ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

HANS HAHN

Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, no 4 (1933), p. 429-452
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_4_429_0>

ÜBER DIE MULTIPLIKATION TOTAL-ADDITIVER MENGENFUNKTIONEN

Von Hans Hahn (Wien).

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei im selben Mengensystem definierte, total-additive Mengenfunktionen, so ist auch $\varphi(x)+\psi(x)$ eine total-additive Mengenfunktion, nicht aber $\varphi(x)\cdot\psi(x)$. Wir wollen nun zeigen, wie auf andre Weise aus zwei total-additiven Mengenfunktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eine gleichfalls total-additive Mengenfunktion hergeleitet werden kann, die man zweckmäßig als das *Produkt* $\varphi\times\psi$ bezeichnen kann. Bezeichnet man das n-dimensionale Lebesguesche Maß einer Punktmenge des n-dimensionalen Raumes mit μ_n, so ist im Sinne dieser Multiplikation: $\mu_{k+l}=\mu_k\times\mu_l$. Wir entwickeln den engen Zusammenhang dieser Multiplikation mit dem *Lebesgue-Stieltjesschen Integralbegriff* und zeigen insbesondere, daß das Reduktionstheorem mehrfacher Integrale nichts andres ist, als das assoziative Gesetz dieser Multiplikation (1).

§ 1. - Vollständige σ-Körper.

Sei E irgend eine Menge; wir bezeichnen sie als « Raum », ihre Elemente als « Punkte », ihre Teilmengen als « Punktmengen ». Ein System von Punktmengen, die zu je zweien keinen Punkt gemein haben, nennen wir *disjunkt*.

Sei $\mathfrak{M}$ irgend ein System von Punktmengen X des Raumes E und $\varphi(X)$ eine in $\mathfrak{M}$ definierte Mengenfunktion; sie heißt *additiv*, wenn für je zwei disjunkte Mengen A, B aus $\mathfrak{M}$, deren Summe $A+B$ gleichfalls zu $\mathfrak{M}$ gehört, gilt:

$$\varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B);$$

die in $\mathfrak{M}$ definierte und additive Mengenfunktion φ heißt *total-additiv*, wenn für jede Folge disjunkter Mengen $A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots$ aus $\mathfrak{M}$, deren Summe $\underset{n}{S} A_n$ gleichfalls zu $\mathfrak{M}$ gehört, gilt:

$$\varphi(\underset{n}{S} A_n)=\sum_n \varphi(A_n).$$

(1) Die folgende Abhandlung ist eine Ausarbeitung von Vorträgen, die ich vor einigen Jahren in der Wiener Mathematischen Gesellschaft und im März 1933 an der Universität Brünn gehalten habe. Gänzlich unabhängig von mir hat Herr St. Saks denselben Gegenstand

Wir beschäftigen uns im Folgenden, der Einfachheit halber, nur mit *nicht-negativen* Mengenfunktionen; alle auftretenden Mengenfunktion sind also als nicht-negativ vorausgesetzt, ohne daß diese Voraussetzung jeweils ausdrücklich angegeben wird.

Ein Mengensystem $\mathfrak{R}$ heißt ein *Körper*, wenn aus $A \varepsilon \mathfrak{R}$ und $B \varepsilon \mathfrak{R}$ folgt: $A+B \varepsilon \mathfrak{R}$ und $A-B \varepsilon \mathfrak{R}$; bekanntlich (2) folgt dann von selbst auch $AB \varepsilon \mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{R}$ ein Körper, so kann jede Summe $\underset{n}{S} A_n$, deren Summanden A_n zu $\mathfrak{R}$ gehören, verwandelt werden in eine Summe $\underset{n}{S} B_n$ *disjunkter* Summanden B_n, die gleichfalls zu $\mathfrak{R}$ gehören, und Teile der entsprechenden Summanden A_n sind:

$$(1) \qquad \underset{n}{S} A_n = \underset{n}{S} B_n, \qquad B_n \leqq A_n, \qquad B_n \varepsilon \mathfrak{R};$$

man hat nur zu setzen $B_1 = A_1$, $B_n = A_n - (A_1 + \dots + A_{n-1})$ $(n > 1)$.

Jeder nicht leere Körper enthält die leere Menge Λ. Ist φ additiv im Körper $\mathfrak{R}$ — und schließen wir den Fall $\varphi(X) = +\infty$ für alle $X \varepsilon \mathfrak{R}$ einfürallemal aus — so ist $\varphi(\Lambda) = 0$.

I. - *Ist die nichtnegative Mengenfunktion φ additiv im Körper $\mathfrak{R}$, so ist sie monoton wachsend, d. h. aus $A \varepsilon \mathfrak{R}$, $B \varepsilon \mathfrak{R}$, $A \leqq B$ folgt $\varphi(A) \leqq \varphi(B)$.*

Denn es ist $B = A + (B-A)$ eine Zerlegung von B in zwei disjunkte Summanden, und weil $\mathfrak{R}$ ein Körper, ist $B - A \varepsilon \mathfrak{R}$; also weil φ additiv und nicht-negativ:

$$\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B-A) \geqq \varphi(A).$$

Man beweist leicht die Sätze (3):

II. - *Ist φ total-additiv im Körper $\mathfrak{R}$, ist $A = \underset{n}{S} A_n$, $A \varepsilon \mathfrak{R}$, $A_n \varepsilon \mathfrak{R}$, $A_n \leqq A_{n+1}$, so ist $\varphi(A) = \lim\limits_n \varphi(A_n)$.*

III. - *Ist φ total-additiv im Körper $\mathfrak{R}$, ist $A = \underset{n}{D} A_n$, $A \varepsilon \mathfrak{R}$, $A_n \varepsilon \mathfrak{R}$, $A_n \geqq A_{n+1}$, und sind die $\varphi(A_n)$ endlich, so ist $\varphi(A) = \lim\limits_n \varphi(A_n)$.*

Der Körper $\mathfrak{R}$ heißt ein *σ-Körper*, wenn aus $A_n \varepsilon \mathfrak{R}$ folgt: $\underset{n}{S} A_n \varepsilon \mathfrak{R}$. Bekanntlich (4) folgt dann aus $A_n \varepsilon \mathfrak{R}$ auch $\underset{n}{D} A_n \varepsilon \mathfrak{R}$.

Sei φ eine im Körper $\mathfrak{R}$ definierte, total-additive Mengenfunktion. Jede Menge $X \varepsilon \mathfrak{R}$ mit $\varphi(X) = 0$ nennen wir eine *Nullmenge für φ* (wobei der Zusatz « für φ »

---

in seinem während der Drucklegung dieser Abhandlung erschienenen Buche: *Théorie de l'intégrale*, Warszawa, 1933, p. 257 ff. behandelt.

(2) Vgl. z. B. H. HAHN: *Reelle Funktionen*, Leipzig, 1932, S. 12. Wir schließen uns in Terminologie und Bezeichnungsweise durchweg an dieses Buch (im Folgenden als R. F. zitiert).

(3) Vgl. z. B. H. HAHN: *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin, 1921, S. 395 (im Folgenden als Th. R. F. zitiert).

(4) R. F. S. 16.

auch wegbleiben kann, wo kein Zweifel besteht). Die leere Menge A ist eine Nullmenge. Es gilt:

IV. - *Ist φ total-additiv im σ-Körper $\mathfrak{M}$, so ist das System $\mathfrak{N}$ aller Nullmengen für φ ein σ-Körper.*

Wir haben zu zeigen: ist $A \varepsilon \mathfrak{N}$, $B \varepsilon \mathfrak{N}$ so ist auch $A-B \varepsilon \mathfrak{N}$; ist $A_n \varepsilon \mathfrak{N}$, so ist auch $\mathop{S}_{n} A_n \varepsilon \mathfrak{N}$. Ist $A \varepsilon \mathfrak{N}$, $B \varepsilon \mathfrak{N}$, so ist auch $A \varepsilon \mathfrak{M}$, $B \varepsilon \mathfrak{M}$, also — weil $\mathfrak{M}$ ein Körper — auch $A-B \varepsilon \mathfrak{M}$; ferner ist $\varphi(A)=0$, wegen $A-B \subseteqq A$ ist also nach I auch $\varphi(A-B)=0$, also $A-B \varepsilon \mathfrak{N}$. Ist $A_n \varepsilon \mathfrak{N}$, also auch $A_n \varepsilon \mathfrak{M}$, so ist, weil $\mathfrak{M}$ ein σ-Körper, $\mathop{S}_{n} A_n \varepsilon \mathfrak{M}$; nach (1) ist $\mathop{S}_{n} A_n = \mathop{S}_{n} B_n$, wo die B_n disjunkte Mengen aus $\mathfrak{M}$ und $B_n \subseteqq A_n$; aus $\varphi(A_n)=0$ folgt also nach I $\varphi(B_n)=0$, also weil φ total-additiv: $\varphi(\mathop{S}_{n} A_n) = \sum_{n} \varphi(B_n) = 0$, also $\mathop{S}_{n} A_n \varepsilon \mathfrak{N}$.

Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper und φ eine in $\mathfrak{M}$ definierte, total-additive Mengenfunktion, so heißt $\mathfrak{M}$ *vollständig für* φ, wenn jeder Teil einer Nullmenge für φ zu $\mathfrak{M}$ gehört. Aus I folgt sofort:

V. - *Ist der Körper $\mathfrak{M}$ vollständig für φ, so ist jeder Teil einer Nullmenge für φ auch eine Nullmenge für φ.*

Ist $\mathfrak{M}$ ein σ-Körper, φ eine in $\mathfrak{M}$ definierte, total-additive Mengenfunktion, so kann $\mathfrak{M}$, wie wir nun zeigen wollen, stets zu einem für φ vollständigen σ-Körper erweitert werden. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}$ das System aller Nullmengen für φ, mit $\mathfrak{N}^*$ das System aller Mengen, die Teil einer Nullmenge für φ sind. Dann gilt:

VI. - *Aus $X \varepsilon \mathfrak{N}^*$ und $Y \subseteqq X$ folgt $Y \varepsilon \mathfrak{N}^*$.*

Nun zeigen wir:

VII. - *Das System $\mathfrak{N}^*$ ist ein σ-Körper.*

Wir haben zu zeigen: ist $A \varepsilon \mathfrak{N}^*$, $B \varepsilon \mathfrak{N}^*$, so ist auch $A-B \varepsilon \mathfrak{N}^*$; ist $A_n \varepsilon \mathfrak{N}^*$, so ist auch $\mathop{S}_{n} A_n \varepsilon \mathfrak{N}^*$. Wegen $A-B \subseteqq A$ folgt nach VI aus $A \varepsilon \mathfrak{N}^*$ auch $A-B \varepsilon \mathfrak{N}^*$. Ist $A_n \varepsilon \mathfrak{N}^*$, so gibt es ein $N_n \varepsilon \mathfrak{N}$, sodass $A_n \subseteqq N_n$; nach IV ist $\mathop{S}_{n} N_n \varepsilon \mathfrak{N}$; wegen $\mathop{S}_{n} A_n \subseteqq \mathop{S}_{n} N_n$ ist also $\mathop{S}_{n} A_n \varepsilon \mathfrak{N}^*$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{M}_0$ das System aller Mengen X, die die Gestalt haben:

$$X = (A+N') - N'', \qquad (A \varepsilon \mathfrak{M},\ N' \varepsilon \mathfrak{N}^*,\ N'' \varepsilon \mathfrak{N}^*). \tag{2}$$

Da $A \varepsilon \mathfrak{N}^*$, ist $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{M}_0$; da $A \varepsilon \mathfrak{M}$, ist $\mathfrak{N}^* \subseteqq \mathfrak{M}_0$.

VIII. - *Das System $\mathfrak{M}_0$ ist ein σ-Körper.*

Sei $B_1 \varepsilon \mathfrak{M}_0$, $B_2 \varepsilon \mathfrak{M}_0$; dann ist $B_1 = (A_1 + N_1') - N_1''$, $B_2 = (A_2 + N_2') - N_2''$, wo $A_1 \varepsilon \mathfrak{M}$, $A_2 \varepsilon \mathfrak{M}$, $N_1' \varepsilon \mathfrak{N}^*$, $N_1'' \varepsilon \mathfrak{N}^*$, $N_2' \varepsilon \mathfrak{N}^*$, $N_2'' \varepsilon \mathfrak{N}^*$; man bestätigt leicht, dass $B_1 - B_2 = ((A_1 - A_2) + N') - N''$, wo $N' \subseteqq N_1' + N_2''$, $N'' \subseteqq N_1'' + N_2'$; da $\mathfrak{M}$ ein Körper, ist $A_1 - A_2 \varepsilon \mathfrak{M}$; da $\mathfrak{N}^*$ ein Körper, ist $N_1' + N_2'' \varepsilon \mathfrak{N}^*$, $N_1'' + N_2' \varepsilon \mathfrak{N}^*$, also nach VI auch $N' \varepsilon \mathfrak{N}^*$, $N'' \varepsilon \mathfrak{N}^*$; $B_1 - B_2$ hat also die Gestalt (2), d. h. es ist $B_1 - B_2 \varepsilon \mathfrak{M}_0$. - Sei $B_n \varepsilon \mathfrak{M}_0$; dann ist $B_n = (A_n + N_n') - N_n''$, wo $A_n \varepsilon \mathfrak{M}$, $N_n' \varepsilon \mathfrak{N}^*$,

$N_n''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$; daraus folgt: $\underset{n}{S}B_n=(\underset{n}{S}A_n+N')-N''$, wo $N'\subseteqq\underset{n}{S}N_n'$, $N''\subseteqq\underset{n}{S}N_n''$; da $\mathfrak{M}$ ein σ-Körper, ist $\underset{n}{S}A_n\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$; da $\mathfrak{N}^*$ ein σ-Körper, ist $\underset{n}{S}N_n'\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$, $\underset{n}{S}N_n''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$, also nach VI auch $N'\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$, $N''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$; $\underset{n}{S}B_n$ hat also die Gestalt (2) d. h. $\underset{n}{S}B_n\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_0$.

Nun wollen wir die Definition von φ auf $\mathfrak{M}_0$ erweitern. Sei $X\varepsilon\,\mathfrak{M}_0$; dann gilt für X die Darstellung (2); doch wird es für dieselbe Menge $X\varepsilon\,\mathfrak{M}_0$ verschiedene Darstellungen dieser Form geben; sei:

$$X=(A_1+N_1')-N_1'', \qquad (A_1\,\varepsilon\,\mathfrak{M},\ N_1'\varepsilon\,\mathfrak{N}^*,\ N_1''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*)$$

eine zweite solche Darstellung; wir behaupten, *dass dann* $\varphi(A_1)=\varphi(A)$ *ist.* In der Tat, offenbar ist $A-A_1\subseteqq N_1'+N''$, $A_1-A\subseteqq N'+N_1''$; da $\mathfrak{N}^*$ ein Körper, ist $N_1'+N''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$, $N'+N_1''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$; es gibt also eine Menge $M_1\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$ und eine Menge $M_2\,\varepsilon\,\mathfrak{N}$, so dass $N_1'+N''\subseteqq M_1$, $N'+N_1''\subseteqq M_2$; dann ist auch $A-A_1\subseteqq M_1$, $A_1-A\subseteqq M_2$; da $\mathfrak{M}$ ein Körper, ist $A-A_1\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$, $A_1-A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$; wegen $\varphi(M_1)=0$, $\varphi(M_2)=0$ ist nach I auch $\varphi(A-A_1)=0$, $\varphi(A_1-A)=0$. Aus $A=AA_1+(A-A_1)$, $A_1=AA_1+(A_1-A)$ folgt also wegen der Additivität von φ weiter: $\varphi(A)=\varphi(AA_1)$, $\varphi(A_1)=\varphi(AA_1)$, mithin $\varphi(A)=\varphi(A_1)$, wie behauptet.

Ist $X\varepsilon\,\mathfrak{M}_0$, so hat also für alle Darstellungen der Menge X in der Gestalt (2) $\varphi(A)$ denselben Wert; wir können also $\varphi(X)$ für alle $X\varepsilon\,\mathfrak{M}_0$ definieren durch die Festsetzung:

$$(3)\quad \varphi(X)=\varphi(A), \quad \text{wenn} \quad X=(A+N')-N'', \qquad (A\,\varepsilon\,\mathfrak{M},\ N'\varepsilon\,\mathfrak{N}^*,\ N''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*).$$

Ist insbesondere $X\varepsilon\,\mathfrak{M}$, so kann man hierin $A=X$, $N'=\Lambda$, $N''=\Lambda$ setzen, und der durch (3) gelieferte Funktionswert $\varphi(X)$ stimmt mit dem ursprünglich in $\mathfrak{M}$ gegebenen Funktionswerte $\varphi(X)$ überein. Für $X\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$ erhält man aus (3) (indem man $A=\Lambda$, $N'=N$, $N''=\Lambda$ setzt): $\varphi(X)=0$.

IX. - *Die durch* (3) *in* $\mathfrak{M}_0$ *definierte Mengenfunktion* φ *ist total-additiv.*

Sei $X=SX_n$, wo die X_n disjunkte Mengen aus $\mathfrak{M}_0$ bedeuten; wir haben zu zeigen, dass:

$$(4)\qquad \varphi(X)=\sum_n \varphi(X_n).$$

Wegen $X_n\,\varepsilon\,\mathfrak{M}_0$ ist $X_n=(A_n+N_n')-N_n''$, wo $A_n\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$, $N_n'\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$, $N_n''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$; dann ist, wie wir beim Beweise von VIII sahen: $X=(A+N')-N''$, wo $A=\underset{n}{S}A_n$ (also $A\,\varepsilon\,\mathfrak{M}$), $N'\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$, $N''\varepsilon\,\mathfrak{N}^*$; nach (3) ist also: $\varphi(X)=\varphi(A)$, und ebenso $\varphi(X_n)=\varphi(A_n)$, sodass sich (4) reduziert auf:

$$\varphi(A)=\sum_n \varphi(A_n).$$

Sei $A_1'=A_1$, $A_n'=A_n-(A_1+\ldots.+A_{n-1})$ $(n>1)$; dann ist auch $A=\underset{n}{S}A_n'$, $A_n'\varepsilon\,\mathfrak{M}$, und die A_n' sind disjunkt; da φ total-additiv in $\mathfrak{M}$, ist $\varphi(A)=\sum_n \varphi(A_n')$. Es ist also nur mehr zu zeigen: $\varphi(A_n')=\varphi(A_n)$. Nun ist: $A_n-A_n'=A_nA_1+....+$ $+A_nA_{n-1}$, und da die X_n disjunkt sind, ist $A_nA_i\subseteqq N_n''+N_i''$ $(i\neq n)$, also $A_n-A_n'\subseteqq N_1''+....+N_n''$, also $A_n-A_n'\varepsilon\mathfrak{N}^*$, also $\varphi(A_n-A_n')=0$; da $A_n-A_n'\varepsilon\mathfrak{M}$ und φ in $\mathfrak{M}$ additiv, ist also $\varphi(A_n)=\varphi(A_n')+\varphi(A_n-A_n')=\varphi(A_n')$, w. z. b. w.

X. - *Der σ-Körper $\mathfrak{M}_0$ ist vollständig für φ.*

Wir haben zu zeigen: Aus $X\varepsilon\mathfrak{M}_0$, $\varphi(X)=0$, $Y\subseteqq X$ folgt $Y\varepsilon\mathfrak{M}_0$. Aus (3) folgt: $X=(A+N')-N''$, wo $A\varepsilon\mathfrak{M}$, $N'\varepsilon\mathfrak{N}^*$, $N''\varepsilon\mathfrak{N}^*$ und $\varphi(A)=0$; also ist $A\varepsilon\mathfrak{N}$, mithin auch $A\varepsilon\mathfrak{N}^*$; da $\mathfrak{N}^*$ ein Körper, ist auch $X\varepsilon\mathfrak{N}^*$, nach VI also auch $Y\varepsilon\mathfrak{N}^*$, und wegen $\mathfrak{N}^*\subseteqq\mathfrak{M}_0$ ist $Y\varepsilon\mathfrak{M}_0$.

Zusammenfassend haben wir gefunden:

XI. - *Ist φ total-additiv im σ-Körper $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{M}_0$ ein σ-Körper $\supseteqq\mathfrak{M}$, und die Definition von φ kann so auf $\mathfrak{M}_0$ erweitert werden, dass φ total-additiv in $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ vollständig für φ.*

Nun wollen wir noch zeigen, daß $\mathfrak{M}_0$ der kleinste $\mathfrak{M}$ umfassende, für φ vollständige Körper ist; präziser gesprochen:

XII. - *Ist $\mathfrak{M}^*$ ein Körper $\supseteqq\mathfrak{M}$, ist ψ eine in $\mathfrak{M}^*$ definierte total-additive Mengenfunktion, die in $\mathfrak{M}$ mit φ übereinstimmt, und ist $\mathfrak{M}^*$ vollständig für ψ, so ist $\mathfrak{M}^*\supseteqq\mathfrak{M}_0$ und ψ stimmt in $\mathfrak{M}_0$ mit φ überein.*

Sei $X\varepsilon\mathfrak{M}_0$, d. h. $X=(A+N')-N''$, wo $A\varepsilon\mathfrak{M}$, $N'\varepsilon\mathfrak{N}^*$, $N''\varepsilon\mathfrak{N}^*$, und wegen VI ohneweiters angenommen werden kann, N' sei fremd zu A und $N''\subseteqq A$. Nach Definition von $\mathfrak{N}^*$ gibt es Mengen A', A'' aus $\mathfrak{N}$, sodass $N'\subseteqq A'$, $N''\subseteqq A''$. Da $\mathfrak{N}\subseteqq\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{M}^*$, ist $A'\varepsilon\mathfrak{M}^*$, $A''\varepsilon\mathfrak{M}^*$; aus $\varphi(A')=0$, $\varphi(A'')=0$ folgt wegen $A'\varepsilon\mathfrak{M}$, $A''\varepsilon\mathfrak{M}$ nach Voraussetzung: $\psi(A')=0$, $\psi(A'')=0$, und weil $\mathfrak{M}^*$ vollständig für ψ, folgt daraus weiter $N'\varepsilon\mathfrak{M}^*$, $N''\varepsilon\mathfrak{M}^*$; da wegen $\mathfrak{M}\subseteqq\mathfrak{M}^*$ auch $A\varepsilon\mathfrak{M}^*$, und da $\mathfrak{M}^*$ ein Körper, ist auch $X\varepsilon\mathfrak{M}^*$. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{M}_0\subseteqq\mathfrak{M}^*$. Nach I folgt aus $\psi(A')=0$, $\psi(A'')=0$ auch $\psi(N')=0$, $\psi(N'')=0$. Also ist $\psi(X)=\psi(A)+\psi(N')-$ $-\psi(N'')=\psi(A)$; wegen $A\varepsilon\mathfrak{M}$ ist also nach Voraussetzung $\psi(X)=\varphi(A)$, also nach (3) auch $\psi(X)=\varphi(X)$, wie behauptet.

§ 2. - Erweiterung eines Körpers zu einem vollständigen σ-Körper.

Nach C. Carathéodory nennen wir eine im System $\mathfrak{E}$ aller Punktmengen des Raumes E definierte Mengenfunktion ψ eine *Maßfunktion*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1.) $\psi(A)=0$;
2.) Aus $A\subseteqq B$ folgt $\psi(A)\leqq\psi(B)$ (d. h. ψ ist monoton wachsend);
3.) Aus $A=\underset{n}{S}A_n$ folgt $\psi(A)\leqq\sum_n \psi(A_n)$.

Aus 1.) und 2.) folgt: $\psi(X)\geqq 0$ für alle $X\varepsilon\mathfrak{E}$.

Sei nun $\mathfrak{R}$ ein Körper $\subseteqq \mathfrak{E}$ und φ eine in $\mathfrak{R}$ definierte, *total-additive* Mengenfunktion. Wir wollen zeigen, dass φ zu einer in $\mathfrak{E}$ definierten Maßfunktion erweitert werden kann.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}_\sigma$ (bzw. $\mathfrak{R}_\delta$) das Mengensystem, das entsteht, indem man zu $\mathfrak{R}$ alle Mengen hinzufügt, die Summe (bzw. Durchschnitt) einer Mengenfolge aus $\mathfrak{R}$ sind, und mit $\mathfrak{R}_{\sigma\delta}$ (bzw. $\mathfrak{R}_{\delta\sigma}$) das Mengensystem, das entsteht, indem man zu $\mathfrak{R}_\sigma$ (bzw. zu $\mathfrak{R}_\delta$) alle Mengen hinzufügt, die Durchschnitt (bzw. Summe) einer Mengenfolge aus $\mathfrak{R}_\sigma$ (bzw. aus $\mathfrak{R}_\delta$) sind. Die Mengensysteme $\mathfrak{R}_\sigma$, $\mathfrak{R}_\delta$, $\mathfrak{R}_{\sigma\delta}$, $\mathfrak{R}_{\delta\sigma}$ sind dann i. a. keine Körper, wohl aber *Ringe*, d. h. gehören A und B zu einem dieser Systeme, so gehören auch $A+B$ und AB zu diesem System.

Wir erweitern zunächst die Definition von φ auf $\mathfrak{R}_\sigma$ durch die Festzetzung: ist $B \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma - \mathfrak{R}$, so sei $\varphi(B)$ das Supremum der Funktionswerte $\varphi(X)$ für alle zu $\mathfrak{R}$ gehörigen [5] $X \subseteqq B$:

$$\varphi(B) = \sup \varphi(X), \qquad (X \varepsilon \mathfrak{R},\ X \subseteqq B). \tag{5}$$

Ist $B \varepsilon \mathfrak{R}$, so gilt, wie aus I unmittelbar folgt, gleichfalls (5), sodass φ durch (5) für alle $B \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$ gegeben ist.

XIII. - *Die in $\mathfrak{R}_\sigma$ definierte Mengenfunktion φ hat die Eigenschaften* 1), 2), 3).

Für 1.) und 2.) ist dies evident. Sei, um auch 3.) zu beweisen: $B_n \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$, $B = \underset{n}{S} B_n$, also auch $B \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$; dann ist $B_n = \underset{\nu}{S} B_{n\nu}$, wo $B_{n\nu} \varepsilon \mathfrak{R}$; also ist $B = \underset{n,\nu}{S} B_{n\nu}$. Nach (1) erhalten wir daraus eine Darstellung $B = \underset{i}{S} C_i$, wo die C_i disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}$ und jede Menge C_i Teil einer Menge $B_{n\nu}$, also auch Teil einer Menge B_n. Sei nun $X \varepsilon \mathfrak{R}$, $X \subseteqq B$; dann ist $X = \underset{i}{S} C_i X$, wo die $C_i X$ disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}$; weil φ total-additiv in $\mathfrak{R}$, ist also $\varphi(X) = \sum\limits_i \varphi(C_i X)$. Wegen $C_i X \subseteqq C_i$ ist jede Menge $C_i X$ Teil einer Menge B_n; sind $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nj}, \ldots$ die sämtlichen Mengen $C_i X$, die $\subseteqq B_n$ sind, so ist, da $X_{n1} + \ldots + X_{nj} \varepsilon \mathfrak{R}$ und $\varphi(X_{n1} + \ldots + X_{nj}) = \varphi(X_{n1}) + \ldots + \varphi(X_{nj})$, wegen (5): $\varphi(X_{n1}) + \ldots + \varphi(X_{nj}) \leqq \varphi(B_n)$, also auch $\sum\limits_j \varphi(X_{nj}) \leqq \varphi(B_n)$, also auch: $\varphi(X) = \sum\limits_i \varphi(C_i X) \leqq \sum\limits_n \varphi(B_n)$, also nach (5) auch $\varphi(B) \leqq \sum\limits_n \varphi(B_n)$, w. z. b. w.

Nun erweitern wir die Definition von φ auf $\mathfrak{E}$ durch die Festsetzung: ist $A \varepsilon \mathfrak{E} - \mathfrak{R}_\sigma$ so sei $\varphi(A)$ das Infimum der Funktionswerte $\varphi(X)$ für alle zu $\mathfrak{R}_\sigma$ gehörigen [6] $X \supseteqq A$:

$$\varphi(A) = \inf \varphi(X), \qquad (X \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma,\ X \supseteqq A). \tag{6}$$

---

(5) Zumindest die leere Menge Λ ist eine zu $\mathfrak{R}$ gehörige Menge $X \subseteqq B$.

(6) Gibt es kein zu $\mathfrak{R}_\sigma$ gehöriges $X \supseteqq A$, so setzen wir $\varphi(A) = +\infty$.

Ist $A \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$, so gilt, wie aus I unmittelbar folgt, gleichfalle (6), sodass φ durch (6) für alle $A \varepsilon \mathfrak{E}$ gegeben ist.

XIV. - *Die in $\mathfrak{E}$ definierte Mengenfunktion φ ist eine Maßfunktion.*

Dass φ die Eigenschaften 1.) und 2.) hat, ist evident. Sei, um auch 3.) zu beweisen: $A_n \varepsilon \mathfrak{E}$ und $A = \underset{n}{S} A_n$; wir haben zu zeigen:

$$\varphi(A) \leqq \sum_n \varphi(A_n). \tag{7}$$

Das ist sicher richtig, wenn ein $\varphi(A_n) = +\infty$ ist; wir nehmen also an, alle $\varphi(A_n)$ seien endlich. Dann gibt es nach (6) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $B_n \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$, so dass $B_n \geqq A_n$ und $\varphi(B_n) < \varphi(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Setzen wir $B = \underset{n}{S} B_n$, so ist $B \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$, $B \geqq A$ und wegen XIII: $\varphi(B) \leqq \sum\limits_n \varphi(B_n) < \sum\limits_n \varphi(A_n) + \varepsilon$. Und da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt (7) aus (6).

Ist φ eine im Körper $\mathfrak{R}$ definierte, total-additive Mengenfunktion, so nennen wir die durch (5) und (6) definierte Maßfunktion: *die zu φ gehörige Maßfunktion.*

Nach CARATHÉODORY nennen wir eine Menge $M \varepsilon \mathfrak{E}$ φ-messbar, wenn für *jede* Menge $A \varepsilon \mathfrak{E}$ gilt:

$$\varphi(A) = \varphi(AM) + \varphi(A - M). \tag{8}$$

Das System aller φ-messbaren Mengen bildet einen σ-Körper, der insbesondere alle Mengen $N \varepsilon \mathfrak{E}$ enthält, für die $\varphi(N) = 0$ ist (die Nullmengen für φ). In diesem σ-Körper ist φ total-additiv [7]. Wir bezeichnen den σ-Körper der φ-messbaren Mengen mit $\overline{\mathfrak{R}}$ und nennen ihn die *vollständige Hülle von $\mathfrak{R}$ für φ.* Dieser Name wird gerechtfertigt durch die folgenden Sätze.

XV. - *$\overline{\mathfrak{R}}$ ist vollständig für φ.*

Sei $N \varepsilon \overline{\mathfrak{R}}$ und $\varphi(N) = 0$; ist $X \leqq N$, so ist wegen Eigenschaft 2.) der Maßfunktionen auch $\varphi(X) = 0$, also ist, wie eben bemerkt, auch $X \varepsilon \overline{\mathfrak{R}}$.

Um zu zeigen, dass $\overline{\mathfrak{R}} \geqq \mathfrak{R}$, zeigen wir zunächst:

XVI. - *Die Mengenfunktion φ ist additiv in $\mathfrak{R}_\sigma$.*

Seien B', B'' disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}_\sigma$ und $B = B' + B''$; wir haben zu zeigen:

$$\varphi(B) = \varphi(B') + \varphi(B'').$$

Nach Eigenschaft 3.) der Maßfunktionen ist:

$$\varphi(B) \leqq \varphi(B') + \varphi(B'').$$

Es ist also nur mehr zu zeigen:

$$\varphi(B) \geqq \varphi(B') + \varphi(B''). \tag{9}$$

---

(7) Vgl. z. B. Th. R. F. S. 424-430.

Das ist sicher richtig, wenn $\varphi(B)=+\infty$; wir nehmen also an, $\varphi(B)$ sei endlich; dann ist auch $\varphi(B')$ und $\varphi(B'')$ endlich. Nach (5) gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ zu $\mathfrak{R}$ gehörige Teile X', X'' von B' bzw. B'', so dass: $\varphi(X')>\varphi(B')-\varepsilon$, $\varphi(X'')>\varphi(B'')-\varepsilon$. Dann ist $X'+X''\varepsilon\mathfrak{R}$, $X'+X''\subseteqq B$, und weil X', X'' disjunkt und φ in $\mathfrak{R}$ additiv:

$$\varphi(X'+X'')=\varphi(X')+\varphi(X'')>\varphi(B')+\varphi(B'')-2\varepsilon.$$

Nach (5) ist also $\varphi(B)>\varphi(B')+\varphi(B'')-2\varepsilon$, und da dies für jedes $\varepsilon>0$ gilt, ist (9) bewiesen.

XVII. - *Die Mengen aus $\mathfrak{R}$ sind φ-messbar, d. h. $\overline{\mathfrak{R}}\supseteqq\mathfrak{R}$.*

Wir haben zu zeigen, dass (8) für jede Menge $M\varepsilon\mathfrak{R}$ gilt. Da wegen Eigenschaft 3.) der Maßfunktionen jedenfalls

$$\varphi(A)\leqq\varphi(AM)+\varphi(A-M)$$

ist, ist nur zu zeigen:

$$\varphi(A)\geqq\varphi(AM)+\varphi(A-M). \tag{10}$$

Das ist sicher richtig, wenn $\varphi(A)=+\infty$; wir nehmen also an, $\varphi(A)$ sei endlich; dann gibt es nach (6) zu jedem $\varepsilon>0$ ein $B\varepsilon\mathfrak{R}_\sigma$, so dass $B\supseteqq A$ und $\varphi(B)<\varphi(A)+\varepsilon$. Wegen $M\varepsilon\mathfrak{R}$, $B\varepsilon\mathfrak{R}_\sigma$, ist auch: $BM\varepsilon\mathfrak{R}_\sigma$, $B-M\varepsilon\mathfrak{R}_\sigma$. Aus $B=BM+(B-M)$ folgt also nach XVI:

$$\varphi(B)=\varphi(BM)+\varphi(B-M).$$

Wegen $AM\subseteqq BM$, $A-M\subseteqq B-M$ folgt daraus nach Eigenschaft 2.) der Maßfunktionen

$$\varphi(AM)+\varphi(A-M)\leqq\varphi(B)<\varphi(A)+\varepsilon,$$

und da dies für jedes $\varepsilon>0$ gilt, ist (10) bewiesen.

Wir fassen zusammen:

XVIII. - *Jede im Körper $\mathfrak{R}\subseteqq\mathfrak{E}$ definierte, total-additive Mengenfunktion φ kann erweitert werden zu einer in $\mathfrak{E}$ definierten Maßfunktion φ, die total-additiv ist in dem $\mathfrak{R}$ enthaltenden, für φ vollständigen σ-Körper $\overline{\mathfrak{R}}$.*

Seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ Körper aus $\mathfrak{E}$, und seien φ und ψ in $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{L}$ definierte, total-additive Mengenfunktionen; wir bezeichnen auch die zu φ bzw. ψ gehörige Maßfunktion mit φ bzw. ψ; $\overline{\mathfrak{R}}$ sei die vollständige Hülle von $\mathfrak{R}$ für φ. Dann gilt:

XIX. - *Ist $\mathfrak{R}\subseteqq\mathfrak{L}\subseteqq\overline{\mathfrak{R}}$ und ist $\psi(X)=\varphi(X)$ für alle $X\varepsilon\mathfrak{L}$, so ist auch $\psi(A)=\varphi(A)$ für alle $A\varepsilon\mathfrak{E}$.*

Sei $B\varepsilon\mathfrak{L}_\sigma$; bei Beachtung von (1) kann B dargestellt werden in der Form: $B=\underset{n}{S}B_n$, wo die B_n disjunkte Mengen aus $\mathfrak{L}$; nach (5) ist $\psi(B)\geqq\psi(B_1+....+B_n)=$ $=\psi(B_1)+....+\psi(B_n)$, also $\psi(B)\geqq\sum\limits_n\psi(B_n)$; wegen Eigenschaft (3) der Maßfunktionen ist auch $\psi(B)\leqq\sum\limits_n\psi(B_n)$; also ist $\psi(B)=\sum\limits_n\psi(B_n)$, also wegen $B_n\varepsilon\mathfrak{L}$ auch $\psi(B)=\sum\limits_n\varphi(B_n)$; da $\mathfrak{L}\subseteqq\overline{\mathfrak{R}}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ ein σ-Körper, ist auch $\mathfrak{L}_\sigma\subseteqq\overline{\mathfrak{R}}$, also

$B_n \varepsilon \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$, $B \varepsilon \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$; und da φ nach XVIII total-additiv in $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$, ist $\varphi(B) = \sum_n \varphi(B_n)$, also $\psi(B) = \varphi(B)$. - Sei nun $A \varepsilon \mathfrak{E}$. Nach (6) ist $\varphi(A) = \inf \varphi(X)$ $(X \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma,\ X \supseteqq A)$ $\psi(A) = \inf \psi(Y)$ $(Y \varepsilon \mathfrak{L}_\sigma,\ Y \supseteqq A)$; wegen $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{L}$ ist $\mathfrak{M}_\sigma \subseteqq \mathfrak{L}_\sigma$, also, wie eben bewiesen, $\psi(X) = \varphi(X)$ für alle $X \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$; alle $\varphi(X)$, deren Infimum $\varphi(A)$ ist, kommen also unter den $\psi(Y)$ vor, deren Infimum $\psi(A)$ ist; also ist $\psi(A) \leqq \varphi(A)$. Anderseits ist, wie schon gezeigt, $\psi(Y) = \varphi(Y)$ für alle $Y \varepsilon \mathfrak{L}_\sigma$; also wegen Eigenschaft 2.) der Maßfunktionen: $\varphi(A) \leqq \psi(Y)$ für alle $Y \varepsilon \mathfrak{L}_\sigma$, $Y \supseteqq A$; also auch $\varphi(A) \leqq \inf \psi(Y)$ $(Y \varepsilon \mathfrak{L}_\sigma,\ Y \supseteqq A)$, d. h. $\varphi(A) \leqq \psi(A)$. Mithin ist $\psi(A) = \varphi(A)$, wie behauptet.

Ist $\overline{\mathfrak{L}}$ die vollständige Hülle von $\mathfrak{L}$ für ψ, so folgt aus XIX:

XX. - *Ist* $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{L} \subseteqq \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ *und ist* $\psi(X) = \varphi(X)$ *für alle* $X \varepsilon \mathfrak{L}$, *so ist* $\overline{\mathfrak{L}} = \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$.

Für den Rest dieses Paragrafen nehmen wir nun an, der Raum E habe die Gestalt:

$$E = \underset{\nu}{S} E_\nu, \qquad E_\nu \varepsilon \mathfrak{M}, \qquad \varphi(E_\nu) \text{ endlich.} \tag{11}$$

Machen wir Gebrauch von der Umformung (1), so sehen wir, dass die E_ν ohneweiters als disjunkt angenommen werden können.

XXI. - *Gilt* (11), *so gibt es zu jeder Menge* $X \varepsilon \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ *eine Menge* $A \varepsilon \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$, *so dass* $A \supseteqq X$ *und* $\varphi(A - X) = 0$.

Nach (11) ist $X = \underset{\nu}{S} XE_\nu$; da nach XVII: $\mathfrak{M} \subseteqq \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ ein Körper, ist $XE_\nu \varepsilon \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$, und da $\varphi(E_\nu)$ endlich, ist auch $\varphi(XE_\nu)$ endlich. Nach (6) gibt es ein $A_{n\nu} \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$, so daß $A_{n\nu} \supseteqq XE_\nu$, $\varphi(A_{n\nu}) < \varphi(XE_\nu) + \frac{1}{n \cdot 2^\nu}$; da $\mathfrak{M} \subseteqq \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ ein σ-Körper, ist auch $\mathfrak{M}_\sigma \subseteqq \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$, also $A_{n\nu} \varepsilon \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$; da φ additiv in $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$, ist $\varphi(A_{n\nu} - XE_\nu) = \varphi(A_{n\nu}) - \varphi(XE_\nu) < \frac{1}{n \cdot 2^\nu}$. Setzen wir $A_n = \underset{\nu}{S} A_{n\nu}$, so ist $A_n \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$, $A_n \supseteqq X$, und wegen $A_n - X \subseteqq \underset{\nu}{S}(A_{n\nu} - XE_\nu)$ ist nach Eigenschaft (3) der Maßfunktionen $\varphi(A_n - X) \leqq \sum_\nu \varphi(A_{n\nu} - XE_\nu) < \frac{1}{n}$. Setzen wir $A = \underset{n}{D} A_n$, so ist $A \varepsilon \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$, $A \supseteqq X$, und wegen $A - X \subseteqq A_n - X$ ist $\varphi(A - X) < \frac{1}{n}$ für alle n, also $\varphi(A - X) = 0$.

XXII. - *Gilt* (11), *so gibt es zu jeder Menge* $X \varepsilon \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ *eine Menge* $C \varepsilon \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$, *sodass* $C \subseteqq X$ *und* $\varphi(X - C) = 0$.

Wir nehmen zunächst an, $\varphi(X)$ *sei endlich.* Dann gibt es nach (6) ein $A_n \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$, so dass $A_n \supseteqq X$, $\varphi(A_n) < \varphi(X) + \frac{1}{n}$, also $\varphi(A_n - X) < \frac{1}{n}$. Wieder nach (6) gibt es ein $B_n \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$, so dass $B_n \supseteqq A_n - X$, $\varphi(B_n) < \frac{1}{n}$. Dann ist $A_n - B_n \subseteqq X$ und:

$$\varphi(A_n - B_n) \geqq \varphi(A_n) - \varphi(B_n) > \varphi(A_n) - \frac{1}{n} > \varphi(X) - \frac{1}{n}. \tag{12}$$

Da $A_n \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$, $B_n \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma$, ist $A_n = \underset{i}{S} A_{ni}$ $(A_{ni} \varepsilon \mathfrak{M})$, $B_n = \underset{j}{S} B_{nj}$ $(B_{nj} \varepsilon \mathfrak{M})$, also $A_n - B_n = \underset{i}{S}(A_{ni} - B_n) = \underset{i}{S}\,\underset{j}{D}(A_{ni} - B_{nj})$; da $\mathfrak{M}$ ein Körper, ist hierin $A_{ni} - B_{nj} \varepsilon \mathfrak{M}$, also

$A_n - B_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$. Setzen wir $A_n - B_n = C_n$, so haben wir aus (12): es gibt ein $C_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$, so dass $C_n \subseteqq X$, $\varphi(C_n) > \varphi(X) - \frac{1}{n}$. Setzen wir $C = \underset{n}{S}\, C_n$, so ist auch $C \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$, $C \subseteqq X$, und $\varphi(X) - \frac{1}{n} < \varphi(C) \leqq \varphi(X)$ für alle n, also $\varphi(C) = \varphi(X)$, also $\varphi(X - C) = 0$. - *Sei sodann* $\varphi(X) = +\infty$. Nach (11) ist $X = \underset{\nu}{S}\, X E_\nu$, wo $\varphi(XE_\nu)$ endlich; es gibt also, wie eben gezeigt, ein $C_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$, so dass $C_\nu \subseteqq XE_\nu$, $\varphi(XE_\nu - C_\nu) = 0$. Setzen wir $C = \underset{\nu}{S}\, C_\nu$, so ist auch $C \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$, $C \subseteqq X$, und wegen $X - C \subseteqq \underset{\nu}{S}(XE_\nu - C_\nu)$ ist $\varphi(X - C) \leqq \sum_\nu \varphi(XE_\nu - C_\nu) = 0$, also $\varphi(X - C) = 0$.

Nun zeigen wir, immer unter der Voraussetzung (11), dass $\overline{\mathfrak{M}}$ *der kleinste* $\mathfrak{M}$ umfassende für φ vollständige σ-Körper ist; präziser gesprochen:

XXIII. - *Sei* $\mathfrak{S}$ *ein* σ*-Körper* $\subseteqq \mathfrak{E}$ *und* $\supseteqq \mathfrak{M}$; *sei* ψ *eine in* $\mathfrak{S}$ *definierte total-additive Mengenfunktion, sei* $\mathfrak{S}$ *vollständig für* ψ, *und sei* $\psi(X) = \varphi(X)$ *für alle* $X \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$; *gilt dann* (11), *so ist* $\overline{\mathfrak{M}} \subseteqq \mathfrak{S}$ *und* $\psi(X) = \varphi(X)$ *für alle* $X \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{M}}$.

Aus $\mathfrak{M} \subseteqq \overline{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{S}$ folgt, da $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{S}$ σ-Körper sind:

$$(13) \qquad \mathfrak{M}_\sigma \subseteqq \overline{\mathfrak{M}}, \qquad \mathfrak{M}_{\sigma\delta} \subseteqq \overline{\mathfrak{M}}, \qquad \mathfrak{M}_\sigma \subseteqq \mathfrak{S}, \qquad \mathfrak{M}_{\sigma\delta} \subseteqq \mathfrak{S}.$$

Sei $X \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$; dann ist $X = \underset{n}{S}\, X_n$ mit $X_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, und indem man X_n ersetzt durch $X_1 + \dots + X_n$, kann man annehmen $X_n \subseteqq X_{n+1}$. Da φ und ψ total-additiv in $\overline{\mathfrak{M}}$ bzw. $\mathfrak{S}$, folgt aus II: $\varphi(X) = \lim\limits_n \varphi(X_n)$, $\psi(X) = \lim\limits_n \psi(X_n)$; wegen $X_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ aber ist nach Voraussetzung $\varphi(X_n) = \psi(X_n)$, also ist $\psi(X) = \varphi(X)$ für alle $X \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$. - Sei sodann $X \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$; dann ist $X = \underset{n}{D}\, X_n$ mit $X_n \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, und indem man X_n ersetzt durch $X_1 X_2 \dots X_n$, kann man annehmen $X_n \supseteqq X_{n+1}$. Nach (11) ist $X = \underset{\nu}{S}\, XE_\nu$, wo $XE_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$ und die Summanden disjunkt angenommen werden können; wegen der totalen Additivität von φ und ψ ist also:

$$(14) \qquad \varphi(X) = \sum_\nu \varphi(XE_\nu), \qquad \psi(X) = \sum_\nu \psi(XE_\nu).$$

Hierin ist $XE_\nu = \underset{n}{D}\, X_n E_\nu$, wo $X_n E_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, $X_n E_\nu \supseteqq X_{n+1} E_\nu$, und weil $\psi(E_\nu) = \varphi(E_\nu)$ endlich, sind auch $\psi(X_n E_\nu)$ und $\varphi(X_n E_\nu)$ endlich; nach III ist also $\varphi(XE_\nu) = \lim\limits_n \varphi(X_n E_\nu)$, $\psi(XE_\nu) = \lim\limits_n \psi(X_n E_\nu)$; da $X_n E_\nu \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_\sigma$, ist, wie schon gezeigt, $\psi(X_n E_\nu) = \varphi(X_n E_\nu)$, also auch $\psi(XE_\nu) = \varphi(XE_\nu)$, also wegen (14) auch $\psi(X) = \varphi(X)$ für alle $X \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$. - Sei sodann $X \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{M}}$ und $\varphi(X) = 0$; wir zeigen, dass dann auch $X \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$ und $\psi(X) = 0$. Nach XXI gibt es ein $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$, so dass $A \supseteqq X$ und $\varphi(A - X) = 0$, also auch $\varphi(A) = 0$. Wegen (13) ist $A \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$, und wie eben gezeigt, ist auch $\psi(A) = 0$. Da $\mathfrak{S}$ vollständig für ψ, und da $X \subseteqq A$, ist also auch $X \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$ und $\psi(X) = 0$. - Sei nun X eine beliebige Menge aus $\overline{\mathfrak{M}}$. Nach XXI gibt es ein $A \,\varepsilon\, \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$, so dass

$A \supseteq X$ und $\varphi(A-X)=0$; da nach (13) $A \,\varepsilon\, \overline{\mathfrak{K}}$, ist auch $A-X \varepsilon\, \overline{\mathfrak{K}}$, also, wie eben gezeigt, auch $A-X \varepsilon\, \mathfrak{S}$ und $\psi(A-X)=0$. Wegen $A \,\varepsilon\, \mathfrak{K}_{\sigma\delta}$ ist nach (13) $A \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$ und, wie schon gezeigt, $\psi(A)=\varphi(A)$. Aus $X=A-(A-X)$ folgt nun wegen $A \,\varepsilon\, \mathfrak{S}$, $A-X \varepsilon\, \mathfrak{S}$ auch $X \varepsilon\, \mathfrak{S}$, und aus der Additivität von ψ folgt: $\psi(X)=\psi(A)-$ $-\psi(A-X)=\varphi(A)-\varphi(A-X)=\varphi(X)$, womit XXIII bewiesen ist.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{B}$ das System der Borelschen Mengen über $\mathfrak{K}$; da $\mathfrak{K}$ ein Körper, ist $\mathfrak{B}$ der kleinste σ-Körper über $\mathfrak{K}$ (8).

Da nach XVII $\overline{\mathfrak{K}}$ ein σ-Körper über $\mathfrak{K}$ ist, ist also $\mathfrak{B} \subseteq \overline{\mathfrak{K}}$; mithin ist φ total-additiv in $\mathfrak{B}$ und aus $\mathfrak{B}$ kann nach dem Verfahren von § 1 der kleinste für φ vollständige σ-Körper $\mathfrak{B}_0$ über $\mathfrak{B}$ gebildet werden. Wir zeigen:

XXIV. - *Gilt* (11) *so ist* $\overline{\mathfrak{K}}=\mathfrak{B}_0$.

Wie wir eben sahen, ist $\mathfrak{B} \subseteq \overline{\mathfrak{K}}$. Da $\overline{\mathfrak{K}}$ nach XV ein für φ vollständiger σ-Körper und $\mathfrak{B}_0$ nach XII der kleinste für φ vollständige σ-Körper über $\mathfrak{B}$ ist, so ist $\mathfrak{B}_0 \subseteq \overline{\mathfrak{K}}$. Da anderseits nach XXIII $\overline{\mathfrak{K}}$ der kleinste für φ vollständige σ-Körper über $\mathfrak{K}$ ist, muss auch $\overline{\mathfrak{K}} \subseteq \mathfrak{B}_0$ sein.

Wir können nun auch die Aussagen von Satz XIX und XX ein wenig verschärfen. Behalten wir die dort verwendeten Bezeichnungen bei, so erhalten wir:

XXV. - *Ist* $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \overline{\mathfrak{K}}$, *ist* $\psi(X)=\varphi(X)$ *für alle* $X \varepsilon\, \mathfrak{K}$, *und gilt* (11), *so ist* $\psi(A)=\varphi(A)$ *für alle* $A \,\varepsilon\, \mathfrak{E}$, *und mithin* $\overline{\mathfrak{T}}=\overline{\mathfrak{K}}$.

In der Tat, aus XXIII folgt für $\mathfrak{S}=\overline{\mathfrak{T}}$: es ist $\overline{\mathfrak{K}} \subseteq \overline{\mathfrak{T}}$ und $\psi(X)=\varphi(X)$ für alle $X \varepsilon\, \overline{\mathfrak{K}}$, also auch für alle $X \varepsilon\, \mathfrak{T}$. Die Behauptung folgt nun aus XIX und XX.

Die Theorie des k-dimensionalen Lebesgueschen Maßes ergibt sich als Spezialfall dieser Theorie. Man verstehe unter E den R_k (die Menge aller k-tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ reeller Zahlen). Dem durch die Ungleichungen $a_i \leqq x_i < b_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ gegebenen halboffenen Intervalle I des R_k ordne man den Funktionswert $\varphi(I)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\ldots(b_k-a_k)$ zu. Das System alle Punktmengen des R_k, die Summe endlich vieler solcher halboffener Intervalle sind, bildet einen Körper $\mathfrak{K}$, und zwar ist jede Menge $X \varepsilon\, \mathfrak{K}$ auch darstellbar in der Form $X=I_1+\ldots+I_n$, wo die I_i *disjunkte* halboffene Intervalle bedeuten. Setzt man $\varphi(X)=\varphi(I_1)+\ldots+$ $+\varphi(I_n)$, so ist φ total-additiv in $\mathfrak{K}$. Die zu φ gehörige Maßfunktion ist dann das k-dimensionale äussere Lebesguesche Maß, die vollständige Hülle $\overline{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$ ist das System der im Sinne von Lebesgue k-dimensional messbaren Mengen, und für alle $X \varepsilon\, \overline{\mathfrak{K}}$ ist $\varphi(X)$ das k-dimensionale Lebesguesche Maß von X.

§ 3. - Multiplikation additiver Mengenfunktionen.

Seien nun zwei Räume E', E'' gegeben. Als Produktraum $E' \times E''$ bezeichnen wir die Menge aller Paare (x', x'') mit $x' \varepsilon E'$, $x'' \varepsilon E''$. Ist $A' \subseteq E'$, $A'' \subseteq E''$, so be-

(8) Siehe z. B. R. F. S. 258-262.

zeichnen wir als *Produktmenge* $A' \times A''$ die Menge aller Punkte $(x', x'') \varepsilon E' \times E''$ mit $x' \varepsilon A'$, $x'' \varepsilon A''$.

Sei $\mathfrak{R}'$ (bzw. $\mathfrak{R}''$) ein aus Punktmengen des Raumes E' (bzw. E'') bestehender Körper, und φ' (bzw. φ'') eine in $\mathfrak{R}'$ (bzw. $\mathfrak{R}''$) definierte additive Mengenfunktion. Mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir das System aller Mengen der Gestalt $X' \times X''$ $(X' \varepsilon \mathfrak{R}', X'' \varepsilon \mathfrak{R}'')$. Wir definieren nun eine Mengenfunktion φ in $\mathfrak{P}$ durch die Festsetzung: ist $X = X' \times X''$ $(X' \varepsilon \mathfrak{R}', X'' \varepsilon \mathfrak{R}'')$, so sei:

$$\varphi(X) = \varphi'(X') \cdot \varphi''(X''), \tag{15}$$

wobei unter diesem Produkte der Wert 0 zu verstehen ist, wenn einer seiner Faktoren $=0$, der andere $=+\infty$ ist. Aus (15) folgt sofort: $\varphi(\Lambda) = 0$.

Ist $X = X_1 + \dots + X_n$, wo $X_i = X_i' \times X''$, die X_i' disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}'$ und $X'' \varepsilon \mathfrak{R}''$ (oder $X_i = X' \times X_i''$, wo die X_i'' disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}''$ und $X' \varepsilon \mathfrak{R}'$), so ist:

$$\varphi(X) = \varphi(X_1) + \dots + \varphi(X_n). \tag{16}$$

XXVI. - *Die Mengenfunktion φ ist additiv in $\mathfrak{P}$.*

Wir haben zu zeigen: Ist $P = P_1 + \dots + P_n$, wo $P \varepsilon \mathfrak{P}$ und die P_i disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$, so ist:

$$\varphi(P) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n). \tag{17}$$

Für $n=1$ ist (17) trivial; wir nehmen also an, die Behauptung gelte für weniger als n Summanden, und haben zu zeigen, dass sie dann auch für n Summanden gilt. Sei $P = P' \times P''$ $(P' \varepsilon \mathfrak{R}', P'' \varepsilon \mathfrak{R}'')$ und $P_i = P_i' \times P_i''$ $(P_i' \varepsilon \mathfrak{R}', P_i'' \varepsilon \mathfrak{R}'')$. Gilt $P_i'' = P''$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, so reduziert sich (17) auf (16). Wir nehmen also an, es sei etwa $P_n'' \subset P''$, d. h. $P'' - P_n'' \supset \Lambda$. Aus:

$$P = (P' \times P_n'') + (P' \times (P'' - P_n'')), \qquad P_i = (P_i' \times P_i'' P_n'') + (P_i' \times (P_i'' - P_n''))$$

folgt nach (16):

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(P) &= \varphi(P' \times P_n'') + \varphi(P' \times (P'' - P_n'')), \\ \varphi(P_i) &= \varphi(P_i' \times P_i'' P_n'') + \varphi(P_i' \times (P_i'' - P_n'')). \end{aligned} \right. \tag{18}$$

Wegen $P = \overset{n}{\underset{i=1}{S}} P_i = \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (P_i' \times P_i'')$ ist offenbar:

$$P' \times P_n'' = \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (P_i' \times P_i'' P_n''), \qquad P' \times (P'' - P_n'') = \overset{n}{\underset{i=1}{S}} (P_i' \times (P_i'' - P_n'')). \tag{19}$$

Wir zeigen, dass in jeder dieser beiden Formeln mindestens ein Summand der rechten Seite leer ist. Für die zweite Formel ist dies der n-te Summand; was die erste Formel anlangt, ist dies ebenfalls der n-te Summand, falls $P_n' = \Lambda$; ist hingegen $P_n' \supset \Lambda$, so gibt es wegen $P'' - P_n'' \supset \Lambda$ ein $a' \varepsilon P_n'$ und ein $a'' \varepsilon P'' - P_n''$; dann ist $(a', a'') \varepsilon P - P_n$, also gibt es genau ein $i < n$, so dass $(a', a'') \varepsilon P_i$; dann aber ist $P_i''P_n''=\Lambda$; denn wäre $b''\varepsilon P_i''P_n''$, so wäre wegen $a'\varepsilon P_n'$, $b''\varepsilon P_n''$ einerseits $(a', b'')\varepsilon P_n$, und wegen $(a', a'')\varepsilon P_i$ wäre $a'\varepsilon P_i'$, also wegen $b''\varepsilon P_i''$ wäre andererseits auch $(a', b'')\varepsilon P_i$, entgegen der Voraussetzung, dass die Mengen $P_1,\dots, P_n$ disjunkt sind. Da also $P_i''P_n''=\Lambda$, ist in der ersten Formel (19) der i-te Summand leer. Lassen wir in (19) die leeren Summanden weg, so enthalten also die rechten Seiten weniger als n Summanden; nach Annahme gilt also:

$$\varphi(P'\times P_n'')=\sum_{i=1}^{n}\varphi(P_i'\times P_i''P_n'');$$

$$\varphi(P'\times(P''-P_n''))=\sum_{i=1}^{n}\varphi(P_i'\times(P_i''-P_n'')),$$

(wo rechts die von den leeren Summanden in (19) herrührenden Glieder $=0$ sind). Durch Einsetzen in die erste Formel (18) ergibt sich:

$$\varphi(P)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi(P_i'\times P_i''P_n'')+\varphi(P_i'\times(P_i''-P_n''))),$$

und wegen der zweiten Formel (18) ist das die zu beweisende Formel (17).

Das Mengensystem $\mathfrak{P}$ ist i. a. kein Körper; wohl aber folgt daraus, dass $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ Körper sind, nach einem bekannten Satze [9], dass das System $\mathfrak{K}$ aller Mengen, die Summe endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{P}$ sind, *ein Körper ist, und dass jede Menge aus* $\mathfrak{K}$ *auch darstellbar ist als Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus* $\mathfrak{P}$. Wir bezeichnen $\mathfrak{K}$ als den *Produktkörper* $\mathfrak{K}'\times\mathfrak{K}''$, und wollen die Definition der durch (15) nur in $\mathfrak{P}$ definierten Mengenfunktion φ auf $\mathfrak{K}$ erweitern. Zu dem Zweck zeigen wir vorerst:

XXVII. - *Sind $P_1,\dots, P_m$ disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ und $\overline{P}_1,\dots, \overline{P}_n$ disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$, und ist $P_1+\dots+P_m=\overline{P}_1+\dots+\overline{P}_n$, so ist auch*:

$$\varphi(P_1)+\dots+\varphi(P_m)=\varphi(\overline{P}_1)+\dots+\varphi(\overline{P}_n). \tag{20}$$

Offenbar ist $\overset{m}{\underset{i=1}{S}}P_i=\overset{n}{\underset{j=1}{S}}\overline{P}_j=\overset{m}{\underset{i=1}{S}}\overset{n}{\underset{j=1}{S}}P_i\overline{P}_j$. Ist $P_i=P_i'\times P_i''$ $(P_i'\varepsilon\mathfrak{K}', P_i''\varepsilon\mathfrak{K}'')$ und $\overline{P}_j=\overline{P}_j'\times\overline{P}_j''$ $(\overline{P}_j'\varepsilon\mathfrak{K}', \overline{P}_j''\varepsilon\mathfrak{K}'')$, so ist $P_i\overline{P}_j=P_i'\overline{P}_j'\times P_i''\overline{P}_j''$; da $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ Körper, ist $P_i'\overline{P}_j'\varepsilon\mathfrak{K}'$, $P_i''\overline{P}_j''\varepsilon\mathfrak{K}''$, also $P_i\overline{P}_j\varepsilon\mathfrak{P}$; die $P_i\overline{P}_j$ sind also disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$, und wegen $P_i=\overset{n}{\underset{j=1}{S}}P_i\overline{P}_j$, $\overline{P}_j=\overset{m}{\underset{i=1}{S}}P_i\overline{P}_j$, ist nach XXVI:

$$\varphi(P_i)=\sum_{j=1}^{n}\varphi(P_i\overline{P}_j),\qquad \varphi(\overline{P}_j)=\sum_{i=1}^{m}\varphi(P_i\overline{P}_j);$$

---

[9] R. F. S. 14 (Satz 3.3.22).

also ist:

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(P_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varphi(P_i\overline{P}_j), \qquad \sum_{j=1}^{n} \varphi(\overline{P}_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \varphi(P_i\overline{P}_j),$$

womit (20) bewiesen ist.

Sei nun X eine beliebige Menge aus $\mathfrak{R}$; dann ist X in der Form darstellbar $X = P_1 + \dots + P_n$, wo die P_i disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ sind. Wir setzen:

$$\varphi(X) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n), \tag{21}$$

und XXVII lehrt, dass der durch (21) definierte Wert $\varphi(X)$ unabhängig ist von der Art, wie X als Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus $\mathfrak{P}$ dargestellt wird. Durch (21) ist nun φ in ganz $\mathfrak{R}$ definiert, und wir zeigen noch:

XXVIII. - *Die durch* (21) *in* $\mathfrak{R}$ *definierte Mengenfunktion* φ *ist additiv.*

Seien X und Y disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}$; dann ist $X = P_1 + \dots + P_m$, wo die P_i disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ bedeuten, und $Y = \mathfrak{Q}_1 + \dots + \mathfrak{Q}_n$, wo die $\mathfrak{Q}_i$ disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ bedeuten; also ist $X + Y = P_1 + \dots + P_m + \mathfrak{Q}_1 + \dots + \mathfrak{Q}_n$ eine Darstellung von $X + Y$ als Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus $\mathfrak{P}$. Nach (21) ist:

$$\varphi(X) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_m), \qquad \varphi(Y) = \varphi(\mathfrak{Q}_1) + \dots + \varphi(\mathfrak{Q}_n)$$
$$\varphi(X+Y) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_m) + \varphi(\mathfrak{Q}_1) + \dots + \varphi(\mathfrak{Q}_n)$$

also $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, w. z. b. w.

Wir bezeichnen die durch (15) und (21) in $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}''$ definierte Mengenfunktion φ als *das Produkt* $\varphi' \times \varphi''$ der in $\mathfrak{R}'$ bzw. $\mathfrak{R}''$ definierten und additiven Mengenfunktionen φ' und φ''. Zusammenfassend haben wir dann:

XXIX. - *Ist* φ' *eine im Körper* $\mathfrak{R}'$ *definierte, additive Mengenfunktion und* φ'' *eine im Körper* $\mathfrak{R}''$ *definierte, additive Mengenfunktion, so ist* $\varphi' \times \varphi''$ *eine im Körper* $\mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}''$ *definierte, additive Mengenfunktion.*

§ 4. - Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen.

Verschärfen wir die Voraussetzung, φ' und φ'' seien in $\mathfrak{R}'$ bzw. $\mathfrak{R}''$ additiv, zur Voraussetzung, φ' und φ'' seien in $\mathfrak{R}'$ bzw. $\mathfrak{R}''$ *total-additiv*, so können wir auch zeigen, dass $\varphi' \times \varphi''$ in $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \times \mathfrak{R}''$ total-additiv ist. Wir zeigen zunächst in Verschärfung von XXVI:

XXX. - *Ist* φ' *total-additiv in* $\mathfrak{R}'$ *und* φ'' *total-additiv in* $\mathfrak{R}''$, *so ist die durch* (15) *definierte Mengenfunktion* φ *total-additiv in* $\mathfrak{P}$.

Wir haben zu zeigen: Ist $P = \underset{i}{S}\, P_i$, wo $P \varepsilon \mathfrak{P}$ und die P_i disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ bedeuten, so ist:

$$\varphi(P) = \sum_i \varphi(P_i). \tag{22}$$

Da $P \varepsilon \mathfrak{R}$, $P_1 + \dots + P_n \varepsilon \mathfrak{R}$, und da $\mathfrak{R}$ ein Körper, ist auch $P - (P_1 + \dots + P_n) \varepsilon \mathfrak{R}$, und da jede Menge aus $\mathfrak{R}$ Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus $\mathfrak{P}$ ist, so haben wir:

$$P = P_1 + \dots + P_n + P_1^* + \dots + P_m^*,$$

wo $P_1, \dots, P_n, P_1^*, \dots, P_m^*$ disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ sind. Nach XXVI ist also:

$$\varphi(P) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n) + \varphi(P_1^*) + \dots + \varphi(P_m^*),$$

also $\varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n) \leqq \varphi(P)$, mithin:

$$\sum_i \varphi(P_i) \leqq \varphi(P). \tag{23}$$

Es ist $P = P' \times P''$ $(P' \varepsilon \mathfrak{R}', P'' \varepsilon \mathfrak{R}'')$, $P_i = P_i' \times P_i''$ $(P_i' \varepsilon \mathfrak{R}', P_i'' \varepsilon \mathfrak{R}'')$. Wir bezeichnen mit $g_i(x')$ diejenige auf P' definierte Punkfunktion, die $= \varphi''(P_i'')$ ist für $x' \varepsilon P_i'$ und $=0$ für $x' \varepsilon P' - P_i'$, und setzen: $h_n(x') = g_1(x') + \dots + g_n(x')$. Wir bilden die 2^n Mengen $D_{n1}, \dots, D_{n2^n}$, die entstehen, indem man in $P_1' P_2' \dots P_n'$ auf alle möglichen Weisen 0, 1, 2,...., n Faktoren P_i' ersetzt durch $P' - P_i'$. Dann ist $P' = \underset{j=1}{\overset{2^n}{S}} D_{nj}$, und da $\mathfrak{R}'$ ein Körper, ist $D_{nj} \varepsilon \mathfrak{R}'$. Die Funktion $h_n(x')$ ist konstant auf jeder der Mengen D_{nj}; bezeichnen wir ihren Wert auf D_{nj} mit [10] y_{nj}, so ist offenbar:

$$\varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n) = \sum_{j=1}^{n} y_{nj} \varphi'(D_{nj}). \tag{24}$$

Bezeichnen wir nun für jedes $x' \varepsilon P'$ mit $\mathfrak{A}_i(x')$ die Menge P_i'' oder die leere Menge, jenachdem $x' \varepsilon P_i'$ oder $x' \varepsilon P' - P_i'$, so folgt aus $P = \underset{i}{S} P_i$ sofort: $P'' = \underset{i}{S} \mathfrak{A}_i(x')$, und da die Mengen P_i disjunkt sind, sind es (für jedes feste $x' \varepsilon P'$) auch die Mengen $\mathfrak{A}_i(x')$; weil φ'' total-additiv in $\mathfrak{R}''$, ist also $\varphi''(P'') = \sum_i \varphi''(\mathfrak{A}_i(x'))$ für jedes $x' \varepsilon P'$, und wegen der Definition von $g_i(x')$ ist dies gleichbedeutend mit: $\varphi''(P'') = \sum_i g_i(x')$, wofür wir auch schreiben können:

$$\varphi''(P'') = \lim_n h_n(x') \quad \text{für jedes} \quad x' \varepsilon P'. \tag{25}$$

Sei nun z eine beliebige Zahl $< \varphi''(P'')$. Bedeutet D_n die Summe aller D_{nj}, auf denen $h_n(x') > z$ ist, so ist $D_n \varepsilon \mathfrak{R}'$ und es folgt aus (24):

$$\varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n) \geqq z \varphi'(D_n). \tag{26}$$

Wegen $z < \varphi''(P'')$ aber folgt aus (25): $P' = \underset{n}{S} D_n$, und da $D_n \subseteqq D_{n+1}$, folgt aus

[10] Ist $D_{nj} = \Lambda$, so setze man etwa $y_{nj} = 0$.

der totalen Additivität von φ' in $\mathfrak{R}'$ nach II: $\varphi'(P')=\lim\limits_n \varphi'(D_n)$. Also folgt aus (26):

$$\sum_i \varphi(P_i) \geqq z\varphi'(P'),$$

und da dies für jedes $z<\varphi''(P'')$ gilt:

$$\sum_i \varphi(P_i) \geqq \varphi'(P') \cdot \varphi''(P'') = \varphi(P).$$

Zusammen mit (23) ergibt das (22).

Nun erhalten wir in Verschärfung von XXIX:

XXXI. - *Ist φ' total-additiv in $\mathfrak{R}'$ und φ'' total-additiv in $\mathfrak{R}''$, so ist $\varphi'\times\varphi''$ total-additiv in $\mathfrak{R}'\times\mathfrak{R}''$.*

Wir setzen wieder $\varphi'\times\varphi''=\varphi$, $\mathfrak{R}'\times\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$, und haben zu zeigen: Ist $\mathfrak{A}=\underset{i}{S}\mathfrak{A}_i$, wo $\mathfrak{A}\,\varepsilon\,\mathfrak{R}$ und die $\mathfrak{A}_i$ disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}$ bedeuten, so ist:

$$\varphi(\mathfrak{A})=\sum_i \varphi(\mathfrak{A}_i). \tag{27}$$

Wegen $\mathfrak{A}\,\varepsilon\,\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{A}=P_1+\dots+P_n$, wo die P_j disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ bedeuten; ebenso ist $\mathfrak{A}_i=P_{i1}+\dots+P_{in_i}$, wo die P_{ij} disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ bedeuten. Nach (21) ist:

$$\varphi(\mathfrak{A})=\sum_{j=1}^{n}\varphi(P_j). \tag{28}$$

Wegen $P_j\subseteqq\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}=\underset{i}{S}\mathfrak{A}_i$ ist:

$$P_j=\underset{i}{S}\,P_j\mathfrak{A}_i=\underset{i}{S}\,\underset{k=1}{\overset{n_i}{S}}\,P_jP_{ik},$$

also nach XXX:

$$\varphi(P_j)=\sum_i\sum_{k=1}^{n_i}\varphi(P_jP_{ik}),$$

mithin nach (28):

$$\varphi(\mathfrak{A})=\sum_{j=1}^{n}\sum_i\sum_{k=1}^{n_i}\varphi(P_jP_{ik})=\sum_i\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i}\varphi(P_jP_{ik}). \tag{29}$$

Wegen $\mathfrak{A}_i\subseteqq\mathfrak{A}=\underset{j=1}{\overset{n}{S}}P_j$ ist:

$$\mathfrak{A}_i=\underset{j=1}{\overset{n}{S}}\,P_j\mathfrak{A}_i=\underset{j=1}{\overset{n}{S}}\,\underset{k=1}{\overset{n_i}{S}}\,P_jP_{ik},$$

also nach (21):

$$\varphi(\mathfrak{A}_i)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_i}\varphi(P_jP_{ik}).$$

Setzt man dies in (29) ein, so erhält man (27).

Sei nun $\mathfrak{E}$ das System aller Teilmengen von $E'\times E''$. Wegen XXXI kann $\varphi'\times\varphi''$ nach XVIII erweitert werden zu einer in $\mathfrak{E}$ definierten Maßfunktion $\overline{\varphi}$, die wir als *die zu $\varphi'\times\varphi''$ gehörige Maßfuntion* bezeichnen; sie ist, wenn $\overline{\mathfrak{R}}$

die vollständige Hülle für φ des Körpers $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}'\times\mathfrak{K}''$ bezeichnet, total-additiv in $\overline{\mathfrak{K}}$. Setzen wir $\varphi=\varphi'\times\varphi''$ auch für alle $X\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{K}}$, so können wir XXIX verschärfen zu:

XXXII. - *Ist φ' eine im Körper $\mathfrak{K}'$ definierte, total-additive Mengenfunktion und φ'' eine im Körper $\mathfrak{K}''$ definierte, total-additive Mengenfunktion, und $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}'\times\mathfrak{K}''$, so ist $\varphi'\times\varphi''$ eine in $\overline{\mathfrak{K}}$ definierte total-additive Mengenfunktion.*

Wir nehmen nun an, die Räume E', E'' haben die Gestalt:

$$\left\{\begin{array}{lll} E'=\underset{\mu}{S}E_\mu', & E_\mu'\,\varepsilon\,\mathfrak{K}', & \varphi'(E_\mu') \text{ endlich;} \\ E''=\underset{\nu}{S}E_\nu'', & E_\nu''\,\varepsilon\,\mathfrak{K}'', & \varphi''(E_\nu'') \text{ endlich.} \end{array}\right. \tag{30}$$

Dann ist $E'\times E''=\underset{\mu,\nu}{S}E_\mu'\times E_\nu'$, wo $E_\mu'\times E_\nu'\,\varepsilon\,\mathfrak{K}$ und $\varphi(E_\mu'\times E_\nu')=\varphi'(E_\mu')\cdot\varphi''(E_\nu'')$ endlich, und indem wir die Mengen $E_\mu'\times E_\nu''$ in eine Folge ordnen, sehen wir, dass für den Raum $E=E'\times E''$ (11) gilt.

Sei $\mathfrak{E}'$ das System aller Teilmengen von E', sei $\mathfrak{E}''$ das System aller Teilmengen von E'', und $\mathfrak{E}$ das System aller Teilmengen von $E'\times E''$; seien $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{L}'$ Körper aus $\mathfrak{E}'$, und $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{L}''$ Körper aus $\mathfrak{E}''$; seien φ' und ψ' in $\mathfrak{K}'$ bzw. $\mathfrak{L}'$ definierte, total-additiv Mengenfunktionen, φ'' und ψ'' in $\mathfrak{K}''$ bzw. $\mathfrak{L}''$ definierte, total-additive Mengenfunktionen; $\overline{\mathfrak{K}}'$ sei die vollständige Hülle von $\mathfrak{K}'$ für φ', und $\overline{\mathfrak{K}}''$ die vollständige Hülle von $\mathfrak{K}''$ für φ''. Seien φ und ψ die zu $\varphi'\times\varphi''$ bzw. $\psi'\times\psi''$ gehörigen Maßfunktionen, und seien $\overline{\mathfrak{K}}$ und $\overline{\mathfrak{L}}$ die vollständigen Hüllen für φ bzw. ψ von $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}'\times\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'\times\mathfrak{L}''$. Dann gilt:

XXXIII. - *Ist $\mathfrak{K}'\subseteqq\mathfrak{L}'\subseteqq\overline{\mathfrak{K}}'$, $\mathfrak{K}''\subseteqq\mathfrak{L}''\subseteqq\overline{\mathfrak{K}}''$, ist $\varphi'(X')=\psi'(X')$ für alle $X'\,\varepsilon\,\mathfrak{K}'$, $\varphi''(X'')=\psi''(X'')$ für alle $X''\,\varepsilon\,\mathfrak{K}''$, und gilt* (30), *so ist $\varphi(A)=\psi(A)$ für alle $A\,\varepsilon\,\mathfrak{E}$, und mithin $\overline{\mathfrak{K}}=\overline{\mathfrak{L}}$. Es stimmen also die Produkte $\varphi'\times\varphi''$ und $\psi'\times\psi''$ in ihrem gemeinsamen Definitionsbereiche $\overline{\mathfrak{K}}=\overline{\mathfrak{L}}$ überein.*

Offenbar ist $\mathfrak{K}\subseteqq\mathfrak{L}$ und $\psi(X)=\varphi(X)$ für alle $X\,\varepsilon\,\mathfrak{K}$; nach XXV ist also nur mehr zu zeigen: $\mathfrak{L}\subseteqq\overline{\mathfrak{K}}$. Sei $\mathfrak{Q}$ das System aller Mengen $X'\times X''$ mit $X'\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{K}}'$, $X''\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{K}}''$; da $\mathfrak{L}\subseteqq\overline{\mathfrak{K}}'\times\overline{\mathfrak{K}}''$, und jede Menge aus $\overline{\mathfrak{K}}'\times\overline{\mathfrak{K}}''$ Summe endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{Q}$ ist, genügt es also zu zeigen, dass $\mathfrak{Q}\subseteqq\overline{\mathfrak{K}}$. Wir beweisen das schrittweise.

Hilfsatz 1. - Ist $B=B'\times B''$, wo $B'\,\varepsilon\,\mathfrak{K}_\sigma'$, $B''\,\varepsilon\,\mathfrak{K}_\sigma''$ so ist $B\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{K}}$ und $\varphi(B)=$ $=\varphi'(B')\cdot\varphi''(B'')$.

Wegen $B'\,\varepsilon\,\mathfrak{K}_\sigma'$, $B''\,\varepsilon\,\mathfrak{K}_\sigma''$ ist $B'=\underset{n}{S}B_n'$, $B''=\underset{n}{S}B_n''$, wo $B_n'\,\varepsilon\,\mathfrak{K}'$, $B_n''\,\varepsilon\,\mathfrak{K}''$, und es kann ohneweiters $B_n'\subseteqq B'_{n+1}$, $B_n''\subseteqq B''_{n+1}$ angenommen werden; dann ist $B_n'\times B_n''\,\varepsilon\,\mathfrak{K}$, also auch $B_n'\times B_n''\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{K}}$, und $B=\underset{n}{S}B_n'\times B_n''$, also $B\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{K}}_\sigma$; da aber $\overline{\mathfrak{K}}$ ein σ-Körper, ist $\overline{\mathfrak{K}}_\sigma=\overline{\mathfrak{K}}$, also $B\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{K}}$. Da $B=\underset{n}{S}B_n'\times B_n''$ und $B_n'\times B_n''\subseteqq$ $\subseteqq B'_{n+1}\times B''_{n+1}$, und da nach XXXII φ total-additiv in $\overline{\mathfrak{K}}$, ist nach II: $\varphi(B)=$

$=\lim\limits_n \varphi(B_n' \times B_n'')$. Hierin ist nach (15): $\varphi(B_n' \times B_n'')=\varphi'(B_n') \cdot \varphi''(B_n'')$. Da $\overline{\mathfrak{M}}'$ ein σ-Körper über $\mathfrak{M}'$, also $\mathfrak{M}_\sigma' \subseteqq \overline{\mathfrak{M}}'$, und da nach XVIII φ' total-additiv in $\overline{\mathfrak{M}}'$, ist nach II $\lim\limits_n \varphi'(B_n')=\varphi'(B')$, und ebenso $\lim\limits_n \varphi''(B_n'')=\varphi''(B'')$. Also ist $\varphi(B)=\varphi'(B') \cdot \varphi''(B'')$. Damit ist Hilfsatz 1. bewiesen.

Hilfsatz 2. - Ist $A=A' \times A''$, wo $A' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}'_{\sigma\delta}$, $A'' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}''_{\sigma\delta}$, so ist $A \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$.

Wegen $A' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}'_{\sigma\delta}$, $A'' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}''_{\sigma\delta}$ ist $A'=\underset{n}{D} A_n'$, $A''=\underset{n}{D} A_n''$, wo $A_n' \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma'$, $A_n'' \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma''$; dann ist $A' \times A''=\underset{n}{D} A_n' \times A_n''$; hierin ist nach Hilfsatz 1 $A_n' \times A_n'' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$, also ist $A \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}_\delta$, und da $\overline{\mathfrak{M}}$ ein σ-Körper, ist auch $A \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$.

Hilfsatz 3. - *Ist $A=A' \times A''$, wo $A' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}'$, $\varphi'(A')=0$ und A'' eine beliebige Menge aus E'' (oder $A'' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}''$, $\varphi''(A'')=0$ und A' eine beliebige Menge aus E'), so ist $A \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$ und $\varphi(A)=0$.*

Da $\overline{\mathfrak{M}}$ vollständig für φ, genügt es zu zeigen, dass $\varphi(A' \times E'')=0$. Da nach (30) $E''=\underset{\nu}{S} E_\nu''$, also $A' \times E''=\underset{\nu}{S} A' \times E_\nu''$, genügt es nach Eigenschaft 3.) der Maßfunktionen weiter, zu zeigen, dass $\varphi(A' \times E_\nu'')=0$. Da $\varphi'(A')=0$, gibt es nach (6) zu jedem $\varepsilon>0$ ein $B' \varepsilon \mathfrak{M}_\sigma'$, so dass $B' \supseteqq A'$ und $\varphi'(B')<\varepsilon$. Dann ist nach Hilfsatz 1. $\varphi(B' \times E_\nu'')=\varphi'(B') \cdot \varphi''(E_\nu'') \leqq \varepsilon \varphi''(E_\nu'')$; nach Eigenschaft 2.) der Maßfunktionen ist also auch $\varphi(A' \times E_\nu'') \leqq \varepsilon \varphi''(E_\nu'')$, und da dies für jedes $\varepsilon>0$ gilt und $\varphi''(E_\nu'')$ endlich ist, ist $\varphi(A' \times E_\nu'')=0$, w. z. b. w.

Nun können wir XXXIII beweisen. Sei also $X \varepsilon \mathfrak{Q}$, d. h. $X=X' \times X''$, wo $X' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}'$, $X'' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}''$. Nach XXI gibt es ein $A' \varepsilon \mathfrak{M}'_{\sigma\delta}$ und ein $A'' \varepsilon \mathfrak{M}''_{\sigma\delta}$, so dass: $A' \supseteqq X'$, $A'' \supseteqq X''$, $\varphi'(A'-X')=0$, $\varphi''(A''-X'')=0$. Nun ist:

$$X=A' \times A''-(((A'-X') \times A'')+(A' \times (A''-X'')));$$

nach Hilfsatz 2. ist hierin $A' \times A'' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$, nach Hilfsatz 3. ist $(A'-X') \times A'' \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$, $A' \times (A'' \times X'') \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$, also, da $\overline{\mathfrak{M}}$ ein Körper, auch $X \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$. Es ist also $\mathfrak{Q} \subseteqq \overline{\mathfrak{M}}$, w.z.b.w.

Sei nun insbesondere E' der R_k, E'' der R_l und $\mathfrak{M}'$ das System aller Mengen des R_k, die Summe endlich vieler halboffener Intervalle $a_i' \leqq x_i' < b_i'$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ sind, $\mathfrak{M}''$ das System aller Mengen des R_l, die Summe endlich vieler halboffener Intervalle $a_i'' \leqq x_i'' < b_i''$ $(i=1, 2, \ldots, l)$ sind. Für das durch $a_i' \leqq x_i' < b_i'$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ gegebene halboffene Intervall I' des R_k sei $\varphi'(I')=(b_1'-a_1') \ldots (b_k'-a_k')$, für das durch $a_i'' \leqq x_i'' < b_i''$ $(i=1, 2, \ldots, l)$ gegebene halboffene Intervall I'' des R_l sei $\varphi''(I'')=(b_1''-a_1'') \ldots (b_l''-a_l'')$; ist $X'=I_1'+\ldots+I_m'$, $X''=I_1''+\ldots+I_n''$, wo die I_i' disjunkte halboffene Intervalle des R_k, die I_i'' disjunkte halboffene Intervalle des R_l sind, so sei $\varphi'(X')=\varphi'(I_1')+\ldots+\varphi'(I_m')$, $\varphi''(X'')=\varphi''(I_1'')+\ldots+\varphi''(I_n'')$. Dann ist offenbar $\mathfrak{M}' \times \mathfrak{M}''$ das System aller Mengen des R_{k+l}, die Summe endlich vieler hallboffener Intervalle $a_i \leqq x_i < b_i$ $(i=1, 2, \ldots, k+l)$ sind. Die zu φ' bzw. φ'' gehörige Maßfunktion ist, wie wir in § 2 sahen, das k-dimensionale (bzw. l-dimensionale) äussere Lebesguesche Maß, und $\overline{\mathfrak{M}}'$ (bzw. $\overline{\mathfrak{M}}''$) ist das System aller

k-dimensional (bzw. l-dimensional) messbaren Mengen des R_k (bzw. R_l). Setzen wir $\varphi=\varphi'\times\varphi''$, so wird die zu φ gehörige Maßfunktion das $(k+l)$-dimensionale äussere Lebesguesche Maß, und $\overline{\mathfrak{R}}$ das System aller $(k+l)$-dimensional messbaren Mengen des R_{k+l}. Bezeichnen wir das r-dimensionale Lebesguesche Maß mit μ_r, so ist also $\mu_k\times\mu_l=\mu_{k+l}$. Satz XXXIII lehrt, dass es dabei gleichgiltig ist, ob wir von den Körpern $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ oder den Körpern $\overline{\mathfrak{R}}'$ und $\overline{\mathfrak{R}}''$ ausgehen.

§ 5. - Analytische Darstellung.

Sei wieder $\mathfrak{R}'$ ein aus Mengen des Raumes E' und $\mathfrak{R}''$ ein aus Mengen des Raumes E'' bestehender Körper, φ' eine in $\mathfrak{R}'$ und φ'' eine in $\mathfrak{R}''$ total-additive Mengenfunktion; $\overline{\mathfrak{R}}'$ sei die vollständige Hülle von $\mathfrak{R}'$ für φ'; dann kann φ' nach § 2 erweitert werden zu einer in $\overline{\mathfrak{R}}'$ total-addiven Mengenfunktion φ'. Die zu φ' bzw. φ'' gehörige Maßfunktion bezeichnen wir gleichfalls mit φ' bzw. φ''. Wir nehmen weiterhin an, es sei $E'\,\varepsilon\,\mathfrak{R}'$ und $\varphi'(E')$ endlich, und $E''=\underset{\nu}{S}E_\nu''$, wo $E_\nu''\,\varepsilon\,\mathfrak{R}''$ und $\varphi''(E_\nu'')$ endlich; dabei kann ohneweiteres $E_\nu''\subseteqq E''_{\nu+1}$ angenommen werden.

Ist $M\subseteqq E'\times E''$, so bezeichnen wir für jedes $x\,\varepsilon\,E'$ mit M_x die Menge aller $y\,\varepsilon\,E''$, für die $(x,y)\,\varepsilon\,M$; dann ist $\varphi''(M_x)$ eine in E' definierte Punktfunktion.

Eine in E' definierte Punktfunktion $f(x)$ heißt φ'-messbar, wenn für jede Zahl z die Menge $[f>z]$ aller Punkte x von E', in denen $f(x)>z$ ist zu $\overline{\mathfrak{R}}'$ gehört. Für jede nicht-negative, φ'-messbare Funktion f ist dann das über E' erstreckte Integral $(E')\int f d\varphi'$ definiert ([11]).

Setzen wir $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}'\times\mathfrak{R}''$, $\varphi=\varphi'\times\varphi''$, so ist nach § 4 φ total-additiv in $\overline{\mathfrak{R}}$. Mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir wieder das System aller Mengen P aus $E'\times E''$, die die Gestalt haben: $P=P'\times P''$, wo $P'\,\varepsilon\,\mathfrak{R}'$, $P''\,\varepsilon\,\mathfrak{R}''$.

XXXIV. - *Ist $P\,\varepsilon\,\mathfrak{P}$, so ist $P_x\,\varepsilon\,\mathfrak{R}''$, $\varphi''(P_x)$ ist φ'-messbar und $\varphi(P)=$ $=(E')\int\varphi''(P_x)d\varphi'$.*

In der Tat, für $x\,\varepsilon\,P'$ ist $P_x=P''$, für $x\,\varepsilon\,E'-P'$ ist $P_x=\Lambda$; also ist $P_x\,\varepsilon\,\mathfrak{R}''$, $\varphi''(P_x)=\varphi''(P'')$ für $x\,\varepsilon\,P'$ und $\varphi''(P_x)=0$ für $x\,\varepsilon\,E'-P'$. Die Funktion $\varphi''(P_x)$ ist also φ'-messbar und es ist:

$$(E')\int\varphi''(P_x)d\varphi'=\varphi'(P')\varphi''(P'')=\varphi(P).$$

XXXV. - *Ist $M\,\varepsilon\,\mathfrak{R}$, so ist $M_x\,\varepsilon\,\mathfrak{R}''$, $\varphi''(M_x)$ ist φ'-messbar und $\varphi(M)=$ $=(E')\int\varphi''(M_x)d\varphi'$.*

In der Tat, M ist darstellbar in der Form $M=P_1+\,....\,+P_n$, wo die P_i dis-

([11]) Vgl. z. B. Festschrift der 57. Vers. Deutscher Philologen u. Schulmänner, Salzburg, 1929, S. 193 ff.

junkte Mengen aus $\mathfrak{P}$ bedeuten. Dann ist $M_x = P_{1x} + \dots + P_{nx}$, wo die P_{ix} disjunkte Mengen aus $\mathfrak{R}''$ sind; mithin ist $M_x \varepsilon \mathfrak{R}''$, $\varphi''(M_x) = \varphi''(P_{1x}) + \dots + \varphi''(P_{nx})$; da $\varphi''(P_{ix})$ nach XXXIV φ'-messbar, so ist auch $\varphi''(M_x)$ φ'-messbar und:

$$(E')\int \varphi''(M_x)d\varphi' = (E')\int \varphi''(P_{1x})d\varphi' + \dots + (E')\int \varphi''(P_{nx})d\varphi' = \\ = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_n) = \varphi(M).$$

XXXVI. - *Ist* $B \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$, *so ist* $B_x \varepsilon \mathfrak{R}''_\sigma$, $\varphi''(B_x)$ *ist* φ'*-messbar und* $\varphi(B) = (E')\int \varphi''(B_x)d\varphi'$.

In der Tat, B ist darstellbar in der Form $B = \underset{n}{S} B_n$, wo $B_n \varepsilon \mathfrak{R}$ und ohneweiters $B_n \subseteqq B_{n+1}$ angenommen werden kann; da $\mathfrak{R} \subseteqq \overline{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{R}_\sigma \subseteqq \overline{\mathfrak{R}}$, ist $B_n \varepsilon \overline{\mathfrak{R}}$, $B \varepsilon \overline{\mathfrak{R}}$, und da φ total-additiv in $\overline{\mathfrak{R}}$, ist nach II: $\varphi(B) = \lim\limits_n \varphi(B_n)$. Ferner ist $B_x = \underset{n}{S} B_{nx}$, $B_{nx} \subseteqq B_{n+1x}$; da nach XXXV $B_{nx} \varepsilon \mathfrak{R}''$, ist $B_x \varepsilon \mathfrak{R}''_\sigma$, also, da $\overline{\mathfrak{R}}''$ ein σ-Körper über $\mathfrak{R}''$, auch $B_x \varepsilon \overline{\mathfrak{R}}''$, und da φ'' total-additiv in $\overline{\mathfrak{R}}''$, ist nach II: $\varphi''(B_x) = \lim\limits_n \varphi''(B_{nx})$. Da nach XXV $\varphi''(B_{nx})$ φ'-messbar, ist auch $\varphi''(B_x)$ φ'-messbar, und da wegen $B_{nx} \subseteqq B_{n+1x}$ auch $\varphi''(B_{nx}) \leqq \varphi''(B_{n+1x})$ ist [12]:

$$(E')\int \varphi''(B_x)d\varphi' = \lim_n\, (E')\int \varphi''(B_{nx})d\varphi' = \lim_n \varphi(B_n) = \varphi(B).$$

XXXVII. - *Ist* $A \varepsilon \mathfrak{R}_{\sigma\delta}$, *so ist* $A_x \varepsilon \mathfrak{R}''_{\sigma\delta}$, $\varphi''(A_x)$ *ist* φ'*-messbar und* $\varphi(A) = (E')\int \varphi''(A_x)d\varphi'$.

In der Tat, es ist $A = \underset{n}{D} B_n$, wo $B_n \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$; also ist $A_x = \underset{n}{D} B_{nx}$, wo nach XXXVI $B_{nx} \varepsilon \mathfrak{R}''_\sigma$; also ist $A_x \varepsilon \mathfrak{R}''_{\sigma\delta}$. Wir setzen sodann $E' \times E_\nu'' = E_\nu$; dann ist $E_\nu \varepsilon \mathfrak{R}$, $E_\nu \subseteqq E_{\nu+1}$ und $E' \times E'' = \underset{\nu}{S} E_\nu$. Setzen wir $A_\nu = E_\nu A$, so ist also $A_\nu \varepsilon \mathfrak{R}_{\sigma\delta}$, $A_\nu \subseteqq A_{\nu+1}$, $A = \underset{\nu}{S} A_\nu$ und nach II:

$$\varphi(A) = \lim_\nu \varphi(A_\nu). \tag{31}$$

Wegen $A_\nu \varepsilon \mathfrak{R}_{\sigma\delta}$ ist $A_\nu = \underset{n}{D} A_{\nu n}$, wo $A_{\nu n} \varepsilon \mathfrak{R}_\sigma$ und ohneweiters $A_{\nu n+1} \subseteqq A_{\nu n}$ angenommen werden kann; indem man noch $A_{\nu n}$ ersetzt durch $E_\nu A_{\nu n}$, kann auch $A_{\nu n} \subseteqq E_\nu$ angenommen werden; dann ist $\varphi(A_{\nu n})$ endlich und somit nach III:

$$\varphi(A_\nu) = \lim_n \varphi(A_{\nu n}). \tag{32}$$

Ferner ist $A_{\nu x} = \underset{n}{D} A_{\nu nx}$, $A_{\nu n+1x} \subseteqq A_{\nu nx}$; da nach XXXVI $A_{\nu nx} \varepsilon \mathfrak{R}''_\sigma$, ist $A_{\nu x} \varepsilon \mathfrak{R}''_{\sigma\delta}$, also $A_{\nu x} \varepsilon \overline{\mathfrak{R}}''$; wegen $A_{\nu n} \subseteqq E_\nu$ ist $A_{\nu nx} \subseteqq E_\nu''$, also $\varphi''(A_{\nu nx})$ endlich, und da φ''

([12]) A. a. O. S. 198.

total-additiv in $\mathfrak{M}''$, ist nach III $\varphi''(A_{\nu x}) = \lim\limits_{n} \varphi''(A_{\nu n x})$. Da nach XXXVI $\varphi''(A_{\nu n x})$ φ'-messbar, ist also auch $\varphi''(A_{\nu x})$ φ'-messbar; ferner ist wegen $A_{\nu n+1 x} \subseteqq A_{\nu n x}$ auch $\varphi''(A_{\nu n+1 x}) \leqq \varphi''(A_{\nu n x})$ und weil $\varphi''(A_{\nu n x}) \leqq \varphi''(E_\nu'')$, ist $(E')\int \varphi''(A_{\nu n x})\, d\varphi'$ endlich; also ist [13] bei Beachtung von XXXVI:

$$(E')\int \varphi''(A_{\nu x})\, d\varphi' = \lim_{n}\, (E')\int \varphi''(A_{\nu n x})\, d\varphi' = \lim_{n} \varphi(A_{\nu n}),$$

also nach (32):

$$\varphi(A_\nu) = (E')\int \varphi''(A_{\nu x})\, d\varphi'. \tag{33}$$

Da $A = \underset{\nu}{S} A_\nu$, $A_\nu \subseteqq A_{\nu+1}$, ist $A_x = \underset{\nu}{S} A_{\nu x}$, $A_{\nu x} \subseteqq A_{\nu+1 x}$. Da $A_{\nu x} \varepsilon \mathfrak{M}''$ und $\mathfrak{M}''$ ein σ-Körper, ist auch $A_x \varepsilon \mathfrak{M}''$ und nach II: $\varphi''(A_x) = \lim\limits_{\nu} \varphi''(A_{\nu x})$. Also ist auch $\varphi''(A_x)$ φ'-messbar und wegen (33):

$$(E')\int \varphi''(A_x)\, d\varphi' = \lim_{\nu}\, (E')\int \varphi''(A_{\nu x})\, d\varphi' = \lim_{\nu} \varphi(A_\nu),$$

also nach (31): $\varphi(A) = (E')\int \varphi''(A_x)\, d\varphi'$.

Nennen wir wieder jede Menge $N' \subseteqq E'$ mit $\varphi'(N') = 0$ eine Nullmenge für φ', so gilt:

XXXVIII. - *Ist $N \varepsilon \mathfrak{M}$ und $\varphi(N) = 0$, so ist $\varphi''(N_x) = 0$ für alle $x \varepsilon E'$, abgesehen von einer Nullmenge für φ', mithin $N_x \varepsilon \mathfrak{M}''$ für alle $x \varepsilon E'$, abgesehen von einer Nullmenge für φ'.*

Nach XXI gibt es eine Menge $A \varepsilon \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$, so dass $A \supseteqq N$ und $\varphi(A - N) = 0$; dann ist auch $\varphi(A) = 0$, nach XXXVII ist also $(E')\int \varphi''(A_x)\, d\varphi' = 0$, also ist $\varphi''(A_x) = 0$, abgesehen von einer Nullmenge für φ'. Wegen $N \subseteqq A$ ist auch $N_x \subseteqq A_x$, also ist nach Eigenschaft 2.) der Maßfunktionen auch $\varphi''(N_x) = 0$, abgesehen von einer Nullmenge für φ'.

XXXIX. - *Ist M eine beliebige Menge aus $\mathfrak{M}$, so gilt für alle $x \varepsilon E'$, abgesehen von einer Nullmenge für φ': $M_x \varepsilon \mathfrak{M}''$, es ist $\varphi''(M_x)$ φ'-messbar und $\varphi(M) = (E')\int \varphi''(M_x)\, d\varphi'$.*

Nach XXI gibt es eine Menge $A \varepsilon \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$, so dass $A \supseteqq M$ und $\varphi(A - M) = 0$, also $\varphi(A) = \varphi(M)$. Setzen wir $A - M = N$, so ist $A = M + N$, also $A_x = M_x + N_x$; hierin ist nach XXXVII $A_x \varepsilon \mathfrak{M}''$ und nach XXXVIII $N_x \varepsilon \mathfrak{M}''$ für alle $x \varepsilon E'$ abgesehen von einer Nullmenge für φ', also auch $M_x \varepsilon \mathfrak{M}''$ für alle $x \varepsilon E'$ abgesehen von einer Nullmenge für φ'; und da nach XXXVIII $\varphi''(N_x) = 0$, abgesehen von einer Nullmenge für φ', ist $\varphi''(A_x) = \varphi''(M_x)$, abgesehen von einer Nullmenge

---

[13] Vgl. Fußnote [12].

für φ'. Da nach XXXVII $\varphi''(A_x)$ φ'-messbar, ist auch $\varphi''(M_x)$ φ'-messbar, und es ist zufolge XXXVII:

$$(E')\int \varphi''(M_x)d\varphi' = (E')\int \varphi''(A_x)d\varphi' = \varphi(A);$$

da aber $\varphi(A)=\varphi(M)$ war, ist $\varphi(M)=(E')\int \varphi''(M_x)d\varphi'$, wie behauptet.

§ 6. - Das Reduktionstheorem.

Seien nun drei Räume gegeben: E_1, E_2, E_3; sein $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ Körper aus Mengen des Raumes E_1, bzw. E_2, bzw. E_3, und seien φ_1, φ_2, φ_3 in $\mathfrak{R}_1$, bzw. $\mathfrak{R}_2$, bzw. $\mathfrak{R}_3$ total-additive Mengenfunktionen.

Wir bezeichnen mit $E_1 \times E_2 \times E_3$ die Menge aller Tripel (x, y, z), für die $x \varepsilon E_1$, $y \varepsilon E_2$, $z \varepsilon E_3$, und können schreiben: $E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3 = E_1 \times \times (E_2 \times E_3)$. Ist $M_1 \subseteqq E_1$, $M_2 \subseteqq E_2$, $M_3 \subseteqq E_3$, so bezeichnen wir mit $M_1 \times M_2 \times M_3$ die Menge aller (x, y, z), für die $x \varepsilon M_1$, $y \varepsilon M_2$, $z \varepsilon M_3$, und können schreiben: $M_1 \times M_2 \times M_3 = (M_1 \times M_2) \times M_3 = M_1 \times (M_2 \times M_3)$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}$ das System aller Mengen $M \subseteqq E_1 \times E_2 \times E_3$, die die Gestalt haben $M_1 \times M_2 \times M_3$, wo $M_1 \varepsilon \mathfrak{R}_1$, $M_2 \varepsilon \mathfrak{R}_2$, $M_3 \varepsilon \mathfrak{R}_3$; mit $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$ bezeichnen wir das System aller Mengen, die Summe endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{P}$ sind; offenbar ist $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 = (\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2) \times \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_1 \times (\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3)$; da $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$ Körper, folgt daraus ([14]), dass auch $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$ ein Körper, und dass jede Menge aus $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$ Summe endlich vieler *disjunkter* Mengen aus $\mathfrak{P}$ ist.

Da $\varphi_1 \times \varphi_2$ nach XXXI total-additiv in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ und $\varphi_2 \times \varphi_3$ total-additiv in $\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$, ist sowohl $(\varphi_1 \times \varphi_2) \times \varphi_3$ als auch $\varphi_1 \times (\varphi_2 \times \varphi_3)$ nach XXXI total-additiv in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$.

XL. - *In* $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$ *gilt*: $(\varphi_1 \times \varphi_2) \times \varphi_3 = \varphi_1 \times (\varphi_2 \times \varphi_3)$.

Wir setzen $\varphi_1 \times \varphi_2 = \varphi'$, $\varphi_2 \times \varphi_3 = \varphi''$, $\varphi' \times \varphi_3 = \psi'$, $\varphi_1 \times \varphi'' = \psi''$. Ist $M \varepsilon \mathfrak{P}$, etwa $M = M_1 \times M_2 \times M_3$ mit $M_1 \varepsilon \mathfrak{R}_1$, $M_2 \varepsilon \mathfrak{R}_2$, $M_3 \varepsilon \mathfrak{R}_3$, so ist nach (15):

$$\varphi'(M_1 \times M_2) = \varphi_1(M_1)\varphi_2(M_2), \quad \varphi''(M_2 \times M_3) = \varphi_2(M_2)\varphi_3(M_3),$$

also:

$$\psi'(M_1 \times M_2 \times M_3) = \varphi'(M_1 \times M_2)\varphi_3(M_3) = \varphi_1(M_1)\varphi_2(M_2)\varphi_3(M_3)$$

und $\psi''(M_1 \times M_2 \times M_3) = \varphi_1(M_1)\varphi''(M_2 \times M_3) = \varphi_1(M_1)\varphi_2(M_2)\varphi_3(M_3)$; wir haben also $\psi'(M) = \psi''(M)$ für alle $M \varepsilon \mathfrak{P}$. - Sei nun $X \varepsilon \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3$; dann ist $X = X_1 + \dots + X_n$, wo die X_i disjunkte Mengen aus $\mathfrak{P}$, und nach (21) ist:

$$\psi'(X) = \psi'(X_1) + \dots + \psi'(X_n), \qquad \psi''(X) = \psi''(X_1) + \dots + \psi''(X_n);$$

da, wie eben gezeigt: $\psi'(X_i) = \psi''(X_i)$, ist auch $\psi'(X) = \psi''(X)$, w. z. b. w.

([14]) Vgl. Fußnote ([9]).

Wir setzen nun $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}$ und können zufolge XL für alle Mengen aus $\mathfrak{M}$ statt $(\varphi_1 \times \varphi_2) \times \varphi_3$ und statt $\varphi_1 \times (\varphi_2 \times \varphi_3)$ einfach $\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3$ schreiben; $\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3$ ist total-additiv in $\mathfrak{M}$. Die zu $\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3$ gehörige Maßfunktion φ ist dann gleichzeitig die zu $(\varphi_1 \times \varphi_2) \times \varphi_3$ und die zu $\varphi_1 \times (\varphi_2 \times \varphi_3)$ gehörige Maßfunktion; sie ist total-additiv in der für φ vollständigen Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$. Wir haben also nach XXXII:

XLI. - *Sowohl* $(\varphi_1 \times \varphi_2) \times \varphi_3$ *als* $\varphi_1 \times (\varphi_2 \times \varphi_3)$ *sind in* $\overline{\mathfrak{M}}$ *definierte, total-additive Mengenfunktionen, und in* $\overline{\mathfrak{M}}$ *gilt*: $(\varphi_1 \times \varphi_2) \times \varphi_3 = \varphi_1 \times (\varphi_2 \times \varphi_3)$.

Wir können also auch für alle Mengen aus $\overline{\mathfrak{M}}$ statt $(\varphi_1 \times \varphi_2) \times \varphi_3$ und statt $\varphi_1 \times (\varphi_2 \times \varphi_3)$ einfach $\varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3$ schreiben.

Wir nehmen nun an, es sei $E_1 \varepsilon \mathfrak{M}_1$, $\varphi_1(E_1)$ endlich, $E_2 \varepsilon \mathfrak{M}_2$, $\varphi_2(E_2)$ endlich und $E_3 = \underset{\nu}{S} E_{3\nu}$, wo $E_{3\nu} \varepsilon \mathfrak{M}_3$ und $\varphi_3(E_{3\nu})$ endlich; dann ist, wenn wieder $\varphi_1 \times \varphi_2 = \varphi'$, $\varphi_2 \times \varphi_3 = \varphi''$ gesetzt wird: $E_1 \times E_2 \varepsilon \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ und $\varphi'(E_1 \times E_2) = \varphi_1(E_1)\varphi_2(E_2)$ endlich, und $E_2 \times E_3 = \underset{\nu}{S} E_2 \times E_{3\nu}$, wo $E_2 \times E_{3\nu} \varepsilon \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3$ und $\varphi''(E_2 \times E_{3\nu}) = \varphi_2(E_2)\varphi_3(E_{3\nu})$ endlich.

Sei nun M eine Menge aus $E_1 \times E_2 \times E_3$; ist $x \varepsilon E_1$, so bezeichnen wir mit M_x die Menge aller $(y, z) \varepsilon E_2 \times E_3$, für die $(x, y, z) \varepsilon M$; ist $(x, y) \varepsilon E_1 \times E_2$, so bezeichnen wir mit M_{xy} die Menge aller $z \varepsilon E_3$, für die $(x, y, z) \varepsilon M$.

Sei nun insbesondere $M \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}$. Setzen wir $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2 \times \varphi_3$, $\varphi' = \varphi_1 \times \varphi_2$, $\varphi'' = \varphi_2 \times \varphi_3$, so ist nach XXXIX wegen $\varphi = \varphi' \times \varphi_3$:

$$\varphi(M) = (E_1 \times E_2)\int \varphi_3(M_{xy})\,d\varphi', \tag{34}$$

und wegen $\varphi = \varphi_1 \times \varphi''$:

$$\varphi(M) = (E_1)\int \varphi''(M_x)\,d\varphi_1\,; \tag{35}$$

hierin ist nach XXXIX, wenn wir $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}''$ setzen: $M_x \varepsilon \overline{\mathfrak{M}}''$ für alle $x \varepsilon E_1$ abgesehen von einer Nullmenge für φ_1; also gilt nach XXXIX für alle $x \varepsilon E_1$, abgesehen von einer Nullmenge für φ_1:

$$\varphi''(M_x) = (E_2)\int \varphi_3(M_{xy})\,d\varphi_2\,;$$

durch Einsetzen in (35) erhalten wir also:

$$\varphi(M) = (E_1)\int \left((E_2)\int \varphi_3(M_{xy})\,d\varphi_2\right)d\varphi_1,$$

und durch Vergleich mit (34), indem wir für φ' wieder $\varphi_1 \times \varphi_2$ schreiben:

$$(E_1 \times E_2)\int \varphi_3(M_{xy})\,d(\varphi_1 \times \varphi_2) = (E_1)\int \left((E_2)\int \varphi_3(M_{xy})\,d\varphi_2\right)d\varphi_1. \tag{36}$$

Wir sehen also, *dass das assoziative Gesetz der Multiplikation der total-additiven Mengenfunktionen sich analytisch durch das Reduktionstheorem der Doppelintegrale ausdrückt.*

Will man dieses Reduktionstheorem aus dem assoziativen Gesetz der Multiplikation herleiten, so hat man noch zu zeigen, dass für $\varphi_3(M_{xy})$ in (36) *jede beliebige* nicht negative $(\varphi_1\times\varphi_2)$-messbare Funktion $f(x, y)$ auftraten kann (der Übergang zu Funktionen $f(x, y)$ beliebigen Zeichens erfolgt dann leicht in bekannter Weise).

Wir wählen zu dem Zwecke für E_3 den R_1 (die Menge aller reellen Zahlen), für $\mathfrak{R}_3$ das System der im Sinne von Lebesgue messbaren Mengen des R_1, für φ_3 das (eindimensionale) Lebesgue Maß μ_1; da dann $\mathfrak{R}_3$ ein für μ_1 vollständiger σ-Körper, ist $\overline{\mathfrak{R}}_3=\mathfrak{R}_3$. Ist dann M die Menge aller (x, y, z) mit $x\,\varepsilon\,E_1$, $y\,\varepsilon\,E_2$, $z\,\varepsilon\,R_1$ für die $0\leqq z<f(x, y)$, so ist $\varphi_3(M_{xy})=f(x, y)$. Es ist also nur zu zeigen: *Ist $f(x, y)$ $(\varphi_1\times\varphi_2)$-messbar, so ist $M\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{R}}$.*

Wir setzen $\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2=\mathfrak{R}'$. Da $f(x, y)$ $(\varphi_1\times\varphi_2)$-messbar, gehört für jedes z die Menge $[f>z]$ aller $(x, y)\,\varepsilon\,E_1\times E_2$, in denen $f(x, y)>z$ ist, zu $\overline{\mathfrak{R}}'$. Seien $r_1, r_2,\ldots, r_n,\ldots$ die sämmtlichen positiven rationalen Zahlen und sei $M_n=[f>r_n]$; dann ist $M_n\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{R}}'$; bezeichnen wir noch mit I_n das durch $0\leqq z\leqq r_n$ gegebene Intervall des R_1, so ist offenbar $M=\mathop{S}\limits_{n} M_n\times I_n$. Da hierin $M_n\times I_n\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{R}}'\times\overline{\mathfrak{R}}_3$, und nach XXXIII $\overline{\mathfrak{R}}'\times\overline{\mathfrak{R}}_3\subseteqq\overline{\mathfrak{R}}$, ist $M_n\times I_n\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{R}}$, und da $\overline{\mathfrak{R}}$ ein σ-Körper, ist auch $M\,\varepsilon\,\overline{\mathfrak{R}}$, w. z. b. w.

So erweist sich also das Reduktionstheorem der Lebesgue-Stieltjesschen Doppelintegrale als identisch mit dem assoziativen Gesetz der Multiplikation der total-additiven Mengenfunktionen.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 30 settembre 1933 - XI.