ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

DÉMÈTRE POMPEIU

Sur une propriété des fonctions holomorphes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 2 (1933), p. 227-230

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_227_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

par DÉMÈTRE POMPEIU (Bucarest).

1. - Dans les Comptes Rendus (t. 192, p. 794, séance du 30 mars 1931) j'ai résumé la démonstration d'un théorème dont l'emploi est très fréquent en théorie des fonctions.

Je me propose ici de reprendre cette démonstration et de la présenter avec tous les développements nécessaires.

Il s'agit de la proposition suivante: *Une fonction $f(z)$, holomorphe dans une région R et dont la dérivée $f'(z)$ s'annule dans R, ne peut pas être uni-valente dans cette région.*

2. - Désignons par ζ_0 le point, intérieur à R, où la dérivée s'annule:

$$f'(\zeta_0)=0.$$

La dérivée $f'(z)$, de la fonction $f(z)$, étant elle-même une fonction holomorphe dans R, on peut tracer autour de ζ_0 un cercle C tel que, dans C frontière comprise, $f'(z)$ soit différente de zéro, sauf bien entendu au centre ζ_0, où la dérivée s'annule, par hypothèse.

Cela établi, nous allons restreindre nos considérations aux seuls points de la région R qui sont contenus dans C.

3. - Introduisons la fonction de deux variables complexes indépendantes

$$\varphi(z, \zeta)=\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$$

avec la condition pour z et ζ de rester dans le cercle C.

Cette fonction est *continue* lorsque z et ζ prennent, chacun indépendemment de l'autre, toute position dans C.

Pour

$$\zeta=z=u$$

on a

$$\varphi(u, u)=f'(u).$$

La fonction φ est *holomorphe* par rapport à chacune des variables z et ζ.

4. - Considerons maintenant la fonction

$$\varphi(z, \zeta_0) = \frac{f(z) - f(\zeta_0)}{z - \zeta_0}$$

où ζ_0 est le point qui donne à $f'(z)$ la valeur zéro:

$$f'(\zeta_0) = 0;$$

$\varphi(z, \zeta_0)$ est donc une fonction holomorphe de la *seule variable z*.

Supposons que lorsque le point z parcourt la circonférence C le rapport

$$\frac{f(z) - f(\zeta_0)}{z - \zeta_0}$$

reste différent de zéro; car si, pour un point z_0, de la circonférence C, on avait

$$f(z_0) = f(\zeta_0),$$

alors notre théorème serait démontré.

Ainsi $\varphi(z, \zeta_0)$ étant supposé différent de zéro sur la circonférence C, désignons par μ_0 le *minimum* du module

$$|\varphi(z, \zeta_0)|$$

lorsque le point z décrit la circonférence C.

5. - Cela posé, revenons à la fonction *continue* de deux variables

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

qui est, par suite, *uniformément* continue et prenons dans le voisinage de ζ_0 un autre point ζ_1 assez rapproché de ζ_0 pour que l'on ait, *quel que soit z dans C*, circonférence comprise,

$$(1) \qquad |\varphi(z, \zeta_1) - \varphi(z, \zeta_0)| \leq \frac{\mu_0}{3}.$$

Le point ζ_1 est pris, bien entendu, dans l'intérieur de C.

6. - Cela posé je vais évaluer le *minimum* de

$$|\varphi(z, \zeta_1)|$$

lorsque le point z décrit la circonférence C.

J'écrit

$$\varphi(z, \zeta_1) \equiv \varphi(z, \zeta_1) - \varphi(z, \zeta_0) + \varphi(z, \zeta_0)$$

et j'ai alors, sur la circonférence C,

$$|\varphi(z, \zeta_1)| \geqslant |\varphi(z, \zeta_0)| - |\varphi(z, \zeta_1) - \varphi(z, \zeta_0)|$$

ou

$$|\varphi(z, \zeta_1)| \geqslant \mu_0 - \frac{\mu_0}{3}$$
$$\geqslant 2\frac{\mu_0}{3}.$$

En d'autres termes, le minimum μ_1 de $|\varphi(z, \zeta_1)|$, sur la circonférence C, est certainement supérieur ou, au plus, égal à $2\frac{\mu_0}{3}$:

$$\mu_1 \geqslant 2\frac{\mu_0}{3}.$$

Ainsi la fonction de z:

$$\varphi(z, \zeta_1)$$

a, sur la circonférence C, pour son module un minimum μ_1 supérieur ou égal a $2\frac{\mu_0}{3}$.

Mais, dans l'intérieur de C, la fonction holomorphe $\varphi(z, \zeta_1)$ prend au point

$$z=\zeta_0$$

la valeur

$$\varphi(\zeta_0, \zeta_1)$$

que je me propose d'évaluer, en module.

D'après la condition (1) du n.° 5, j'écris

$$|\varphi(\zeta_0, \zeta_1) - \varphi(\zeta_0, \zeta_0)| \leqslant \frac{\mu_0}{3}$$

et puisque

$$\varphi(\zeta_0, \zeta_0) = f'(\zeta_0) = 0$$

il me reste:

$$|\varphi(\zeta_0, \zeta_1)| \leqslant \frac{\mu_0}{3}.$$

Ainsi la valeur de $\varphi(z, \zeta_1)$, en module, au point

$$z=\zeta_0$$

est inférieure au module minimum μ_1 de $|\varphi(z, \zeta_1)|$ sur la circonférence C.

7. - Ici intervient un lemme, presque évident, relatif aux zéros d'une fonction holomorphe:

Si une fonction $h(z)$ est holomorphe dans un domaine D, et différente de zéro sur la frontière: le *minimum* de $|h(z)|$, sur cette frontière, étant μ; et si dans l'intérieur de D on trouve un point z_0 tel que

$$|h(z_0)| < \mu$$

alors on peut affirmer que $h(z)$ s'annule certainement dans D.

8. - Nous sommes, au n.° 6, dans les conditions de ce lemme, avec la fonction holomorphe

$$\varphi(z, \zeta_1)$$

considérée dans le cercle C.

Nous sommes donc certains que $\varphi(z, \zeta_1)$ s'annule dans C: en un point

$$z=\zeta_2$$

on doit avoir

$$\varphi(\zeta_2, \zeta_1) = 0$$

ce qui fait

$$\frac{f(\zeta_2) - f(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1} = 0$$

c'est-à-dire

$$f(\zeta_2) = f(\zeta_1).$$

9. - Mais, pour la complète rigeur de la démonstration, il faut ajouter que le point (au moins *un*) où $\varphi(z, \zeta_1)$ s'annule ne peut pas être $z = \zeta_1$ (car alors le but du théorème: *non-univalence* de $f(z)$, dans C, ne serait pas atteint).

Effectivement le point ζ_2 ne peut pas coïncider avec ζ_1 car on aurait

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_1) = f'(\zeta_1) = 0$$

et, par hypothèse, dans C la dérivée $f'(z)$ est différente de zéro, sauf bien entendu au point ζ_0 où

$$f'(\zeta_0) = 0.$$

Il est ainsi bien établi que ζ_2 est différent de ζ_1 et que l'on a

$$f(\zeta_2) = f(\zeta_1).$$

La fonction $f(z)$ n'est donc *pas univalente* dans C, et donc, non plus dans R. Ce qu'on voulait établir.

10. - Le *lemme*, du n.° 7, presque évident, a été signalé par l'auteur et utilisé dès 1916, dans une note des Annales scientifiques de l'Université de Jassy (Tome X, pp. 1-4).

Il s'introduit, très simplement, dans la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

Il peut être utilisé, comme le montre la note présente, dans beaucoup de questions d'Analyse.

Je l'ai signalé, à nouveau, dans une note récente des Comptes Rendus (24 oct. 1932).