ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VLADIMIRO BERNSTEIN

Sopra una proposizione relativa alla crescenza delle funzioni olomorfe

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 4 (1933), p. 381-399
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_4_381_0>

SOPRA UNA PROPOSIZIONE RELATIVA ALLA CRESCENZA DELLE FUNZIONI OLOMORFE

di VLADIMIRO BERNSTEIN (Milano).

1. - Abbiasi una funzione $F(z)$, olomorfa e d'ordine finito in un settore $\Sigma:(\alpha \leqq \arg z \leqq \beta)$ che comprende una certa semi-retta $\Delta: \arg z = \gamma\,(\alpha < \gamma < \beta)$. Nei ragionamenti successivi supporremo sempre che $\gamma = 0$, cioè che la semiretta Δ coincide col semi-asse reale positivo; questo non lede però in nessun modo la generalità dei risultati che otterremo, dimodochè questi risultati saranno validi qualunque sia la semi-retta Δ che si voglia considerare.

Abbiasi, d'altra parte, una funzione reale e positiva $U(r)$, della variabile reale r, continua e derivabile per ogni $r > 0$ ([1]), e tale che

$$(1) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{\log U(r)}{\log r} = \lim_{r=\infty} \frac{r\,U'(r)}{U(r)} = k > 0.$$

Indichiamo con A una costante positiva e supponiamo che la funzione $F(z)$ soddisfi la diseguaglianza

$$(2) \qquad \log |F(re^{i\gamma})| \leqq -A\,U(r)$$

in tutti i punti della semi-retta Δ, all'eccezione tutt'al più dei punti di un certo insieme eccezionale E. Per quel che concerne questo insieme eccezionale, supponiamo che, comunque si scelgano i numeri positivi δ e η, si possa far loro corrispondere un $R_0 = R_0(\delta, \eta)$ in modo tale che la misura della parte dell'insieme E, che appartiene all'intervallo $R \leqq r \leqq R(1+\delta)$, sia inferiore ad ηR, non appena $R \geqq R_0$. Per semplificare il linguaggio possiamo convenire di esprimere d'ora in poi questa proprietà caratteristica dell'insieme E dicendo che esso ha una *densità lineare nulla* (da non confondere colla densità delle successioni numerabili di punti isolati, che interviene in altri miei lavori).

Notiamo adesso che, se la diseguaglianza (2) è soddisfatta sopra un insieme di punti I, essa è anche soddisfatta in ogni punto dell'insieme derivato di I. Ne scende che non si menoma la generalità del ragionamento, se si ammette che

---

([1]) Si può anche ammettere che, in una successione numerabile di punti isolati, $U(r)$ abbia solo le derivate a destra ed a sinistra, senza avere una derivata unica. Se tali punti esistono ed il loro numero non è finito, le derivate a destra ed a sinistra di $U(r)$ in questi punti dovranno soddisfare alle (1).

l'insieme E è costituito da un sistema numerabile di intervalli aperti (cioè, se si ammette che E è un *plurintervallo aperto*). È questo il motivo che ci autorizza a parlare della misura di ogni parte finita di E senza presupporre che E sia misurabile.

Ciò posto, vediamo quali sono le conseguenze relative al comportamento di $F(z)$ nel settore Σ che si possano dedurre dal fatto che la diseguaglianza (2) è soddisfatta sulla semi-retta Δ all'infuori dell'insieme E.

Cominciamo col considerare il caso in cui la funzione $F(z)$ soddisfa, in tutto il settore Σ, ed in modo uniforme rispetto alla φ, alla condizione

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{U(r)} \leqq 0. \tag{3}$$

Indichiamo con $r=\chi(x)$ la funzione inversa della funzione $x=U(r)$; dalle (1) risulta che questa funzione $\chi(x)$ è definita in modo univoco per i valori abbastanza grandi di x; per di più, dalle (1) scende che si deve avere

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \chi(x)}{\log x} = \lim_{r=\infty} \frac{\log r}{\log U(r)} = \frac{1}{k}; \tag{4}$$

infine, se si tien conto del fatto che $\chi'(x) = \frac{1}{U'(r)}$, si deduce subito dalle (1) che

$$\lim_{x=\infty} \frac{x\chi'(x)}{\chi(x)} = \lim_{r=\infty} \frac{U(r)}{rU'(r)} = \frac{1}{k}. \tag{5}$$

Dalle due ultime formole scende ora che, se poniamo

$$\chi(x) = x^{\omega(x)}, \tag{6}$$

la funzione $\omega(x)$ dovrà soddisfare, per $x \to \infty$, alle due condizioni

$$\lim_{x=\infty} \omega(x) = \frac{1}{k}, \qquad \lim_{x=\infty} \omega'(x) x \log x = 0,$$

e cioè la funzione $\omega(x)$ sarà, secondo la terminologia del VALIRON, *un ordine precisato* ([2]). Ne scende, per un teorema dello stesso VALIRON ([3]), che esiste una funzione $X(x)$, che è olomorfa nel settore $|\arg x| \leqq \frac{\pi}{2}$, e che soddisfa in questo settore (uniformemente rispetto alla ψ) alla condizione

$$\lim_{R=\infty} \frac{X(Re^{i\psi})}{\chi(R)} = e^{\frac{i\psi}{k}} \qquad \left(|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

([2]) Vedi VALIRON: *General theory of integral functions*, Toulouse, 1925, p. 64.

([3]) Vedi VALIRON: *Fonctions entières*, etc. (Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. 5, 1913, p. 232). Nel caso in cui $k < 1$, il ragionamento del VALIRON richiede dei calcoli piuttosto lunghi; esso può però essere semplificato come ho indicato in una Memoria: *Sulla crescenza delle trascendenti intere d'ordine finito*, attualmente in corso di pubblicazione negli Atti della R. Acc. d'Italia (§§ 2-7).

Per di più, questa funzione $X(x)$ può essere scelta in modo tale che si abbia anche

$$\lim_{R=\infty} \frac{RX'(R)}{X(R)} = \frac{1}{k}. \tag{8}$$

La possibilità di una simile scelta di $X(x)$ è stata da me dimostrata nella Memoria citata in ([3]).

2. - Indichiamo ora con $\Sigma' : (\alpha' \leqq \arg z \leqq \beta')$ un settore che è compreso nello stesso tempo, tanto nel settore Σ, quanto nel settore $|\arg z| < \frac{\pi k}{2}$, e che comprende il semi-asse reale positivo; questo settore Σ' potrà, per altro, coincidere con Σ, quando quest'ultimo è compreso nel settore $|\arg z| < \frac{\pi k}{2}$ $\left(\text{cioè, quando } -\frac{\pi k}{2} < \alpha < 0,\ 0 < \beta < \frac{\pi k}{2}\right)$. Siano inoltre $-\lambda$ e μ due angoli positivi, rispettivamente inferiori a $\frac{|\alpha'|}{k}$ e $\frac{\beta'}{k}$; dalla (7) scende allora che esiste una costante $R_1 = R_1(\lambda, \mu)$ tale che, quando il punto x si muove nel campo

$$\lambda < \arg x < \mu, \qquad |x| > R_1, \tag{S}$$

il punto $z = X(x)$ dovrà muoversi all'interno del settore Σ'.

Pertanto, se introduciamo la funzione

$$f(x) = F[X(x)], \tag{9}$$

possiamo affermare che questa funzione deve essere olomorfa nel campo (S). D'altra parte, dalla (3) scende che nel campo S si deve avere (uniformemente rispetto alla ψ)

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log |f(Re^{i\psi})|}{U\{|X(Re^{i\psi})|\}} \leqq 0. \tag{10}$$

Ora, dalle (1) si può dedurre con un facile calcolo che, quando r_1 e r_2 crescono ambedue all'infinito in modo tale che il loro rapporto $\frac{r_1}{r_2}$ tenda al limite p, il rapporto $\frac{U(r_1)}{U(r_2)}$ tende al limite p^k ([4]); ciò posto, dalla (7) scende che

$$\lim_{R=\infty} \frac{U\{|X(Re^{i\psi})|\}}{U\{\chi(R)\}} = 1; \tag{11}$$

e siccome dalla definizione stessa di $\chi(x)$ risulta che

$$U\{\chi(R)\} = R,$$

si vede che, per le (10) e (11), si deve avere (uniformemente rispetto alla ψ)

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log |f(Re^{i\psi})|}{R} \leqq 0 \quad \text{per } \lambda \leqq \psi \leqq \mu. \tag{12}$$

([4]) Per i dettagli di questo calcolo, cfr. il n°. 6 della mia Memoria citata in ([3]).

Vediamo adesso come la funzione $f(x)$ si comporta sul semi-asse reale positivo. Per supposizione, la funzione $F(z)$ soddisfa alla diseguaglianza (2) in tutti i punti del semi-asse reale positivo, ad eccezione, tutt' al più, dei punti di un certo insieme eccezionale E. Siccome la funzione $X(x)$ è reale e positiva quando la x è reale, positiva e abbastanza grande, vediamo che la funzione $f(x)$ deve soddisfare la diseguaglianza

$$\log|f(R)| < -A\,U\{X(R)\}$$

in tutti i punti R del semi-asse reale positivo, per i quali il punto $X(R)$ non appartiene all' insieme eccezionale E. Dunque, se noi indichiamo con A_1 un numero positivo inferiore ad A (ma arbitrariamente vicino ad A), possiamo dedurre dalle (2) e (11) che la diseguaglianza

$$\log|f(R)| \leqq -A_1 U\{\chi(R)\} = -A_1 R \tag{13}$$

deve essere soddisfatta per tutti i valori abbastanza grandi di R, per i quali $X(R)$ non appartiene all' insieme E.

Ora, l' insieme E è tale che, qualunque siano i numeri positivi D e d, è possibile definire una successione di numeri positivi $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, soddisfacenti alle due condizioni

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{R_n} = D, \qquad \underline{\lim}_{n=\infty} (R_{n+1} - R_n) \geqq \frac{1}{d}, \tag{14}$$

e per i quali nessuno dei punti $X_n = X(R_n)$ appartiene all' insieme E. Per non interrompere il corso del nostro ragionamento, rimandiamo ad uno dei paragrafi successivi la dimostrazione di questo asserto, ed intanto continuiamo lo studio della funzione $f(x)$, ammettendo che esso sia vero.

Introduciamo *l' indicatrice di crescenza* della funzione $f(x)$

$$h_f(\psi) = \overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log|f(Re^{i\psi})|}{R}.$$

Dalla (10) scende che, per $\lambda \leqq \psi \leqq \mu$, deve essere

$$h_f(\psi) \leqq 0. \tag{15}$$

D' altra parte, PHRAGMÈN e LINDELÖF hanno dimostrato che, se non si ha identicamente $h_f(\psi) = -\infty$, l' indicatrice $h_f(\psi)$ è funzione continua di ψ in ogni intervallo nel quale essa è limitata [5]; inoltre, il PÓLYA ha dimostrato che, nell' ultimo caso, $h_f(\psi)$ possiede in ogni punto le due derivate a sinistra ed a destra $h_f'(\psi-0)$ e $h_f'(\psi+0)$, che sono ambedue finite [6].

---

[5] PHRAGMÈN-LINDELÖF: *Sur l'extension d'un principe classique de l'Analyse* (Acta Math., t. 31, 1908, p. 398).

[6] PÓLYA: *Untersuchungen über Lücken*, etc. (Math. Zeitschr., t. 29. 1929, p. 574).

Supponiamo ora che si abbia $h_f(0) > -A$. Possiamo allora scegliere il valore di A_1 nella diseguaglianza (13) in modo tale che si abbia ancora $h_f(0) > -A_1$. E pertanto, se si scelgono i numeri R_n nel modo sopraindicato, si deduce dalla (13) che si dovrà avere

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |f(R_n)|}{R_n} \leqq -A_1 < h_f(0). \tag{16}$$

In queste condizioni si può applicare alla funzione $f(x)$ un teorema che ho dimostrato qualche anno fa ([7]); questo teorema ci permette di affermare che, quando la (16) è soddisfatta per una successione di punti R_n che soddisfano alle (14), si deve avere

$$h_f'(+0) - h_f'(-0) \geqq \pi D.$$

Ma abbiamo già detto che la successione dei numeri R_n, soddisfacenti alle (14) ed alla condizione che nessuno degli $X(R_n)$ appartenga all'insieme E, può essere definita qualunque sia il numero positivo D. Ne scende che l'ultima diseguaglianza deve essere verificata per ogni $D > 0$, per quanto grande esso possa essere. E questo non può capitare che se $h_f'(+0) = +\infty$, oppure $h_f'(-0) = -\infty$; ma ciò non è possibile per il teorema già citato del PÓLYA. Si vede dunque che la supposizione $h_f(0) > -A$ non è compatibile colle nostre supposizioni precedenti; e pertanto si deve avere $h_f(0) \leqq -A$. In altri termini deve essere

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log |f(R)|}{R} \leqq -A. \tag{17}$$

3. - Dall'ultima diseguaglianza si deduce subito che si deve avere anche

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(r)|}{U(r)} \leqq -A. \tag{18}$$

Infatti, se indichiamo con $x = u(r)$ la funzione inversa di $r = X(x)$, possiamo asserire, come l'abbiamo fatto prima per la funzione $\chi(x)$, che la funzione $u(r)$ è definita in modo univoco per i valori positivi abbastanza grandi di r. Dunque, se esiste una successione di punti r_n $(\lim_{n=\infty} r_n = +\infty)$, per i quali si ha

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |F(r_n)|}{U(r_n)} > -A_1, \tag{19}$$

dovremo avere, per la (9),

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |f\{u(r_n)\}|}{U(r_n)} > -A_1. \tag{20}$$

Ma, dalla definizione delle funzioni $u(r)$ e $X(x)$ risulta che

$$r_n = X\{u(r_n)\};$$

([7]) V. BERNSTEIN: *Sulla crescenza delle funzioni olomorfe di tipo esponenziale* (Rend. R. Acc. Lincei, 6ª serie, t. 15, 1932, p. 32).

dunque, se poniamo

(21) $$\varrho_n = u(r_n) \qquad (n=1,2,....),$$

avremo

$$U(r_n) = U\{X(\varrho_n)\}.$$

E siccome, d'altra parte,

$$\varrho_n = U\{\chi(\varrho_n)\},$$

così possiamo dedurre dalla (8) (tenendo conto di una proprietà già utilizzata di $U(r)$) che si deve avere

$$\lim_{n=\infty} \frac{U(r_n)}{\varrho_n} = \lim_{n=\infty} \frac{U\{X(\varrho_n)\}}{U\{\chi(\varrho_n)\}} = 1.$$

Dalle (20) e (21) scende dunque che

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|f(\varrho_n)|}{\varrho_n} > -A_1$$

e questa diseguaglianza è in contrasto colla (17). Se ne deduce che la diseguaglianza (19) non può essere soddisfatta, e pertanto la (18) è dimostrata.

Consideriamo ora l'indicatrice di crescenza della funzione $F(z)$

(22) $$h_F(\varphi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log|F(re^{i\varphi})|}{U(r)}.$$

La diseguaglianza (3) mostra che, per $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, si devè avere $h_F(\varphi) \leqq 0$, e la diseguaglianza (19) mostra che $h_F(0) \leqq -A$. Ora, se $h_F(\varphi)$ non è identicamente uguale a $-\infty$, possiamo applicare un teorema di PHRAGMÈN-LINDELÖF [8], il quale ci permette di affermare che, in tutto l'intervallo $\alpha < \varphi < \beta$, deve essere $h_F(\varphi) < 0$; ed un altro teorema di PHRAGMÈN-LINDELÖF [9] permette di affermare che, in tali condizioni, si deve avere $\beta - \alpha \leqq \frac{\pi}{k}$; ed infine un terzo teorema di PHRAGMÈN-LINDELÖF [10] permette di affermare che allora si deve avere

(23) $$\begin{cases} h_F(\varphi) \leqq -A_1 \dfrac{\operatorname{sen}(\varphi-\alpha)}{|\operatorname{sen}\alpha|} & \text{per } \alpha < \varphi \leqq 0, \\ h_F(\varphi) \leqq -A_2 \dfrac{\operatorname{sen}(\beta-\varphi)}{\operatorname{sen}\beta} & \text{per } 0 \leqq \varphi < \beta. \end{cases}$$

([8]) Vedi loc. cit. in ([5]), p. 399. I teoremi di PHRAGMÈN-LINDELŐF presuppongono in realtà che la funzione $U(x)$, che figura nel denominatore del secondo membro della (22), non solo soddisfa alle (1) per x reale, ma che essa è per di più olomorfa nel settore $|\arg x| \leqq \frac{\pi}{k}$, e soddisfa in questo settore alla condizione $U(re^{i\varphi}) \backsim U(r)e^{ik\varphi}$. Il VALIRON ha però dimostrato (vedi loc. cit. in ([3])) che ad ogni funzione di variabile reale $U(r)$ che soddisfa alle (1), corrisponde una funzione $V(x)$ soddisfacente alle condizioni di PHRAGMÈN-LINDELÖF e tale che, per i valori reali di x, si ha $V(x) \backsim U(x)$ quando $x \to \infty$. Ne scende che i teoremi di PHRAGMÈN-LINDELŐF possono essere applicati anche all'indicatrice di crescenza definita dalla formola (22).

([9]) Vedi loc. cit. in ([5]), p. 400.

([10]) Vedi loc. cit. in ([5]), p. 396.

Infine, possiamo mostrare che, anche nel caso in cui $h_F(\varphi)$ è identicamente uguale a $-\infty$ in tutto l'intervallo $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, si deve avere $\beta-\alpha \leqq \frac{\pi}{k}$. Infatti, se esiste un numero positivo $k_1 > k$, per il quale l'espressione $|e^{r^{k_1}} F(re^{i\varphi})|$ rimane limitata per $r \to \infty$, qualunque sia il valore di φ compreso fra α e β, un teorema di WATSON-NEVANLINNA ([11]) permette di asserire che si deve avere $\beta-\alpha \leqq \frac{\pi}{k_1} < \frac{\pi}{k}$. Se un simile valore di k non esiste, i lavori del VALIRON ([12]) permettono di asserire che esiste un ordine precisato $\varrho_1(r)$, per il quale l'indicatrice di crescenza

$$\lambda(\varphi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho_1(r)}}$$

è finita e non identicamente nulla nell'intervallo $\alpha < \varphi < \beta$. Quest'ordine precisato $\varrho_1(r)$ soddisferà allora alle due condizioni

$$\lim_{r=\infty} \varrho_1(r) = k, \qquad \lim_{r=\infty} \frac{U(r)}{r^{\varrho_1(r)}} = 0. \tag{24}$$

Infatti, se la seconda di queste condizioni non fosse soddisfatta, dalla condizione $h_F(\varphi) \equiv -\infty$ scenderebbe che anche $\lambda(\varphi) \equiv -\infty$; e se la prima delle (24) non fosse soddisfatta, esisterebbe un $k_1 > k$ soddisfacente alle condizioni poc'anzi specificate.

Ciò posto, dalla (3) scende che $\lambda(\varphi) \leqq 0$ in tutto l'intervallo $\alpha < \varphi < \beta$; e siccome $\lambda(\varphi)$ non è identicamente nulla in quest'intervallo, potremo concludere, per il teorema di PHRAGMÈN-LINDELÖF citato in ([8]), che in tutto l'intervallo $\alpha < \varphi < \beta$ deve essere $\lambda(\varphi) < 0$; ed allora, la prima delle (24) ci permetterà di affermare, per il teorema di PHRAGMÈN-LINDELÖF citato in ([9]), che $\beta-\alpha \leqq \frac{\pi}{k}$. Il nostro asserto è dunque dimostrato.

4. - Sin qui abbiamo sempre supposto che la funzione $F(z)$ soddisfacesse alla condizione (3) nel settore Σ. Consideriamo ora il caso in cui non esiste nessun settore $\Sigma_1(\alpha_1 \leqq \arg z \leqq \beta_1)$, comprendente il semi-asse reale positivo, nel quale questa condizione (3) sia soddisfatta. Si può dimostrare che allora non esisterà neppure nessun settore $\Sigma_2(\alpha_2 \leqq \arg z \leqq \beta_2)$, comprendente il semi-asse reale positivo, nel quale sia soddisfatta (uniformemente rispetto alla φ) la condizione meno restrittiva

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{U(r)} \leqq B < +\infty, \tag{25}$$

ove B denota una qualsiasi costante positiva fissa (anche arbitrariamente grande).

([11]) Vedi WATSON: *A theory of asymptotic series.* (Trans. Royal. Soc. of London, vol. 211, pp. 279-313), oppure R. e F. NEVANLINNA: *Über die Eigenschaften analyt. Funktionen, etc.* (Acta Soc. Scient. Fenn., t. 50, n.° 5).

([12]) Vedi loc. cit. in ([2]).

Infatti, dalla supposizione che la diseguaglianza (3) non sia soddisfatta in nessun settore Σ_1 comprendente il semi-asse reale positivo scende, per la continuità dell'indicatrice $h_F(\varphi)$ ([13]), che si deve avere

$$h_F(0) \geqq 0. \tag{26}$$

D'altra parte, se esistesse un settore Σ_2 comprendente il semi-asse reale positivo, nel quale la (25) fosse soddisfatta, si potrebbe ripetere, per questo settore, quasi tutto il ragionamento dei paragrafi precedenti. Si dovrebbe solo scrivere B al posto di zero, al secondo membro delle diseguaglianze (3), (10), (12) e (15), ma, salvo questa modifica, il ragionamento dei paragrafi precedenti potrebbe essere ripetuto tale quale. E si arriverebbe come prima alla conclusione che $h_F(0) \leqq -A < 0$, ciò che sarebbe in contrasto colla (26). Vediamo dunque che, se la diseguaglianza (25) non è soddisfatta in nessun settore Σ_1 comprendente il semi-asse reale positivo, la diseguaglianza (26) non può neppure essere soddisfatta in un tale settore. Deve dunque esistere una successione di punti $z_1, z_2, \ldots, z_n = r_n e^{i\varphi_n}, \ldots$ soddisfacenti alle condizioni

$$\lim_{n=\infty} r_n = +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} \varphi_n = 0,$$

e per i quali

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |F(r_n e^{i\varphi_n})|}{U(r_n)} = +\infty.$$

Siamo così arrivati alla conclusione seguente:

Se la funzione $F(z)$, olomorfa in un settore Σ comprendente la semi-retta $\Delta(\arg z = \gamma)$, soddisfa alla diseguaglianza

$$\log |F(re^{i\gamma})| < -A\,U(r) \tag{2}$$

in tutti i punti della semi-retta Δ, all'eccezione, tutt'al più, dei punti di un insieme E di densità lineare nulla, si può asserire che, oppure la funzione $F(z)$ soddisfa, sulla semi-retta Δ, alla diseguaglianza

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(re^{i\gamma})|}{U(r)} \leqq -A, \tag{27}$$

e decresce almeno come $e^{-CU(r)}$ (C-costante positiva) in un certo settore che comprende la semi-retta Δ ([14]), *oppure questa funzione $F(z)$ cresce più rapidamente di $e^{BU(r)}$ in ogni settore comprendente la semi-retta Δ, e ciò, comunque grande sia la costante positiva B.*

([13]) Vedi loc. cit. in ([5]), p. 398.

([14]) Il comportamento di $F(z)$ è, in questo caso, caratterizzato con maggior precisione dalle formole (23), nelle quali si dovrà però mettere $\varphi - \gamma$ al posto di φ.

5. - Dobbiamo ora completare la dimostrazione di questa proposizione nella parte che si riferisce alla possibilità di definire la successione di numeri positivi $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ in modo tale, che siano soddisfatte le condizioni (14), e che nessuno dei punti $X(R_n)$ possa appartenere all'insieme E.

Riprendiamo la funzione di variabile reale $u(r)$, definita, per r abbastanza grande, come la funzione inversa di $r=X(x)$. Definiamo un numero positivo r_0 in modo tale che $u(r)$ sia definita (in modo univoco) per $r \geqq r_0$; allora, se r percorre la parte dell'insieme E situata a destra di r_0, il punto $x=u(r)$ percorre un certo insieme U. E se x è un punto dell'insieme U, è chiaro che il punto $X(x)$ dovrà appartenere all'insieme E.

Cominciamo col mostrare che l'insieme U ha anch'esso una densità lineare nulla. Poniamo $R_0=u(r_0)$ ed indichiamo con ξ un numero positivo arbitrario, superiore a R_0. Allora, se U_ξ^δ denota la parte dell'insieme U che appartiene all'intervallo $\xi \leqq x \leqq \xi(1+\delta)$, possiamo scrivere

$$m_\xi^\delta = \text{mis. } U_\xi^\delta = \int_{U_\xi^\delta} dx.$$

D'altra parte, se indichiamo con E_ξ^δ la parte dell'insieme E che corrisponde a U_ξ^δ, avremo

$$M_\xi^\delta = \text{mis. } E_\xi^\delta = \int_{E_\xi^\delta} dr = \int_{U_\xi^\delta} X'(x)dx.$$

Dunque, se μ denota il limite inferiore d'indeterminazione di $X'(x)$ sull'intervallo $\xi \leqq x \leqq \xi(1+\delta)$, possiamo scrivere che

$$M_\xi^\delta \geqq \mu \int_{U_\xi^\delta} dx = \mu m_\xi^\delta. \tag{28}$$

Ora, l'insieme E_ξ^δ appartiene certamente all'intervallo $X(\xi) \leqq r \leqq X[\xi(1+\delta)]$. Dalle formole (7) e (8) scende però quasi subito che, quando $\xi \to \infty$, il rapporto $X[\xi(1+\delta)] : X(\xi)$ tende al limite $(1+\delta)^{\frac{1}{k}}$ ([15]). Dunque, se α è un numero arbitrario superiore ad 1, esiste un $\xi_1(\geqq R_0)$ tale che, per $\xi \geqq \xi_1$, si ha

$$X[\xi(1+\delta)] < \alpha(1+\delta)^{\frac{1}{k}} X(\xi). \tag{28'}$$

Pertanto, se $\xi \geqq \xi_1$, l'insieme E_ξ^δ è compreso nell'intervallo $X(\xi) \leqq r \leqq \alpha(1+\delta)^{\frac{1}{k}} X(\xi)$. Da questo possiamo dedurre che, qualora ω è un numero positivo piccolo a piacere, si può determinare un $\xi_2(\geqq \xi_1)$ in modo tale che, per $\xi \geqq \xi_2$, si abbia

$$M_\xi^\delta < \omega X(\xi). \tag{28''}$$

([15]) Cfr. loc. cit. in ([4]).

La (28) dà allora

(29) $$m_\xi^\delta < \frac{\omega X(\xi)}{\mu}.$$

In questa diseguaglianza μ denota il limite inferiore d'indeterminazione di $X'(x)$ nell'intervallo $\xi \leqq x \leqq \xi(1+\delta)$. La (8) mostra però che, per ξ abbastanza grande, si ha

(29') $$X'(x) > \frac{1}{ak}\frac{X(x)}{x};$$

e siccome, per $x > R_0$, $X(x)$ deve crescere insieme colla x, si vede subito che, per ξ abbastanza grande, si deve avere

(29'') $$\mu > \frac{1}{ak}\frac{X(\xi)}{\xi(1+\delta)}.$$

Dalla (29) scende dunque che, per ξ abbastanza grande, si deve avere

(29''') $$m_\xi^\delta < ak(1+\delta)\omega\xi.$$

Siano ora δ e η due numeri positivi, piccoli a piacere. Basta prendere nel ragionamento precedente $\omega = \frac{\eta}{ak(1+\delta)}$ per assicurarsi che esiste un numero $\xi_0 = \xi_0(\delta, \eta)$ tale che, per $\xi \geqq \xi_0$, si ha $m_\xi^\delta < \eta\xi$. E questo significa (secondo le nostre convenzioni) che la densità lineare dell'insieme U è nulla, come l'abbiamo asserito al principio di questo numero.

6. - Diamo ora a ξ un valore fisso, e, per abbreviare le notazioni, indichiamo con I_ξ^δ l'intervallo $\xi \leqq x \leqq \xi(1+\delta)$. Abbiamo già detto nel n.º 1 che si può ammettere, senza menomare la generalità del ragionamento, che l'insieme E sia un plurintervallo aperto. Anche l'insieme U sarà allora un plurintervallo aperto, e lo stesso si potrà dire della parte dell'insieme U che appartiene all'intervallo I_ξ^δ. Indichiamo questa parte con U_ξ^δ; allora è ovvio che l'insieme V_ξ^δ, complementare di U_ξ^δ sull'intervallo I_ξ^δ, sarà un plurintervallo chiuso. In tali condizioni, possiamo parlare del primo punto ξ_1 dell'intervallo I_ξ^δ che appartiene a V_ξ^δ. Un tale punto esisterà certamente se l'intervallo I_ξ^δ non appartiene per intero all'insieme U; esso coinciderà col punto ξ, se questo punto non appartiene all'insieme U; se invece ξ appartiene a U, ξ_1 sarà diverso da ξ, ed in questo caso tutto l'intervallo $\xi \leqq x < \xi_1$ dovrà far parte dell'insieme U_ξ^δ.

Poniamo ora $\xi_1' = \xi_1 + \frac{1}{d}$ ed indichiamo con ξ_2 il primo punto dell'intervallo $\xi_1' \leqq x \leqq \xi(1+\delta)$ che non appartiene all'insieme U. Questo punto coincide con ξ_1' se quest'ultimo non appartiene a U_ξ^δ; se invece $\xi_2 > \xi_1'$, allora tutto l'intervallo $\xi_1' \leqq x < \xi_2$ deve far parte di U_ξ^δ. Proseguendo così, possiamo definire due successioni di punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, e $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_m'$, tutti appartenenti all'intervallo I_ξ^δ, e soddisfacenti alle condizioni seguenti:

1ª) nessuno dei punti ξ_ν appartiene all'insieme U;

2^a) per ogni ν, si ha $\xi_{\nu+1} \geqq \xi_\nu' = \xi_\nu + \frac{1}{d}$;

3^a) se $\xi_{\nu+1} > \xi_\nu'$, allora tutto l'intervallo $\xi_\nu' \leqq x < \xi_{\nu+1}$ appartiene all'insieme U_ξ^δ.

I punti ξ_ν e ξ_ν' ($\nu = 1, 2, ..., m$) dividono l'intervallo I_ξ^δ in tre sistemi d'intervalli: gli intervalli $\xi_\nu \leqq x < \xi_\nu'$, ($\nu = 1, 2, ..., m$), ciascuno dei quali ha una lunghezza uguale a $\frac{1}{d}$, gli intervalli $\xi'_{\nu-1} \leqq x < \xi_\nu$ ($\nu = 1, 2, ..., m$; $\xi_0' = \xi$) che appartengono per intero all'insieme U_ξ^δ, e finalmente l'intervallo $\xi_m' \leqq x \leqq \xi(1+\delta)$. L'ultimo intervallo può appartenere per intero all'insieme U_ξ^δ, oppure esso può essere formato da due parti, la prima delle quali (che possiamo indicare con $\xi_m' \leqq x < \xi_{m+1}$) appartiene all'insieme U_ξ^δ, mentre la seconda ha una lunghezza non superiore a $\frac{1}{d}$. Infatti, se l'intervallo $\xi_{m+1} \leqq x \leqq \xi(1+\delta)$ avesse una lunghezza superiore a $\frac{1}{d}$, il punto $\xi'_{m+1} = \xi_{m+1} + \frac{1}{d}$ apparterrebbe ancora all'intervallo I_ξ^δ, e dunque la successione dei punti ξ_ν, ξ_ν', non si fermerebbe ai punti ξ_m, ξ_m', ma potrebbe essere proseguita oltre questi punti. Da tutto questo scende che il numero m dei punti ξ_ν che possiamo costruire nell'intervallo I_ξ^δ deve soddisfare le diseguaglianze

$$\delta\xi \geqq \frac{m}{d} \geqq \delta\xi - \text{mis. } U_\xi^\delta - \frac{1}{d}. \tag{30}$$

Ammettiamo che il valore di ξ sia superiore al $\xi_0(\delta, \eta)$, che abbiamo definito alla fine del n.° 5. In tal caso, la misura di U_ξ^δ sarà inferiore a $\eta\xi$, e le diseguaglianze (30) ci daranno

$$\delta\xi \geqq \frac{m}{d} \geqq (\delta - \eta)\xi - \frac{1}{d}. \tag{31}$$

Consideriamo infine un intervallo $I_\xi^{\delta_1}$, nel quale ξ ha un valore superiore a $\xi_0(\delta, \eta)$, ma δ_1 è inferiore a δ. È chiaro che le diseguaglianze (30) saranno applicabili a quest'intervallo, e lo stesso potrà dirsi delle diseguaglianze

$$\delta_1\xi \geqq \frac{m}{d} \geqq \delta_1\xi - \text{mis. } U_\xi^{\delta_1} - \frac{1}{d}. \tag{32}$$

D'altra parte, l'intervallo $I_\xi^{\delta_1}$ sarà compreso nell'intervallo I_ξ^δ e dunque l'insieme $U_\xi^{\delta_1}$ sarà un sotto-insieme dell'insieme U_ξ^δ. La misura di $U_\xi^{\delta_1}$ sarà dunque inferiore a $\eta\xi$, e le diseguaglianze (32) ci permetteranno di scrivere che si deve avere

$$\delta_1\xi \geqq \frac{m}{d} \geqq (\delta_1 - \eta)\xi - \frac{1}{d}. \tag{33}$$

7. - Segniamo adesso, sull'asse reale, i punti $(1+\delta)^k$ ($k = 1, 2, ...$) ed indichiamo con I_k l'intervallo $(1+\delta)^k \leqq x \leqq (1+\delta)^{k+1}$. A ciascuno degli intervalli I_k ($k = 1, 2, ...$) si può applicare il ragionamento del numero precedente; indichiamo dunque con $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$, ..., $\xi_{m_k}^{(k)}$ i punti dell'intervallo I_k che, colle notazioni del n.° 6, sarebbero indicati con ξ_1, ξ_2, ..., ξ_m. Scriviamo poi di seguito, in ordine di crescenza tutti i punti $\xi_\nu^{(k)}$ ($\nu = 1, 2, ..., m_k$; $k = 1, 2, ...$) ed indichiamo con R_1, R_2, ..., R_n, ... la successione di punti così ottenuta.

Si vede subito che questa successione di punti soddisfa alla condizione

$$\varliminf_{n=\infty} (R_{n+1}-R_n) \geqq \frac{1}{d}. \tag{34}$$

Infatti, se i punti R_{n+1} e R_n appartengono al medesimo intervallo I_k, avremo $R_{n+1}-R_n \geqq \frac{1}{d}$, per lo stesso modo di costruzione dei punti $\xi_\nu^{(k)}$. Se invece i punti R_n e R_{n+1} appartengono a due intervalli consecutivi I_k e I_{k+1}, il punto R_n coinciderà col punto $\xi_{m_k}^{(k)}$, cioè coll'ultimo punto ξ_ν dell'intervallo I_k (secondo le notazioni del n.° 6); a questo punto ξ_ν dovrà corrispondere un punto $\xi_\nu'=\xi_\nu+\frac{1}{d}$ (sempre colle notazioni del n.° 6) che dovrà ancora appartenere all'intervallo I_k. Il punto R_{n+1} apparterrà invece all'intervallo I_{k+1}, e pertanto la differenza $R_{n+1}-R_n$ dovrà essere superiore a $\frac{1}{d}$. Si ha dunque $R_{n+1}-R_n \geqq \frac{1}{d}$, qualunque sia il valore dell'indice n, e questo dimostra la validità della diseguaglianza (34).

Mostriamo ora che la successione $R_1, R_2,\ldots, R_n,\ldots$ soddisfa anche alla condizione

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{R_n} = d. \tag{35}$$

Indichiamo con η un numero positivo, piccolo a piacere, e definiamo il più piccolo indice k_1, per il quale $(1+\delta)^{k_1}$ è superiore a $\xi_0(\delta, \eta)$. Le diseguaglianze (31) sono allora applicabili a tutti gli intervalli I_k con $k \geqq k_1$, dimodochè, non appena $k \geqq k_1$, si deve avere

$$d\delta\xi \geqq m_k \geqq d(\delta-\eta)\xi - 1. \tag{36}$$

Sia adesso R un numero arbitrariamente grande, e ad ogni modo superiore a $\xi_0(\delta, \eta)$. Indichiamo con $N(R)$ il numero dei punti R_n che non sorpassano R, e definiamo l'indice μ per mezzo della condizione

$$(1+\delta)^\mu \leqq R < (1+\delta)^{\mu+1};$$

indichiamo inoltre con N_1 il numero dei punti R_n che appartengono agli intervalli I_k con $k<k_1$, e sia m il numero dei punti R_n compresi fra $(1+\delta)^\mu$ e R. Si avrà allora

$$N(R) = N_1 + \sum_{k=k_1}^{k=\mu-1} m_k + m. \tag{37}$$

Dalle diseguaglianze (36) risulta però che

$$d\delta \sum_{k=k_1}^{k=\mu-1} (1+\delta)^k \geqq \sum_{k=k_1}^{k=\mu-1} m_k \geqq d(\delta-\eta) \sum_{k=k_1}^{k=\mu-1} (1+\delta)^k - (\mu - k_1).$$

Si ha dunque

$$d(1+\delta)^\mu \geqq \sum_{k=k_1}^{k=\mu-1} m_k \geqq d\left(1-\frac{\eta}{\delta}\right)(1+\delta)^\mu - d(1+\delta)^{k_1} - \mu. \tag{38}$$

D'altra parte, le diseguaglianze (33) possono essere applicate all'intervallo $(1+\delta)^\mu \leqq x \leqq R$. Ne scende che

$$d[R-(1+\delta)^\mu] \geqq m \geqq d[R-(1+\delta)^\mu - \eta R]-1. \tag{39}$$

Dalle (37), (38) e (39) scende subito che

$$dR+N_1 \geqq N(R) \geqq dR - d(1+\delta)^\mu \frac{\eta}{\delta} - d(1+\delta)^{k_1} - (\mu+1). \tag{40}$$

Supponiamo ora che R sia abbastanza grande perchè si abbia

$$N_1 < \varepsilon R, \qquad d(1+\delta)^{k_1} < \varepsilon R, \qquad \mu \leqq \frac{\log R}{\log(1+\delta)} < \varepsilon R.$$

Le diseguaglianze (40) ci permetteranno allora di scrivere che

$$d+\varepsilon \geqq \frac{N(R)}{R} \geqq d - \frac{d\eta}{\delta} - 3\varepsilon.$$

E siccome tanto ε come η sono dei numeri positivi piccoli a piacere, si vede che il rapporto $\frac{N(R)}{R}$ tende al limite d quando $R \to \infty$. E questo dimostra appunto che la successione $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ soddisfa alla condizione (35).

Abbiamo dunque dimostrato che, qualunque sia il numero positivo d, è possibile costruire una successione di numeri positivi $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ soddisfacenti alle condizioni (34) e (35) (dunque anche alle (14)), e tali che nessuno dei punti R_n appartiene all'insieme U. In queste condizioni, nessuno dei punti $X(R_n)$ può appartenere all'insieme E, e il nostro asserto del n.° 2 è completamente dimostrato. E con ciò, è anche completamente dimostrata la proposizione del n.° 4.

8\. - I ragionamenti dei numeri precedenti permettono anche di lumeggiare un altro aspetto della crescenza delle funzioni olomorfe d'ordine finito.

Abbiasi una funzione $F(z)$, olomorfa e d'ordine finito non nullo in un settore $\Sigma(\alpha \leqq \arg z \leqq \beta)$. Come abbiamo già detto, a questa funzione corrisponde un ordine precisato $\varrho(r)$, cioè una funzione di variabile reale, soddisfacente alle condizioni

$$\lim_{r=\infty} \varrho(r) = \varrho > 0, \qquad \lim_{r=\infty} \varrho'(r) r \log r = 0, \tag{41}$$

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathfrak{M}(r)}{r^{\varrho(r)}} = 1,$$

ove si è posto

$$\mathfrak{M}(r) = \operatorname*{Max}_{\alpha \leqq \varphi \leqq \beta} |F(re^{i\varphi})| \quad ({}^{16}).$$

In tali condizioni, l'indicatrice di crescenza

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}} \tag{41'}$$

[16] Vedi VALIRON, loc. cit. in [2].

sara definita in tutto l'intervallo $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, ed avrà le proprietà constatate da PHRAGMÈN-LINDELÖF, PÓLYA, VALIRON ed altri ([17]).

Sia adesso ε un numero positivo, piccolo a piacere. La diseguaglianza

$$\log |F(re^{i\varphi})| < [h(\varphi) + \varepsilon] r^{\varrho(r)} \qquad (\alpha \leqq \varphi \leqq \beta)$$

sarà allora soddisfatta per tutti i valori abbastanza grandi di r, mentre la diseguaglianza inversa

$$\log |F(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r^{\varrho(r)}$$

sarà soddisfatta, sopra ogni semi-retta $\arg z = \varphi$, in un certo insieme di punti $H_{\varepsilon, \varphi}$, che si estende all'infinito.

Alcuni scienzati si sono proposti di studiare quest'ultimo insieme, e la Sig.na CARTWRIGHT ha ottenuto dei risultati precisi nel caso in cui l'indicatrice di crescenza $h(\varphi)$ è una funzione della forma

$$h(\varphi) = A \cos \varrho\varphi + B \operatorname{sen} \varrho\varphi \quad ([18]).$$

Vogliamo mostrare qui che i risultati dei numeri precedenti permettono di stabilire qualche proprietà dell'insieme $H_{\varepsilon, \varphi}$ anche nel caso generale (cioè quando non si fanno supposizioni particolari sulla forma dell'indicatrice di crescenza $h(\varphi)$).

Infatti, la proposizione del n.° 4 permette di asserire che l'insieme $H_{\varepsilon, \varphi}$ non può avere una densità lineare nulla. Questo fatto risulta immediatamente da quella proposizione quando $h(\varphi) \leqq 0$; infatti, $h(\varphi) - \varepsilon$ è allora un numero negativo, e basta applicare la proposizione del n.° 4 ponendo $-A = h(\varphi) - \varepsilon$ per constatare che, se $H_{\varepsilon, \varphi}$ avesse una densità lineare nulla, si dovrebbe avere

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log |F(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}} \leqq h(\varphi) - \varepsilon \quad ([19])$$

e questo sarebbe in contrasto con la definizione di $h(\varphi)$.

Sia adesso $h(\varphi) > 0$; consideriamo la funzione analitica $V(z)$, olomorfa nel settore $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2\varrho}$, e soddisfacente in questo settore (uniformemente rispetto alla ψ) alla condizione

$$\lim_{r=\infty} \frac{V(re^{i\psi})}{r^{\varrho(r)}} = \cos \varrho\psi \quad ([20]).$$

La proposizione del n.° 4 può essere applicata alla funzione

$$\Phi(z) = F(z) e^{-2h(\varphi) V(ze^{-i\varphi})}.$$

([17]) Vedi loc. cit. in ([5]), ([6]), ([8]).

([18]) Comptes Rendus, t. 194, 1932, p. 1718.

([19]) Dalle (41) risulta infatti che la funzione $U(r) = r^{\varrho(r)}$ soddisfa alla condizione (1).

([20]) Abbiamo già detto al n.° 1, che l'esistenza di una simile funzione è stata dimostrata dal VALIRON (vedi loc. cit. in ([3])).

Per i valori abbastanza grandi di r, per i quali il punto $re^{i\varphi}$ non appartiene all'insieme $H_{\varepsilon,\varphi}$, questa funzione verifica la diseguaglianza

$$\log|\Phi(re^{i\varphi})| < -\left[h(\varphi)+\frac{\varepsilon}{2}\right] r^{\varrho(r)};$$

d'altra parte, se Σ_1 è un settore che fa parte tanto del settore Σ, quanto del settore $\varphi-\frac{\pi}{2\varrho}<|\arg z|<\varphi+\frac{\pi}{2\varrho}$, la funzione $\Phi(z)$ soddisfa in questo settore Σ_1 (uniformemente rispetto alla ψ) alla condizione

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log|\Phi(re^{i\psi})|}{r^{\varrho(r)}} = h(\psi)-2h(\varphi)\cos\varrho(\psi-\varphi) < +\infty. \tag{42}$$

La proposizione del n.° 4 mostra dunque che, se $H_{\varepsilon,\varphi}$ avesse una densità lineare nulla, si dovrebbe avere

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho(r)}} \leqq -\left[h(\varphi)+\frac{\varepsilon}{2}\right];$$

ma allora, per la prima parte della (42), si avrebbe

$$-h(\varphi) \leqq -\left[h(\varphi)+\frac{\varepsilon}{2}\right],$$

e questo è assurdo.

Vediamo dunque che l'insieme $H_{\varepsilon,\varphi}$ non può in nessun caso avere una densità lineare nulla. Possiamo dunque dire di aver dimostrato la proposizione seguente:

Su ogni semi-retta $\arg z=\varphi$ *del settore* Σ *esiste una successione d'intervalli* $r_k \leqq |z| \leqq (1+\delta)r_k$ $[k=1,2,....;\ \lim r_k=\infty;\ \delta>0]$, *sopra ciascuno dei quali la diseguaglianza*

$$\log|F(re^{i\varphi})| > [h(\varphi)-\varepsilon]r^{\varrho(r)}$$

è soddisfatta in un insieme di punti, la cui misura è superiore a ηr_k, *ove* η *è una costante positiva che dipende solo da* δ.

9. - Indichiamo, per terminare, un'altra applicazione della proposizione del n.° 4.

Abbiasi una funzione $F(z)$, olomorfa e limitata in un settore che comprende il semi-asse reale positivo, e si supponga che l'integrale

$$\int_0^\infty F(z)e^{U(z)}dz \tag{43}$$

ove $U(z)$ ha lo stesso significato del n.° 1, sia assolutamente convergente. Dalla convergenza assoluta di questo integrale si può solo dedurre che l'insieme dei punti, nei quali è soddisfatta la diseguaglianza

$$|F(z)e^{U(z)}| \geqq 1$$

ha una misura finita. Ma la proposizione del n.º 4 permette di affermare che, in questo caso, si deve avere

$$\overline{\lim_{z=\infty}} \frac{\log |F(z)|}{U(z)} \leqq -1.$$

La nostra proposizione permette dunque di dedurre dalla convergenza assoluta dell'integrale (43) che, comunque piccolo sia il numero positivo ε, si ha, per z abbastanza grande,

$$|F(z)| < e^{-(1-\varepsilon)U(z)}. \tag{44}$$

La teoria delle famiglie normali permetterebbe di arrivare al medesimo risultato, se si sapesse che $F(z)$ non si annulla in un settore comprendente l'asse reale; basterebbe allora applicare un teorema di OSTROWSKI [21] per dimostrare la diseguaglianza (44). Ma se non si vuol introdurre la restrizione relativa al non annullarsi di $F(z)$, non pare che la teoria delle famiglie normali sia applicabile.

COMPLEMENTO

Quando questa Memoria era già composta ed impaginata, sono riuscito a generalizzare, nel modo che ora indicherò, le proposizioni in essa dimostrate.

Conveniamo di chiamare *larghezza relativa* di un intervallo I il rapporto della sua lunghezza alla sua distanza dall'origine. Chiamiamo inoltre *densità lineare media dell'insieme E sull'intervallo I* il rapporto della misura di EI [22] alla lunghezza di I.

Ciò posto, la proposizione dimostrata nel n.º 8 può essere sostituita col seguente

TEOREMA I. - *Se $F(z)$ è una funzione olomorfa e d'ordine precisato $\varrho(r)$ nel settore Σ, e $h(\varphi)$ è la sua indicatrice di crescenza* [23], *allora ad ogni coppia di numeri positivi arbitrariamente piccoli ε e ω si può far corrispondere, su ogni semi-retta* $\arg z = \varphi$ *compresa nel settore Σ, una successione d'intervalli*

$$r_k \leqq |z| \leqq r_k(1+\delta) \qquad [k=1, 2, \ldots; \lim_{k=\infty} r_k = \infty], \tag{45}$$

su ciascuno dei quali l'insieme $H_{\varepsilon,\varphi}$ dei punti della semi-retta, nei quali è soddisfatta la diseguaglianza

$$\log |F(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r^{\varrho(r)},$$

---

[21] Vedi, per esempio, MONTEL: *Familles normales*, Paris, 1927, pp. 197-200.

[22] EI è la notazione topologica che serve ad indicare la parte dell'insieme E che appartiene all'intervallo I.

[23] Vedi la formola (41') del n.º 8.

ha una densità lineare media superiore a $1-\omega$ ([24]); δ *è un numero positivo che può dipendere solo da* ε *e* ω.

Per dimostrare questo teorema è necessario generalizzare prima la proposizione del n.° 4. Facciamo a questo scopo le convenzioni seguenti: chiamiamo *densità lineare superiore di base* $(1;\, 1+\delta)$ *dell'insieme* E, il limite superiore, per $\xi \to \infty$, della densità lineare media di E sull'intervallo $\xi \leqq z \leqq \xi(1+\delta)$; chiamiamo poi *densità lineare massima* di E il limite, per $\delta \to 0$, della sua densità lineare superiore di base $(1;\, 1+\delta)$ (è facile dimostrare che questo limite esiste certamente). Ciò posto, abbiamo il seguente

TEOREMA II. - *La conclusione della proposizione del n.° 4 rimane vera anche se si suppone soltanto che l'insieme* E *abbia una densità lineare massima inferiore ad* 1.

Per dimostrare questo teorema, possiamo prima di tutto notare che nei ragionamenti dei n.i 1-4 non ci siamo mai serviti della condizione secondo la quale la densità lineare di E doveva essere nulla. Pertanto, i soli ragionamenti che dobbiamo rivedere sono quelli dei n.i 5-7.

Indichiamo con θ la densità lineare massima dell'insieme E (supposta inferiore ad 1), e con $\theta(\Delta)$ la sua densità lineare superiore di base $(1;\, 1+\Delta)$. Il ragionamento del n.° 5 può essere ripetuto tale quale sino alla formola (28'), ma la formola (28'') non sarà più valida nel caso attuale. Però, se diamo a δ un valore tale che si abbia

$$a(1+\delta)^{\frac{1}{k}} = 1+\Delta, \tag{46}$$

e se indichiamo con θ' un numero arbitrario superiore a $\theta(\Delta)$, potremo affermare, in base alla (28'), che, per ξ abbastanza grande, si deve avere

$$M_\xi^\delta < \theta' \Delta X(\xi),$$

e dunque, per la (28),

$$m_\xi^\delta < \frac{1}{\mu}\, \theta' \Delta X(\xi).$$

Ma le formole (29') e (29'') del n.° 5 sono valide anche nel caso attuale. La (29''') può dunque essere sostituita, per ξ abbastanza grande, dalla diseguaglianza

$$m_\xi^\delta < ak(1+\delta)\theta'\Delta\xi$$

e questa diseguaglianza mostra che la densità lineare superiore di base $(1;\, 1+\delta)$ dell'insieme U non è superiore a $\dfrac{ak(1+\delta)\Delta\theta'}{\delta}$. Basta ora far tendere δ verso zero, tenendo conto della (46), per vedere che la densità lineare massima dell'insieme U non può essere superiore a $a^2\theta'$. E siccome il numero a può essere preso arbitrariamente vicino ad 1, possiamo concludere che la densità lineare massima di U non può essere superiore a quella di E.

([24]) Notiamo che la densità media non può mai essere superiore ad 1.

Passiamo adesso al ragionamento del n.° 6. La prima parte di questo ragionamento, sino alla formola (30) inclusa, rimane valida anche colle nostre supposizioni attuali. Se θ_0 è un numero superiore a θ, e se ξ è abbastanza grande, la misura di U_ξ^δ sarà inferiore a $\theta_0 \delta \xi$; le diseguaglianze (30) ci dànno dunque

$$\delta\xi \geqq \frac{m}{d} \geqq \delta(1-\theta_0)\xi - \frac{1}{d}. \tag{47}$$

Per ogni $\delta > 0$, queste diseguaglianze sono valide non appena ξ sarà superiore ad un certo valore ξ_0, che potrà anche dipendere da valore di δ.

Diamo ora a δ un certo valore δ_1 e determiniamo i numeri δ_2, δ_3,.... in modo che si abbia, per ogni ν,

$$(1+\delta_\nu)^2 = (1+\delta_{\nu-1}). \tag{48}$$

Ciò fatto, determiniamo per ciascuno dei δ_ν il valore $\xi_0^{(\nu)}$, a partire dal quale le corrispondenti diseguaglianze (47) sono valide, e consideriamo una successione di numeri infinitamente crescenti p_1, p_2,.... scelti in modo tale che, per ogni ν, si abbia in primo luogo $p_\nu > \xi_0^{(\nu)}$, ed in secondo luogo $p_\nu > 2^{2\nu}$.

Consideriamo ora gli intervalli I_k: $(1+\delta_1)^k \leqq x \leqq (1+\delta_1)^{k+1}$ $(k = k_1, k_1+1,...., k_2-1)$, ove k_1 e k_2 sono i più piccoli numeri interi per i quali si ha rispettivamente $(1+\delta_1)^{k_1} > p_1$ e $(1+\delta_1)^{k_2} > p_2$. In ciascuno di questi intervalli I_k possiamo segnare i punti $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$,...., $\xi_{m_k}^{(k)}$ costruiti col procedimento del n.° 6; il numero m_k di questi punti soddisferà, in base alle (47), alle diseguaglianze

$$d\delta_1\xi \geqq m_k \geqq d\delta_1(1-\theta_0)(1+\delta_1)^k - 1.$$

Ora, invece di segnare *tutti* i punti ai quali conduce il ragionamento del n.° 6 (come l'avevamo fatto nel n.° 7), segniamo adesso (in ciascuno degli intervalli I_k) solo i primi punti, fermandoci non appena il numero m_k dei punti segnati avrà raggiunto il valore definito dalle diseguaglianze

$$d\delta_1(1-\theta_0)(1+\delta_1)^k > m_k \geqq d\delta_1(1-\theta_0)(1+\delta_1)^k - 1.$$

Consideriamo ora gli intervalli I_k: $(1+\delta_2)^k \leqq x \leqq (1+\delta_2)^{k+1}$ $(k = 2k_2, 2k_2+1,...., k_3-1)$, ove k_3 è il più piccolo numero intero per il quale $(1+\delta_2)^{k_3} > p_3$. Procedendo come un momento fa, potremo segnare in ciascuno di questi intervalli i punti $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$,...., $\xi_{m_k}^{(k)}$ in modo tale che il numero m_k di questi punti soddisfi le diseguaglianze

$$d\delta_2(1-\theta_0)(1+\delta_2)^k > m_k \geqq d\delta_2(1-\theta_0)(1+\delta_2)^k - 1.$$

In via generale, considereremo, per ogni ν, gli intervalli I_k: $(1+\delta_\nu)^k \leqq x \leqq (1+\delta_\nu)^{k+1}$ $(k = 2k_\nu, 2k_\nu+1,...., k_{\nu+1})$, ove $k_{\nu+1}$ è il più piccolo numero intero per il quale $(1+\delta_\nu)^{k_{\nu+1}} > p_{\nu+1}$, e segneremo in ciascuno di questi intervalli I_k i punti $\xi_1^{(k)}$, $\xi_2^{(k)}$,...., $\xi_{m_k}^{(k)}$ in modo tale che il numero m_k di questi punti soddisfi le diseguaglianze

$$d\delta_\nu(1-\theta_0)(1+\delta_\nu)^k > m_k \geqq d\delta_\nu(1-\theta_0)(1+\delta_\nu)^k - 1. \tag{49}$$

Scriviamo ora, in ordine di crescenza, tutti i punti segnati in ciascuno degli intervalli I_k testè considerati, e sia $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ la successione così ottenuta. Questa successione soddisfa ancora alla condizione (34) per gli stessi motivi del n.° 7. Mostreremo ora che essa soddisfa anche alla condizione

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{R_n} = d(1-\theta_0) \tag{50}$$

che si sostituisce alla (35) del n.° 7. Dalle diseguaglianze (49) scende subito che in numero $N_{\nu+1}$ dei punti R_n compresi fra $(1+\delta_\nu)^{2k_\nu}$ e $(1+\delta_\nu)^{k_{\nu+1}}$ verifica le diseguaglianze

$$\begin{aligned} d(1-\theta_0)[(1+\delta_\nu)^{k_{\nu+1}} - (1+\delta_\nu)^{2k_\nu}] > N_{\nu+1} \geqq \\ \geqq d(1-\theta_0)[(1+\delta_\nu)^{k_{\nu+1}} - (1+\delta_\nu)^{2k_\nu}] - (k_{\nu+1} - 2k_\nu). \end{aligned} \tag{51}$$

Sia ora R un numero arbitrariamente grande; definiamo l'indice ν dalla condizione $(1+\delta_\nu)^{2k_\nu} \leqq R < (1+\delta_\nu)^{k_{\nu+1}}$, e definiamo inoltre il numero intero μ dalla condizione $(1+\delta_\nu)^\mu \leqq R < (1+\delta_\nu)^{\mu+1}$. Le formole (48), (49) e (51) ci mostrano subito che il numero $N(R)$ dei punti R_n che sono inferiori ad R, soddisfa alle diseguaglianze

$$d(1-\theta_0)(1+\delta_\nu)^{\mu+1} > N(R) \geqq d(1-\theta_0)[(1+\delta_\nu)^\mu - (1+\delta_1)^{k_1}] - \mu. \tag{52}$$

Ora possiamo notare che $\mu \leqq \frac{\log R}{\log(1+\delta_\nu)} = \frac{2^\nu \log R}{\log(1+\delta_1)}$; d'altra parte, dalla condizione $p_\nu > 2^{2\nu}$ imposta alle costanti p_ν, e dal modo di scelta degli indici k_ν, scende che si deve avere $R > 2^{2\nu}$. Si avrà dunque $\mu < \frac{\sqrt{R}\log R}{\log(1+\delta_1)}$; le diseguaglianze (52) ci permettono pertanto di scrivere che

$$d(1-\theta_0)(1+\delta_\nu) > \frac{N(R)}{R} > d(1-\theta_0)\left\{\frac{1}{1+\delta_\nu} - \frac{(1+\delta_1)^{k_1}}{R}\right\} - \frac{\log R}{\sqrt{R}\log(1+\delta_1)}.$$

E siccome, per $R \to \infty$, δ_ν tende al limite zero, queste diseguaglianze mostrano che

$$\lim_{R=\infty} \frac{N(R)}{R} = d(1-\theta_0),$$

e questa formola è equivalente alla (50). La successione $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ soddisfa dunque alle condizioni (34) e (50), e pertanto essa soddisfa alle condizioni (14). Il teorema II è dunque dimostrato.

Per dimostrare ora anche il teorema I, basta riprendere il ragionamento del n.° 8; questo ragionamento mostra subito, quando si tien conto del teorema II, che la densità lineare massima di $H_{\varepsilon,\varphi}$ non può essere inferiore ad 1. È dunque possibile far corrispondere ad ogni ω un $\delta > 0$ in modo tale che la densità lineare superiore di base $(1; 1+\delta)$ dell'insieme $H_{\varepsilon,\varphi}$ sia superiore a $1 - \frac{\omega}{2}$. E da questo si deduce subito l'esistenza di infiniti intervalli (45), su ciascuno dei quali $H_{\varepsilon,\varphi}$ ha una densità lineare media superiore ad $1-\omega$, c. d. d.