte se detta W_α appartenesse a $W'_{q'}$, gli stessi sistemi lineari avrebbero per omologhi, su F', ∞^α sistemi lineari distinti, e perciò è necessariamente $\alpha=0$, ossia l'intersezione completa di W_q e di $W'_{q'}$ è una W_{q-r} (o un numero finito di W_{q-r}).

A questo punto invertiamo le funzioni di F ed F', di T e T^{-1}: lo stesso ragionamento ci porta a concludere che l'intersezione completa di W_q e $W'_{q'}$ e formata da una o più (ma sempre in numero finito) varietà $W'_{q'-r'}$, ogni $W'_{q'-r'}$ rappresentando sopra $W'_{q'}$ gli $\infty^{q'-r'}$ sistemi lineari di F' che per la T^{-1} hanno per omologhi sopra F, altrettanti sistemi lineari. Ricordiamo anche che fra la varietà $V'_{q'-r'}$ del n.° 9 e la varietà $W'_{q'-r'}$ intercede una corrispondenza $(\varepsilon'1)$.

Ne segue che ogni varietà W_{q-r} coincide con una varietà $W'_{q'-r'}$ e che V_{q-r} e $V'_{q'-r'}$ sono in corrispondenza birazionale con W_{q-r} $(\varepsilon=\varepsilon'=1)$ e quindi fra di loro, oppure V_{q-r} e $V'_{q'-r'}$ posseggono due involuzioni, prive di coincidenze I_ε, $I'_{\varepsilon'}$, rappresentabili biunivocamente coi punti della varietà abeliana W_{q-r}.

Da questo fatto seguono conseguenze fondamentali.

Intanto le dimensioni di V_{q-r} e $V'_{q'-r'}$ sono uguali e perciò si ha:

$$q-r=q'-r' \tag{V}$$

e possiamo dire:

1°) *Una corrispondenza T e la sua inversa T^{-1} hanno lo stesso rango* $\nu = q - r = q' - r'$. Geometricamente vuol dire:

2°) Detto $\{A\}$ un qualunque sistema continuo, completo, composto d'∞^q sistemi lineari distinti di F ed $[A']$ il sistema delle curve corrispondenti per la T sopra F'; detto $\{B'\}$ un qualunque sistema continuo completo, composto d'$\infty^{q'}$ sistemi lineari di curve di F' e $[B]$ il sistema delle curve di F ad esso corrispondente per la T^{-1}, i sistemi $[A']$ e $[B]$ come totalità di sistemi lineari hanno la stessa dimensione ν, sono abeliani, e in corrispondenza (1ε), $(1\varepsilon')$ con i punti della stessa varietà abeliana W_{q-r}. I sistemi lineari di $\{A\}$ che per la T corrispondono ad un unico sistema lineare di $[A']$ formano un sistema abeliano Σ_r di dimensione $r = q - \nu$, e analogamente i sistemi lineari di $\{B'\}$ che per la T^{-1} corrispondono ad un unico sistema lineare di $[B]$ formano una varietà abeliana $\Sigma'_{r'}$ di dimensione $r' = q' - \nu$.

Indichiamo con

$$i_1, \quad i_2, \ldots, \quad i_{q-r}$$

un sistema completo d'integrali semplici, di prima specie, indipendenti, della varietà W_{q-r} e sia Γ una curva generica appartenente alla W_{q-r}. Ad ogni punto di Γ corrisponderà sopra F un sistema lineare di $[B]$ e sopra F' un sistema lineare di $[A']$. Mediante tale corrispondenza e possibile fissare su F, un sistema γ di curve B linearmente distinti, corrispondenti biunivocamente ai punti di Γ e su F' un sistema analogo γ', di curve A' linearmente distinte, anch'esso in corrispondenza biunivoca coi punti di Γ.

Ragionando alla maniera di HUMBERT-CASTELNUOVO dagli integrali i_1, $i_2, \ldots$ i_{q-r} si passa allora a due sistemi d'integrali semplici di prima specie, indipendenti,

$$\begin{array}{lcr} \text{(I)} & I_1, \quad I_2, \ldots, \quad I_{q-r} & \\ \text{(II)} & I_1', \quad I_2', \ldots, \quad I'_{q'-r'} & (q - r = q' - r' = \nu) \end{array}$$

rispettivamente di F ed F', che possiamo senz'altro supporre coincidenti cogli integrali indicati con (I) e (III). Ad ogni integrale I_k corrisponde così un integrale I'_k e viceversa.

I $2(q-r)$ periodi ridotti ω_{kh} di ciascun integrale I_k e analogamente i $2(q'-r')$ periodi ω'_{kh} dell'integrale I_k' sono combinazioni lineari a coefficienti interi, indipendenti da k, dei periodi dell'integrale i_k dal quale provengono. Ne segue che i periodi ω_{kh} e ω'_{kh} $(k = 1, 2, \ldots, q-r)$ di I_k e I_k' si esprimono razionalmente gli uni per gli altri. E si conclude:

3°) *Se fra i punti di due superficie F ed F' intercede una corrispondenza T di rango ν, le due superficie F ed F' posseggono due sistemi regolari* (I) *e* (II) *di integrali riducibili della stessa dimensione* $\nu - 1$ $(= q - r - 1 = q' - r' - 1)$. *I due sistemi si possono poi porre in corrispondenza biunivoca fra di loro, facendo per esempio corrispondere ad ogni* *integrale* I_k *di* F *l'integrale* I_k' *di* F'. *I* $2(q-r)$ *periodi ridotti di due integrali corrispondenti sono combinazioni lineari a coefficienti razionali costanti (indipendenti cioè da* k*) gli uni degli altri.*

12. - Proprietà fondamentale degli integrali riducibili legati ad una corrispondenza. — Al sistema (I) corrisponde su F un sistema complementare di ∞^{r-1} integrali riducibili con $2r$ periodi ridotti

(III) $$J_1, \quad J_2, \dots, \quad J_r$$

che possiamo supporre provenienti dalla varietà V_r, appartenenti a V_q, come si è detto al n.° 7. E per la stessa ragione anche su F' avremo un secondo sistema:

(IV) $$J_1', \quad J_2', \dots, \quad J'_{r'},$$

di $\infty^{r'-1}$ integrali con $2r'$ periodi ridotti, provenienti dagli integrali di una $V'_{r'}$ di $V'_{q'}$.

Consideriamo ora i gruppi G'_β di β punti di F', corrispondenti ai punti di F, essi formano una γ_β^2, birazionalmente identica ad F, detta la serie che T induce su F'. Considerando la T^{-1} si trova analogamente una serie γ_α^2 di gruppi G_α di α punti di F (identica ad F').

Vogliamo dimostrare che gli integrali (III) dànno somma costante su tutti i gruppi G_α di γ_α^2 e gli integrali (IV) dànno somma costante sui gruppi G'_β di γ_β^2.

Riprendiamo la costruzione di CASTELNUOVO, degli integrali (III).

Sia Γ una curva (generica) di V_r e γ un sistema semplicemente infinito di curve A di F, linearmente distinte, appartenenti a Σ_r e corrispondenti biunivocamente ai punti di Γ.

Se indichiamo con m l'indice del sistema γ, la corrispondenza Ω che associa ad ogni punto Q di Γ una curva A di F, si può interpretare come corrispondenza (∞, m) fra i punti di F e i punti di Γ, basta far corrispondere ad ogni punto P di F i punti $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ di Γ che per la Ω corrispondono alle curve $A_1, A_2, \dots, A_m$ di γ, passanti per P.

Sia U un integrale di V_r, che non resti costante sopra Γ. Secondo la costruzione ricordata, la somma:

$$J(P) = U(Q_1) + U(Q_2) + \dots + U(Q_m),$$

risulta un integrale (III) della superficie F.

Prendiamo su F, α punti, $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ formanti un gruppo G_α di γ_α^2, indichiamo con:

$$A_{11}, \quad A_{12}, \dots, \quad A_{1m}, \quad A_{21}, \quad A_{22}, \dots, \quad A_{2m}, \dots, \quad A_{\alpha m},$$

le curve di γ, passanti per essi e con:

$$Q_{11}, \quad Q_{12}, \dots, \quad Q_{1m}, \quad Q_{21}, \quad Q_{22}, \dots, \quad Q_{2m}, \dots, \quad Q_{\alpha m},$$

gli ma punti di Γ ad esse corrispondenti. Si avrà per definizione:

$$J(P_1)+J(P_2)+ \dots +J(P_a)=\Sigma_{i,j}U(Q_{ij}) \qquad (1)$$
$$(i=1, 2,\dots, a;\ j=1, 2,\dots, m).$$

Ciò detto consideriamo sopra F', il sistema γ' delle curve A' che per la T corrispondono alle curve A di γ.

Per le ipotesi fatte le curve A' sono due a due linearmente equivalenti fra di loro.

Detto P' il punto di F' che per la T^{-1} ha come corrispondenti i punti P_1, $P_2,\dots, P_a$, per P' passeranno tutte le curve A'_{ij} e nessun altra curva A' di γ'. Il sistema γ' risulta perciò d'indice ma.

Facciamo corrispondere ad ogni punto Q di Γ la curva A' di γ', proveniente per la T dalla curva A che la Ω associa a Q. La corrispondenza ω $(=\Omega T)$ che così nasce fra gli elementi di Γ e γ', si può interpretare come corrispondenza (∞, ma) fra i punti di F' e Γ.

Ad ogni punto P' di F' corrisponderanno su Γ gli ma punti Q_{ij} che compaiono nelle formule precedenti. Mentre ad ogni punto di Γ corrisponde una curva A'.

Essendo le curve A' linearmente equivalenti la ω è a valenza zero e perciò, per un teorema del SEVERI ([14]) anche la ω^{-1} sarà a valenza zero; al variare cioè di P' su F gli ma punti Q_{ij} variano in una serie lineare g_{ma} di Γ.

Dal teorema d'ABEL si ha allora che $\Sigma_{i,j}U(Q_{ij})=\text{cost}$ e perciò, applicando la (1)

$$J(P_1)+J(P_2)+ \dots +J(P_a)=\text{cost},$$

a meno s'intende di periodi dell'integrale J.

Dimostrata la proprietà per i singoli integrali (III), è chiaro che essa vale per tutti gli integrali del sistema lineare da essi individuato.

Per analoga ragione ogni integrale J' del sistema lineare individuato dagli integrali (IV), darà somma costante in tutti i gruppi G'_β della γ^2_β di F'.

13. - Dimostriamo ora che nessun altro integrale di F può dare somma costante sui gruppi di γ^2_a.

Ammettiamo la proprietà vera per le curve; per quanto essa non sia stata notata esplicitamente, pure si può considerare come facile conseguenza di noti risultati del ROSATI ([15]). Del resto nella II memoria, capiterà anche a noi incidentalmente, di darne la dimostrazione e con considerazioni del tutto indipendenti da quelle che andiamo a svolgere.

([14]) SEVERI: *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* Annali di matematica, t. XII, s. III, 1905, n.° 2.

([15]) ROSATI: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare, fra i punti di una curva di genere due.* Annali di matematica, t. XXV, 1915.

Riprendiamo il ragionamento precedente, ma per una curva Γ scelta su una V_{q-r} anzicchè sopra V_r e facendo s'intende corrispondere ai suoi punti Q, curve A di un sistema S_{q-r}; del resto lasciamo inalterate tutte le notazioni precedenti.

Nella (1) U significherà ora un qualunque integrale $\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + ... + \lambda_{q-r} i_{q-r}$ di V_{q-r}, e corrispondentemente J sarà l'integrale $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + ... + \lambda_{q-r} I_{q-r}$ del sistema (I).

Ciò detto, su F' invece di far variare P' arbitrariamente, facciamolo muovere sopra una curva Γ'.

La ω subordinerà tra i punti di Γ e Γ' una corrispondenza $\tau = (ma, n)$, n essendo il numero dei punti comuni a Γ' e ad una curva A' di γ'.

Detti p e p' i generi di Γ e Γ', ϱ e ϱ' gli indici di equivalenza di τ e della sua inversa, si dovrà avere

$$p - \varrho = p' - \varrho'. \tag{2}$$

Supponiamo per un momento che V_{q-r} non possegga sistemi regolari d'integrali riducibili.

Si può allora supporre che Γ non possegga sistemi regolari d'integrali riducibili oltre a quello che su essa subordinano gli integrali $i_1, i_2, ..., i_{q-r}$ di V_{q-r} e il conseguente sistema complementare. In tali condizioni $p - \varrho$ deve necessariamente coincidere con uno dei seguenti numeri:

$$0, \quad p, \quad q-r, \quad p-q+r.$$

Supponiamo analogamente che Γ' non possegga altri sistemi regolari d'integrali riducibili all'infuori di quelli che le provengono come curva di F' e dei relativi sistemi complementari.

Supposto che F' possegga sistemi riducibili contenenti il sistema (II) e di dimensioni $q' - r' + s_i$, dove s_i può avere soltanto valori compresi tra 0 e r', si trova analogamente che $p' - \varrho'$ deve essere uguale ad uno dei numeri:

$$0, \quad p', \quad s_i, \quad p'-s_i, \quad r', \quad p'-r', \quad q'-r', \quad p'-q'+r',$$
$$q'-r'+s_i, \quad p'-q'+r'-s_i, \quad q', \quad p'-q'.$$

Si tratta di confrontare questi valori coi precedenti, in base alla (2).

I valori zero, zero si escludono, chè altrimenti τ sarebbe a valenza zero e le curve A' appartenenti al sistema continuo γ' staccherebbero gruppi equivalenti sulla curva Γ' e sarebbero equivalenti (SEVERI) potendo supporre Γ' variabile in un sistema lineare più volte infinito.

E ciò sarebbe contrario al fatto che le curve A appartengono ad un sistema S_{q-r}.

Gli altri casi, all'infuori di $p - \varrho = q - r$ e $p' - \varrho' = q' - r'$, possibile per la (V), si escludono tutti per l'arbitrarietà dei valori di p e p' e per essere i numeri r, r', q, q', s_i di limitata variazione (per esempio tutti minori di $q + q'$).

Ora se $p-\varrho=q-r$ e quindi $\varrho=p-q+r$ per il teorema ammesso sulle curve, gli integrali $U=\lambda_1 i_1+\lambda_2 i_2+....+\lambda_{q-r} i_{q-r}$ subordinano su Γ integrali che dànno somma variabile nei gruppi formati da ma punti Q_{ij}, e per la (1) ciò appunto significa che su F, l'integrale:

$$J=\lambda_1 I_1+\lambda_2 I_2+....+\lambda_{q-r} I_{q-r},$$

qualunque siano le λ (non tutte nulle), dànno sui gruppi della γ_a^2, somme variabili.

Detto poi I *un qualunque* integrale di F, si avrà:

$$I=\mu_1 I_1+\mu_2 I_2+....+\mu_{q-r} I_{q-r}+\nu_1 J_1+\nu_2 J_2+....+\nu_r J_r$$

e i valori che esso prende in un gruppo G_a, saranno dati dai valori che ivi prende l'integrale $\mu_1 I_1+....+\mu_{q-r} I_{q-r}$, aumentati di una costante e perciò se le μ non sono tutte nulle, variabili con G_a.

Ne segue proprio, che tranne gli integrali del sistema lineare individuato dagli integrali (III), nessun altro integrale di F può dar somma costante nei gruppi di γ_a^2.

Se poi V_{q-r} ammette sistemi d'integrali riducibili e quindi congruenze di varietà abeliane V_t, V_{q-r-t}, basta ripetere lo stesso ragionamento per curve Γ scelte genericamente nel modo detto, una volta in V_t e un'altra in V_{q-r-t}; si arriva sempre alla stessa conclusione, senza alcuna difficoltà.

E possiamo enunciare il teorema.

Se fra i punti di due superficie F ed F' d'irregolarità q e q', esiste una corrispondenza $T\equiv(\alpha\beta)$ di rango $\nu=q-r=q'-r'$, F possiede un sistema regolare (III) *d'integrali riducibili, di dimensione $q-\nu-1$, i cui integrali* (*ed essi soli*) *conservano somma costante* (*a meno di periodi*) *su tutti i gruppi della serie γ_a^2 che T^{-1} induce su F ed analogamente, F' possiede un sistema regolare* (IV) *d'integrali riducibili di dimensione $q'-\nu-1$ e tutti gli integrali di questo sistema* (*ed essi soli*) *dànno somma costante su tutti i gruppi della γ_β^2 che la T induce su F'.*

§ 3.

Corrispondenze a valenza zero.

14. - I sistemi (III) e (IV) svaniscono solo quando è $r=r'=0$, allora il rango acquista il valore massimo $\nu=q=q'$ e le due superficie hanno la stessa irregolarità, anzi, la loro, varietà di PICARD V_q, $V'_{q'}$ o sono in corrispondenza birazionale ($\varepsilon=1$) oppure ognuna di esse possiede una involuzione priva di coincidenze rappresentabile biunivocamente coi punti dell'altra e i periodi del sistema totale degli integrali dell'una superficie si possono esprimere per combinazioni lineari a coefficienti razionali per gli analoghi periodi dell'altra.

Questo caso si verifica quando:

1°) T è una corrispondenza birazionale.

2°) T è unirazionale e le due superficie hanno la stessa irregolarità, in particolare quando T è una trasformazione unirazionale di una superficie in se.

3°) Quando il rango di T non è nullo e le due superficie sono prive di sistemi d'integrali riducibili. Infatti allora è $q-r=q'-r'>0$ e gli integrali (I) e (II) si debbono ridurre al sistema totale degli integrali di F ed F', cioè $q-r=q$ e $q'-r'=q'$ e quindi $r=r'=0$.

4°) Quando le due superficie non hanno integrali che diano somma costante rispettivamente nei gruppi di γ_α^2 e γ_β^2 $(r=r'=0)$.

5°) Quando le due superficie non hanno sistemi d'integrali riducibili e una di esse per esempio F, ha almeno un integrale a somma variabile nei gruppi della γ_α^2. In tal caso infatti il sistema (III) non si può ridurre al sistema totale degli integrali di F, e deve necessariamente svanire. Allora $r=0$ e dalla (V) si ricava $q=q'-r'$. Ma q è per ipotesi almeno uguale ad uno, quindi $q'-r'>0$ e perchè F' non possegga integrali riducibili deve essere $q'-r'=q'$ e anche r' risulta uguale a zero.

Altri casi particolari si hanno quando uno solo dei due indici di equivalenza è nullo, per esempio $r=0$ e $r'>0$. La (V) diventa $q=q'-r'$ e supposto che F non sia regolare $(q>0)$, la F' possederà necessariamente due distinti sistemi regolari (II) e (IV) d'integrali riducibili con le solite proprietà.

Questo è per esempio il caso in cui T è una corrispondenza unirazionale (1β) e F ed F' non abbiano la stessa irregolarità.

15. - Ma casi di più notevole importanza si hanno quando il rango acquista il suo minimo valore, zero, quando cioè:

$$q-r=q'-r'=0, \qquad r=q, \qquad r'=q'.$$

Allora svaniscono gli integrali (I) e (II) e i sistemi (III) e (IV) si riducono ai sistemi totali degli integrali di F ed F'.

Diremo per definizione che una corrispondenza di rango nullo è a *valenza zero.*

Valgono i seguenti teoremi:

a) Se una corrispondenza T fra i punti di due superficie è a valenza zero, tale è pure la sua inversa.

Dalle eguaglianze $r=q$ e $r'=q'$ segue poi che i sistemi Σ_r e $\Sigma_{r'}$ dei numeri 4 e 9 si riducono ai sistemi completi di partenza $\{A\}$ e $\{B'\}$ mentre svaniscono i sistemi S_{q-r} ed $S'_{q'-r'}$ e ricordando le proprietà di questi sistemi si può dire:

b) Una corrispondenza T a valenza zero trasforma le curve di qualunque sistema continuo $\{A\}$ di F (sia esso completo o no) *in curve A' di F' appartenenti ad un medesimo sistema lineare e la sua inversa T^{-1}*

trasforma le curve di un qualunque sistema algebrico di F' in curve linearmente equivalenti di F.

La proprietà è caratteristica per le corrispondenze a valenza zero, perchè se le curve di un sistema continuo completo $\{A\}$, d'∞^q sistemi lineari di F, si trasformano per la T in curve linearmente equivalenti di F', Σ_r coincide necessariamente col sistema totale $\{A\}$, sarà $r=q$ e dalla (V) segue $q-r=q'-r'=0$.

Ricordando poi il teorema del n.° 13 sugli integrali (III) e (IV) si può dire:

c) In una corrispondenza a valenza zero tutti gli integrali di F (F') dànno somma costante su tutti i gruppi della γ^2_α (γ^2_β) che la T (T^{-1}) induce sopra F (F'), viceversa da tale proprietà segue $r=q$ e T risulta a valenza zero.

Diremo più oltre diffusamente di questa proprietà.

16. - Intanto osserviamo che per la parte inversa della proprietà *b*), se una delle due superficie F ed F' è regolare, la T è necessariamente a valenza zero.

Applicando il teorema *c*) si ricava:

Se sopra una superficie F si ha una serie γ^2_α di gruppi di punti, rappresentabile coi punti di una superficie regolare F', tutti gli integrali di F dànno somma costante su tutti i gruppi di γ^2_α.

La proprietà si estende al caso di serie γ^d_α di dimensione d qualunque.

Sia infatti V_d una varietà regolare (di regolarità superficiale nulla) che coi suoi punti rappresenti i gruppi di γ^d_α.

Pensiamo V_d in un S_{d+1} e ricordiamo che in base ad un teorema di Enriques e Castelnuovo [16] le superficie F' che si ottengono segando V_d cogli S_3 generici di S_{d+1} sono regolari.

Ad ognuna di tali superficie F', corrisponderà su F una γ^2_α, alla quale è applicabile il teorema precedente. Ne segue che i gruppi della γ^d_α si distribuiscono in serie γ^2_α su ciascuna delle quali gli integrali di F serbano somma costante. Per dimostrare che tali costanti non variano al variare di γ^2_α, basta far vedere che presi due gruppi G_α, G'_α generici in due di queste serie, esiste una terza γ^2_α che li contiene. E ciò è evidente, perchè per due punti qualunque di V_d passano infinite superficie F'.

Il teorema si estende alle varietà algebriche.

Sia per esempio, sopra una varietà a tre dimensioni V_3, una γ^d_α rappresentabile coi punti di una varietà regolare V_d.

Scegliamo in V_d un sistema lineare di V_{d-1} più volte infinito a grado virtuale positivo e tale che le successive varietà caratteristiche V_{d-2}, V_{d-3},...., V_2 siano tutte regolari, e le curve caratteristiche V_1 siano irriducibili.

---

[16] Enriques-Castelnuovo: *Sur les intégrales simples de première espèce d'une variété algébrique.* Annales de l'École Normale, Paris, XXIII, 1906.

Indichiamo con F le superficie di V_3 individuate dai gruppi G_a corrispondenti ai punti di ogni V_2, e supponiamo che F sia irriducibile. Per le ipotesi fatte il sistema lineare delle superficie F è più volte infinito e a curve caratteristiche irriducibili.

Ne segue, per il citato teorema di ENRIQUES e CASTELNUOVO, che F ha la stessa irregolarità di V_3 e che gli integrali semplici di prima specie, di ogni superficie F, sono tutti e soli quelli che su essa subordinano gli integrali di V_3. Essendo poi le V_2 regolari gli integrali di F, e quindi quelli di V_3, daranno somma costante su ogni gruppo G_a.

Al variare di F (cioè di V_2) queste costanti non possono variare perchè, come sopra, presi comunque due gruppi G_a, G_a' di γ_a^d, è sempre possibile trovare una F, nelle condizioni dette, e passante per essi.

Se poi F è costantemente spezzata in due superficie F' ed F'', l'una descritta da a' punti del gruppo generatore G_a e l'altra dagli a'' punti rimanenti $(a'+a''=a)$, la γ_a^d risulta spezzata nella somma di una $\gamma_{a'}^d$ ed una $\gamma_{a''}^d$ rappresentabili ancora coi punti di V_d e per ciascuna di esse varrà ancora la proprietà.

Concludiamo col teorema:

Se sopra una varietà algebrica V_k si ha una serie regolare γ_a^d di gruppi G_a di a punti, ogni integrale di V_k darà somma costante (a meno di combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi) *su tutti i gruppi della serie.*

Il teorema è stato dimostrato dal SEVERI nel caso che V_k sia una superficie $(k=2)$ e γ_a^d sia una involuzione. Nelle stesse ipotesi il SEVERI ha dimostrato anche il teorema inverso « se nei gruppi di una involuzione γ_a^d di una superficie F, gli integrali di F, dànno somma costante, la γ_a^d è regolare » ([17]).

Questo secondo teorema, in generale, si estende anche al caso di una γ_a^d non involutoria, a condizione però che γ_a^d sia completa e invada tutta la superficie.

Ma di questa dimostrazione ci occuperemo nella (III) parte. Ritorniamo piuttosto alle nostre superficie F ed F' e alla corrispondenza T per notare alcuni casi in cui T è certamente a valenza zero.

17. - In proposito si hanno i seguenti teoremi:

Una corrispondenza T fra i punti di due superficie algebriche F ed F' è a valenza zero:

1°) *Quando una delle due superficie F od F' è regolare.*

2°) *Quando F non possiede integrali riducibili ed almeno uno dei suoi integrali dà somma costante su tutti i gruppi della γ_a^2 che T induce su F.*

([17]) SEVERI: *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* Annali di matematica, t. XII, s. III, 1905, § 2.

Infatti per la prima ipotesi uno dei due sistemi d'integrali (I), (III) deve svanire e l'altro si deve ridurre al sistema totale di tutti gli integrali di F.

Per la seconda ipotesi il sistema (III) non può svanire quindi è proprio $r=q$ e di conseguenza $q-r=q'-r'=0$, cioè T è a valenza zero.

3°) *Quando F ed F' sono entrambe prive di sistemi regolari d'integrali riducibili e le loro irregolarità q e q' sono diverse fra di loro* ($q \neq q'$).

Infatti in tal caso, non può essere contemporaneamente $r=0$ ed $r'=0$, se no per la (V) sarebbe $q=q'$, contro il supposto.

Sia, per esempio, $r \neq 0$, il sistema (III) non può allora svanire e per la prima ipotesi si ricava come sopra che è necessariamente $r=q$ e quindi, di nuovo, $q-r=q'-r'=0$, etc.

Notiamo infine che: *se F ed F' non posseggono integrali riducibili, T o è a valenza zero, oppure è di rango massimo*: $r=q$ e $r'=q'$ oppure $r=r'=0$ e $q=q'$.

Nel secondo caso la tabella dei periodi degli integrali di F si ottiene mediante una sostituzione lineare a coefficienti razionali costanti, dalla tabella dei periodi degli integrali di F'. Escluso tale legame, T deve essere necessariamente a valenza zero.

Se perciò F ed F' sono due generiche superficie fra quelle che hanno la la stessa loro irregolarità — sono cioè a moduli generali e generiche — T è a valenza zero. In tal caso infatti esse non possono avere integrali riducibili, e se hanno la stessa irregolarità — per la loro genericità — i loro integrali non avranno i periodi legati dalla detta sostituzione e si conclude:

4°) *Ogni corrispondenza T fra due generiche superficie a moduli* (di irregolarità) *generali, è una corrispondenza a valenza zero.*

18. - Proprietà relative al caso di F ed F' coincidenti. — Le proprietà finora studiate valgono indifferentemente per F ed F' distinte o coincidenti. Vogliamo ora notare una proprietà valevole solo quando F ed F' coincidono. In questa ipotesi q e q' sono uguali e dalla (I) segue $r=r'$, ossia:

Una corrispondenza T fra i punti di una stessa superficie F e la sua inversa T^{-1} hanno lo stesso indice di equivalenza.

Il risultato si può completare anche dal punto di vista qualitativo. Consideriamo sopra F il solito sistema continuo $\{A\}$ composto d'∞^q sistemi lineari distinti ed applichiamo ad esso la T e la T^{-1}.

Per le considerazioni svolte al n.° 5 le curve di $\{A\}$ si distribuiscono in due coppie di congruenze Σ_r, S_{q-r}; Σ_r^{-1}, S_{q-r}^{-1} godenti rispetto a T e T^{-1} delle solite proprietà.

Riprendiamo ora la dimostrazione del n.° 11, osservando che le varietà allora indicate con W_q e $W'_{q'}$, nel caso attuale, provengono entrambe dalla varietà di Picard V_q di F e perciò le conguenze formate dalle varietà W_r e $W'_{r'}$, come complementari delle stesse W_{q-r} (comune intersezione di W_q e $W'_{q'}$) rappresentano una unica congruenza di V_r di V_q (si noti che tanto le W_r quanto le $W'_{r'}$ sono di livello costante per gli integrali $i_1, i_2, \ldots, i_{q-r}$ appartenente a W_{q-r} e perciò, V_r e $V'_{r'}$ in V_q sono di livello costante per gli stessi integrali e quindi appartengono alla stessa congruenza).

Ne segue che in $\{A\}$ i due sistemi Σ_r e Σ_r^{-1} coincidono e conseguentemente coincidono S_{q-r} e S_{q-r}^{-1}. Ciò vuol dire che tanto la T quanto la T^{-1} individuano in $\{A\}$ una stessa coppia di congruenze di sistemi Σ_r ed S_{q-r}.

In altri termini: T trasforma le curve A di Σ_r in curve di uno stesso sistema $|A'|$ e la T^{-1} trasforma le stesse curve A in curve di uno stesso sistema lineare $|A^{-1}|$.

In forma più generale si può dire:

Se sopra una superficie F, una corrispondenza T trasforma le curve A di un qualunque sistema continuo H, in curve A' di uno stesso sistema lineare $|A'|$, anche la corrispondenza inversa T^{-1} trasforma le medesime curve A di H, in curve di uno stesso sistema lineare $|A^{-1}|$.

Questo teorema completa dal lato qualitativo quello dell'uguaglianza degli indici r ed r' di T e T^{-1}.

Lo stesso ragionamento prova poi che i due sistemi d'integrali (I) e (II) di F, come provenienti dagli integrali $i_1, i_2, \ldots, i_{q-r}$ di W_{q-r} si possono supporre coincidenti e così pure quelli dei sistemi (III) e (IV); ossia:

Sopra una superficie F, una corrispondenza T e la sua inversa T^{-1} sono legate alla stessa coppia di sistemi regolari d'integrali riducibili, complementari l'uno dell'altro

(I) $$I_1, \quad I_2, \ldots, \quad I_{q-r}$$

(II) $$J_1, \quad J_2, \ldots, \quad J_r.$$

Come corollario se ne deduce che:

Gli integrali del sistema lineare

$$\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \ldots + \lambda_r J_r$$

sono tutti e soli gli integrali di F che dànno somma costante nei gruppi della γ_β^2 che T induce su F e nei gruppi della γ_α^2 che T^{-1} induce su F stessa (le due costanti possono essere distinte).

Se F è priva d'integrali riducibili, r può prendere i soli valori q e zero. Se $r=q$, T è a valenza zero, se $r=0$, T è invece di rango massimo. Nel primo caso svanisce il sistema (I) e il sistema (II) coincide col sistema di tutti gli integrali di F, nel secondo caso avviene il rovescio.