Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Gustav Doetsch

Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 3 (1933), p. 325-342

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_3_325_0>

DAS EULERSCHE PRINZIP

RANDWERTPROBLEME DER WÄRMELEITUNGSTHEORIE UND PHYSIKALISCHE DEUTUNG DER INTEGRALGLEICHUNG DER THETAFUNKTION

Von GUSTAV DOETSCH (Freiburg i. B.).

§ 1. - Überblick über die Untersuchung und Formulierung des Eulerschen Prinzips.

Die Thetanullfunktion

$$\vartheta_3(0, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2\pi^2 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{m^2}{t}}$$

genügt der quadratischen Integralgleichung

$$\int_0^t \Phi(\tau)\Phi(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \Phi(\tau)\,d\tau - 2t\Phi(t) - 1 = 0, \tag{1}$$

die von F. BERNSTEIN gefunden worden ist [1]. Nun spielt bekanntlich die Thetafunktion

$$\vartheta_3(v, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2mi\pi v - m^2\pi^2 t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(v+m)^2}{t}} \tag{2}$$

eine wichtige Rolle in der Wärmeleitungstheorie: Die Funktion $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ genügt mit ihren sämtlichen Ableitungen und Integralen der Gleichung der linearen Wärmeleitung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

und bei den verschiedenen Randwertproblemen, die für diese partielle Differentialgleichung gestellt werden können, treten diese Funktionen als « GREENsche Funktionen » auf. Herr HADAMARD hat mir daher die Frage gestellt, welche Bedeutung der Integralgleichung (1) im Rahmen der Wärmeleitungstheorie zukomme, d. h. welcher physikalische Sachverhalt sich durch sie ausdrücke. Ich werde zeigen, daß die Integralgleichung (1) sogleich physikalisch verständlich wird, wenn man sie als Verstümmelung oder Grenzfall einer allgemeineren Integralgleichung ansieht, die sich auf die Funktion $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ bezieht und daher noch einen Parameter x enthält. Die Gleichung (1) geht aus dieser allgemeineren durch den Grenz-

---

[1] F. BERNSTEIN: *Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion.* Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., 1920, S. 735-747.

übergang $x \to 0$ hervor. Die allgemeinere Integralgleichung aber, die wir in § 5 ableiten werden, bedeutet nichts anderes, als daß sich ein und dieselbe Temperaturverteilung in einem linearen Leiter als Lösung zweier verschiedener Randwertprobleme auffassen läßt: das eine Mal werden die Werte der Funktion, das andere Mal die ihrer Ableitung am Rande vorgegeben.

Damit stoßen wir in einem Spezialfall auf ein, wie mir scheint, recht fruchtbares **allgemeines Prinzip**, das sich so formulieren läßt: *Jede Funktion, die einer (partiellen) Differentialgleichung genügt, ist in Wahrheit das Integral von unendlich vielen Randwertproblemen, läßt sich also vermittels der zugehörigen Lösungsformen auf unendlich viele Weisen darstellen.* Konkret ausgedrückt: Eine (partielle) Differentialgleichung kann etwa so geartet sein, daß ihre Lösung eindeutig bestimmt ist, wenn z. B. auf den Rändern des Integrationsgebietes die Werte der Funktion vorgegeben sind — oder auf manchen Rändern die Funktionswerte, auf anderen die der ersten Ableitung — oder auf manchen Rändern die Werte der Funktion *und* der ersten Ableitung, auf anderen garnichts usw. Alle diese Probleme haben als allgemeine Lösung bestimmte analytische Ausdrücke, meist in Integralform. Nimmt man nun eine spezielle Lösungsfunktion her, liest an ihr die Werte der Randfunktion, Randableitung, usw. ab und setzt diese in die allgemeinen Lösungen ein, so bekommt man die verschiedenartigsten Ausdrücke für dieselbe spezielle Funktion (2). (Natürlich kann das auch in der Weise geschehen, daß man einer zu einem bestimmten Randwertproblem gehörigen Lösung die für ein anderes Problem nötigen Randwerte entnimmt und in den entsprechenden Lösungsausdruck einsetzt.) *Gleichsetzen zweier solcher Ausdrücke liefert eine Relation, die meist eine Integralgleichung darstellt.*

Während dieses Prinzip für Randwertprobleme bisher weder allgemein ausgesprochen noch in Spezialfällen benutzt worden zu sein scheint, ist bei *gewöhnlichen* Differentialgleichungen etwas wenigstens einigermaßen Ähnliches wohlbekannt: Gelingt es, für eine solche Gleichung auf zwei verschiedene Arten ein sogenanntes allgemeines Integral zu finden, so muß zwischen diesen beiden ein funktionaler Zusammenhang bestehen. Insbesondere müssen beide für eine spezielle Anfangsbedingung dasselbe partikuläre Integral ergeben, woraus eine u. U. tiefliegende Relation resultieren kann. Das berühmteste Beispiel dieser Art dürfte die EULERsche Herleitung des Additionstheorems für das elliptische Normalintegral erster Gattung (3) sein: Sucht man für die sog. EULERsche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

(2) Ich spreche hier der Deutlichkeit halber von einer bestimmten Lösung; diese kann selbstverständlich jede der möglichen Lösungen bedeuten.

(3) Siehe etwa SERRET-SCHEFFERS: *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*. 3. Aufl., 3. Band, S. 160.

dasjenige Integral, das für $x=0$ den Anfangswert $y=z$ hat, so findet man einerseits durch Trennung der Variablen, daß diese Funktion implizit durch die transzendente Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} + \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

gegeben wird, andererseits durch Verwendung eines geeigneten Multiplikators, daß y sich durch die algebraische Gleichung

$$\text{(4)} \qquad \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = z$$

definieren läßt. Beide Funktionen müssen identisch sein, also gilt für das elliptische Normalintegral erster Gattung

$$J(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

das algebraische Additionstheorem:

$$J(x) + J(y) = J(z),$$

wo z den durch (4) gegebenen Ausdruck in x und y bedeutet.

Man sieht, daß hier in der Tat etwas ganz Ähnliches wie bei dem oben ausgesprochenen Prinzip vorliegt: Hier wie dort wird eine spezielle Lösung aus zwei verschiedenen Lösungsformen ausgesondert, nämlich hier aus zwei verschiedenen allgemeinen Integralen vermittels derselben Anfangsbedingung, dort (der Natur der Sache entsprechend, da bei partiellen Differentialgleichungen der Begriff des allgemeinen Integrals, der sich schon bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht völlig befriedigend fassen läßt, seinen Sinn verliert) aus zwei zu verschiedenen Randwertproblemen gehörigen Lösungen vermittels verschiedenartiger, aber zueinander « passenden » Randbedingungen. Ich schlage daher für die oben formulierte allgemeine Methode inclusive der erwähnten Variante für gewöhnliche Differentialgleichungen den Namen **EULERsches Prinzip** vor. Es dürfte ihm für die Aufsuchung transzendenter Relationen eine ähnliche Bedeutung zukommen, wie dem von HADAMARD aufgestellten *HUYGENSschen Prinzip* ([4]). Dieses konstruiert ja auch eine bestimmte Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf zwei verschiedene Weisen: Die *Art* des Randwertproblems (Art der vorgegebenen Daten) ist beide Male dieselbe, aber die Gebiete und damit die *Ränder*

([4]) J. J. HADAMARD: *Principe de Huyghens et prolongement analytique.* Bull. soc. math. France, **52** (1924), S. 241-278.

sind verschieden; das eine Mal geht man von einer ursprünglichen Berandung, das andere Mal von einer eingeschalteten Zwischenstation aus, die selbst mit den Randwerten besetzt wird, die ihr unter dem Einfluß der Werte auf der ursprünglichen Berandung zukommen. Auch beim HUYGENSschen Prinzip liegt also die Idee zugrunde, daß eine Lösungsfunktion zu unendlich vielen Randwertproblemen gehört, nur bleibt hier die Art des Problems konstant und das Integrationsgebiet wechselt, während es beim EULERschen Prinzip gerade umgekehrt ist. Die beiden Prinzipe ergänzen also einander. — Es ist wohl überflüssig darauf hinzuweisen, daß man sie auch miteinander kombinieren, d. h. *gleichzeitig* das Integrationsgebiet und die Art der Randdaten variieren kann.

* * *

Die Integralgleichung der Thetafunktion soll uns nun eine Illustration des EULERschen Prinzips liefern. Dazu werde ich folgendermaßen vorgehen: Nachdem § 2 einige Hilfsmittel für die weitere Untersuchung bereit gestellt hat, werden in § 3 die bei Anwendung unseres Prinzips gebrauchten Lösungen gewisser Randwertprobleme der Wärmeleitungsgleichung zusammengestellt und, soweit sie bisher nicht bekannt sind, abgeleitet, übrigens gleich in einem über die gegenwärtigen Bedürfnisse hinausgehenden Umfang. Dabei benutze ich die Integrationsmethode, die bereits in früheren Arbeiten an Randwertproblemen der Wärmeleitungs- und Telegraphengleichung dargestellt wurde ([5]) und die darin besteht, daß die partielle Differentialgleichung durch eine Funktionaloperation (die LAPLACE-Transformation) in einen anderen Funktionenbereich und damit in eine gewöhnliche Differentialgleichung übergeführt wird. In § 4 wird dann das EULERsche Prinzip zunächst an einem einfacheren Beispiel, nämlich an der Funktion

$$\chi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{5}$$

erprobt. Einerseits spielt diese sogenannte Quellenfunktion $\chi(x, t)$ in der Wärmeleitung für ein unendliches Intervall dieselbe Rolle, wie die Funktion $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ für das endliche Intervall $0 < x < 1$, andererseits ist die Funktion $\chi(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ auch

([5]) G. DOETSCH: *a) Über das Problem der Wärmeleitung.* Jahresber. der deutsch. Math.-Vrg., **33** (1924), S. 45-52; *b) Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. I. Mitteilung.* Math. Zeitschr., **22** (1925), S. 285-292 (gemeinsam mit F. BERNSTEIN); *c) II. Mitteilung.* ibid., **22** (1925), S. 293-306; *d) III. Mitteilung.* ibid., **25** (1926), S. 608-626; *e) Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluß einer Randerregung.* Festschrift d. Techn. Hochschule Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts, 1929 (Verlag J. Springer), S. 56-78.

eine Lösung [6] der Integralgleichung (1). Wir werden nun mit Hilfe des EULERschen Prinzips eine allgemeine Integralgleichung für $\chi(x, t)$ aufstellen, aus der sich die Gleichung für $\chi(0, t)$ durch den Grenzübergang $x \to 0$ ergibt. In § 5 wird schließlich das Analoge für der schwierigeren Fall der Funktionen $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ und $\vartheta_3(0, t)$ durchgeführt.

§ 2. - Bezeichnungen und Hilfsmittel.

Die oft vorkommende Integralbindung

$$\int_0^t F_1(\tau)F_2(t-\tau)d\tau$$

(« Faltung » von F_1 und F_2) bezeichnen wir symbolisch als Produkt:

$$F_1 * F_2.$$

Bei der Behandlung der Randwertprobleme werden wir von der LAPLACE-Transformation

$$\mathfrak{L}\{F\} \equiv \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = f(s)$$

Gebrauch machen, die einer « Objektfunktion » $F(t)$ die « Resultatfunktion » $f(s)$ zuordnet [7]. Dabei setzen wir voraus, daß $F(t)$ in jedem endlichen Intervall $0 < t_1 \leqq t \leqq t_2$ eigentlich und bis zum Nullpunkt uneigentlich absolut integrabel

---

(6) Die Funktion $\chi(0, t)$ hat die besondere Eigentümlichkeit, daß für sie die Integralgleichung zerfällt: Es ist schon einzeln

$$\int_0^t \chi(0, \tau)\chi(0, t-\tau)d\tau - 1 = 0$$

und

$$\int_0^t \chi(0, \tau)d\tau - 2t\chi(0, t) = 0.$$

Übrigens ist sie die einzige Lösung, die in der ganzen t-Ebene existiert, alle anderen Lösungen existieren nur für $\mathfrak{R}t > 0$.

(7) Früher nannte ich allgemein (nicht bloß bei der LAPLACE-Transformation) die Funktion, auf die die Funktionaltransformation ausgeübt wird, die *Oberfunktion*, die sich ergebende Funktion die *Unterfunktion*. Das Begriffspaar oben - unten sagt aber nichts über die Richtung des Prozesses ($F \to f$) aus. Die Bezeichnungen Ober- und Unterfunktion werden außerdem in der Analysis noch in anderer Bedeutung gebraucht und haben den weiteren Nachteil, sich nicht sinngemäß in andere Sprachen übersetzen zu lassen. Die von LAPLACE herrührenden Namen *fonction génératrice* und *fonction déterminante*, die auch heute noch von manchen Autoren gebraucht werden, beziehen sich eigentlich auf ein Integral, das wir heute als Umkehrung

ist, daß ferner das LAPLACE-Integral für ein gewisses s_0 (und damit für alle s mit $\Re s > \Re s_0$) im Unendlichen absolut konvergiert. Bekanntlich ist $f(s)$ für $\Re s > \Re s_0$ regulär. Für unsere Zwecke fundamental sind folgende, für diese Funktionaltransformation geltenden Gesetze ([8]):

I. Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation ist natürlich unendlich vieldeutig, jedoch unterscheiden sich zwei zu einer Resultatfunktion $f(s)$ gehörige Objektfunktionen nur um eine Nullfunktion, d. i. eine Funktion $N(t)$, deren Integral $\int_0^t N(\tau)d\tau$ identisch verschwindet (Satz von LERCH). — Es gibt also zu einer Resultatfunktion höchstens eine stetige Objektfunktion. Da wir es im Folgenden nur mit differenzierbaren, also stetigen Objektfunktionen zu tun haben, so gehört bei uns immer zu einer Resultatfunktion genau eine Objektfunktion.

II. Haben $F_1(t)$ und $F_2(t)$ die Resultatfunktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$, so besitzt auch $F_1 * F_2$ eine Resultatfunktion und zwar $f_1(s) \cdot f_2(s)$, d. h.

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}.$$

Der transzendenten Bindung $F_1 * F_2$ zweier Objektfunktionen entspricht also im Resultatbereich einfach die algebraische Multiplikation. — Dieser Satz ist das Analogon für Integrale zu der CAUCHYschen Multiplikation von Potenzreihen.

III. Eine Funktion $F(t)$ sei für $t > 0$ μ-mal differenzierbar. $F(t)$, $F'(t)$,...., $F^{(\mu-1)}(t)$ mögen für $t \to 0$ Grenzwerte haben: F_0, F_0',...., $F_0^{(\mu-1)}$. $F^{(\mu)}(t)$ besitze eine Resultatfunktion. Dann hat auch $F(t)$ eine solche, und es gilt die Beziehung:

$$\mathfrak{L}\{F^{(\mu)}\} = s^\mu \mathfrak{L}\{F\} - (F_0 s^{\mu-1} + F_0' s^{\mu-2} + \dots + F_0^{(\mu-1)}),$$

d. h. der transzendente Prozeß der Differentiation spiegelt sich im Resultatbereich als eine algebraische Operation wieder, die in der Multiplikation mit einer Variablenpotenz und Hinzufügung eines Polynoms besteht, dessen Koeffizienten die « Anfangswerte » der Objektfunktion sind.

---

der LAPLACE-Transformation kennen, und wollen nur die Tatsache hervorheben, daß hierdurch der Zusammenhang zwischen einer Potenzreihe (fonction génératrice) und der Folge ihrer Koeffizienten (fonction déterminante) hergestellt wird, sind also innerhalb der Funktionalanalysis, die sich F und f als Punkte in einem unendlichviel dimensionalen Raum und die Transformation als eine die Abbildung dieser Räume aufeinander vermittelnde Funktion denkt, ungeeignet. Mit der Bezeichnung Objekt und Resultat kehre ich zurück zu der von PINCHERLE (Encyclopédie des sciences math., Tome II, vol. 5: *Équations et opérations fonctionnelles*) eingeführten Terminologie. Sie ist leicht in andere Sprachen zu übersetzen (z. B. fonction objet und fonction résultat) und wird auch von neueren Autoren (z. B. P. FLAMANT: *La notion de continuité dans l'étude des transmutations distributives des fonctions d'une variable complexe et ses applications.* Bull. sciences math. (2), **52** (1928), S. 26) adoptiert.

([8]) Siehe G. DOETSCH: *Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus.* Math. Ann., **89** (1923), S. 192-207, § 1.

IV: Besitzt $F(t)$ eine Resultatfunktion $f(s)$, so gilt dasselbe für $t^\nu F(t)$ (ν positiv ganz), und es ist:

$$\mathfrak{L}\{t^\nu F\} = (-1)^\nu \frac{d^\nu f}{ds^\nu}.$$

§ 3. - Randwertprobleme der Wärmeleitungsgleichung.

Vorbemerkung: Es handelt sich hier immer um die Wärmeleitung in einem linearen Leiter, die durch die partielle Differentialgleichung von parabolischem Typus

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{6}$$

regiert wird. x ist die Ortskoordinate, t die Zeit. Das Integrationsgebiet ist entweder die Viertelebene $x > 0$, $t > 0$ (einseitig unbegrenzter Leiter) oder der Halbstreifen $0 < x < 1$, $t > 0$ (begrenzter Leiter der Länge 1). *Es wird stets vorausgesetzt, daß die Anfangstemperatur $\Phi(x, 0)$ verschwindet*, oder besser ausgedrückt: daß $\Phi(x, t) \to 0$ für $t \to 0$ bei konstantem x. Im gleichen Sinn sind die anderen, in den einzelnen Abschnitten behandelten Randbedingungen zu verstehen. Spricht man z. B. von der Randtemperatur $\Phi(0, t) = A(t)$, so soll das eigentlich bedeuten: $\Phi(x, t) \to A(t)$ für $x \to +0$ bei konstantem t ([9]).

Finden wir für ein und dieselbe Lösung zwei verschiedene Ausdrücke, so dürfen wir diese nur gleichsetzen, wenn die *Eindeutigkeit* der Lösung gesichert ist, was ja gerade bei der Wärmeleitungsgleichung ebenso wie bei der sie umfassenden Telegraphengleichung nicht zutrifft ([10]). Wir werden aber die Gleichheit der gefundenen Lösungen leicht durch Identifizierung ihrer zugehörigen Resultatfunktionen nachweisen können, ein Prinzip, das ich früher schon oft verwandt habe und mit dessen Hilfe z. B. auch RAMANUJAN eine Reihe merkwürdiger Relationen abgeleitet hat ([11]).

([9]) Für die Wichtigkeit dieser Präzisierung vgl. l. c. ([5]) *b*) und *c*).

([10]) Siehe l. c. ([5]) *c*) und *e*) sowie den Schluß dieses Paragraphen der gegenwärtigen Arbeit. - Der in den meisten Lehrbüchern wiedergegebene Eindeutigkeitsbeweis ist falsch. Auch die in der kürzlich erschienenen Arbeit von P. B. THUM: *Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen.* Journ. f. d. reine u. angew. Math., **168** (1932), S. 65-90, § 1, angegebenen Bedingungen sind nicht hinreichend, um die Eindeutigkeit der Lösung zu sichern, was schon durch ein von mir 1926 (l. c. ([5]) *d*), S. 612) angegebenes Beispiel klargestellt ist. Ich werde darauf in einer im Journ. f. d. reine u. angew. Math. erscheinenden Arbeit ausführlicher zurückkommen.

([11]) Vgl. G. DOETSCH: *Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome.* Math. Zeitschr., **32** (1930), S. 587-599 (S. 591).

1. - An den Endpunkten sind die Werte der Funktion $\Phi(x, t)$ gegeben.

a) Endliches Intervall.

Gegeben:

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x, t) = A(t), \qquad \lim_{x\to 1} \Phi(x, t) = 0.$$

Die Funktion $A(t)$ sei für $t>0$ definiert und an jeder Stelle nach links stetig, ihr Integral lasse sich uneigentlich bis $t=0$ erstrecken und konvergiere absolut.

Lösung ([12]):

$$\Phi(x, t) = -A(t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x} + S(x, t).$$

Hier bedeutet $S(x, t)$ eine beliebige der singulären Lösungen, die an allen Rändern die Grenzwerte 0 haben. Daß es unendlich viele linear unabhängige derartige Lösungen gibt, z. B. $\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x}$ und seine Ableitungen nach t, wurde früher gezeigt ([13]).

b) Einseitig unendliches Intervall.

Gegeben:

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x, t) = A(t).$$

Lösung:

$$\Phi(x, t) = -A(t) * \frac{\partial \chi(x, t)}{\partial x} + S(x, t).$$

Gewöhnlich setzt man:

$$-\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} = \psi(x, t). \tag{7}$$

Auch hier gibt es unendlich viele singuläre Lösungen $S(x, t)$, z. B. $\psi(x, t)$ und seine Ableitungen nach t.

2. - An den Endpunkten sind die Werte der Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ gegeben.

a) Endliches Intervall.

Gegeben:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = C(t), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Für $C(t)$ gelten dieselben Voraussetzungen wie für $A(t)$ unter 1. (Physikalische Bedeutung: $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ist proportional zur Wärmeabgabe an der betr. Stelle).

Lösung:

$$\Phi(x, t) = -C(t) * \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right) + T(x, t),$$

wo $T(x, t)$ eine beliebige Lösung ist, die die Randbedingungen

$$\lim_{t\to 0} \Phi(x, t) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

([12]) Klassisches Resultat. Wegen der Präzisierung und Allgemeinheit der Voraussetzungen vgl. l. c. ([5]) *b*) und *c*).

([13]) Siehe l. c. ([5]) *c*) und *d*).

erfüllt. Es gibt deren auch hier unendlich viele, z. B. $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ und seine Ableitungen nach t.

Beweis: $\Phi(x, t)$ genügt der Differentialgleichung (6), da das für $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ der Fall ist ([14]). Strebt die obere Grenze des Faltungsintegrals gegen 0, so geht $\Phi(x, t)$ bei $0<x<1$ gegen 0, da $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, \tau\right)$ für $0<x<1$ in der Umgebung von $\tau=0$ beschränkt ist. Ferner ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-C(t)*\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x}+\frac{\partial T(x, t)}{\partial x},$$

also nach 1, a):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=C(t), \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0.$$

Daß z. B. $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ eine singuläre Lösung darstellt, folgt sofort daraus, daß ihre Ableitung nach x eine singuläre Lösung für das Problem 1, a) ist.

b) *Einseitig unendliches Intervall.*

Gegeben:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=C(t).$$

Lösung:

$$\Phi(x, t)=-C(t)*\chi(x, t)+T(x, t).$$

Beweis: analog zu a). Singuläre Lösungen $T(x, t)$ sind z. B. die Funktion $\chi(x, t)$ und ihre Ableitungen nach t.

3. - Am linken Ende ist der Wert der Funktion $\Phi(x, t)$, am rechten der der Ableitung $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ gegeben.

Gegeben:

$$\lim_{x\to 0}\Phi(x, t)=A(t), \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=D(t).$$

Für $A(t)$ und $D(t)$ gelten dieselben Voraussetzungen wie für $A(t)$ unter 1.

Lösung:

$$\Phi(x, t)=-A(t)*\frac{\partial\vartheta_2\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x}+D(t)*\vartheta_2\left(\frac{1-x}{2}, t\right)+U(x, t),$$

wo

(8) $$\vartheta_2(v, t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(v+m)^2}{t}}$$

und $U(x, t)$ eine beliebige Lösung ist, die die Randbedingungen

$$\lim_{t\to 0}\Phi(x, t)=0, \qquad \lim_{x\to 0}\Phi(x, t)=0, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$$

([14]) Die exakte Rechtfertigung der Vertauschung der Grenzübergänge sowohl hier als im Folgenden ist analog zu l. c. ([5]) c) zu erbringen und wird daher übergangen.

erfüllt. Solcher singulären Lösungen gibt es unendlich viele, z. B. die Funktionen $\vartheta_2\left(\frac{1-x}{2}, t\right)$ und $\frac{\partial \vartheta_2\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x}$ und ihre Ableitungen nach t.

Beweis: Unsere Methode besteht, kurz gesagt, darin, das Problem durch eine Funktionaloperation in einen anderen Funktionenbereich zu übersetzen, dort zu lösen und die Lösung dann in den ursprünglichen Bereich zurückzuübersetzen. Wir wenden nämlich auf die als Lösungen der partiellen Differentialgleichung (6) in Frage kommenden Funktionen $\Phi(x, t)$ die LAPLACE-Transformation hinsichtlich der Variablen t an, wodurch aus ihnen Resultatfunktionen $\varphi(x, s)$ werden ([15]). Nach dem Gesetz III von § 2 (mit $\mu=1$) entspricht der partiellen Differentialgleichung (6) im Resultatbereich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi(x, s)}{dx^2} = s\varphi(x, s) - \Phi(x) \qquad (0 < x < 1),$$

wenn wir den «Anfangswert» $\lim\limits_{t \to 0} \Phi(x, t)$ mit $\Phi(x)$ bezeichnen ([16]). Die Vereinfachung des Problems, die in der Transformation der partiellen Differentialgleichung in eine gewöhnliche liegt, stellt die Hauptpointe unserer Integrationsmethode dar. Ein weiterer Vorteil ist der, daß die Anfangswerte der partiellen Differentialgleichung in die gewöhnliche als inhomogene Glieder eintreten und also automatisch berücksichtigt werden, weshalb die Methode besonders dem sog. CAUCHYschen Problem (Anfangswertproblem) angepaßt ist. — Im Hinblick auf unsere späteren Zwecke hatten wir übrigens von vornherein $\Phi(x) \equiv 0$ angenommen.

Es fragt sich nun, was aus den auf die Stellen $x=0$ und $x=1$ bezüglichen Randbedingungen bei der Transformation wird. Man wird annehmen, daß die Randwerte der Resultatfunktion die Resultatfunktionen der Randwerte $A(t)$ und $D(t)$ sind. Dies stimmt aber nur, wenn die Funktionen A und D wirklich Resultatfunktionen $a(s)$ und $d(s)$ besitzen und wenn folgende Limesvertauschungen erlaubt sind:

$$\mathfrak{L}\left\{\lim_{x \to 0} \Phi(x, t)\right\} = \lim_{x \to 0} \mathfrak{L}\{\Phi(x, t)\},$$

$$\mathfrak{L}\left\{\lim_{x \to 1} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\} = \lim_{x \to 1} \mathfrak{L}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right\}.$$

([15]) Für die Beziehung dieser Methode zu dem sog. HEAVISIDE-Kalkül verweise ich auf meinen Vortrag auf dem Intern. Math.-Kongreß in Zürich 1932: *Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode* (*Operatorenkalkül*), der im Jahresber. d. deutsch. Math.-Vrg. ausführlich erscheinen wird.

([16]) Dabei beschränken wir uns zunächst auf solche Lösungen, bei denen das LAPLACE-Integral für $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ konvergiert und für die $\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathfrak{L}\{\Phi\}$ ist. Unser Ergebnis wird aber von dieser Annahme gänzlich unabhängig sein, sodaß sie zum Schluß als unwesentlich wieder herausfällt.

Dann ist in der Tat φ durch die Bedingungen zu bestimmen:

$$(9)\qquad \lim_{x\to 1}\varphi(x,s)=a(s)=\mathfrak{L}\{A\},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{d\varphi}{dx}=d(s)=\mathfrak{L}\{D\}.$$

Wir werden diese Voraussetzung machen, zum Schluß aber eine Lösung erhalten, die davon unabhängig ist, insofern als sie für *beliebige* A und D einen Sinn hat. Jedoch werden wir auf den Fall, daß die obigen Limesvertauschungen nicht zulässig sind (der tatsächlich vorkommen kann, weil die LAPLACE-Transformation keine stetige Funktionaloperation ist), noch einmal zurückkommen — er hängt aufs engste mit der *Nichteindeutigkeit* des Problems zusammen.

Im *Resultatbereich* stellt sich unsere Aufgabe nun sehr einfach dar: Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(10)\qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2}=s\varphi$$

unter den Randbedingungen (9). Die Gesamtheit aller Lösungen wird gegeben durch:

$$\varphi(x,s)=c_1(s)e^{x\sqrt{s}}+c_2(s)e^{-x\sqrt{s}}.$$

Die Bedingungen (9) liefern:

$$c_1+c_2=a(s),$$
$$c_1\sqrt{s}e^{\sqrt{s}}-c_2\sqrt{s}e^{-\sqrt{s}}=d(s),$$

also:

$$c_1=\frac{a(s)\sqrt{s}\,e^{-\sqrt{s}}+d(s)}{\sqrt{s}(e^{\sqrt{s}}+e^{-\sqrt{s}})},\qquad c_2=\frac{a(s)\sqrt{s}\,e^{\sqrt{s}}-d(s)}{\sqrt{s}(e^{\sqrt{s}}+e^{-\sqrt{s}})}.$$

Setzen wir

$$\gamma_0(x,s)=\frac{e^{(1-x)\sqrt{s}}+e^{-(1-x)\sqrt{s}}}{e^{\sqrt{s}}+e^{-\sqrt{s}}},$$
$$\gamma_1(x,s)=\frac{e^{x\sqrt{s}}-e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(e^{\sqrt{s}}+e^{-\sqrt{s}})},$$

so nimmt die *Lösung im Resultatbereich* die Form an:

$$\varphi(x,s)=a(s)\gamma_0(x,s)+d(s)\gamma_1(x,s).$$

Bezeichnen wir die Objektfunktionen zu γ_0 und γ_1 mit $\Gamma_0(x,t)$ und $\Gamma_1(x,t)$, so gehört nach dem Gesetz II von § 2 zu φ die Objektfunktion:

$$\Phi(x,t)=A(t)*\Gamma_0(x,t)+D(t)*\Gamma_1(x,t).$$

Φ ist also bestimmt, wenn wir noch Γ_0 und Γ_1 berechnet haben. Dazu entwickeln wir zunächst γ_1 in eine Reihe: Für $-\pi<\operatorname{arc} s<+\pi$ ist

$$\gamma_1(x,s)=\frac{e^{-(1-x)\sqrt{s}}-e^{-(1+x)\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(1+e^{-2\sqrt{s}})}=\frac{1}{\sqrt{s}}\left(e^{-(1-x)\sqrt{s}}-e^{-(1+x)\sqrt{s}}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{-2m\sqrt{s}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(e^{-(2m+1-x)\sqrt{s}}-e^{-(2m+1+x)\sqrt{s}}\right).$$

Die einzelnen Reihenglieder haben bekannte Objektfunktionen, es ist nämlich, wie man leicht nachrechnet:

$$\mathfrak{L}\{\chi(v,t)\}=\frac{1}{\sqrt{s}}\,e^{-v\sqrt{s}} \quad \text{für } v\geqq 0.$$

Da die Vertauschung von Summe und LAPLACE-Integral vermittels bekannter Sätze gerechtfertigt werden kann ([17]), so ergibt sich für $-1\leqq x\leqq +1$ zu γ_1 die Objektfunktion:

$$\begin{aligned}\Gamma_1(x,t)&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\chi(2m+1-x,t)-\chi(2m+1+x,t))\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\chi(2m+1-x,t)+\sum_{m=-1}^{-\infty}(-1)^m\chi(x-(2m+1),t)\end{aligned}$$

oder wegen $\chi(-v,t)=\chi(v,t)$:

$$(11)\qquad\begin{aligned}\Gamma_1(x,t)&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\chi(1-x+2m,t)+\sum_{m=-1}^{-\infty}(-1)^m\chi(1-x+2m,t)\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\chi(1-x+2m,t)=\vartheta_2\left(\frac{1-x}{2},t\right).\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\begin{aligned}\gamma_0(x,s)&=\frac{e^{-x\sqrt{s}}+e^{-(2-x)\sqrt{s}}}{1+e^{-2\sqrt{s}}}=\left(e^{-x\sqrt{s}}+e^{-(2-x)\sqrt{s}}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m e^{-2m\sqrt{s}}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(e^{-(2m+x)\sqrt{s}}+e^{-(2(m+1)-x)\sqrt{s}}\right).\end{aligned}$$

Nun gilt aber für die durch (7) definierte Funktion $\psi(x,t)$:

$$\mathfrak{L}\{\psi(v,t)\}=e^{-v\sqrt{s}} \quad \text{für } v>0;$$

also lautet für $0<x<2$ die zu γ_0 gehörige Objektfunktion:

$$\begin{aligned}\Gamma_0(x,t)&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\psi(2m+x,t)+\psi(2(m+1)-x,t))\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\psi(2m+x,t)+\sum_{m=-1}^{-\infty}(-1)^{m+1}\psi(-2m-x,t)\end{aligned}$$

oder wegen $\psi(-v,t)=-\psi(v,t)$:

$$(12)\qquad\begin{aligned}\Gamma_0(x,t)&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\psi(2m+x,t)+\sum_{m=-1}^{-\infty}(-1)^{m+2}\psi(2m+x,t)\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\psi(2m+x,t)=-\frac{\partial\vartheta_2\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x}.\end{aligned}$$

([17]) Siehe z. B. BROMWICH: *An introduction to the theory of infinite series*, second edition, 1926, S. 500.

Mit diesen Werten für Γ_0 und Γ_1 ergibt sich der in der Behauptung angegebene Ausdruck für $\Phi(x, t)$. — Man kann nun in derselben Weise, wie ich das früher ([18]) für das unter 1. behandelte Problem durchgeführt habe, zeigen, daß diese Funktion ganz unabhängig von den bei der Herleitung gemachten Voraussetzungen (Existenz der Resultatfunktion usw.) eine Lösung des Problems 3. darstellt.

Nichteindeutigkeit, singuläre Lösungen.

Die wichtigste Voraussetzung, die bei unserer Methode gemacht wurde, bestand darin, daß die Randbedingungen im Objekt- und Resultatbereich einander entsprechen sollten, d. h. daß den Randwerten der Objektfunktion Φ als Resultatfunktionen gerade die Randwerte der Resultatfunktion φ zugeordnet sein mußten. Es folgt aus dem Wesen der Methode, daß Lösungen, bei denen das nicht zutrifft, uns entgehen müssen. Nun haben wir aber doch zu ganz beliebigen Randfunktionen $A(t)$ und $D(t)$ («beliebig», soweit es nach der Natur des Problems überhaupt in Frage kommt) eine Lösung erhalten. *Der Fall, daß die Randwerte im Objekt- und Resultatbereich einander nicht entsprechen, kann also nur eintreten, wenn es zu vorgegebenen A und D nicht bloß eine, sondern mehrere Lösungen gibt, wenn also die Lösung unseres Randwertproblems nicht eindeutig ist.* Das trifft nun tatsächlich genau wie bei den unter 1. und 2. behandelten Problemen zu. Wählen wir z. B. ([19])

$$a(s) \equiv 1, \qquad d(s) \equiv 0,$$

so bekommen wir im Resultatbereich als Lösung:

$$\varphi(x, s) = \gamma_0(x, s),$$

wozu im Objektbereich die Funktion

$$\Phi(x, t) = \Gamma_0(x, t) = -\frac{\partial \vartheta_2\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x}$$

gehört. Diese genügt der Differentialgleichung (6), und die in unserem Problem vorkommenden Randwerte verschwinden sämtlich:

1) $\lim\limits_{t \to 0} \Gamma_0(x, t) = 0 \qquad (0 < x < 1),$

([18]) Siehe l. c. ([5]) *c*). Eine entsprechende Verifikation müßte eigentlich bei *allen* Methoden für die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik erfolgen, weil sie sämtlich — meist unausgesprochen — eine ganze Reihe von Annahmen bei der Herleitung machen.

([19]) Eine Konstante $\neq 0$ kann als Resultatfunktion nicht auftreten. Wir wollten ja aber gerade den Fall betrachten, daß $a(s)$ nicht die Resultatfunktion zu $A(t)$ ist, und da ist unsere Annahme durchaus denkbar.

denn die Reihe (12) konvergiert für hinreichend kleine t gleichmäßig, und jedes Glied strebt für $t \to 0$ gegen 0;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma_0(x, t) = 0 \qquad (t > 0),$

denn (12) kann in der Form geschrieben werden:

$$\Gamma_0(x, t) = \psi(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (\psi(2m + x, t) - \psi(2m - x, t)).$$

Diese Reihe konvergiert bei festem $t > 0$ in der Umgebung von $x = 0$ gleichmäßig, und jedes Glied strebt für $x \to 0$ gegen 0;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x} = 0 \qquad (t > 0),$

denn setzt man (12) in die Gestalt

$$\begin{aligned} \Gamma_0(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \psi(x + 2m, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \psi(x - 2m, t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\psi(2m + x, t) + \psi(2m + 2 - x, t)), \end{aligned}$$

so folgt:

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}_{2m+x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}_{2m+(2-x)} \right),$$

und dies strebt gegen 0 für $x \to 1$.

$\Gamma_0(x, t)$ ist also eine Funktion, die zu jeder Lösung hinzugefügt werden kann, ohne daß die Randwerte sich ändern. Bei ihr entsprechen die Randwerte in Objekt- und Resultatbereich einander *nicht*, denn für sie ist $A(t) \equiv 0$, also $\mathfrak{L}\{A\} \equiv 0$, während $a(s) \equiv 1$ ist.

Allgemein wird man derartige singuläre Lösungen erhalten, wenn man im Resultatbereich für $a(s)$ solche Funktionen wählt, die selbst keine Objektfunktionen besitzen, für die aber $a(s)\gamma_0(x, s)$ eine Objektfunktion hat, wie z. B.

$$a(s) = s, \quad s^2, \ldots :$$

das ergibt im Objektbereich die Funktionen

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial t^2}, \ldots ;$$

oder

$$a(s) = e^{-Ts} \qquad (T > 0):$$

das ergibt die Funktionen

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t \leqq T, \\ \Gamma_0(x, t - T) & \text{für } t > T. \end{cases}$$

Ebenso wie Γ_0 ist auch Γ_1 eine singuläre Lösung, bei ihr ist $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} = d(s) \equiv 1$ während $a(s) \equiv 0$ ist.

§ 4. - Das Eulersche Prinzip in Anwendung auf die Wärmeleitung in einem einseitig nicht begrenzten Leiter: Integralgleichung der χ-Funktion.

Um zunächst ein besonders einfaches Beispiel zu haben, betrachten wir die spezielle Funktion

$$\Phi(x, t) = (\chi(x, t) + \psi(x, t)) * 1,$$

die der Wärmeleitungsgleichung für $x > 0$, $t > 0$ genügt. Ihr Anfangswert $\lim\limits_{t \to 0} \Phi(x, t)$ für $x > 0$ ist offensichtlich 0. Wir wollen uns diese Funktion als Lösung zweier verschiedener Randwertprobleme entstanden denken, indem das eine Mal $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x, t)$, das andere Mal $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ gegeben sei. Wir bestimmen zunächst diese Randwerte. Wie aus § 3, 1, *b*) hervorgeht, ist

$$\psi(x, t) * 1 \to 1 \quad \text{für } x \to 0,$$

während man leicht nachweist, daß

$$\chi(x, t) * 1 \to \chi(0, t) * 1 \quad \text{für } x \to 0.$$

Da

$$\chi(0, t) * 1 = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}}\, d\tau = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} = 2t\chi(0, t)$$

ist, so erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0} \Phi(x, t) = 2t\chi(0, t) + 1.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) * 1 = \left(-\psi - \frac{\partial \chi^2}{\partial x^2}\right) * 1 \\ &= \left(-\psi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) * 1 = -\psi(x, t) * 1 - \chi(x, t), \end{aligned}$$

also

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -1 - \chi(0, t).$$

Stellen wir $\Phi(x, t)$ durch die in § 3, 1, *b*) und 2, *b*) angegebenen Lösungsformen dar und setzen diese gleich, so ergibt sich:

$$(2t\chi(0, t) + 1) * \psi(x, t) + S(x, t) = (1 + \chi(0, t)) * \chi(x, t) + T(x, t).$$

Nun kann man aber hier vermittels Transformation in den Resultatbereich sofort nachweisen, daß $S - T$ identisch verschwindet. Denn est ist einerseits [20]

$$\mathfrak{L}\{(2t\chi(0, t) + 1) * \psi(x, t)\} = \mathfrak{L}\{2t\chi(0, t) + 1\} \cdot \mathfrak{L}\{\psi(x, t)\} = \left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{s}\right) e^{-x\sqrt{s}},$$

---

[20] Man beachte das Gesetz II von § 2 und ferner, daß

$$\mathfrak{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \quad \text{für } \alpha > -1.$$

andererseits

$$\mathfrak{L}\{(1+\chi(0,t))*\chi(x,t)\}=\mathfrak{L}\{1+\chi(0,t)\}\cdot\mathfrak{L}\{\chi(x,t)\}=\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}.$$

Also gilt folgende Integralgleichung, in der der Parameter x jeden Wert >0 bedeuten kann:

$$\boxed{\chi(x,t)*(\chi(0,t)+1)-(2t\chi(0,t)+1)*\psi(x,t)=0} \tag{13}$$

$\left(\text{Hierin kann noch } \psi \text{ durch } -\frac{\partial\chi}{\partial x} \text{ ersetzt werden}\right)$. Läßt man x gegen 0 streben, so ergibt sich:

$$\chi(0,t)*(\chi(0,t)+1)-2t\chi(0,t)-1=0,$$

d. h. $\chi(0,t)$ erfüllt die Integralgleichung (1).

§ 5. - Das Eulersche Prinzip in Anwendung auf die Wärmeleitung in einem begrenzten Leiter: Integralgleichung der Thetafunktion.

Wir kommen nun zu dem Fall, der die ganze Untersuchung angeregt hat. Dazu gehen wir aus von derjenigen Lösung der Differentialgleichung (6), die den Randbedingungen

$$\lim_{t\to 0}\Phi(x,t)=0, \qquad \lim_{x\to 0}\Phi(x,t)=2t\vartheta_3(0,t)+1, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0$$

genügt. Nach § 3, 3 wird sie bis auf additive singuläre Lösungen gegeben durch

$$\Phi(x,t)=-(2t\vartheta_3(0,t)+1)*\frac{\partial\vartheta_2\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x}.$$

Wir wollen nun zusehen, welchen Randwert die Ableitung $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ für $x\to 0$ hat, und daraus eine neue Form der Lösung aufbauen. Da, wie man leicht beweist, unter dem Faltungsintegral nach x differenziert werden darf, ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-(2t\vartheta_3(0,t)+1)*\frac{\partial^2\vartheta_2\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x^2}.$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für $x\to 0$ ist bequemer festzustellen, wenn man ihn zunächst auf eine andere Form bringt. Dies führen wir am einfachsten wieder auf dem Weg über den Resultatbereich durch. Es ist ([21])

$$\mathfrak{L}\{\vartheta_3(0,t)\}=-\frac{\cos\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}},$$

([21]) Siehe G. DOETSCH: *Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus.* Math. Ann., **90** (1923), S. 19-25. Es also nach dem Gesetz IV von § 2:

$$\mathfrak{L}\{t\vartheta_3(0,t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{\cos\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2s} - \frac{1}{2s}\frac{\cos\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}} - \frac{1}{2s}\frac{\cos^2\sqrt{-s}}{\sin^2\sqrt{-s}},$$

mithin

$$\mathfrak{L}\{2t\vartheta_3(0,t)+1\} = -\frac{\cos\sqrt{-s}}{s\sin\sqrt{-s}}\left(\frac{1}{\sqrt{-s}} + \frac{\cos\sqrt{-s}}{\sin\sqrt{-s}}\right).$$

Ferner ist nach § 3, 3:

$$\mathfrak{L}\left\{-\frac{\partial\vartheta_2\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x}\right\} = \gamma_0(x,s) = \frac{\cos(1-x)\sqrt{-s}}{\cos\sqrt{-s}},$$

also, da das LAPLACE-Integral mit der Differentiation nach x vertauscht werden kann:

$$\mathfrak{L}\left\{-\frac{\partial^2\vartheta_2\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\sin(1-x)\sqrt{-s}}{\cos\sqrt{-s}}\sqrt{-s},$$

und folglich nach dem Gesetz II von § 2:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\} = \frac{\sin(1-x)\sqrt{-s}}{\sin\sqrt{-s}}\left(-\frac{1}{s} + \frac{\cos\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}}\right).$$

Nun ist aber ([22])

$$\frac{\sin(1-x)\sqrt{-s}}{\sin\sqrt{-s}} = \mathfrak{L}\left\{-\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x}\right\},$$

und die abermalige Anwendung von Gesetz II ergibt daher:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -(-\vartheta_3(0,t)-1) * \frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x}.$$

Dieser Form sieht man nun unter Zuhilfenahme von § 3, 1, *a*) sofort an, daß

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\vartheta_3(0,t)-1$$

ist. — Jetzt sind wir in der Lage, unserer Lösung $\Phi(x,t)$ nach § 3, 2, *a*) die Gestalt zu geben:

$$\Phi(x,t) = (\vartheta_3(0,t)+1) * \vartheta_3\left(\frac{x}{2},t\right) + T(x,t).$$

Durch Übergang in den Resultatbereich kann man wie in § 4 leicht feststellen,

---

ist allgemein

$$\mathfrak{L}\{\vartheta_3(v,t)\} = -\frac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\sin\sqrt{-s}} \quad \text{für } 0 \leqq v \leqq 1.$$

Für $0 < v < 1$ kann in dieser Formel, was wir auch noch brauchen werden, unter dem LAPLACE-Integral nach v differenziert werden.

([22]) Siehe Fußnote ([21]).

daß $T(x, t) \equiv 0$ ist. (Man hat dazu im Wesentlichen dieselben Rechnungen wie oben bei der Umformung von $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ durchzuführen.) Also ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Formen für die Lösung $\Phi(x, t)$ die Integralgleichung, in der der Parameter x die Werte $0 < x < 1$ bedeuten kann:

$$\boxed{\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right) * (\vartheta_3(0, t) + 1) + \frac{\partial \vartheta_2\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x} * (2t\vartheta_3(0, t) + 1) = 0} \tag{14}$$

Das ist die allgemeine Relation, die uns das EULERsche Prinzip liefert ([23]). Da sie für $x \to 0$ in

$$\vartheta_3(0, t) * (\vartheta_3(0, t) + 1) - (2t\vartheta_3(0, t) + 1) = 0,$$

d. h. in die Integralgleichung (1) übergeht, so beantwortet sich die in § 1 angeführte *Frage von Herrn* HADAMARD dahin, daß die Integralgleichung (1) für $\vartheta_3(0, t)$ wärmetheoretisch als Trümmerstück einer allgemeineren Relation anzusehen ist, die besagt, daß bei einem linearen Wärmeleiter von der Anfangstemperatur 0 $\left(\lim\limits_{t \to 0} \Phi(x, t) = 0\right)$, an dessen rechtem Ende keine Wärmeabgabe stattfindet $\left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0\right)$ und an dessen linkem Ende die Temperatur

$$\lim_{x \to 0} \Phi(x, t) = 2t\vartheta_3(0, t) + 1$$

angelegt ist, die Wärmeabgabe an diesem Ende proportional zu $-\vartheta_3(0, t) - 1$ ist.

([23]) Natürlich kann man ihre Richtigkeit auch unmittelbar durch Ausrechnen oder durch Übergang in den Resultatbereich bestätigen, doch bleibt dabei die Hauptsache, nämlich die wärmetheoretische Bedeutung, unaufgeklärt.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 25 maggio 1933 - XI.