ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BASILIO MANIÀ

Esistenza dell'estremo assoluto in un classico problema di Mayer

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 4 (1933), p. 343-354

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_4_343_0>

ESISTENZA DELL'ESTREMO ASSOLUTO IN UN CLASSICO PROBLEMA DI MAYER [1]

di Basilio Manià (Pisa).

Numerosi problemi classici del Calcolo delle Variazioni sono stati trattati in modo completo e rigoroso soltanto recentemente, con la risoluzione delle questioni di esistenza dell'estremo assoluto, dovuta in gran parte al *metodo diretto* del Tonelli. I teoremi di esistenza ottenuti si riferiscono agli *estremi liberi* e ai *problemi isoperimetrici*, e comprendono anche i problemi condizionati con equazioni di condizione in termini finiti, poichè le classi di *curve ammissibili*, per condizioni di questo tipo, risultano *complete*, cioè tali che ogni curva di accumulazione per le curve della classe, la quale sia continua e rettificabile, appartiene alla classe. Invece, per i problemi condizionati con equazioni di condizione in termini differenziali, non sono stati dati ancora dei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto [2].

In questo lavoro ci proponiamo di risolvere la questione di esistenza dell'estremo assoluto nel problema della curva di massima velocità finale, applicando i procedimenti del *metodo diretto* ricordato sopra.

1. - Se un punto materiale si muove sopra una curva dello spazio, continua, rettificabile, di classe 1, data dalle equazioni

$$(1) \qquad x=x(\tau), \qquad y=y(\tau), \qquad z=z(\tau), \qquad (\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2),$$

sotto l'azione della gravità e della resistenza del mezzo, la quale sia rappresentata da una forza opposta al moto e di intensità $R(v)$, con $R(v)$ funzione continua del valore scalare della velocità del punto mobile, per ogni valore di τ, la

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

[2] Mentre finivo di trascrivere questo lavoro ho visto annunciato nel Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. XXXIX, 1, January 1933, un lavoro di L. M. Graves, nel quale si danno dei teoremi sull'esistenza dell'estremo assoluto per i problemi di Lagrange le cui equazioni di condizione sono della forma

$$y_i' = \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n).$$

In questo tipo non rientra il problema qui considerato.

velocità $v(\tau)$, supposta uguale a un valore $v_0 \geqslant 0$ per $\tau = \tau_1$, soddisfa l'equazione differenziale

$$vv' - gz' + R(v)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = 0, \tag{2}$$

ammesso che l'asse delle z sia stato orientato verticalmente verso il basso.

Fatte sulla funzione $R(v)$ alcune ipotesi che preciseremo nel seguito, se la funzione $v(\tau)$, con $v(\tau_1) = v_0$, soddisfa la (2) in un intervallo $(\tau_1, \bar{\tau})$ e nell'interno di questo intervallo è sempre $v(\tau) \geqslant 0$, $v(\tau)$ è l'unica soluzione della (2) nell'intervallo $(\tau_1, \bar{\tau})$.

Diremo che *la curva* (1) *è percorribile totalmente con la velocità iniziale* $v_0 \geqslant 0$, *se la* (2) *ammette una soluzione* $v(\tau)$ *in tutto l'intervallo* (τ_1, τ_2), *con* $v(\tau_1) = v_0$ *e* $v(\tau) \geqslant 0$ *nell'interno dell'intervallo* (τ_1, τ_2).

Ciò posto, il problema della curva di massima velocità finale si enuncia nel modo seguente: *Fra tutte le curve dello spazio, continue, rettificabili, di classe* 1, *congiungenti due punti fissi* P_1, P_2, *e percorribili totalmente con una data velocità iniziale* $v_0 \geqslant 0$, *determinare quella per la quale la velocità finale*

$$v(\tau_2) = v_0 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} v' d\tau \tag{3}$$

assume il massimo valore.

Analiticamente, ciò equivale a determinare fra tutte le curve di classe 1, dello spazio (x, y, z, v), di equazioni

$$x = x(\tau), \qquad y = y(\tau), \qquad z = z(\tau), \qquad v = v(\tau), \qquad (\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2),$$

soddisfacenti la (2) e le condizioni

$$\begin{array}{llll} x(\tau_1) = x_1, & y(\tau_1) = y_1, & z(\tau_1) = z_1, & v(\tau_1) = v_0, \\ x(\tau_2) = x_2, & y(\tau_2) = y_2, & z(\tau_2) = z_2, & \\ v(\tau) \geqslant 0 \quad \text{in} & (\tau_1, \tau_2), & & \end{array}$$

quella per la quale il valore dell'espressione (3) diventa massimo ([3]).

Ma, per poter applicare i procedimenti del metodo diretto, occorre modificare l'impostazione classica del problema ora indicata, così da poter considerare anche curve continue e rettificabili di classe 0. Però notiamo subito che, in questo modo, come nel caso dell'estremo libero per la curva estremante di cui si viene a provare l'esistenza, le equazioni di EULERO si possono scrivere soltanto nella forma integrale ([4]) finchè non sia stato dimostrato che la curva estremante è di classe 1.

Sia C una curva di equazioni (1), continua, rettificabile, di classe 1, totalmente percorribile, e supponiamo di aver scelto come parametro τ l'arco s di C.

([3]) Vedi O. BOLZA: *Vorlesungen über Variationsrechnung* (1909), pp. 578-579.

([4]) Vedi L. M. GRAVES: *On the problem of Lagrange*, Am. Journal of Math. (1931), pp. 547-554.

Allora, posto

$$u = v^2,$$

l'equazione (2) si può scrivere in uno qualunque dei modi seguenti

$$\int_0^s \{gz'(s) - R[v(s)]\}\, ds = \frac{1}{2}\{v^2(s) - v_0^2\}, \tag{4}$$

$$u' = 2gz' - 2R(\sqrt{u}), \tag{5}$$

Definiremo come curve ammissibili tutte e sole le curve continue, rettificabili, congiungenti i due punti P_1, P_2, *per le quali l'equazione* (5), *ammette una soluzione* u *assolutamente continua e sempre* $\geqq 0$, *che la soddisfa in quasi tutto l'intervallo* $(0, L)$, *essendo* L *la lunghezza della curva.*

Diremo invece *curve percorribili* le curve continue e rettificabili soddisfacenti le condizioni ora indicate, eccettuata al più quella del passaggio per i punti P_1, P_2.

Per la funzione $R(v)$ *supporremo che sia finita e continua, insieme con la sua derivata prima, per tutti i valori non negativi di* v, *che sia monotona non decrescente, e, inoltre, si annulli per* $v = 0$ *e per questo valore soltanto.*

2. - *Per ogni curva ammissibile la soluzione* u *dell'equazione* (5), *con la condizione iniziale* $u(0) = v_0^2$, *è unica.*

Ciò segue, per un noto teorema di unicità, dal fatto che il secondo membro della (5) è una funzione non crescente di u. Infatti, supposto che la (5) abbia due soluzioni u_1, u_2, sia $\bar{s}$ un valore di s in $(0, L)$ per il quale $u_1(\bar{s}) \neq u_2(\bar{s})$, e indichiamo con s_0 un valore di s, che sia $< \bar{s}$ e tale che $u_1(s_0) = u_2(s_0)$ mentre in tutti i punti rimanenti di $(s_0, \bar{s})$ è $u_1(s) \neq u_2(s)$. Allora, si ha

$$u_1' - u_2' = R(\sqrt{u_2}) - R(\sqrt{u_1}),$$

e quindi, supposto ad esempio $u_2(\bar{s}) > u_1(\bar{s})$, integrando in $(s_0, \bar{s})$ i due membri dell'equazione ora scritta, dalle ipotesi fatte su R segue

$$u_1(\bar{s}) - u_2(\bar{s}) \geqq 0,$$

contro l'ipotesi fatta che sia $u_2(\bar{s}) > u_1(\bar{s})$.

3. - Nel n.° 4 dimostreremo che le eventuali curve estremanti del teorema che stiamo studiando sono situate sul piano verticale passante per i punti P_1 e P_2. Ma, per questo, ci occorre premettere due proposizioni.

a) Se $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ *è una successione di insiemi di curve continue e rettificabili, percorribili con la velocità iniziale* v_0, *su ciascuna delle quali la velocità resta maggiore o uguale di un numero non negativo* $\bar{v}$, *uguale per tutte le curve, se la successione converge uniformemente a una* *curva continua e rettificabile C_0 di lunghezza L_0, e se, inoltre, indicato con $\{L_n\}$ l'insieme delle lunghezze delle curve di W_n, la successione $\{L_1\}$, $\{L_2\}$,...., $\{L_n\}$,.... converge a L_0, anche C_0 è una curva percorribile e su di essa la velocità è sempre maggiore o ugule di $\bar{v}$.*

Se C_n è una curva di W_n di lunghezza maggiore di L_0, consideriamone un arco iniziale di lunghezza L_0, e se la lunghezza di C_n è minore di L_0 aggiungiamo a C_n un segmento orientato verticalmente verso il basso, in modo da avere una curva percorribile di lunghezza L_0. Indicata con $\bar{C}_n$ la curva ottenuta da C_n nel modo indicato, la successione $\bar{W}_1$,...., $\bar{W}_n$,.... degli insiemi delle curve $\bar{C}_n$ converge ancora uniformemente alla curva C_0, e, assegnato $\sigma > 0$ arbitrario, da un certo indice in poi, la velocità sopra le $\bar{C}_n$ è sempre $> \bar{v} - \sigma$.

Indichiamo con

$$x = x_0(s), \qquad y = y_0(s), \qquad z = z_0(s), \qquad (0, L_0),$$
$$x = x_n(s), \qquad y = y_n(s), \qquad z = z_n(s), \qquad (0, L_0),$$

le equazioni parametriche in funzione dell'arco della curva C_0 e delle curve $\bar{C}_n$ di $\bar{W}_n$. Sia poi u_n la soluzione dell'equazione (5) corrispondente alla curva $\bar{C}_n$.

Le funzioni u_n sono ugualmente limitate, come si vede integrando i due membri dell'equazione (5). Ne segue, per questa stessa equazione, che anche le u_n' sono tutte ugualmente limitate, e quindi le u_n sono ugualmente limitate ed equiassolutamente continue. Allora le u_n ammettono almeno una funzione di accumulazione u_0 assolutamente continua nell'intervallo $(0, L_0)$ e possiamo ammettere, senza restrizione di generalità, che la successione u_1, u_2,...., u_n,.... converga uniformemente a u_0,

Ma poichè per la (5) è

$$u_n = v_0^2 - 2g[z_n(s) - z_n(0)] - 2\int_0^s R(\sqrt{u_n})\,ds,$$

deve essere anche

$$u_0 = v_0^2 + 2g[z_0(s) - z_0(0)] - 2\int_0^s R(\sqrt{u_0})\,ds,$$

da cui, derivando si ottiene, in quasi-tutto $(0, L_0)$,

$$u_0' = 2gz_0'(s) - 2R(\sqrt{u_0}),$$

e la proposizione enunciata è così dimostrata.

b) Ogni curva continua e rettificabile C è almeno parzialmente percorribile con velocità iniziale $v_0 > 0$, e, se il massimo arco percorribile non comprende tutta la curva, nel secondo punto terminale di esso la velocità è nulla.

Consideriamo da prima una curva continua e rettificabile C formata da un numero finito di archi di classe 1. Per il teorema di esistenza della soluzione delle equazioni differenziali, essa è almeno parzialmente percorribile ([5]) con la velocità iniziale $v_0 > 0$. Di più, preso un suo arco iniziale di lunghezza l, con l uguale al più piccolo dei due numeri $v_0^2 : 4[g + R(\sqrt{2v_0^2})]$ ed L, essendo L la lunghezza di C, in ogni punto *raggiungibile* di esso, è, per la (5),

$$\int_0^s u' ds \leqslant 2gl < v_0^2,$$

e quindi

$$u' \geqslant -2g - 2R(\sqrt{2v_0^2}),$$

da cui

(6) $$\int_0^s u' ds \geqslant -[2g + R(\sqrt{2v_0^2})] l \geqslant -\frac{v_0^2}{2}.$$

Osservando che, sulla C, un arco limite di archi iniziali percorribili è pure un arco percorribile, si ha che su C esiste un massimo arco percorribile. Nel secondo punto terminale di questo arco, se esso non comprende tutta la curva, non può essere $v > 0$, poichè altrimenti un arco successivo ad esso sarebbe percorribile con una velocità iniziale uguale al valore della velocità finale sul massimo arco percorribile, e l'arco considerato non sarebbe il massimo arco percorribile. Di qui e dalla (6) segue che il massimo arco percorribile di C ha lunghezza non minore di l.

Supponiamo ora che C sia una curva continua e rettificabile qualunque, e consideriamo un suo arco iniziale di lunghezza l. Indicata con Π_n la poligonale che si ottiene dividendo questo arco iniziale in n parti uguali ed aggiungendo alla poligonale inscritta corrispondente un segmento diretto verticalmente verso il basso in modo che Π_n abbia lunghezza l, le poligonali $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ sono percorribili, per quanto si è visto, e su di esse la velocità è sempre maggiore di un numero positivo fisso, per la (6). Allora, per la proposizione dimostrata in a), anche l'arco iniziale di C è percorribile.

Che poi nel secondo punto terminale, del massimo arco percorribile di C, se esso non comprende tutta la curva, la velocità debba essere nulla, si prova con la stessa osservazione fatta sopra per le curve formate da un numero finito di archi di classe 1.

4. - a) *Se C è una curva continua e rettificabile percorribile con velocità iniziale $v_0 > 0$ e sulla quale è sempre $v > 0$, fatta eccezione al più per il suo secondo punto terminale, anche la proiezione C' di C sopra un piano verticale qualunque è percorribile con velocità iniziale v_0 e in ogni punto di C' la velocità è non minore che nel punto corrispondente di C.*

([5]) Cioè, almeno in un intervallo $(0, \lambda)$ di $(0, L)$ esiste la soluzione della (2) con $v(0) = v_0$, e quindi la soluzione della (5).

Detto $\bar{C}'$ il massimo arco percorribile di C', prendiamo su di esso come parametro l'arco s di C, intendendo che ad ogni valore di s corrisponda su $\bar{C}'$ il punto proiezione sul piano verticale considerato del punto di C determinato da s; indichiamo poi con u_1 la soluzione dell'equazione (5) relativa a $\bar{C}'$. Supposto che il piano verticale considerato sia il piano (x, z), integrando i due membri della (5), otteniamo rispettivamente per C e $\bar{C}'$,

$$u = v_0^2 + 2g[z(s) - z_1] - 2\int_0^s R(\sqrt{u})ds,$$

$$u_1 = v_0^2 + 2g[z(s) - z_1] - 2\int_0^s R(\sqrt{u_1})\sqrt{x'^2(s) + z'^2(s)}ds,$$

da cui

$$u_1 - u = 2\int_0^s R(\sqrt{u})ds - 2\int_0^s R(\sqrt{u_1})\sqrt{x'^2(s) + z'^2(s)}ds. \tag{7}$$

Poichè, per $s = 0$, $u_1 = u$, se per un certo valore s_1 di s fosse $u_1 < u$, vi sarebbe un intervallo (s_0, s_1) con $s_0 < s_1$, tale da aversi, in s_0, $u_1 = u$, e, nell'interno di (s_0, s_1), $u_1 < u$, e quindi

$$R(\sqrt{u_1})\sqrt{x'^2(s) + z'^2(s)} \leqq R(\sqrt{u}).$$

Ma, dalla (7),

$$u_1(s_1) - u(s_1) = 2\int_{s_0}^{s_1} \{ R(\sqrt{u}) - R(\sqrt{u_1})\sqrt{x'^2 + z'^2} \} ds,$$

da cui

$$u_1(s_1) \geqq u(s_1)$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

Allora, sopra ogni arco iniziale percorribile di C', la velocità è sempre > 0, e quindi, per la proposizione dimostrata al n.° 3, *b*), il massimo arco percorribile di C' comprende tutta la curva.

b) *Se la curva C considerata in a) non è uguale alla sua proiezione C' e se la velocità finale sopra C è > 0, la velocità finale sopra C' è maggiore della velocità finale sopra C.*

Conservando le notazioni di *a*) abbiamo, in punti corrispondenti di C e di C', $u_1 \geqq u$, e dalla (7) segue che non può essere sempre $u_1 = u$. Sia dunque P un punto di C nel quale la velocità sia minore che nel punto corrispondente P' di C', e indichiamo con v_1 e $\bar{v}_1$ queste due velocità.

L'arco finale di C avente in P il primo punto terminale è percorribile con la velocità iniziale v_1, e quindi anche, come si vede facilmente, con la velocità iniziale $\bar{v}_1 > v_1$. Se dimostriamo che quando lo si fa percorrere con la velocità iniziale $\bar{v}_1 > v_1$ la velocità finale risulta *maggiore* di quando lo si fa percorrere con la velocità iniziale v_1, applicando il risultato ottenuto in a), all'arco finale di C e alla sua proiezione sul piano verticale considerato, risulterà provata la proposizione enunciata.

Sia u_1 la soluzione dell'equazione (5) relativa al detto arco finale di C per la velocità iniziale v_1, e $\bar{u}_1$ la soluzione relativa allo stesso arco per la velocità iniziale $\bar{v}_1$.

Contando le lunghezze degli archi a partire da P, queste due funzioni di s sono continue e $\bar{u}_1(0) > u_1(0)$. Dal teorema di unicità del n.° 2 segue che se per un certo $\tilde{s}$ è

$$u_1(\tilde{s}) = \bar{u}_1(\tilde{s}),$$

da quel valore di s in poi, è $u_1 = \bar{u}_1$. Ne viene, intanto, che è sempre

$$\bar{u}_1(s) \geqq u_1(s).$$

Ma se, per un certo valore di s, si ha l'uguaglianza, indichiamo con s_0 il primo dei valori di s per i quali ciò accade e osserviamo che dalla (5) segue

$$u_1' - \bar{u}_1' = 2R(\sqrt{\bar{u}_1}) - 2R(\sqrt{u_1}),$$

e quindi $\varphi(s) = u_1 - \bar{u}_1$ è una funzione continua insieme con la sua derivata prima per la quale, dalla (5), si ha

$$\varphi'(s) = 2gz' - \bar{u}_1' - 2R(\sqrt{\bar{u}_1 + \varphi(s)}).$$

Ma il secondo membro di questa equazione differenziale nella funzione φ della variabile s è una funzione continua di s e di φ, lipschitziana in φ per ogni s di $(0, s_0)$ e φ vicino a $\varphi = 0$. Perciò nell'intervallo $(0, s_0)$ l'equazione ammette un'unica soluzione $\varphi(s)$ con $\varphi(s_0) = 0$, la quale deve essere identicamente nulla, poichè $\varphi(s) \equiv 0$ è una soluzione in $(0, s_0)$.

c) *Se vi è qualche curva di massima velocità finale nella classe delle curve ammissibili, almeno una di queste appartiene al piano verticale passante per i due punti fissi P_1, P_2.*

Per dimostrare ciò cominciamo con l'osservare che se una curva C è percorribile con velocità iniziale nulla, il suo secondo estremo è situato a un livello non maggiore del livello del primo, come segue dalla (5) integrando il primo e il secondo membro. Inoltre, la velocità finale sulla curva è *minore* della velocità finale sopra il segmento verticale Q_1P_2 che ha il secondo estremo in P_2 e il primo estremo Q_1 allo stesso livello di P_1, esclusi i casi in cui questo segmento si riduca a un punto, e quindi tanto sulla curva data che sul segmento la velocità finale risulti nulla, o che la curva C coincida col segmento Q_1P_2. Ciò si vede con gli stessi ragionamenti fatti in a) e in b), che ora si possono ripetere anche se sulla curva data la velocità si annulla in qualche punto, essendo assicurata la percorribilità del segmento Q_1P_2. Infatti, ivi l'ipotesi che sopra la curva C

fosse sempre $v > 0$, eccettuato al più il secondo estremo, serviva soltanto ad assicurare la percorribilità della curva proiezione.

Ciò posto, sia C una curva ammissibile qualunque, e sia C' la sua proiezione sul piano verticale passante per P_1 e P_2, che supporremo sia il piano (xz). Se la velocità sopra la curva C si annulla al più nel secondo estremo, sulla sua proiezione C' la velocità finale è non minore che su di essa, per quanto si è visto in a) e b). Se in qualche punto di C la velocità è nulla, sia M il primo di questi punti e indichiamo con M' la sua proiezione sul piano (xz) e con N' il punto di incontro delle parallele agli assi x e z condotte rispettivamente per M' e P_2. Allora, la curva formata dall'arco $\widehat{P_1M'}$ di C' e dalla spezzata $M'N'P_2$, è una curva del piano (xz), sulla quale la velocità finale è non minore che su C.

Di qua segue immediatamente l'asserto.

d) Dalle proposizioni precedenti si ha che se P_1, P_2 sono situati sopra una stessa verticale, la velocità finale sopra ogni curva ammissibile è non maggiore della velocità finale sopra la sua proiezione sulla retta congiungente i punti P_1 e P_2, e poichè tratti percorsi più volte portano una diminuzione della velocità, come si vede dalla (5), il segmento P_1P_2 è un estremante (ammesso che esistano effettivamente curve ammissibili).

Di qua segue che per dimostrare l'esistenza della curva di massima velocità finale ci si può limitare a considerare la classe delle curve ammissibili che appartengono al piano (xz) e sono contenute nella striscia compresa fra le due rette verticali passanti per P_1 e P_2. Infatti, se una curva ammissibile C di (xz) non appartiene completamente a quella striscia, i punti di C esterni ad essa formano un insieme numerabile di archi le cui corde sono segmenti delle rette verticali passanti per P_1 e P_2, e possono essere sostituiti da tali corde senza che la velocità finale diminuisca.

5. - Diamo infine le ultime proposizioni ausiliarie che ci permetteranno di affermare l'esistenza di una curva di accumulazione per la successione estremante e, quindi, di assicurarci che tale curva fornisce l'estremo cercato.

a) *Le curve ammissibili del piano verticale passante per* P_1, P_2 *sono tutte comprese in una striscia orizzontale di ampiezza finita.*

Se C è una curva ammissibile si ha, per essa,

$$\int_0^L u'ds \geqq -v_0^2,$$

e quindi, dalla (5),

$$\int_0^L R(\sqrt{u})ds \leqq g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}v_0^2. \tag{8}$$

Poichè la funzione integranda che compare nel primo membro della (8), è sempre $\geqq 0$, questa disuguaglianza deve valere anche se si calcola l'integrale al primo membro sopra un intervallo parziale di $(0, L)$. Perciò, ancora dalla (5), si ha

$$\int_0^s u' ds \geqq 2g[z(s)-z_1]-2g(z_2-z_1)-v_0^2=2g[z(s)-z_2]-v_0^2,$$

e di qua segue che, quando $z(s)$ è maggiore di un numero conveniente,

$$u=v_0^2+\int_0^s u' ds$$

è maggiore di un numero positivo α fissato, e quindi $R(\sqrt{u})$ è maggiore di un numero positivo β. Ma, per la (8), la misura complessiva degli archi di C sui quali è

$$R(\sqrt{u}) \geqq \beta$$

deve essere

$$\leqq \frac{1}{\beta}\left\{g(z_2-z_1)+\frac{1}{2}v_0^2\right\},$$

e, perciò, la curva ammissibile C, non può andare al di sotto di una conveniente orizzontale del piano (xz).

Analogamente alla (8) si trova la disuguaglianza

$$\int_0^s R(\sqrt{u}) ds \leqq g[z(s)-z_1]+\frac{1}{2}v_0^2,$$

da cui

$$g[z(s)-z_1]+\frac{1}{2}v_0^2 \geqq 0.$$

Ne segue che la curva C non può avere dei punti al di sopra di una conveniente orizzontale del piano (xz), e così è dimostrata la proposizione enunciata.

b) *Le curve ammissibili sulle quali la velocità è sempre maggiore di un numero fisso positivo hanno lunghezza limitata.*

Infatti, se è sempre $v \geqq \bar{v} > 0$, e anche $R(v) \geqq \bar{r} > 0$, essendo $\bar{r}$ un numero conveniente, e quindi, dalla (8),

$$L \leqq \frac{1}{\bar{r}}\left\{g(z_2-z_1)+\frac{1}{2}v_0^2\right\}.$$

6. - *Nella classe delle curve ammissibili esiste almeno una curva di massima velocità finale.*

Nel caso che P_1 e P_2 siano situati sopra una stessa verticale, l'asserto è stato provato al n.° 4, *d*). Se P_1 e P_2 non sono situati sulla stessa verticale, indichiamo con p_1 e p_2 le due verticali passanti rispettivamente per P_1 e P_2. Sopra p_1 esiste un punto M tale che P_1M è il massimo segmento di p_1, situato al di sopra di P_1, il quale sia *percorribile* con la velocità iniziale fissata v_0. I punti per i quali esistono delle curve percorribili con la velocità iniziale v_0, aventi in P_1 il primo punto terminale e in essi il secondo, sono tutti e soli quelli che non sono situati al di sopra del piano orizzontale passante per M. Dunque, se esistono effettivamente delle curve ammissibili, P_2 non è situato al di sopra della retta orizzontale r condotta per M nel piano (x, z), e noi indichiamo con P_2^* la proiezione ortogonale di P_2 sopra p_1.

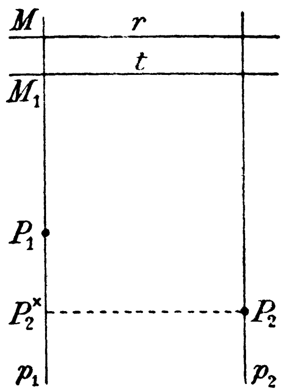

Fig. 1.

Possono presentarsi due casi. Detta N l'intersezione di p_2 e di r, la spezzata P_1MNP_2 dà l'estremo cercato, oppure il limite superiore delle velocità finali sulle curve ammissibili è maggiore della velocità finale su quella spezzata. Nel primo caso l'asserto risulta dimostrato; nel secondo, ragioniamo nel modo seguente.

Cominciamo con l'osservare che deve essere $v_0 > 0$, poichè se $v_0 = 0$ si verifica il primo caso. Infatti, se $v_0 = 0$, il punto P_2 non potrebbe essere situato al disopra del punto P_1, perchè altrimenti non esisterebbero curve ammissibili, e, detta $\overline{P}_2$ la proiezione ortogonale di P_2 sul piano orizzontale passante per P_1, tutte e sole le curve di massima velocità finale sarebbero quelle formate da un arco $\widehat{P_1\overline{P}_2}$ tutto appartenente a quel piano e dal segmento $\overline{P}_2P_2$.

La velocità finale sulla spezzata $P_1MP_2^*$, per la velocità iniziale v_0, è uguale alla velocità finale sopra la spezzata P_1MNP_2. Allora, detto I il limite superiore delle velocità finali sulle curve ammissibili, si può determinare sul segmento P_1M un punto M_1 tale che, per ogni $\overline{M}$ di M_1M, la velocità finale sulla spezzata $P_1\overline{M}P_2^*$, quando la si percorra con la velocità v_0, sia $< \overline{I} < I$, essendo $\overline{I}$ un numero conveniente. Per quanto si è visto al n.° 4, la velocità finale sopra ogni curva ammissibile che abbia qualche punto al di sopra della retta orizzontale t condotta per M_1, è $< \overline{I}$. Di qua e dal n.° 5, a), segue che ci si può limitare a considerare le curve ammissibili contenute in un rettangolo S di cui tre lati sono p_1, p_2, t.

Se una di queste curve ha in un punto P non situato al di sotto di $P_2P_2^*$ una velocità minore di quella che ha nella proiezione P' di P sulla retta P_1M il grave lasciato cadere da M con velocità iniziale nulla, la velocità finale su di essa è $< \overline{I}$, e quindi, se dalla classe di curve alla quale ci siamo limitati ne leviamo alcune, in numero finito o infinito, che in qualche punto che non sia al di sotto di $P_2P_2^*$ abbiano una velocità minore della minima velocità m_1, su $M_1P_2^*$ del grave lasciato cadere da M con velocità nulla, la sottoclasse che otteniamo è equivalente, per la nostra ricerca, alla classe data.

Per ogni punto Q di S non situato al di sopra di $P_2P_2^*$ consideriamo la spezzata P_1M_1Q. La velocità finale su di essa è una funzione di Q, continua in S e sempre positiva, e quindi esiste un numero $m_2 > 0$ del quale quella velocità finale non è mai minore. Se sopra una curva ammissibile appartenente ad S in qualche punto non situato al di sopra di $P_2P_2^*$ la velocità è $<m_2$, considerato il massimo arco di essa che contiene tutti questi punti, possiamo sostituirlo con una spezzata P_1M_1Q in modo da ottenere una curva ammissibile, appartenente ad S, sulla quale nei punti non situati al di sopra di $P_2P_2^*$ la velocità è sempre $\geqslant m_2$, e, inoltre, tale che su di essa la velocità finale è maggiore che sulla curva data.

Detto m il più piccolo dei due numeri m_1, m_2, e indicata con K la classe delle curve ammissibili appartenenti ad S e sulle quali la velocità è sempre $\geqslant m > 0$, nella ricerca della curva di massima velocità finale possiamo limitarci a considerare la classe K. Per le curve di K possiamo osservare che, in virtù del n.° 5, *b*), tali curve hanno tutte lunghezza inferiore ad uno stesso numero (finito).

Sia W_1, $W_2, \ldots, W_n, \ldots$ una successione estremante relativa alla classe K. Sia Λ (numero finito) il minimo punto di accumulazione della successione $\{L_1\}$, $\{L_2\}, \ldots, \{L_n\}, \ldots$, essendo $\{L_n\}$ l'insieme delle lunghezze delle curve di W_n. Dalla successione W_1, $W_2, \ldots, W_n, \ldots$ se ne può estrarre un'altra W_1', $W_2', \ldots, W_n', \ldots$, essendo W_n' un insieme parziale di un certo W_m, con $m \geqslant n$, così che $\{L_1'\}$, $\{L_2'\}, \ldots, \{L_n'\}, \ldots$ converga a Λ. Ciò posto, per ogni curva C_n di W_n', indichiamo con $\overline{C}_n$ la curva di lunghezza Λ che si ottiene da essa trasformandola come al n.° 3, *a*). Indicato con $\overline{W}_n$ l'insieme delle curve $\overline{C}_n$, scriviamo per ciascuna curva di $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_n, \ldots$ la rappresentazione parametrica in funzione della lunghezza dell'arco. Allora, si ha per le $\overline{C}_n$ una rappresentazione simultanea sopra l'intervallo $(0, \Lambda)$ mediante funzioni tutte ugualmente limitate e ugualmente continue. Applicando il teorema di ARZELÀ (6) si ha quindi che dalla successione $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2, \ldots, \overline{W}_n, \ldots$ si può trarre una successione di insiemi di curve $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2, \ldots, \widetilde{W}_n, \ldots$, con $\widetilde{W}_n$ appartenente a un certo $\overline{W}_m$ di indice $\geqslant n$, la quale converga uniformemente a una curva continua e rettificabile C_0, di equazioni

$$x = x_0(t), \qquad y = y_0(t), \qquad z = z_0(t), \qquad (0, \Lambda),$$

essendo la corrispondenza fra una curva $\overline{C}_n$ e la curva C_0 data dall'uguaglianza del parametro.

Ciò posto, dimostriamo che, fissato un punto raggiungibile su C_0, le velocità nei punti corrispondenti delle $\overline{C}_n$ tendono, per $n \to \infty$, a diventare più piccole di ogni numero maggiore della velocità in quel punto di C_0 (7). Allora, dal fatto che sulle $\overline{C}_n$ la velocità è sempre maggiore di un numero fisso positivo e dal fatto che la velocità finale tende al limite superiore delle velocità finali in K, seguirà che la curva C_0 è ammissibile e che dà l'estremo cercato.

---

(6) V. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, pp. 86-87.

(7) Cioè la velocità, considerata sulle curve degli insiemi $\widetilde{W}_n$ e su C_0, è una funzione *semicontinua superiormente* in ogni punto di C_0.

Indichiamo con t la lunghezza dell'arco sulla curva $\overline{C}_n$ qualunque e con s quella dell'arco sulla curva C_0. Sia P_1 un punto raggiungibile della curva C_0, ed esso corrisponda al valore t_1 del parametro t.

Per la (5) è, con notazioni evidenti, per ogni t_0 di $(0, t_1)$,

$$u_n(t_1) = u_n(t_0) + 2g[z_n(t_1) - z_n(t_0)] - 2\int_{t_0}^{t_1} R(\sqrt{u_n})\,dt,$$

$$u(s(t_1)) = u(s(t_0)) + 2g[z(s(t_1)) - z(s(t_0))] - 2\int_{t_0}^{t_1} R(\sqrt{u(s(t))})\,\frac{ds}{dt}\,dt,$$

con $0 \leqslant \frac{ds}{dt} \leqslant 1$, e quindi

$$(9)\quad u_n(t_1) - u(s(t_1)) = u_n(t_0) - u(s(t_0)) + 2g[\{z_n(t_1) - z_n(t_0)\} - \{z(s(t_1)) - z(s(t_0))\}] -$$
$$- 2\int_{t_0}^{t_1} \left\{ R(\sqrt{u_n}) - R(\sqrt{u(s(t))})\,\frac{ds}{dt} \right\} dt.$$

Dico che, preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare un $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$ sia

$$u_n(t_1) < u(s(t_1)) + \varepsilon.$$

Scegliamo $\overline{n}$ in modo che per ogni $n > \overline{n}$ sia

$$|z_n(t) - z(s(t))| < \frac{\varepsilon}{4g},$$

per ogni t di $(0, t_1)$.

Supponiamo che per qualche $\overline{C}_n$ con $n > \overline{n}$ valga la

$$(10)\qquad u_n(t_1) \geqslant u(s(t_1)) + \varepsilon.$$

Allora, poichè è $u_n(0) = u(s(0))$, esisterà un massimo valore t_0 di t in $(0, t_1)$ in modo che sia $u_n(t_0) = u(s(t_0))$. In tutto (t_0, t_1) sarà perciò $u_n(t) \geqslant u(s(t))$ e quindi $R(\sqrt{u_n(t)}) - R(\sqrt{u(s(t))})\,\frac{ds}{dt} \geqslant 0$.

Dalla (9) segue pertanto

$$u_n(t_1) - u(s(t_1)) < \varepsilon$$

contro la (10).