ALESSANDRO TERRACINI

Su alcuni elementi lineari proiettivi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 4 (1933), p. 401-428
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_4_401_0>

SU ALCUNI ELEMENTI LINEARI PROIETTIVI

di ALESSANDRO TERRACINI (Torino).

È stato osservato più volte, e da più parti, che nella geometria proiettiva differenziale alcuni concetti hanno di geometrico talora soltanto il nome, talora tutt'al più un'interpretazione più o meno artificiosa. Così in una mia Nota del 1926, *Sull'elemento lineare proiettivo di una superficie* (¹) osservavo che di questo elemento « introdotto da FUBINI, soltanto più tardi furono date varie interpretazioni geometriche, quali più quali meno semplici; ma, a parer mio, nessuna di esse raggiunge un grado di semplicità tale che emerga, anche dal lato geometrico, il carattere per così dire di necessità che presenta la considerazione di quell'elemento lineare: si pensi per esempio al ds^2 della geometria metrica ». Così ancora nella bella appendice da lui scritta per la *Geometria proiettiva differenziale* di FUBINI e ČECH il BOMPIANI osserva molto opportunamente che, nella geometria proiettiva differenziale, le forme differenziali relative ai vari enti geometrici hanno un'importanza fondamentale, al pari di quanto avviene nella geometria metrica; ma che fra le due geometrie intercede una profonda differenza, perchè nella geometria metrica « le forme differenziali che stanno a base della trattazione hanno un significato geometrico immediato (che si riconduce in ogni caso all'invariante elementare *distanza di due punti* o *angolo di due rette*): ed è proprio questo significato che ne suggerisce e ne giustifica l'uso. Non è così nella geometria proiettiva ». Di questa circostanza il BOMPIANI trova giustamente l'origine nel fatto che nella geometria metrica una coppia di punti possiede già un invariante, mentre il più semplice invariante della geometria proiettiva, il birapporto, acquista un senso solo per una quaterna di elementi di una forma di prima specie. A questa difficoltà il BOMPIANI si è proposto di rimediare ricorrendo in modo sistematico a *invarianti proiettivi di contatto* fra curve o superficie.

L'idea a cui si è ispirato il BOMPIANI gli ha certamente consentito di cercare una soluzione sistematica. Ritengo però che, per quanto buona essa sia, presenti l'inconveniente che la nozione geometrica degli invarianti di contatto che sta a

(¹) Rend. Lincei, serie 6ª, t. IV, 1926.

base delle interpretazioni del BOMPIANI, per soddisfare completamente il nostro senso geometrico, deve nuovamente a sua volta essere interpretata geometricamente; e allora il risultato complessivo è meno semplice dei risultati parziali che lo costituiscono.

Permane quindi a mio parere l'opportunità di interpretazioni dirette. Vorrei però osservare incidentalmente che lo stesso termine « interpretazione » si presta ad un equivoco, perchè mette troppo esplicitamente in evidenza che il significato geometrico cercato *segue* una preesistente definizione algoritmica del concetto geometrico che volta per volta si esamina. Ora l'ideale verso il quale si deve tendere — si intende per quelle nozioni che ricevono una sistemazione geometrica *successivamente* alla loro introduzione per via algoritmica — è quello di trovare interpretazioni geometriche tanto semplici, che le nozioni interpretate si presentino con un carattere geometrico di *necessità*; cosicchè diventi possibile in un secondo tempo di ricostruire la teoria con un procedimento geometricamente più soddisfacente, in cui ogni nozione geometrica venga sin da principio definita geometricamente e con la massima semplicità. Si intende che questa valutazione di semplicità ha carattere soggettivo; cosicchè lo scopo si può raggiungere anche in modi diversi.

Nell'ordine di idee qui accennate ho cercato in passato di portare qualche contributo ([2]). Per quanto riguarda le forme differenziali legate a determinate varietà, e più particolarmente i cosidetti elementi lineari proiettivi, un'idea molto semplice da seguire è questa: ognuna di tali forme dipende dall'intorno I, di un certo ordine, di una posizione P dell'ente generatore della varietà, e ulteriormente da un ente P^* di questa *infinitamente vicino* a P. Generalmente l'intorno I dell'ente P che occorre considerare perchè esso dia luogo insieme con P^* a un invariante proiettivo, è di ordine assai elevato, tanto elevato da allontanarsi già notevolmente dalla nostra intuizione geometrica. L'idea a cui accennavo è quella di ripartire, per così dire, nel modo più equo gli ordini degli intorni fra gli enti P e P^*: facendo così, si ottengono invarianti proiettivi relativi a coppie di elementi di ordine più basso, e quindi più immediatamente suscettibili di una riduzione alla nozione invariante fondamentale della geometria proiettiva, cioè a quella di birapporto. Appunto in questo concetto rientra la già citata interpretazione dell'elemento lineare proiettivo di una superficie dello spazio ordinario: due elementi del secondo ordine di una superficie, uscenti dai due suoi punti P, P^* hanno un solo invariante proiettivo, e come tale si può assumere il birapporto delle loro tangenti asintotiche: e questo birapporto, per P^* tendente a P, conduce all'elemento lineare proiettivo. Un'osservazione concettualmente analoga vale per l'interpretazione dell'arco proiettivo di una linea piana.

([2]) Cfr. per esempio la mia Nota citata nella nota precedente; e *La lunghezza proiettiva di un arco di curva piana*. Period. di Matematiche, serie IV, vol. XIII, 1933.

Ma l'idea così esposta — per quanto ovvia essa possa apparire — non solo può condurre a ritrovare in modo perspicuo nozioni già note della geometria proiettiva differenziale, bensì anche a considerarne e nel modo più naturale, delle nuove. Appunto in questo ordine di idee è concepito il presente lavoro. Esso consta di due parti. Nella prima (n.i 1-4) applico il concetto ora indicato a definire un *elemento lineare proiettivo* delle congruenze di rette (dello spazio ordinario). L'espressione alla quale ci condurranno le nostre considerazioni *non* coincide con quella (ottenuta con metodi analitici), che FUBINI e ČECH ([3]) indicano come l'analogo, nella teoria delle congruenze, dell'elemento lineare proiettivo di una superficie. Ma l'opportunità di considerare l'elemento lineare proiettivo definito in questo lavoro, anzichè quello di FUBINI e ČECH non è fondata soltanto sul significato geometrico immediato che gli compete; essa è confermata dal fatto che — come risulterà — la condizione *necessaria e sufficiente* per l'applicabilità proiettiva (del secondo ordine) di due congruenze consiste nella circostanza che esse abbiano in comune il *nostro* elemento lineare proiettivo, mentre lo stesso non vale per l'espressione considerata da FUBINI e ČECH ([4]). Nella seconda parte del lavoro (n.i 5-15) applico il medesimo concetto a una figura complessiva (figura **M**) costituita — ancora nello spazio ordinario — da una superficie (x) insieme con una congruenza rettilinea Γ, i cui raggi escano dai singoli punti x della superficie: giungeremo così a associare a ogni figura **M** una forma differenziale quadratica Θ, che chiamiamo il suo elemento lineare proiettivo. Considerazioni non molto diverse guidano anche a considerare una seconda forma differenziale quadratica H. Queste forme, che si annullano la prima lungo le asintotiche della superficie (x), e la seconda lungo le sviluppabili della congruenza Γ, dànno dunque a priori una normalizzazione dei primi membri delle equazioni rispett. di quelle asintotiche e di queste sviluppabili, inerente alla figura complessiva **M**. La considerazione di tali forme dà luogo a varie questioni geometriche, in relazione con la possibilità che l'una o l'altra o entrambe si conservino nel passaggio da una figura **M** a un'altra. Alcune di tali questioni sono studiate in questo lavoro; e altre potranno essere opportunamente approfondite in seguito.

1. - Applichiamo anzitutto il principio esposto a una congruenza di rette, sia Γ, dello spazio ordinario S_3; possiamo rappresentare nel modo consueto le rette di questo nei punti di una quadrica V_4^2 di uno S_5; alle rette della congruenza corrispondono allora i punti di una superficie F esistente sulla quadrica considerata. Secondo le generalità che precedono, dovremo dunque incominciare col considerare una coppia di elementi della superficie F che possieda qualche inva-

([3]) FUBINI e ČECH: *Geometria proiettiva differenziale.* Bologna, Zanichelli, cfr. il § 102.

([4]) La quale conduce a una condizione *necessaria*, ma non ancora *sufficiente*.

riante proiettivo; dove naturalmente, dato che le nozioni che stiamo per svolgere devono interpretarsi nella geometria della retta dello spazio ordinario, è da intendere che gli invarianti in questione dovranno essere tali rispetto alle omografie dello S_5 che sono immagini di omografie dello S_3.

Consideriamo due elementi del prim' ordine della superficie. Ciascuno di questi dipende da 8 costanti, cosicchè la coppia dipende da 16 costanti: avuto riguardo alla dimensione 15 della totalità delle omografie dello spazio ordinario, si potrebbe presumere che tale coppia possieda *un* invariante proiettivo; in realtà tale figura possiede invece *due* (e non più) invarianti proiettivi (indipendenti). Invero fissare un elemento del prim' ordine della superficie F equivale a fissare un punto di questa e (in luogo del relativo piano tangente) la coppia di rette comuni al piano tangente e alla V_4^2; perciò nello S_3 un elemento del prim' ordine della congruenza Γ uscente da una retta g di questa è individuato dalla conoscenza della g, insieme coi suoi due fuochi e i relativi piani focali.

Ora, avendosi una figura complessiva formata da una prima retta g con due suoi punti F, $\overline{F}$ e due piani π, $\overline{\pi}$ per g (⁵), e da una seconda retta g^* insieme con due suoi punti F^*, $\overline{F}^*$ e due suoi piani π^*, $\overline{\pi}^*$ (tutti questi elementi avendo posizioni generiche), tale figura ammette come invarianti proiettivi il birapporto $(F, \overline{F}, \pi^*, \overline{\pi}^*)$ formato dai due punti F, $\overline{F}$ insieme con le tracce dei piani π^*, $\overline{\pi}^*$ sulla retta $F\overline{F}$; e l'analogo birapporto $(F^*, \overline{F}^*, \pi, \overline{\pi})$. Questi due birapporti costituiscono dunque due invarianti proiettivi della figura considerata e, come si vede facilmente, i soli (nel senso che tutti gli altri sono loro funzioni).

Perciò per giungere all'*elemento lineare proiettivo* di una congruenza Γ sarà da considerare *il birapporto formato, su una sua retta generica g, dai suoi due fuochi insieme con le intersezioni con g dei due piani focali uscenti da una generatrice g^* infinitamente vicina a g*, ove naturalmente si prendano fuochi e piani focali in un ordine determinato: assumiamo, in modo preciso, il birapporto $(F, \overline{F}, \overline{\pi}^*, \pi^*)$. Secondo quanto precede, vi sarebbe luogo a considerare un altro birapporto analogo, che risulta costituito in modo duale; ma, come osserveremo alla fine del n.° 3, esso non dà nulla di nuovo rispetto al precedente.

2. - Cercheremo ora l'espressione dell'elemento lineare così definito per una congruenza Γ, riferendoci per il momento a una sua forma particolare. Studiamo senz'altro il caso in cui i fuochi (reali) descrivono *superficie* focali (non degenerate in curve) *distinte* e non sviluppabili, siano rispettivamente Φ e $\overline{\Phi}$. Riferiamo allora la congruenza Γ alle sue sviluppabili $u=$cost., $v=$cost. e adottiamo coordinate proiettive omogenee x_1, x_2, x_3, x_4 di punto e $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ di piano; chiamiamo rispettivamente $x \equiv x(u, v)$ e $\overline{x} \equiv \overline{x}(u, v)$ i due fuochi F e $\overline{F}$ di un

---

(⁵) Intendiamo che sia π il piano focale relativo al fuoco F, e $\overline{\pi}$ quello relativo al fuoco $\overline{F}$.

raggio generico $g \equiv g(u, v)$ della congruenza, $\xi \equiv \xi(u, v)$ e $\bar{\xi} \equiv \bar{\xi}(u, v)$ i rispettivi piani focali. Poniamo infine $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$ ecc.

Le quattro coordinate del punto x sono soluzioni di due equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine del tipo

$$x_{uv} + a(u, v)x_u + b(u, v)x_v + c(u, v)x = 0 \tag{1}$$

$$x_{vv} = T(u, v)x_{uu} + l(u, v)x_u + m(u, v)x_v + nx. \tag{2}$$

Il punto $\bar{x}$ che descrive la seconda falda focale della congruenza è dato da

$$\bar{x} = x_v + av \tag{3}$$

e le due equazioni analoghe alle (1), (2) per la seconda falda sono rispettivamente le

$$\bar{x}_{uv} + \left(a - \frac{h_v}{h}\right)\bar{x}_u + b\bar{x}_v + \left(c - a_u + b_v - b\,\frac{h_v}{h}\right)\bar{x} = 0 \tag{4}$$

$$\bar{x}_{uu} = S(u, v)\,\bar{x}_{vv} + \dots. \tag{5}$$

dove, nella (5) non scriviamo esplicitamente i termini in $\bar{x}$, $\bar{x}_u$, $\bar{x}_v$; e inoltre

$$h = a_u + ab - c$$

è il consueto invariante della (1), non identicamente nullo nella nostra ipotesi che anche la seconda falda della congruenza non sia degenere. Finalmente per S si trova facilmente il valore

$$S = \frac{hT}{(h - 2a_u)T^2 + l_v T - l T_v}. \tag{6}$$

Ciò premesso, se si cerca il punto $x + \varepsilon\bar{x}$ dove il raggio $g \equiv x\bar{x}$ della congruenza è incontrato dal piano focale $\bar{\pi}^* \equiv \xi^* \equiv \xi(u + du, v + dv)$ tangente alla superficie focale (x) nel punto $x(u + du, v + dv)$ si ha facilmente per il termine principale di ε il valore

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,\frac{du^2 + Tdv^2}{Tdv}.$$

Analogamente a partire dalla

$$hx = \bar{x}_u + b\bar{x}$$

segue che il piano $\pi^* \equiv \bar{\xi}^*(u + du, v + dv)$ incontra la stessa retta $g \equiv x\bar{x}$ nel punto

$$\bar{x} + \frac{1}{2}\,\frac{Sdu^2 + dv^2}{Sdu}\,hx.$$

Quindi il birapporto $(F, \bar{F}, \bar{\pi}^*, \pi^*)$ di cui alla fine del n.° 1 ha come termine principale

$$\Theta = \frac{h(du^2 + Tdv^2)(Sdu^2 + dv^2)}{4STdudv}. \tag{7}$$

Adottiamo dunque questa espressione per l'elemento lineare proiettivo della congruenza considerata.

Osserviamo che $\Theta = 0$ è l'equazione complessiva delle asintotiche delle due falde focali della congruenza Γ.

3. - Dopo avere così calcolato l'elemento lineare proiettivo rispetto ai particolari parametri adottati, trasformiamo l'espressione ottenuta in relazione all'adozione di parametri qualunque.

Introduciamo le sei coordinate $p^{(ik)}$ della retta $g \equiv p$, come minori della matrice formata con le coordinate dei punti x e x_v. Poniamo con FUBINI e ČECH (op. cit. cap. XI), per 6 quantità $q^{(12)}$, $q^{(13)}$, $q^{(14)}$, $q^{(23)}$, $q^{(42)}$, $q^{(34)}$

$$Sq^2 = 2(q^{(12)}q^{(34)} + q^{(13)}q^{(42)} + q^{(14)}q^{(23)})$$

e per due serie $q^{(12)},\ldots,\ q_0^{(12)},\ldots$ di tali quantità

$$S(q,\, q_0) = q^{(12)}q_0^{(34)} + q^{(34)}q_0^{(12)} + \ldots$$

Introduciamo per la congruenza Γ la forma quadratica

$$\varphi = Sdp^2 = a_{11}du_1^2 + 2a_{12}du_1du_2 + a_{22}du_2^2,$$

dove ora i parametri a cui è riferita la congruenza sono u_1, u_2 (il discriminante A di φ è per noi certo non identicamente nullo), forma rispetto alla quale si deriverà covariantemente. Posto ancora, con FUBINI e ČECH,

$$\delta u_1 = -a_{21}du_1 - a_{22}du_2, \qquad \delta u_2 = a_{11}du_1 + a_{12}du_2,$$

l'equazione complessiva delle asintotiche sulle due falde focali è

$$\Omega \equiv \sum_{ijrs} h_{ijrs}du_idu_j\delta u_r\delta u_s = 0$$

dove

$$h_{ijrs} = -Sp_{rs}p_{ij}.$$

Per i particolari parametri u, v adottati nel n.° 2 si ha subito

$$\varphi = 2T(x,\, x_u,\, x_v,\, x_{uu})dudv$$

dove l'espressione fra parentesi sta ad indicare il determinante formato con le coordinate dei quattro punti x, x_u, x_v, x_{uu} ([6]). Per calcolare nella stessa ipotesi Ω, in base al significato geometrico testè ricordato per $\Omega = 0$, significato che coincide con quello rilevato alla fine del n.° 2 per $\Theta = 0$, possiamo servirci del fatto che la forma differenziale biquadratica Ω si deve ridurre a

$$G(u,\, v)(du^2 + Tdv^2)(Sdu^2 + dv^2),$$

dove $G(u, v)$ è una funzione da determinarsi; questa determinazione si compie calcolando per esempio h_{1111}, che risulta facilmente dato da

$$h_{1111} = -2h(x,\, x_u,\, x_v,\, x_{uu})$$

([6]) Una notazione analoga usiamo anche in seguito.

da cui

$$G(u, v)=\frac{2hT^2(x, x_u, x_v, x_{vu})^3}{S}$$

e quindi

$$\Theta=\frac{1}{8}\frac{\Omega}{(x, x_u, x_v, x_{uu})^3T^3\,dudv}.$$

Pertanto con la particolare scelta di parametri adottata nel n.° 2

$$\Theta=-\frac{\sum\limits_{ijrs}h_{ijrs}du_i du_j \delta u_r \delta u_s}{4A\varphi}. \tag{8}$$

Ora il secondo membro di (8) non varia

1) sostituendo ai parametri u_1, u_2 nuovi parametri $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$. Invero, se φ si trasforma in $\bar{\varphi}$, si ha allora

$$\bar{A}=J^2A, \quad \text{con} \quad J=\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)};$$

$$\sum_{rs}\bar{p}_{rs}d\bar{u}_r\delta\bar{u}_s=J\sum_{rs}p_{rs}du_r\delta u_s; \quad \text{cioè} \quad \bar{\Omega}=J^2\Omega;$$

2) cambiando il fattore di proporzionalità $\varrho=\varrho(u, v)$ delle coordinate omogenee della retta p. Infatti, posto $p=\varrho\bar{p}$ si ha (FUBINI e ČECH, loc. cit. p. 579)

$$\varphi=\varrho^2\bar{\varphi}, \qquad A=\varrho^4\bar{A};$$

$$p_{rs}=\varrho\bar{p}_{rs}+a_{rs}\sum_{i\sigma}A_{i\sigma}\varrho_\sigma\bar{p}_i+\frac{a_{rs}\bar{p}}{\varrho}\sum_{i\sigma}A_{i\sigma}\varrho_i\varrho_\sigma+\left(\bar{\varrho}_{rs}-\frac{\varrho_r\varrho_s}{\varrho}\right)\bar{p}$$

dove le $\bar{\varrho}_{rs}$ indicano derivate covarianti di ϱ rispetto a $\bar{\varphi}$. Di qui si ha

$$\sum_{rs}p_{rs}du_r\delta u_s=\varrho^3\sum_{rs}\bar{p}_{rs}du_r\overline{\delta u_s}+\varrho^2\bar{p}\sum_{rs}\left(\bar{p}_{rs}-2\frac{\varrho_r\varrho_s}{\varrho}\right).$$

e poi

$$\Omega=\varrho^6\bar{\Omega};$$

3) cambiando il sistema di coordinate proiettive di riferimento (perchè questa invarianza sussiste ove si adottino i particolari parametri u, v del n.° 2).

Pertanto la (8) ha validità generale.

Adottiamo dunque come elemento lineare proiettivo di una congruenza il secondo membro della (8).

OSSERVAZIONE. - Il secondo membro della (8) ha evidentemente carattere autoduale. Perciò l'ulteriore birapporto che si dovrebbe considerare secondo la fine del n.° 1, essendo duale di Θ, coincide addirittura con Θ.

4. - Studiamo ora il comportamento nelle deformazioni proiettive dell'elemento lineare proiettivo di una congruenza così definito.

Come abbiamo già ricordato, FUBINI e ČECH (loc. cit. p. 579) hanno considerato come ente analogo, nella teoria delle congruenze, all'elemento lineare proiettivo delle superficie, un'espressione diversa dalla nostra Θ. Essi hanno sostituito al sistema delle h_{ijrs}, che non è simmetrico, un altro sistema k_{ijrs} simmetrico, definito mediante

$$\Phi = -S\sum_{rs}(p_{rs}du_r du_s)^2 = \sum_{ijrs} k_{ijrs}du_i du_j du_r du_s.$$

Dopo di che, scomposto Φ nella somma

$$\Phi_4 + \varphi\Phi_2 + \varphi^2\Phi_0,$$

ove le Φ_r $(r=0, 2, 4)$ sono forme di grado r, in modo che Φ_4 e Φ_2 siano apolari alla φ, hanno fermato l'attenzione sull'espressione invariante e intrinseca $\Phi_4:\varphi$. Come però essi stessi osservano, la condizione che per due congruenze rettilinee il rapporto $\Phi_4:\varphi$ sia il medesimo, è necessaria, ma non sufficiente per la loro applicabilità proiettiva. Invece *adottando il nostro elemento lineare proiettivo Θ, la sua conservazione è non solo necessaria, ma anche sufficiente per l'applicabilità proiettiva* (del secondo ordine) *di due congruenze*, come ora dimostreremo.

Ricordiamo ancora a tale scopo che nello studio dell'applicabilità proiettiva di due congruenze Γ, Γ_1, FUBINI e ČECH, abbandonata la considerazione del rapporto $\Phi_4:\varphi$, hanno affrontato direttamente la ricerca di condizioni necessarie e sufficienti, trovando come tali le seguenti (p. 597 dell'op. cit.): che le asintotiche di una prima falda focale F della Γ corrispondano alle asintotiche di una falda F_1 della Γ_1; e che su tali falde il sistema coniugato delle sviluppabili abbia per esempio lo stesso primo invariante per la corrispondente equazione di LAPLACE relativa alle coordinate di punto, e lo stesso secondo invariante per l'equazione di LAPLACE relativa alle coordinate di piano tangente.

Ciò posto, siano le due congruenze Γ e Γ_1 proiettivamente applicabili. Riferiamole alle sviluppabili, e consideriamo le falde focali F e F_1, di cui ora si è detto, su cui si corrispondono le asintotiche; indichiamo con S_1, T_1, ecc. le quantità analoghe alle S, T ecc. calcolate per la superficie F_1. La corrispondenza delle asintotiche tra F e F_1 dà $T=T_1$; analogamente la considerazione della ulteriore coppia di falde focali dà $S=S_1$. Finalmente, siccome secondo quanto si è testè riferito è $h=h_1$, ne segue che gli elementi lineari proiettivi delle due congruenze, quali furono da noi definiti, scritti nella forma (7), coincidono senz'altro fra loro.

Viceversa, partiamo ora dall'ipotesi che le due congruenze Γ e Γ_1 abbiano in comune l'elemento lineare proiettivo. Il significato geometrico già osservato per $\Theta=0$ mostra che alle asintotiche della falda F di Γ corrispondono le asintotiche di una delle due falde della congruenza Γ_1; chiamiamo F_1 tale falda. Inoltre l'esame del denominatore di Θ ci assicura che le sviluppabili di Γ_1 corrispondono a quelle di Γ. Possiamo dunque riferire le due congruenze alle sviluppabili comuni. In queste condizioni è allora certamente $T=T_1$; $S=S_1$. Perciò considerando Θ espresso nella forma (7) e Θ_1, in modo analogo, ne segue

$$h = h_1.$$

Inoltre, formando per la superficie F l'equazione di LAPLACE relativa alle coordinate ξ di piano tangente, alla quale soddisfano i determinanti del terz'ordine estratti dalla matrice formata mediante le coordinate dei punti x, x_u, x_v, si trova

$$\xi_{uv} + \left(\frac{l}{T} + b\right)\xi_v + (a - m)\xi_u + \left(a_u + c - bm + b_v + \frac{(a-m)l}{T}\right)\xi = 0$$

cosicchè il suo secondo invariante, calcolato avendo riguardo all'espressione di S fornita dalla (6) è

$$K = h : ST.$$

Ne segue dunque che oltre a $h = h_1$ è anche $K = K_1$; cosicchè applicando le condizioni sufficienti testè ricordate per l'applicabilità proiettiva di due congruenze, le due congruenze Γ e Γ_1 risultano proiettivamente applicabili. c. d. d.

5. - Passiamo ora a studiare la figura complessiva **M** formata da una superficie S insieme con una congruenza Γ i cui raggi escano dai singoli punti della superficie (ma non stiano nei relativi piani tangenti) (7).

Se si considerano di tale figura un elemento del prim'ordine (costituito dunque da un punto P della superficie S col relativo piano tangente π, e della retta g della congruenza uscente da P insieme coi suoi due fuochi e i relativi piani focali), e ulteriormente un elemento di ordine zero, cioè un altro punto P^* della S col relativo raggio g^* della congruenza, si verifica senza difficoltà che la coppia di elementi considerata ammette essenzialmente un solo invariante proiettivo (d'accordo con la presunzione che si può fare in base alla circostanza che essa dipende da 16 costanti): come tale si può assumere il birapporto formato sopra g^* dal punto P^* insieme con le tracce del piano π e dei due piani focali della congruenza Γ uscenti da g, in un ordine determinato.

Come elemento lineare proiettivo Θ della figura **M** adotteremo dunque il termine principale di questo birapporto, quando P^* è infinitamente vicino a P, ove si adotti l'ordine

$$\Theta = (P^*, g^*\alpha_1^*, g^*\pi, g^*\alpha_2^*)$$

dove α_1^*, α_2^* indicano i piani focali della congruenza uscenti da g^*. Per il calcolo effettivo di Θ, supponiamo che la superficie $S \equiv (x)$ sia data come luogo di un punto $x \equiv x(u, v)$, e che il raggio $g \equiv xy$ della congruenza $\Gamma \equiv (xy)$ uscente da questo punto sia dato come congiungente di esso con un ulteriore punto *distinto*

(7) Supponiamo che la superficie S non sia sviluppabile e che la congruenza Γ abbia due sistemi distinti di sviluppabili (e non abbia sviluppabili indeterminate). Ci riferiamo inoltre esplicitamente al caso in cui le asintotiche della superficie S e le sviluppablli della congruenza Γ sono reali.

dai fuochi $y \equiv y(u, v)$. Indicando con δu, δv differenziali di u, v presi lungo le sviluppabili di un sistema della congruenza, sarà $(x, y, \delta x, \delta y) = 0$: da questa relazione il punto δx si ricava come combinazione lineare dei tre punti x, y, δy, combinazione lineare ove chiamiamo σ il coefficiente di δy. Assunto $P^* \equiv x(u+du, v+dv)$, sia $x+dx+\lambda(y+dy)$ la traccia su g^* di uno dei piani focali di g; λ si determina dalla

$$(x+dx+\lambda(y+dy), x, y, \delta x) = 0$$

da cui

$$\lambda = -\frac{(x, x_u, x_v, y)}{\sigma(x, y, y_u, y_v)}.$$

La traccia sullo stesso raggio g^* del piano π è il punto $x+dx+\varrho(y+dy)$ dove

$$\varrho = -\frac{1}{2}\frac{(x, x_u, x_v, d^2x)}{(x, x_u, x_v, y)}.$$

Perciò, se indichiamo con σ_1, σ_2 i due valori di σ relativi alle due famiglie di sviluppabili contenute nella congruenza Γ, risulta in base a quanto precede

$$\Theta = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\frac{(x, y, y_u, y_v)}{(x, x_u, x_v, y)^2}(x, x_u, x_v, d^2x). \tag{9}$$

L'elemento lineare così definito ([8]) per la figura **M** (che presenta un'ambiguità di segno, data la possibilità di scambiare σ_1 con σ_2) risulta dunque, secondo la (9), proporzionale alla forma differenziale quadratica fondamentale F_2 relativa alla superficie S che fa parte della figura **M**: ma, a differenza della F_2, essa è indipendente dal modo di normare le coordinate omogenee, come è chiaro dato il suo significato geometrico. Su ciò ritorneremo più avanti (n. 6 *c*)).

Per il momento proseguiamo il calcolo dell'elemento lineare proiettivo Θ, supponendo per semplicità che la superficie S sia riferita a parametri asintotici u, v cosicchè seguendo le notazioni di FUBINI e ČECH (op. cit., p. 90)

$$\begin{cases} x_{uu} = \vartheta_u x_u + \beta x + p_{11}x, \\ x_{vv} = \gamma x_u + \vartheta_v x_v + p_{22}x; \end{cases} \tag{10}$$

e esprimendo inoltre il punto y come combinazione lineare dei punti x, x_u, x_v, x_{uv} o, come possiamo supporre, dei punti x_u, x_v, x_{uv} sotto la forma

$$y = bx_u + cx_v + x_{uv}, \tag{11}$$

dove b e c designano funzioni di u, v. Da (11) si ricava per derivazione, tenuto conto delle (10)

$$\begin{cases} y_u = lx + mx_u + nx_v + px_{uv} \\ y_v = l^*x + n^*x_u + m^*x_v + p^*x_{uv} \end{cases} \tag{12}$$

([8]) Una sua espressione valida per parametri qualunque, anzichè asintotici relativamente alla superficie (x) come supponiamo nell'ultima parte di questo numero, è assegnata più avanti, al n.° 9.

dove

(13)
$$\begin{cases} l=bp_{11}+p_{11v}+\beta p_{22}; & l^*=cp_{22}+p_{22u}+\gamma p_{11}; \\ m=b_u+b\theta_u+\theta_{uv}+\beta\gamma; & m^*=c_v+c\theta_v+\theta_{uv}+\beta\gamma; \\ n=c_u+b\beta+\beta_v+\beta\vartheta_v+p_{11}; & n^*=b_v+c\gamma+\gamma_u+\gamma\theta_u+p_{22}; \\ p=c+\theta_u; & p^*=b+\theta_v. \end{cases}$$

Per condurre a termine il calcolo del secondo membro di (9) occorre ancora l'espressione $\sigma_2-\sigma_1$. Ora si trova facilmente

$$\sigma=\frac{\delta u}{(m-bp)\delta u+(n^*-bp^*)\delta v}=\frac{\delta v}{(n-cp)\delta u+(m^*-cp^*)\delta v}$$

da cui

$$\sigma_1-\sigma_2=\frac{\sqrt{(c_v-b_u)^2+4(n-cp)(n^*-bp^*)}}{\begin{vmatrix} b & c & 1 \\ m & n & p \\ n^* & m^* & p^* \end{vmatrix}}.$$

Risulta così

(14)
$$\Theta=\sqrt{(c_v-b_u)^2+4(n-cp)(n^*-bp^*)}\,dudv$$

come espressione dell'elemento lineare proiettivo per la figura **M** considerata.

Avendosi due figure **M**, **M′** del tipo considerato si potranno chiamare *applicabili* l'una sull'altra se sono riferite fra loro in modo che risulti lo stesso il loro elemento lineare proiettivo.

6. - Prima di proseguire facciamo qualche osservazione.

a) Applichiamo (14) alla figura **M** ottenuta associando a una superficie S la congruenza delle sue normali (metriche) ove (in parametri asintotici) il ds^2 della superficie sia

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2.$$

Si trova allora

$$\Theta=2K\sqrt{EG}\,dudv$$

dove K è la curvatura totale della superficie [9]. Osserviamo dunque il seguente significato della curvatura totale di una superficie in un suo punto generico:

Sia P^* un punto di una superficie S, tendente in modo generico al punto P e sia $PP_uP^*P_v$ il quadrilatero curvilineo formato da asintotiche avente vertici opposti in P e P^*; consideriamo inoltre il birapporto B formato, sulla retta ν^* normale in P^*, dal punto P^* e dalle intersezioni

---

[9] Perciò, per la figura **M** costituita da una superficie a curvatura (metrica) totale costante, insieme con le sue normali metriche, l'elemento lineare proiettivo risulta a curvatura nulla. Più generalmente, ciò sussiste per la figura **M** formata da una superficie del tipo R e da una congruenza R ad essa *completamente coniugata*, come si deduce dalla (16), che scriveremo più avanti, applicandola a una superficie (x) per la quale sia, per esempio, $\pi_{11}=\pi_{22}=1$. Anzi, in tal caso risulta a curvatura nulla anche l'ulteriore forma quadratica H relativa a una figura **M**, che introdurremo al n.° 9.

della v^* con un piano normale principale in P, col piano tangente in P e con l'altro piano normale principale in P: allora ([10])

$$K=\frac{1}{2}\lim_{P^*\to P}\frac{B}{PP_u\cdot PP_v}. \tag{15}$$

b) La (14) si semplifica quando la figura **M** è costituita da una superficie S insieme con una congruenza ad essa *coniugata.* Invero allora $c_v=b_u$; e anzi, come è noto, si possono normare le coordinate omogenee dei punti della superficie S in modo che sia addirittura $b=c=0$. Usando le coordinate così normate la (14) si riduce a

$$\Theta=2\sqrt{\pi_{11}\pi_{22}}dudv \tag{16}$$

dove $\pi_{11}=p_{11}+\beta_v+\beta\theta_v$, $\pi_{22}=p_{22}+\gamma_u+\gamma\vartheta_u$ sono i coefficienti che compaiono nelle equazioni

$$\begin{cases}\xi_{uu}=\vartheta_u\xi_u-\beta\xi_v+\pi_{11}\xi\\ \xi_{vv}=-\gamma\xi_u+\vartheta_v\xi_v+\pi_{22}\xi\end{cases} \tag{17}$$

a cui soddisfano le coordinate omogenee dei piani tangenti della superficie S.

c) Tornando al caso generale la forma Θ è sempre proporzionale alla prima forma fondamentale quadratica F_2 della superficie S. Ma la Θ è indipendente dalla scelta del fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee di punto, a differenza di quanto avviene per la F_2. Anzi, quando si sia associata alla superficie S una congruenza per costituire una figura complessiva **M**, resta così fissato (mediante l'estrazione di una radice quarta) un modo di determinare il fattore di proporzionalità delle coordinate omogenee, per il quale risulta

$$F_2=\Theta.$$

In questo modo, ogni congruenza Γ che si associ alla superficie S viene a determinare un fattore di proporzionalità per le coordinate omogenee di punto della S.

Adottando poi per Γ una congruenza che risulti già individuata dalla superficie S, ne seguono modi vari di normare le coordinate omogenee dei punti di questa superficie, senza intervento di altri enti geometrici. Per esempio (per una superficie non rigata) si può scegliere come congruenza Γ quella costituita dalle normali proiettive, oppure da altre rette canoniche della S; si ottengono così con un procedimento geometricamente semplice delle *nuove coordinate normali.* Adottando le normali proiettive il fattore di proporzionalità ϱ per cui si devono moltiplicare le coordinate normali di Fubini per ottenere la nuova normalizzazione risulta

$$\varrho=(\pi_{11}\pi_{22})^{\frac{1}{4}}(\beta\gamma)^{-\frac{1}{2}}$$

(dove π_{11}, π_{22} sono calcolate per le coordinate normali di Fubini).

([10]) Conformemente a quanto si disse al n.° 5, affinchè la (15) sussista anche in segno occorre considerare i due piani normali principali in P in un ordine conveniente.

In determinati casi possono le nuove coordinate normali coincidere con le usuali: ciò avviene per esempio per quelle particolari superficie W di KLEIN e LIE (particolari superficie di coincidenza) per le quali, in coordinate normali

$$\beta=\gamma=1\,; \qquad p_{11}=h, \qquad p_{22}=k$$

dove h e k sono costanti tali che $hk=1$ (superficie di cui si troverebbe senza difficoltà l'equazione in termini finiti).

d) Già sotto *c*) abbiamo considerato le figure **M** ottenute associando a una superficie S (non rigata) la congruenza Γ delle sue normali proiettive, come quella che nella teoria proiettiva delle superficie si presenta nel modo più spontaneo. Segnaliamo come degno di studio il problema di ricercare le coppie di superficie S, S' che — ove a ciascuna sia associata la congruenza delle sue normali proiettive — dànno luogo a figure **M**, **M**$'$ aventi una stessa forma quadratica differenziale Θ. Fissata

$$\Theta=2G(u, v)dudv, \tag{18}$$

si tratta, adottando per esempio, coordinate normali, cioè facendo $\vartheta=\log(\beta\gamma)$, di studiare il sistema di quattro equazioni nelle quattro funzioni incognite β, γ, p_{11}, p_{22} che si ottiene aggregando la

$$\left(2\beta_v+\beta\frac{\gamma_v}{\gamma}+p_{11}\right)\left(2\gamma_u+\gamma\frac{\beta_u}{\beta}+p_{22}\right)=G^2 \tag{19}$$

alle tre condizioni di integrabilità scritte sotto (12) alla p. 94 dell'op. cit. di FUBINI e ČECH; oppure, prescindendo da ogni normalizzazione, il sistema nelle quattro funzioni incognite β, γ, L, M (dove

$$L=\vartheta_{uu}-\frac{1}{2}\vartheta_u^2-\beta_v-\beta\theta_v-2p_{11}$$

$$M=\vartheta_{vv}-\frac{1}{2}\vartheta_v^2-\gamma_u-\gamma\vartheta_u-2p_{22}$$

conformemente all'op. cit. di FUBINI e ČECH, p. 95), ottenuto aggregando alle tre equazioni di loc. cit.

$$L_v=-2\beta\gamma_u-\gamma\beta_u\,; \qquad M_u=-2\gamma\beta_v-\beta\gamma_v\,;$$
$$\beta M_v+2M\beta_v+\beta_{vvv}=\gamma L_u+2L\gamma_u+\gamma_{uuu},$$

la (19) scritta in coordinate non normali cioè la

$$\left(-L+(\log\beta\gamma)_{uu}-\frac{1}{2}(\log\beta\gamma)_u^2+2\beta_v+\frac{\beta\gamma_v}{\beta}\right)\left(-M+(\log\beta\gamma)_{vv}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\log\beta\gamma)_v^2+2\gamma_u+\frac{\gamma\beta_u}{\gamma}\right)=4G^2(u, v). \tag{19'}$$

Questo problema si offre come una nuova generalizzazione della deformazione metrica, avente portata assai vasta.

7. - Alla fine del n.° 5 abbiamo posto il concetto di *applicabilità di due figure* **M**. Un esempio molto notevole di tale applicabilità è quello a cui conduce il seguente teorema.

Se due superficie (x), (y) *sono trasformate asintotiche di una stessa* (e quindi, per il teorema di permutabilità, di ∞^1) *superficie* (z), *le due figure* **M** *ottenute associando a ciascuna di esse la congruenza* Γ *formata dalle rette che uniscono le loro coppie di punti corrispondenti risultano fra loro applicabili.*

Facciamo la verifica riferendo la superficie (z) a parametri asintotici u, v, e adottando ora provvisoriamente le notazioni β, γ, ecc. in relazione con essa (e non più con la superficie (x) come al n.° 5). Sarà [11]

$$x=\mu z+2(Az_u+Bz_v); \tag{20}$$
$$y=\mu' z+2(A'z_u+B'z_v);$$

dove A, B, A', B' sono funzioni di u, v tali che

$$A_v=-B\gamma\,; \qquad B_u=-A\beta\,; \tag{21}$$

mentre

$$\mu=-A_u-A\theta_u-B_v-B\vartheta_v, \tag{22}$$

e analogamente per le lettere accentate.

Volendo dimostrare l'eguaglianza degli elementi lineari proiettivi delle due figure indicate, conviene riferirci all'espressione (9) di Θ e allora è da dimostrare

$$-\sigma_1\sigma_2(x,y,y_u,y_v)^3(x,x_u,x_v,x_{uv})=(y,x,x_u,x_v)^3(y,y_u,y_v,y_{uv}), \tag{23}$$

dove σ_1, σ_2 si riferiscono alla figura **M** formata dalla superficie (x) insieme con la congruenza (xy). Ora è per esempio

$$(x,x_u,x_v,x_{uv})=N^2(z,z_u,z_v,z_{uv})$$

dove

$$N=2BB_{vv}+2B^2M-B_v^2-(2AA_{uu}+2A^2L-A_u^2)$$

mentre si calcola facilmente per esempio

$$(x,y,y_u,y_v)=4(AB'-A'B)N'(z,z_u,z_v,z_{uv}),$$

e [12] $\sigma_1\sigma_2=N:N'$. Sostituendo queste espressioni nella (23), i due membri risultano effettivamente eguali, e il teorema è dimostrato.

---

[11] Cfr., anche per alcune altre formole utilizzate in seguito, FUBINI e ČECH, op. cit., § 42.

[12] L'espressione che qui chiamiamo N' è, conformemente alle notazioni qui usate, l'analoga di N, relativa alla congruenza W che trasforma una nell'altra le superficie (z) e (y). Essa non è dunque la N' usata in altro senso nel loc. cit. di FUBINI e ČECH.

8. - Prima di procedere, ricordiamo che i calcoli fatti al n.° 5, e in particolare la forma (9) dell'elemento lineare di una figura **M** non si applicano al caso in cui la retta xy descrive una congruenza di cui la superficie (y) risulta una superficie focale.

In questo caso si possono fare direttamente i calcoli per altra via ([13]), e si trova quanto segue. Per comodità di notazione riferiamoci a una figura **M** formata associando a una superficie (y) ([14]) una congruenza $\Gamma' \equiv (xy)$ di cui la superficie (x) — riferita ancora alle asintotiche u, v — sia una falda focale; così che

$$y = \nu x + 2(Ax_u + Bx_v)$$

mentre

$$\bar{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v)$$

è il secondo fuoco esistente sul raggio xy; allora l'elemento lineare Θ della figura **M** considerata risulta

$$\Theta = \frac{1}{2(\nu - \mu)} \frac{(y, y_u, y_v, d^2 y)}{(y, y_u, y_v, x)}. \tag{24}$$

Ciò premesso, possiamo procurarci un nuovo interessante caso di applicabilità di figure **M** dimostrando quanto segue: *se la superficie* (y) *si ottiene dalla superficie* (x) *mediante una trasformazione* F *di Beniamino Segre* ([15]), *sono fra loro applicabili la figura* **M** *costituita dalla superficie* (y) *insieme con la congruenza* (xy), *e la figura* **M'** *ottenuta mediante una reciprocità dalla superficie* (x) *insieme con la congruenza formata dalle intersezioni dei piani tangenti omologhi delle superficie* (x) *e* (y) ([16]).

Per verificarlo, ricordiamo dalla Nota testè citata di B. SEGRE che se la superficie (y) è una trasformata F della superficie (x), si possono normare le coordinate omogenee del punto (x) in modo che nelle equazioni (10) a cui soddisfano le x in coordinate asintotiche u, v risulti — designando con $\Phi(u, v)$ una conveniente funzione di u, v —

$$p_{11} = \Phi_u^2 ; \qquad p_{22} = \Phi_v^2 \tag{25}$$

([13]) Oppure applicando la formola (Θ) del n.° 9.

([14]) E non più (x), come al n.° 5.

([15]) Cfr. B. SEGRE: *Le congruenze K e la trasformazione F delle superficie dello spazio ordinario*, Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. LII, 1928. La trasformazione K consiste in questo: il punto y sta nel piano tangente alla superficie (x) nel suo punto x, e fra le superficie (x) e (y) si corrispondono le asintotiche.

([16]) È ovvio che se si domanda l'applicabilità della figura **M** formata da una superficie (y) insieme con una congruenza (xy) avente (x) per falda focale con la figura **M** ottenuta mediante una reciprocità dalla superficie (x) insieme con la congruenza formata dalle intersezioni dei piani tangenti omologhi alle due superficie (x) e (y), dovranno necessariamente corrispondersi le asintotiche delle due superficie (x) e (y), cosicchè si ricade sulla mentre le rette della congruenza (xy) inviluppano sulla superficie (x) le linee $\Phi = \text{cost.}$, e

$$y = 2(\Phi_v x_u - \Phi_u x_v).$$

Attualmente dunque nella (24) è $\nu = 0$ mentre [17]

$$\mu = -\Phi_v \vartheta_u + \Phi_u \vartheta_v - \frac{\Phi_v}{\Phi_u}(\beta\Phi_v - \Phi_{uu}) + \frac{\Phi_u}{\Phi_v}(\gamma\Phi_u - \Phi_{vv}).$$

Calcolando poi i due determinanti indicati al numeratore e al denominatore del secondo membro di (24) — dopo avere preventivamente espressi i vari punti che entrano in considerazione come combinazioni lineari dei punti x, x_u, x_v, x_{uv}, e utilizzando le (10) con le posizioni (25) — e sostituendovi tutti questi valori, si ricava

$$\Theta = 2\Phi_u \Phi_v du dv \tag{26}$$

o anche

$$\Theta = 2\sqrt{p_{11} p_{22}}\, du dv. \tag{26'}$$

La (26′) — ove si traduca per dualità quanto si è detto al n.° 6 *b*) in merito alla (16) — esprime che l'elemento lineare Θ che abbiamo ora calcolato coincide con l'elemento lineare duale calcolato per la figura **M** duale costituita dalla superficie (x) inviluppo insieme con la congruenza di rette formata dalle intersezioni dei piani ξ e ξ_{uv}; il che appunto dimostra l'asserto.

9. - La forma quadratica Θ, che abbiamo chiamato elemento lineare proiettivo di una figura **M** non è la sola che si presenti nell'ordine di idee da noi accennato al principio di questo lavoro, per quanto essa sia quella a cui si è guidati nel modo più semplice dalle nostre considerazioni generali sull'elemento lineare proiettivo di una figura qualunque. Se si fanno intervenire anche elementi del second'ordine, o parti di essi, i loro invarianti proiettivi conducono a formare delle ulteriori forme differenziali legate alla classe di figure in esame. Senza svolgere la teoria in modo sistematico, indicheremo qui una seconda forma differenziale quadratica H, che si lega con considerazioni geometriche interessanti.

Consideriamo la figura formata da un punto $P \equiv (x)$ della superficie $S \equiv (x)$, dal relativo piano tangente con la coppia delle tangenti asintotiche, e dal raggio g della congruenza uscente da x, e ulteriormente da un altro punto $P^* \equiv x^*$ della (x) col suo piano tangente e col raggio g^* della congruenza uscente da esso [18].

---

trasformazione di B. SEGRE. Ciò che non è evidente, e viene stabilito dal teorema del testo, è che basta la corrispondenza delle asintotiche sulle due superficie (x) e (y) per avere non solo proporzionalità, ma coincidenza fra gli elementi lineari delle due figure **M** considerate.

[17] Cfr. FUBINI e ČECH, op. cit., p. 244.

[18] In questa figura (paragonata con quella che al n.° 5 ci ha guidato all'elemento lineare proiettivo, e nella quale la superficie (x) e la congruenza Γ si trattavano in modo uniforme per formare un elemento del prim'ordine e uno di ordine zero della figura **M**) la

Si trova subito che anche questa figura possiede essenzialmente un solo invariante proiettivo, e che come tale si può assumere il birapporto formato dai piani che dalla retta PP^* proiettano le rette g, g^* e le due tangenti asintotiche in P, siano t, t'.

Alla nuova forma H giungiamo considerando il termine principale di questo birapporto preso nell'ordine

$$\mathrm{H} = PP^*(g, t, g^*, t')$$

quando P^* è infinitamente vicino a P.

Anche questa seconda forma, al pari della prima, è definita con un'ambiguità di segno, perchè scambiando fra loro le due tangenti asintotiche t, t' essa cambia appunto di segno: nel seguito noi adottiamo senz'altro uno dei due segni possibili.

Usiamo ancora per la (x) parametri asintotici u, v; allora il birapporto in questione è

$$\frac{\left(x, x_u, y, dx + \frac{1}{2} d^2x + \frac{1}{6} d^3x\right)\left(x, x_v, y + dy + \frac{1}{2} d^2y, dx + \frac{1}{2} d^2x + \frac{1}{6} d^3x\right)}{(x, x_v, y, dx) \cdot (x, x_u, y, dx)} - 1.$$

Eseguendo la differenza, risulta come termine principale del numeratore un'espressione del quart'ordine, la quale è però divisibile per la forma $dudv$ che, salvo un coefficiente, costituisce il dominatore: si ottiene così

$$\mathrm{H} = \frac{(x, x_u, x_v, y)(x, dx, dy, x_{uv}) - (x, x_u, x_v, dy)(x, dx, y, x_{uv})}{(x, x_u, x_v, y)^2}$$

da cui

$$\mathrm{H} = \frac{(x, x_u, x_v, x_{uv})(x, y, dx, dy)}{(x, x_v, x_v, y)^2}. \tag{27}$$

La nuova forma differenziale è dunque ancora *quadratica*: la (27) mostra che essa, eguagliata a zero, dà le sviluppabili della congruenza. Dunque, come la forma Θ, proporzionale alla F_2 relativa alla superficie (x), dà di questa F_2 una espressione indipendente dal modo di normare le coordinate omogenee, così la forma H dà un'espressione, parimenti indipendente dal fattore delle coordinate omogenee, della forma quadratica che eguagliata a zero rappresenta le sviluppabili di una congruenza.

Se, come al n.° 5, il raggio generico della congruenza è assegnato come congiungente del punto x col punto y dato da (11), la (27) si trasforma nella

$$\mathrm{H} = (n - cp)du^2 + (c_v - b_u)dudv - (n^* - bp^*)dv^2, \tag{28}$$

o anche — tenuto conto delle (13) — nella

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = (c_u - c^2 - c\vartheta_u + b\beta + \pi_{11})du^2 + (c_v - b_u)dudv - \\ - (b_v - b^2 - b\theta_v + c\gamma + \pi_{22})dv^2 = 0. \end{aligned} \tag{28'}$$

superficie e la congruenza hanno un ufficio diverso; della superficie intervengono elementi di ordine superiore che per la congruenza.

Osserviamo che *le due forme Θ,* H *da noi introdotte relativamente a una figura* **M** *hanno il medesimo discriminante.* Ciò permette per esempio di ricostruire la forma H relativa a una figura **M** se si conosce la Θ, e si conoscono le sviluppabili della congruenza che contribuisce a formare la figura **M** in questione.

Dalla (27) si risale facilmente all'espressione che la forma H assume quando, anzichè riferire la (x) alle asintotiche, si adottano parametri qualunque, che chiamiamo ancora u, v. Se si indica non Δ il discriminante della forma quadratica F_2 di FUBINI relativa alla superficie (x), la (27) si trasforma nella

$$\mathrm{H}=\frac{\Delta(x,y,dx,dy)}{(x,x_u,x_v,y)^2}. \tag{H}$$

E, avuto riguardo a quanto si disse sui discriminanti delle due forme Θ, H, si ha anche subito, senza altri calcoli, l'*elemento lineare proiettivo della figura* **M**, *in coordinate qualunque u, v* sotto la forma

$$\Theta=\frac{\sqrt{-\Delta_0}}{(x,x_u,x_v,y)^2}(x,x_u,x_v,d^2x) \tag{Θ}$$

dove Δ_0 è il discriminante della forma quadratica (x, y, dx, dy)

Di due figure **M** che siano fra loro applicabili, secondo la definizione che è stata data alla fine del n.° 5, diremo che esse sono *totalmente applicabili* se risultano aventi in comune non solo l'elemento lineare proiettivo Θ, ma ulteriormente anche la forma H. Dopo quanto si è detto è chiaro che *affinchè due figure* **M** *tra loro applicabili lo siano totalmente è necessario e sufficiente che fra le congruenze che contribuiscono a costituirle si corrispondano le sviluppabili.*

Così nell'esempio di applicabilità che è fornito dal teorema del n.° 7, ove le due figure **M** che entrano in considerazione hanno addirittura in comune la congruenza Γ, è chiaro che si tratta appunto di totale applicabilità.

La totale applicabilità di due figure **M** dà luogo a svariate questioni che si offrirebbero spontaneamente. Qui intendiamo unicamente di risolvere e approfondire la seguente, che dà luogo a sviluppi geometrici interessanti. *Data la superficie (x) costruire, nelle condizioni più generali, due congruenze Γ, Γ' in modo che le due figure* **M** *così ottenute siano fra loro totalmente applicabili* ([19]).

Le due congruenze Γ, Γ' si diranno **associate** *fra loro relativamente alla superficie (x).*

([19]) Riguardo a questa totale applicabilità precisiamo il seguente punto. L'ambiguità relativa al segno della forma H si elimina quando è dato l'ordine in cui per ogni punto della superficie (x) si considerano le due tangenti asintotiche. Qui, essendo la medesima questa superficie per le due figure **M** in questione, intendiamo senz'altro che le tangenti asintotiche si assumano in uno stesso ordine per tali due figure.

10. - Per risolvere la questione generale così formulata, basterà fare in modo che le due figure **M** in questione abbiano in comune la forma H; perchè, essendo la stessa la superficie che fa parte delle due figure, gli elementi lineari proiettivi di queste risultano già proporzionali, e quindi attualmente eguali, in base a quanto si è detto sui discriminanti delle due forme Θ, H relative a una stessa figura **M**. Si tratterà dunque, data (in coordinate asintotiche) la superficie (x), di determinare nel modo più generale le quattro funzioni $b(u,v)$, $c(u,v)$, $b'(u,v)$ $c'(u,v)$ in modo che sia

$$\left\{\begin{aligned} &c_u - c^2 - c\vartheta_u + b\beta = c_u' - c'^2 - c'\vartheta_u + b'\beta, \\ &b_v - b^2 - b\vartheta_v + c\gamma = b_v' - b'^2 - b'\vartheta_v + c'\gamma; \end{aligned}\right. \tag{29}$$

$$c_v - b_u = c_v' - b_u'; \tag{30}$$

le due congruenze Γ, Γ' risultano allora descritte dal raggio che congiunge il punto x al punto y dato da (11), e rispettivamente al punto

$$y' = b'x_u + c'x_v + x_{uv}. \tag{11'}$$

Ora la (30) permette di introdurre una funzione $R(u,v)$ tale che

$$c - c' = (\log R)_u; \qquad b - b' = (\log R)_v, \tag{31}$$

e allora le (29) dànno

$$\left\{\begin{aligned} &R_{uu} = (\vartheta_u + 2c)R_u - \beta R_v \\ &R_{vv} = -\gamma R_u + (\vartheta_v + 2b)R_v. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Si ottengono dunque senz'altro *tutte le soluzioni del problema formulato alla fine del numero precedente partendo da una funzione arbitraria* (non costante) $R(u,v)$, *e ricavando i valori di* b, c *dalle* (32), *e successivamente quelli di* b', c' *dalle* (31).

11. - Da ciò risulta già che, fissata la superficie (x) la congruenza Γ non si può dare ad arbitrio; perchè se essa deve ammettere una congruenza associata, occorre che il sistema (32) nella funzione incognita R sia compatibile.

Chiameremo **associabile**, relativamente a una data superficie (x), ogni congruenza Γ che, rispetto a tale superficie, ammette effettivamente delle congruenze associate. Per trovare *tutte le congruenze associabili* relative a una data superficie, potremmo formare le condizioni di integrabilità del sistema (32) rispetto alla funzione $R(u,v)$ ricavandone in forma analitica le condizioni necessarie e sufficienti a cui devono soddisfare le funzioni b, c per la compatibilità del sistema stesso. Ma preferiamo procedere altrimenti e *ricercare un insieme di proprietà geometriche* (che equivarranno naturalmente a quelle condizioni di integrabilità) *atte a caratterizzare ogni singola congruenza* Γ che, *relativamente a una data superficie risulti* **associabile.**

Supporremo, restando nel caso più generale, che la superficie (x) non sia rigata (e allora nelle (32) la R non può essere funzione di uno solo fra i parametri u, v, perchè da quelle stesse equazioni seguirebbe $\beta=0$ oppure $\gamma=0$).

Osserviamo anzitutto che *se Γ, Γ' sono congruenze associate relativamente alla superficie (x), la traccia s del piano $\sigma\equiv gg'$ (individuato dai loro raggi omologhi uscenti dal punto x) sul piano ξ* — tangente in x alla superficie (x) — *inviluppa su questa superficie un sistema ∞^1 di linee (s), tale che il piano osculatore nel punto x alla linea (s) che vi passa coincide col piano σ* ([20]).

Invero, secondo le (31) del numero precedente la retta s è individuata dal punto $R_v x_u + R_u x_v$; cosicchè l'equazione differenziale del sistema (s) è

$$(s) \qquad R_u du - R_v dv = 0.$$

Lungo le linee di questo sistema è dunque

$$\frac{dv}{du} = \frac{R_u}{R_v}; \qquad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{R_{uu}}{R_v} - \frac{R_u^2}{R_v^2} R_{vv};$$

e in base a questi valori, tenuto conto delle (32), si verifica subito direttamente che ha luogo la proprietà enunciata.

Per giungere a un'altra proprietà delle congruenze associabili relativamente alla superficie (x), consideriamo la congruenza, che chiamiamo Σ, formata dalle ∞^2 tracce s ora considerate, insieme con la sua seconda ([21]) falda focale $(\bar{x})$. Per ogni punto x della superficie (x) sia J l'involuzione avente per raggi doppi la tangente s e la tangente coniugata: a questa involuzione appartiene la coppia delle tangenti asintotiche alla (x) nel punto x, e per la stessa ragione, anche la coppia delle tangenti di (x) che corrispondono alle tangenti asintotiche della seconda falda $(\bar{x})$ nel secondo fuoco $\bar{x}$ del raggio s. Sia C la coppia dell'involuzione J, che, entro questa, è coniugata armonica, rispetto alle due ultime coppie nominate, della coppia formata dalla retta s contata due volte ([22]). Sia finalmente τ

([20]) In altre parole, secondo il termine introdotto dal BOMPIANI, le linee (s) sono contenute in ciascuno dei sistemi assiali della superficie (x) individuati rispettivamente dalle congruenze Γ, Γ'. O ancora, sempre in forma equivalente, il piano σ è il piano focale, relativo al fuoco x, della congruenza Σ formata dalle rette s.

([21]) Questa è certamente distinta dalla prima; se no, le linee (s) sarebbero asintotiche della superficie (x), e R sarebbe funzione di uno solo fra i parametri u, v; ciò che — come abbiamo già detto — non può avvenire.

([22]) L'involuzione J entra in gioco in varie questioni geometriche inerenti alla considerazione di una congruenza rettilinea; cfr., per esempio, a p. 247 dell'op. cit. di FUBINI e ČECH l'interpretazione geometrica dell'espressione, inerente a una data congruenza, ivi chiamata $N':N$. A questo proposito osserviamo incidentalmente che — con le notazioni che saranno richiamate in una successiva nota a piè di pagina — questa espressione si scrive anche $1 - \frac{8WAB}{N}$; cosicchè il rapporto $WAB:N$ ha significato geometrico (invariante e intrinseco). È dunque in parte inesatto l'ultimo capoverso del 41 A) dell'op. cit. di FUBINI e il doppio sistema inviluppato sopra la superficie (x) dalle tangenti che costituiscono la coppia C. Esso è dunque *un doppio sistema completamente definito* (nel modo geometrico ora detto) *dalla congruenza* Σ ([23]).

Ciò posto, *se Γ, Γ' sono congruenze associate rispetto alla superficie* (x), *le sviluppabili per esempio della congruenza Γ intercettano sulla* (x) *un doppio sistema che è coniugato armonico rispetto al doppio sistema τ definito nel modo precedentemente descritto a partire dalla congruenza Σ formata dalle ∞^2 rette $s \equiv \sigma\xi$.*

Questa proprietà risulterà dalla trattazione che segue, la quale ci fornirà contemporaneamente la caratterizzazione geometrica richiesta sotto la seguente forma. *Sia* (x) *una superficie* (non rigata): *la più generale congruenza Γ* **associabile** *ad essa relativa si ottiene così: siano* (s) *un sistema ∞^1 di linee esistenti sopra* (x), *Σ la congruenza formata dalle loro rette tangenti, e τ il doppio sistema di linee esistenti su* (x) *definite secondo quanto precede dalla congruenza Σ. Si costruisca per ogni punto x della superficie una retta g* (non tangente alla (x)) *entro il piano ivi osculatore alla linea* (s) *che vi passa, con l'ulteriore condizione* ([24]) *che le sviluppabili della congruenza $\Gamma \equiv (g)$ intercettino sulla superficie* (x) *un doppio sistema che sia coniugato armonico rispetto al sistema τ. Tale congruenza fornisce la più generale soluzione richiesta.* Vi è solo luogo alla riserva che *nel caso particolare in cui le linee* (s) *sono piane la costruzione fornisce anche congruenze formate da ∞^1 sistemi di ∞^1 rette scelti arbitrariamente ciascuno entro il piano di ciascuna linea* (s), le quali sono generalmente da riguardare come soluzioni estranee.

Per verificare tutto quanto si è enunciato, partendo dalla (x) data in coordinate asintotiche — superficie per la quale sussistono sempre le (10) — siano rispettivamente ([25])

$$\bar{x} = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v)$$
$$\bar{\xi} = \lambda\xi + 2(A\xi_u - B\xi_v)$$

il secondo fuoco del raggio s di una congruenza Σ avente (x) come prima falda focale, e il piano ivi tangente alla seconda falda. Proponiamoci di determinare,

---

ČECH; il quale — lasciando tutto il resto invariato — deve essere rettificato nel senso che non già $N:AB$, bensì N ha carattere intrinseco.

([23]) Il doppio sistema τ è indeterminato — come risulta dalla sua equazione (τ) scritta più avanti — soltanto se la congruenza Σ ha la seconda falda focale degenerata in una retta.

([24]) *Fissata la congruenza Σ, se è nota una congruenza Γ che soddisfa questa ulteriore condizione, e che dunque — secondo l'attuale enunciato — è associabile relativamente alla superficie* (x), *si hanno senz'altro tutte le rimanenti.* Invero, note b, c soddisfacenti al sistema (32) insieme con una certa funzione $R(u, v)$, tutte le altre congruenze in questione si hanno sostituendo a R una sua funzione arbitraria, come è chiaro dall'equazione (s).

([25]) Per quanto ci occorre dalla teoria delle congruenze rettilinee, rimandiamo ancora se possibile, le funzioni $b(u, v)$, $c(u, v)$ da impiegare nella (11), per costruire un punto y tale che il raggio $g \equiv xy$ descriva una congruenza Γ che soddisfi alle due condizioni formulate nell'ultimo enunciato. La prima di queste, tenuto conto del fatto che il piano osculatore di cui in esso si parla coincide col piano $\bar{\xi}$ dà facilmente

$$\lambda = 2(Ac - Bb) \tag{33}$$

Per esprimere la seconda, formiamo anzitutto l'equazione del doppio sistema τ, sotto la forma

$$WB^2 du^2 + (6WAB - N) du dv + WA^2 dv^2 = 0. \tag{τ}$$

La seconda condizione dell'ultimo enunciato si traduce dunque nella

$$\begin{aligned} 2WA^2(c_u - c^2 - c\vartheta_u + b\beta + \pi_{11}) + (c_v - b_u)(N - 6WAB) - \\ - 2WB^2(b_v - b^2 - b\vartheta_v + c\gamma + \pi_{22}) = 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Se introduciamo, come è lecito, una funzione $\varrho(u, v)$ tale che A, B — che possiamo alterare per uno stesso fattore — assumano i valori

$$A = \varrho_v, \qquad B = \varrho_u$$

l'equazione (33) si scrive

$$2(\varrho_v c - \varrho_u b) = -\varrho_v \vartheta_u + \varrho_u \vartheta_v + \frac{\varrho_v}{\varrho_u}(\varrho_{uu} + \beta \varrho_v) - \frac{\varrho_u}{\varrho_v}(\varrho_{vv} + \gamma \varrho_u). \tag{33'}$$

Al sistema (33'), (34) nelle due funzioni incognite b, c ne sostituisco un altro nel modo seguente: definita una funzione $Q(u, v)$ con la

$$Q\varrho_u^2 + \varrho_{uu} = (\vartheta_u + 2c)\varrho_u - \beta \varrho_v, \tag{35}$$

la (33') si scrive nella forma analoga alla (35)

$$Q\varrho_v^2 + \varrho_{vv} = (\vartheta_v + 2b)\varrho_v - \gamma \varrho_u. \tag{36}$$

Si tratta dunque di studiare il sistema, nelle tre funzioni incognite b, c, Q for-

---

una volta all'op. cit. di FUBINI e ČECH, cap. V. Ricordiamo in particolare in relazione a quanto segue nel testo le posizioni

$$\begin{aligned}
\lambda &= -A_v - A\theta_u + B_v + B\vartheta_v + \frac{A}{B}(B_u + A\beta) - \frac{B}{A}(A_v + B\gamma), \\
\mu &= -A_v - A\theta_u - B_v - B\vartheta_v + \frac{A}{B}(B_u + A\beta) + \frac{B}{A}(A_v + B\gamma), \\
W &= \left(\frac{A_v + B\gamma}{A}\right)_v - \left(\frac{B_u + A\beta}{B}\right)_v, \\
N &= \lambda\mu + 2A\left(\mu_v + 2Ap_{11} - \mu\frac{B_u + A\beta}{B}\right) - 2B\left(\mu_v + 2Bp_{22} - \mu\frac{A_v + B\gamma}{A}\right).
\end{aligned}$$

Inoltre utilizziamo implicitamente nel testo l'equazione delle asintotiche della seconda falda focale sotto la forma

$$2W(Bdu + Adv)^2 - Ndudv = 0.$$

mato dalle (34), (35), (36). Ora se, tenendo conto delle (35) e (36), si calcolano λ, μ e poi N, e ancora

$$(W) \qquad W=2(b_u-c_v)+\varrho_u Q_v-\varrho_v Q_u,$$

la (34) si trasforma nella

$$(34') \qquad (\varrho_u Q_v-\varrho_v Q_u)\{(c_u-c^2-c\vartheta_u+b\beta+\pi_{11})\varrho_v^2+(c_v-b_u)\varrho_u\varrho_v- \\ -(b_v-b^2-b\vartheta_v+c\gamma+\pi_{22})\varrho_u^2\}=0.$$

Se è nullo il primo fattore, cioè se

$$\varrho_u Q_v-\varrho_v Q_u=0$$

sarà $Q=Q(\varrho)$: introdotta allora una funzione $R(u,v)=R(\varrho)$ tale che

$$\frac{d^2\varrho}{dR^2}+Q(\varrho)\left(\frac{d\varrho}{dR}\right)^2=0,$$

le (35), (36) si riducono alle (32) e l'ultimo enunciato è dimostrato.

Quanto all'eventualità che la (34′) sussista grazie all'annullarsi del secondo fattore del suo primo membro, tale annullamento si interpreta geometricamente nel senso che uno dei sistemi di sviluppabili della congruenza intercetta sulla superficie (x) le stesse linee (s). Ma allora una tale sviluppabile è formata da ∞^1 rette condotte per i punti di una linea entro i rispettivi piani osculatori (senza che esse siano tangenti alla linea), ciò che non è possibile se la linea non è piana. Perciò in tal caso le linee (s) sono linee piane e la congruenza Γ è costituita nel modo indicato al termine dell'enunciato.

L'ultimo teorema è così completamente dimostrato, e contemporaneamente anche quello che lo precede.

12. - Aggiungiamo ancora che *se la congruenza Γ associabile relativamente a una superficie (x) è* **coniugata** *a questa superficie, tale è pure ogni congruenza Γ' associata a Γ. Inoltre in questo caso, e solamente in questo caso la retta s sezione del piano $\sigma\equiv gg'$ col piano ξ tangente alla superficie (x) nel punto x descrive una congruenza W.*

La prima parte dell'enunciato risulta dalla (30); se si suppone $c_v=b_u$ ne risulta anche $c_v'=b_u'$. La seconda parte si ha subito dalla equazione (W) del numero precedente ove ora — sostituendo le (32) alle (35), (36) — si faccia $Q=0$.

Resta così posto un preciso legame geometrico fra le congruenze coniugate e associabili relativamente a una data superficie e le congruenze W aventi questa superficie per falda focale. Si osservi che le (32), ove per una congruenza Γ coniugata alla superficie (x) si pongano b, c eguali rispettivamente a φ_v, φ_u, con $\varphi=\varphi(u,v)$ cioè le

$$R_{uu}=\vartheta_u' R_u-\beta R_v$$
$$R_{vv}=-\gamma R_u+\vartheta_v' R_v$$

ove $\vartheta' = \vartheta + 2\varphi$, sono — a meno di una inessenziale trasformazione per dualità — le stesse equazioni a cui si può ridurre ([26]) la ricerca delle congruenze W che ammettono (x) per prima falda focale. Questa coincidenza analitica ha la sua spiegazione geometrica nel teorema che precede.

13. - *Se le due congruenze Γ, Γ' sono associate relativamente a una superficie (x), esiste una serie ∞^1* (e non più ampia) *di congruenze — a cui appartengono Γ, Γ' — associate fra loro a due a due, tali che i raggi di queste congruenze uscenti da ogni punto della superficie (x) appartengono a un fascio.*

Invero, se — date b e c — a partire da una soluzione R delle (32) si costruiscono le altre soluzioni $R+k$, con k costante arbitraria, ognuna di queste, sostituita nelle (31), dà luogo a valori

$$b^{(k)} = b - \frac{R_v}{R+k}, \qquad c^{(k)} = c - \frac{R_u}{R+k},$$

tali che al variare di k, il corrispondente raggio $g^{(k)}$ varia in un fascio contenente il raggio g. La congruenza ottenuta per ogni valore di k costituisce insieme con la superficie (x) una figura $\mathbf{M}$ che ha sempre la forma quadratica differenziale H in comune con la figura $\mathbf{M}$ ottenuta da Γ; quindi tutte le congruenze in questione sono associate fra loro a due a due relativamente alla superficie (x).

Si verifica subito che non è altrimenti possibile costruire una congruenza $\Gamma'' \equiv (g'')$ associata a entrambe le congruenze Γ, Γ' e tale che i raggi g, g', g'' siano sempre complanari.

È chiaro che, *fissate quattro congruenze Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 della serie ∞^1 di cui al teorema precedente, il birapporto $(g_1 g_2 g_3 g_4)$ dei loro raggi uscenti da un punto variabile della superficie (x) è costante al variare di questo punto.*

14. - Il teorema del numero precedente ci suggerisce *un procedimento geometrico per giungere per altra via alla nozione di congruenze associate.*

Partiamo da una superficie (x) — che ci limitiamo a supporre non rigata — e domandiamoci *quale è il modo più generale per costruire un sistema ∞^1 di congruenze tale che:*

1°) *le loro sviluppabili intercettino sopra la superficie (x) uno stesso doppio sistema* (non coniugato, o eventualmente coniugato);

2°) *i raggi delle varie congruenze uscenti da ogni singolo punto x della superficie (x) formino fascio* ([27]).

([26]) FUBINI e ČECH, op. cit., p. 294.

([27]) In quanto segue non ci tratteniamo sul caso particolare in cui il piano di questo

Se i raggi di due di queste congruenze, rispettivamente Γ e Γ', sono ulteriormente determinati rispettivamente dal punto (11) e dal punto (11'), il raggio di una generica Γ_1 fra esse conterrà il punto

$$[t(b'-b)+b]x_u+[t(c'-c)+c]x_v+x_{uv}, \tag{38}$$

dove t è una funzione $t(u, v)$ di u, v.

Scrivendo anzitutto che fra Γ e Γ' si corrispondono le sviluppabili, si scrive che esiste una funzione $\Phi(u, v)$ tale che

$$\left\{\begin{array}{l} c_u'-c'^2-c'\vartheta_u+b'\beta+\pi_{11}=\Phi K, \\ b_v'-b'^2-b'\theta_v+c'\gamma+\pi_{22}=\Phi H, \end{array}\right. \tag{39}$$

$$c_v'-b_u'=\Phi(c_v-b_u) \tag{40}$$

dove abbiamo posto per brevità

$$\begin{aligned} K&=c_u-c^2-c\vartheta_u+b\beta+\pi_{11}, \\ H&=b_v-b^2-b\vartheta_v+c\gamma+\pi_{22}. \end{aligned}$$

Tenendo poi conto della medesima condizione relativamente alle congruenze Γ, Γ_1 si ha che esisterà una funzione $\Psi(u, v)$ ([28]) — variabile con Γ_1 — tale che, previe alcune riduzioni

$$\left\{\begin{array}{l} t_u=(c'-c)(t^2-t)+\dfrac{\Psi-1+t-t\Phi}{c'-c}K \\ t_v=(b'-b)(t^2-t)+\dfrac{\Psi-1+t-t\Phi}{b'-b}H \end{array}\right. \tag{41}$$

$$(\Psi-1+t-t\Phi)\left(\frac{c'-c}{b'-b}H-\frac{b'-b}{c'-c}K-c_v+b_u\right)=0. \tag{42}$$

Distinguo allora due casi.

a) Se in (42) è nullo il primo fattore, le (41) si riducono alle

$$\left\{\begin{array}{l} t_u=(c'-c)(t^2-t), \\ t_v=(b'-b)(t^2-t), \end{array}\right. \tag{41'}$$

le quali devono ammettere, nelle nostre ipotesi, un integrale dipendente da una costante arbitraria: perciò risulta $c_v'-c_v=b_u'-b_u$, cosicchè, in base a (40),

$$(\Phi-1)(c_v-b_u)=0. \tag{43}$$

Se è $\Phi=1$, e quindi (per l'annullarsi del fattore considerato nella (42)) anche $\Psi=1$, le ∞^1 congruenze in esame costituiscono, prese con la superficie (x), altrettante

---

fascio passa costantemente per una tangente asintotica della superficie (x). Potremo così supporre $b'-b$ e $c'-c$ entrambi diversi da zero.

([28]) Dove $1:\Psi(u, v)$ è il valore comune del rapporto delle quantità K, H, c_v-b_u alle quantità analoghe calcolate per la congruenza Γ_1.

figure **M** totalmente applicabili, e *le congruenze stesse sono associate relativamente alla superficie stessa.*

Supponiamo invece che, sempre rimanendo nel caso *a*), la (43) sussista invece in virtù di $c_v - b_u = 0$. Allora Γ, e così Γ', e tutte le ∞^1 congruenze considerate risultano coniugate alla superficie (x). Effettivamente, se partiamo da due qualsiansi congruenze coniugate alla superficie (x), le quali vi intercettino uno stesso doppio sistema coniugato, cosicchè valgono le (39) e (40), il sistema (41′) definisce una funzione $t = t(u, v)$ dipendente da una costante arbitraria che attraverso le (38) conduce a una serie ∞^1 di congruenze nelle condizioni richieste ([29]). Perciò *si ha qui una nuova soluzione del problema considerato*; la quale conduce generalmente a congruenze non associabili relativamente alla superficie (x), perchè per esempio la congruenza Γ può qui prendersi ad arbitrio fra quelle coniugate alla superficie (x).

b) Sia invece nella (42)

$$\frac{c'-c}{b'-b}H - \frac{b'-b}{c'-c}K - c_v + b_u = 0. \tag{44}$$

Questa equazione, liberata dai denominatori, si interpreta geometricamente nel senso che un sistema di sviluppabili per esempio della congruenza Γ intercetta sulla superficie (x) il sistema (s) inviluppato dalle tracce sui piani tangenti di questa superficie dei corrispondenti piani σ contenenti i fasci di rette omologhe delle ∞^1 congruenze della serie. Inoltre, se si pone

$$b' = b + \omega, \qquad c' = c + \omega\Omega$$

dove ω, Ω sono due funzioni di u, v, e si riscrivono le (39), (40) in base a queste posizioni, esse si possono risolvere rispetto alle tre quantità

$$(\Phi - 1)K, \qquad (\Phi - 1)H, \qquad (\Phi - 1)(c_v - b_u).$$

Se allora si combinano linearmente queste equazioni in modo da farne risultare il valore del primo membro di (44) moltiplicato per $\Phi - 1$, si ottiene

$$\gamma\Omega^3 - (2b + \theta_v)\Omega^2 + (2c + \theta_u)\Omega - \beta = \Omega_u + \Omega\Omega_v.$$

E siccome $\Omega = (c' - c) : (b' - b)$ questa equazione significa che ogni raggio g della

---

([29]) La possibilità di costruire questi sistemi ∞^1 di congruenze coniugate alla superficie (x) segue già dalle formole con cui DARBOUX (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, libro IV, cap. X) ha determinate le congruenze le cui sviluppabili determinano su una data superficie un dato doppio sistema coniugato. Secondo quelle formole si ottengono tali congruenze a partire dai singoli integrali dell'*aggiunta* dell'equazione di LAPLACE a cui soddisfano le coordinate omogenee di un punto della superficie riferite a quel doppio sistema coniugato: se si adottano le combinazioni lineari a coefficienti costanti di due fra congruenza Γ sta nel piano osculatore in x alla linea (s) che vi passa; questa circostanza insieme con quella osservata subito dopo (44) implica (cfr. la fine del n.° 11) che le linee (s) sono piane.

Concludiamo dunque:

Il problema formulato al principio del n.° 14 ammette in tutto tre tipi di soluzioni:

1°) *quelle formate da due congruenze* associate *fra loro relativamente alla superficie* (x), *insieme con le* ∞^1 *delle serie da esse determinata, secondo quanto si è detto al n.° 13*;

2°) *quelle formate da due qualsiansi congruenze* coniugate *alla superficie* (x) — *tali che le loro sviluppabili intercettino su questa uno stesso doppio sistema coniugato — insieme con le* ∞^1 *della serie da esse determinata*;

3°) *quelle formate da* ∞^1 *congruenze le cui sviluppabili segano sulla superficie* (x) *due dati sistemi di linee, uno dei quali sia di linee piane, e tali che il piano di ognuna di queste contenga* ∞^1 *raggi di ogni congruenza.*

15. - Relativamente alla serie ∞^1 di congruenze a due a due associate relativamente a una data superficie, considerate al n.° 13, aggiungiamo ancora quanto segue. I fuochi f_1, f_2 della congruenza $\Gamma^{(k)}$, corrispondente a un dato valore di k nelle formole di quel numero sono dati da

$$(45) \qquad f_i=\left(-\beta\gamma-\theta_{uv}+bc-\frac{b_u+c_v}{2}+\frac{R_{uv}-bR_u-cR_v}{R+k}+\Delta_i\right)x+ \\ +\left(b-\frac{R_v}{R+k}\right)x_u+\left(c-\frac{R_u}{R+k}\right)x_v+x_{uv} \qquad (i=1,2);$$

dove — avendo ancora K, H il significato del numero precedente — Δ_1, Δ_2 sono le due determinazioni di

$$\frac{1}{4}\sqrt{(c_v-b_u)^2+4HK}.$$

La (45) mostra che chiamando omologhi fuochi delle ∞^1 congruenze $\Gamma^{(k)}$ corrispondenti a una medesima determinazione del radicale, *il luogo dei fuochi omologhi delle* ∞^1 *rette delle* ∞^1 *congruenze considerate al n.° 13 uscenti da uno stesso punto della superficie* (x) *è una retta* r_i $(i=1,2)$. Le due rette r_1, r_2 sono evidentemente incidenti perchè contenute nel piano σ: il punto ad esse comune è

$$(bR_u+cR_v-R_{uv})x+R_vx_u+R_ux_v$$

---

quegli integrali, si hanno i sistemi in questione. Osserviamo ancora che fuochi «omologhi» per le ∞^1 congruenze coniugate in questione risultano, secondo le citate formole di DARBOUX, allineati. Nel n.° 15 si dirà come lo stesso avvenga anche per le nostre serie ∞^1 di congruenze (generalmente non coniugate) a due a due associate rispetto alla superficie (x).

cioè lo stesso punto dove la retta s tocca la seconda falda focale della congruenza Σ. Esse sono ulteriormente determinate dal punto

$$\left(-\beta\gamma - \theta_{uv} + bc - \frac{b_u + c_v}{2} + \Delta_i\right) x + b x_u + c x_v + x_{uv}.$$

Alla figura considerata si lega così la considerazione di due nuove congruenze (r_1), (r_2).

I piani tangenti alla superficie (f_i) *luogo dell'*i^{esimo} *fuoco* $(i=1,2)$ *di* $\Gamma^{(k)}$, *ancora per i raggi di queste* ∞^1 *congruenze uscenti da un punto della superficie* (x), *risultano formanti fascio* intorno a una retta r_i' tangente alla superficie (x) nel punto x ([30]).

Le congruenze (r_i), (r_i') sono dunque stratificabili. Nasce così una relazione fra la teoria qui svolta e quella della *stratificabilità* delle congruenze, di cui — oltre al FUBINI, al COOK e ad altri — si è occupato particolarmente il FINIKOFF. Ma su ciò ritorneremo in un'altra occasione.

([30]) Precisamente, intorno alla retta che contiene il punto

$$\left(\Delta_i + \frac{b_u - c_v}{2}\right) x_u + K x_v$$

come risulta facilmente.