ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SERGE FINIKOFF

Transformation *T* des congruences de droites

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 1 (1933), p. 59-88

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_1_59_0>

TRANSFORMATION T DES CONGRUENCES DE DROITES

par SERGE FINIKOFF (Moscou).

A la mémoire de Luigi Bianchi.

LUIGI BIANCHI, le créateur de la théorie des transformations, a formé dans son pays natal, comme à l'étranger, un grand nombre de disciples parmi lesquels je serais heureux de me compter.

Mon travail, qui paraît dans la nouvelle série des « Annali » de Pisa, sera un hommage au maître qui a honoré Pisa et sa faculté mathématique.

L'idée de la transformation des surfaces à l'aide des congruences W développée par L. BIANCHI il y a un demisiècle pour les surfaces pseudosphériques, a été appliquée par lui même et par autres auteurs à la transformation des surfaces très variées et même à la transformation des systèmes triple-orthogonaux. J'essaie ici de la généraliser et de construire la transformation des congruences de droites.

La transformation T que j'examine est effectuée par deux congruences auxiliaires A_1 et A_2 dont les rayons joignent les foyers homologues des congruences en transformation C et C_1 et touchent en ces points leurs nappes focales.

Elle est à un certain point de vue une généralisation en espace de droites du procédé de BIANCHI. Le tableau suivant rend évidente l'analogie entre les deux transformations.

L'espace de points à 3 *dimensions.*	*L'espace de droites à* 4 *dimensions.*
Deux surfaces en transformation S et S_1 - lieu de ∞^2 points.	Deux congruences en transformation C et C_1 - lieu de ∞^2 droites.
Une droite d - série linéaire de ∞^1 points, qui touche les deux surfaces S et S_1 c'est-à-dire contient deux points homologues et leur infiniment voisin.	Une demiquadrique D - série linéaire de ∞^1 droites qui passe par deux rayons homologues des congruences C et C_1 et par leur infiniment voisin.
Une congruence K - lieu de ∞^2 droites d dont les deux nappes de la surface focale sont les surfaces S et S_1.	Une famille F de ∞^2 demiquadriques D dont les deux nappes de l'enveloppe sont les congruences C et C_1.
Quelles que soient deux surfaces S et S_1, il existe une congruence K et une seulement qui les lie c'est-à-dire dont les rayons d les touchent.	Quelles que soient deux congruences C et C_1, il existe une famille F qui les lie c'est-à-dire dont les demiquadriques D les touchent.

Ici l'analogie cesse. Pour restreindre la généralité de la seconde nappe S_1, pour déterminer une transformation des surfaces, L. BIANCHI admet que la congruence K est une congruence W. En espace de droites la condition supplémentaire est beaucoup plus simple. Deux congruences arbitraires déterminent une famille de demiquadriques F, mais il existe des paires de congruences C et C_1 qui sont liées par un faisceau de ∞^1 familles F dont les demiquadriques contiennent les mêmes rayons homologues, c'est précisement le cas de la transformation T.

Une congruence C donnée, il existe ∞ congruences transformée T, la congruence générale dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument. La congruence d'un complexe linéaire présente une exception: elle peut être transformée en n'importe quelle congruence du même complexe. La détermination explicite de la congruence transformée T exige l'integration de deux équations du premier ordre.

La transformation T conserve les congruences W c'est-à-dire une congruence W se transforme en une congruence W. Deux congruences C et C_1 étant des congruences W, les congruences auxiliaires A_1 et A_2 le sont aussi et toute la configuration est celle du théorème de la permutabilité des transformations asymptotiques de BIANCHI. La seule exception, c'est la congruence d'un complexe linéaire. Elle est transformable en congruence du même complexe sans que les congruences auxiliaires soient les congruences W.

À cette exception près, la transformation T des congruences W présente une grande analogie avec les transformations asymptotiques des surfaces: elle est produite par une transformation asymptotique simultanée des deux nappes de la surface focale de la congruence C. La proposition de M. TORTORICI sur les faisceaux des transformations asymptotiques s'applique immédiatement aux transformations T des congruences W. Les congruences W sont les seules congruences dont toutes les transformations T admettent le théorème de permutabilité des transformations.

Étant données une congruence W quelconque C et deux congruences transformées T de la première C_1 et C_2, il existe ∞^1 congruences W C' qu'on peut obtenir par une transformation T de la congruence C_1 aussi bien que de la congruence C_2. Les rayons homologues des congruences C' engendrent une demiquadratique Q qui s'appuie sur deux droites, lieux des foyers homologues du faisceau des congruences $(C_1 C_2)$. Ce faisceau, lui-même, détermine par ses rayons homologues la même demiquadrique Q.

Les quatre rayons homologues des congruences C et les 8 rayons correspondants des congruences auxiliaires composent une configuration 8_4 de MÖBIUS. Chaque quadrilatère gauche de la configuration décrit 4 congruences W du théorème de permutabilité de BIANCHI; les diagonales engendrent un couple de congruences stratifiables, d'où découle un moyen de construire la transformation P des couples de congruences stratifiables.

La transformation de M. JONAS des surfaces R est une transformation T particulière qui fait correspondre une congruence R à une congruence R. Deux transformation de M. JONAS à constantes R_1 et R_2 différentes étant données, le théorème de permutabilité détermine une seule congruence R qu'on obtient par l'application de la methode précédente, soit à la première congruence transformée, soit à la seconde.

Il suit de là qu'il suffit de connaître une congruence R ainsi que toutes celles qui en dérivent par l'application de la transformation de M. JONAS pour que l'application successive de la méthode n'exige plus que des calculs algébriques sans aucune quadrature. En partant de la congruence linéaire qu'on peut traiter comme une congruence R dégénérée, nous obtiendrons une suite illimitée des congruences R sans aucune intégration.

La transformation P des couples de congruences R présente une nouvelle transformation des congruences R.

Je me borne ici aux propriétés projectives de la transformation. Ainsi je détermine la congruence à l'aide du tétraèdre mobile que j'ai employé dans le Mémoire: *Sur les congruences stratifiables* (¹). Comme j'ai changé les notations, j'expose dans le premier chapitre tout qu'il faut pour comprendre la méthode. Le contenu des autres chapitres est désigné dans leur titre.

J'ai énoncé les résultats que je développe dans les diverses Notes (²) dans les « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » et dans les « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris ».

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

Formules préliminaires de la théorie générale des congruences.

1.- *Généralités sur le tétraèdre mobile.* — Dans l'espace projectif euclidien le point (x) sera donné par ses quatre coordonnées projectives homogènes (x^1, x^2, x^3, x^4).

(¹) Rendiconti del Circolo Matematico di Palarmo, 1929, t. 53, p. 313.

(²) Comptes Rendus, Paris, 1929, t. 188, p. 1647; t. 189, p. 517; 1930, t. 190, p. 999; t. 191, p. 642. Rendiconti dei Lincei, 1931, s. 6, sem. 2, t. 14, p. 421.

Quatre points (x_i) déterminent un tétraèdre Δ. Les 16 coordonnées x_i^k étant fonctions de deux paramètres u, v, le tétraèdre Δ prend ∞^2 positions. Les déplacements projectifs en sont déterminés par les équations [3]

$$(1) \qquad x_{iu}=\sum_k a_i^k x_k, \qquad x_{iv}=\sum_k b_i^k x_k$$

d'où suit, les x_i éliminés

$$(2) \qquad (a_i^k)_v-(b_i^k)_u=\sum_j (b_i^j a_j^k - a_i^j b_j^k).$$

Réciproquement, 32 fonctions a_i^k, b_i^k, les équations (2) satisfaites, rendent le système (1) complétement intégrable. La solution générale dépend linéairement de 4 constantes arbitraires

$$(3) \qquad x_i^* = C_1x_i^1 + C_2x_i^2 + C_3x_i^3 + C_4x_i^4 \qquad (i=1, 2, 3, 4).$$

Les quatre solutions $(x_i^k)^*$ (qui se différent par le choix des constantes C_k) déterminent quatre points (x_i^*), donc, un tétraèdre mobile Δ^*. Or les équations (3) montrent que la transformation projective à coefficients C_k fait correspondre les points (x_i^*) aux points (x_i) et le tétraèdre Δ^* au tétraèdre Δ. Donc, les 32 fonctions a_i^k, b_i^k, les équations (2) satisfaites, déterminent un tétraèdre mobile Δ à la transformation projective près.

Le tétraèdre Δ déterminé, toutes les congruences engendrées par ses arêtes sont également connues. Donc, la congruence (x_1x_2), par exemple, peut être déterminée à la transformation projective près par 32 fonctions a_i^k, b_i^k satisfaisant le système (2).

2. - *Le tétraèdre normal de la congruence* est celui dont les deux sommets (x_1), (x_2) coïncident avec les foyers du rayon et dont deux faces sont les plans focaux.

La congruence rapportée aux développables u, v, la normalisation der coordonnées (x_1), (x_2) réduira les coefficients a_1^k, b_2^k, sauf a_1^2, b_2^1, à zéro. En précisant également les facteurs communs des quatre coordonnées (x_3) et (x_4) nous ramenons le système (1) à la forme normale

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{array}{ll} x_{1u}=\delta x_2, & x_{1v}=px_1+qx_2+x_3, \\ x_{2u}=q_1x_1+p_1x_2+x_4, & x_{2v}=\delta_1 x_1, \\ x_{3u}=mx_1+nx_2-qx_4, & x_{3v}=Rx_1+Nx_2-Px_3-\Delta x_4, \\ x_{4u}=N_1x_1+R_1x_2-\Delta_1x_3-P_1x_4, & x_{4v}=n_1x_1+m_1x_2-q_1x_3, \end{array}\right.$$

---

[3] De façon générale $x_{iu}=\dfrac{\partial x_i}{\partial u}$, $x_{iv}=\dfrac{\partial x_i}{\partial v}$.

avec les conditions d'intégrabilité

$$(II)\quad \begin{cases} p_u=\delta\delta_1-qq_1-m, & p_{1v}=\delta\delta_1-qq_1-m_1, \\ P_u-p_u=\varDelta\varDelta_1-\delta\delta_1, & P_{1v}-p_{1v}=\varDelta\varDelta_1-\delta\delta_1, \\ \delta_v-q_u=p\delta+p_1q+n, & \delta_{1u}-q_{1v}=p_1\delta_1+pq_1+n_1, \\ \varDelta_u-q_v=P_1\varDelta+Pq+N, & \varDelta_{1v}-q_{1u}=P\varDelta_1+P_1q_1+N_1, \\ m_v-R_u=-m(P+p)+Nq_1-N_1\varDelta+n_1q-n\delta_1, & \\ m_{1u}-R_{1v}=-m_1(P_1+p_1)+N_1q-N\varDelta_1+nq_1-n_1\delta, & \\ n_v-N_u=R\delta-R_1\varDelta+Np_1-Pn+(m_1-m)q, & \\ n_{1u}-N_{1v}=R_1\delta_1-R\varDelta_1+N_1p-P_1n_1+(m-m_1)q_1. & \end{cases}$$

3. - *Variation du tétraèdre normal autour du rayon.* — La position des sommets (x_3) et (x_4) dans les plans focaux n'est pas déterminée. Leurs coordonnées par rapport aux triangles $(x_1x_2x_{1v})$, $(x_2x_1x_{2u})$, les fonctions p, q, p_1, q_1, peuvent être choisies arbitrairement et le choix détermine pleinement le tétraèdre $\varDelta$.

WILCZYNSKI les a prises égales à zéro. Un calcul simple montre que les quantités δ, δ_1, $\varDelta$, $\varDelta_1$ restent les mêmes quel que soit le tétraèdre $\varDelta$ normal. Quant aux autres, les fonctions du tétraèdre de WILCZYNSKI (surlignées) s'expriment par les formules suivantes:

$$(III)\quad \begin{cases} \overline{P}=P-p, & \overline{P}_1=P_1-p_1, \\ \overline{m}=m+p_u+qq_1, & \overline{m}_1=m_1+p_{1v}+qq_1, \\ \overline{n}=n+q_u+p_1q+p\delta, & \overline{n}_1=n_1+q_{1v}+pq_1+p_1\delta_1, \\ \overline{N}=N+q_v+Pq+p_1\varDelta, & \overline{N}_1=N_1+q_{1u}+P_1q_1+p\varDelta_1, \\ \overline{R}=R+p_v+Pp+q_1\varDelta+q\delta_1, & \overline{R}_1=R_1+p_{1u}+P_1p_1+q\varDelta_1+q_1\delta. \end{cases}$$

Le système fondamentale (II) prend la forme

$$(II')\quad \begin{cases} \overline{m}=\overline{m}_1=\delta\delta_1, \\ \overline{n}=\delta_v, \qquad \overline{n}_1=\delta_{1u}, \\ \overline{N}=\varDelta_u-\overline{P}_1\varDelta, \qquad \overline{N}_1=\varDelta_{1v}-\overline{P}\varDelta_1, \\ \overline{P}_u=\overline{P}_{1v}=\varDelta\varDelta_1-\delta\delta_1, \\ \overline{R}\delta-\overline{R}_1\varDelta=\delta_{vv}-\varDelta_{uu}+\overline{P}_{1u}\varDelta+\overline{P}_1\varDelta_u+\overline{P}\delta_v, \\ \overline{R}_1\delta_1-\overline{R}\varDelta_1=\delta_{1uu}-\varDelta_{1vv}+\overline{P}_v\varDelta_1+\overline{P}\varDelta_{1v}+\overline{P}_1\delta_{1u}, \\ \overline{R}_u=\varDelta\varDelta_{1v}+\delta\delta_{1v}+2\delta_1\delta_v+\overline{P}(\delta\delta_1-\varDelta\varDelta_1), \\ \overline{R}_{1v}=\varDelta_1\varDelta_u+\delta_1\delta_u+2\delta\delta_{1u}+\overline{P}_1(\delta\delta_1-\varDelta\varDelta_1). \end{cases}$$

4. - *Changement des paramètres.* — Le tétraèdre normal fixe, les quantités δ, $\varDelta$ etc. ne le sont pas. La variation en est produite: 1°) par le changement des paramètres u, v; 2°) par le changement de la normalisation des coordonnées (x_1), (x_2).

En effet le système (I) admet la multiplication de quatre coordonnées (x_1) et (x_3) par une fonction V d'une seule variable v, celle de (x_2) et (x_4) par une fonction U d'une seule variable u.

En indiquant par l'astérique les nouveaux coefficients δ^*, $\varDelta^*$ etc. et les nouvelles variables u^*, v^* nous avons le tableau

$$\text{(IV)}\qquad\left\{\begin{array}{ll}
\delta^*=\delta\,\dfrac{V}{U}\,\dfrac{du}{du^*}, & \varDelta^*=\varDelta\,\dfrac{V}{U}\left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2\dfrac{du^*}{du},\\[2mm]
\delta_1^*=\delta_1\,\dfrac{U}{V}\,\dfrac{dv}{dv^*}, & \varDelta_1^*=\varDelta_1\,\dfrac{U}{V}\left(\dfrac{du}{du^*}\right)^2\dfrac{dv^*}{dv},\\[2mm]
n^*=n\,\dfrac{V}{U}\,\dfrac{du}{du^*}\,\dfrac{dv}{dv^*}, & N^*=N\,\dfrac{V}{U}\left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2,\\[2mm]
n_1^*=n_1\,\dfrac{U}{V}\,\dfrac{du}{du^*}\,\dfrac{dv}{dv^*}, & N_1^*=N_1\,\dfrac{U}{V}\left(\dfrac{du}{du^*}\right)^2,\\[2mm]
m^*=m\,\dfrac{du}{du^*}\,\dfrac{dv}{dv^*}, & R^*=R\left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2,\\[2mm]
m_1^*=m_1\,\dfrac{du}{du^*}\,\dfrac{dv}{dv^*}, & R_1^*=R_1\left(\dfrac{du}{du^*}\right)^2,\\[2mm]
q^*=q\,\dfrac{V}{U}\,\dfrac{dv}{dv^*}, & q_1^*=q_1\,\dfrac{U}{V}\,\dfrac{du}{du^*},\\[2mm]
p^*=p\,\dfrac{dv}{dv^*}+\dfrac{d}{dv^*}(\lg V), & p_1^*=p_1\,\dfrac{du}{du^*}+\dfrac{d}{du^*}(\lg U),\\[2mm]
P^*=P\,\dfrac{dv}{dv^*}-\dfrac{d}{dv^*}\lg\left(V\dfrac{dv}{dv^*}\right), & P_1^*=P_1\,\dfrac{du}{du^*}-\dfrac{d}{du^*}\lg\left(\dfrac{du}{du^*}\right).
\end{array}\right.$$

5. - *La congruence W* est une congruence dont les asymptotiques correspondent sur les deux nappes focales.

Or, les équations des asymptotiques des surfaces (x_1) et (x_2) sont

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l}\delta du^2-\varDelta dv^2=0,\\ \varDelta_1 du^2-\delta_1 dv^2=0.\end{array}\right.$$

Donc l'équation caractéristique de la congruence W est

$$(5)\qquad \delta\delta_1-\varDelta\varDelta_1=0.$$

Les équations de la seconde ligne du tableau (II) nous montrent que les différences $P-p$ et P_1-p_1 sont les fonctions d'une seule variable v et d'une seule variable u. La normalisation des coordonnées (x_1), (x_2) ou bien le choix convenable des paramètres u, v les réduit à zéro conformément au tableau (IV)

$$(6)\qquad \overline{P}=P-p=0,\qquad \overline{P}_1=P_1-p_1=0.$$

6. - *La congruence R* est une congruence W qui se réproduit dans la transformation de LAPLACE. Comme les développables interceptent sur chaque nappe focale un réseau isotherme-conjugué, les équations caractéristiques de la congruence R sont

$$\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 = 0, \qquad \left(\lg \frac{\delta}{\Delta}\right)_{uv} = 0. \tag{7}$$

Les paramètres u, v et les fonctions U, V bien choisie, nous avons

$$\delta = \Delta, \qquad \delta_1 = \Delta_1, \qquad \overline{P} = 0, \qquad \overline{P}_1 = 0, \qquad P = p, \qquad P_1 = p_1. \tag{8}$$

7. - *La congruence L d'un complexe linéaire* est caractérisée par l'équation (4)

$$\sum c(x_1 x_2) = 0$$

qui est satisfaite par les coordonnées linéaires $(x_1 x_2)$ du rayon. Les coefficients c sont constants.

Les différentiations successives par rapport à u et v nous donnent en vertu du tableau (I)

$$\left\{\begin{array}{l} \sum c(x_1 x_4) = 0, \qquad \sum c(x_2 x_3) = 0, \\ \delta \sum c(x_2 x_4) = \Delta_1 \sum c(x_1 x_3), \\ \sum c(x_3 x_4) = q_1 \sum c(x_1 x_3) - q \sum c(x_2 x_4). \end{array}\right. \tag{9}$$

Les différentiations suivantes nous donnent les équations caractéristiques de la congruence L

$$\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 = 0, \qquad \left(\lg \frac{\Delta_1}{\delta}\right)_{uv} = 0. \tag{10}$$

Les paramètres u, v bien choisis, nous avons

$$\delta = \Delta_1, \qquad \delta_1 = \Delta, \qquad \overline{P} = 0, \qquad \overline{P}_1 = 0, \qquad P = p, \qquad P_1 = p_1. \tag{11}$$

CHAPITRE II.

Transformation *T*. Généralités.

8. - *Configuration T.* — Si les arêtes $(x_1 x_2)$ et $(x_3 x_4)$ d'un tétraèdre Δ engendrent deux congruences C et C_1 en transformation T, les foyers de chaque congruence étant, selon la définition, dans les plans focaux de l'autre, les points (x_3) et (x_4) sont les foyers de la congruence C_1 et les plans $(x_1 x_3 x_4)$, $(x_2 x_3 x_4)$ — ses plans focaux. Il suffit pour cela que les plans $(x_1 x_3 x_4)$ et $(x_2 x_3 x_4)$ soient les plans tangents des surfaces (x_3) et (x_4).

---

(4) Pour simplifier les indices sont supprimés

$$\sum c(x_1 x_2) = \sum_{i,k=1}^{4} c_{ik} \begin{vmatrix} x_1^i & x_2^i \\ x_1^k & x_2^k \end{vmatrix}.$$

Donc (5)

$$(x_1x_3x_4x_{3u})=0, \qquad (x_1x_3x_4x_{3v})=0,$$
$$(x_2x_3x_4x_{4u})=0, \qquad (x_2x_3x_4x_{4v})=0,$$

et le tableau (I) nous donne les conditions caractéristiques de la configuration T

$$n=0, \qquad N=0, \qquad n_1=0, \qquad N_1=0. \tag{12}$$

En les portant dans le système fondamental (II) nous obtenons les équations qui déterminent la configuration T

$$\left\{\begin{array}{ll} p_u=\delta\delta_1-qq_1-m, & p_{1v}=\delta\delta_1-qq_1-m_1, \\ P_u-p_u=\Delta\Delta_1-\delta\delta_1, & P_{1v}-p_{1v}=\Delta\Delta_1-\delta\delta_1, \\ \delta_v-q_u=p\delta+p_1q, & \delta_{1u}-q_{1v}=p_1\delta_1+pq_1, \\ \Delta_u-q_v=P_1\Delta+Pq, & \Delta_{1v}-q_{1u}=P\Delta_1+P_1q_1, \\ R_u=m_v+m(P+p), & R_{1v}=m_{1u}+m_1(P_1+p_1), \\ R\delta-R_1\Delta=(m-m_1)q, & R_1\delta_1-R\Delta_1=(m_1-m)q_1. \end{array}\right. \tag{13}$$

9. - *Équations de la détermination de la transformation T.* — La congruence (x_1x_2) soit donnée par les composants des déplacements d'un tétraèdre Δ quelconque, par exemple, du tétraèdre de WILCZYNSKI

$$\delta, \quad \delta_1, \quad \Delta, \quad \Delta_1, \quad \overline{P}, \quad \overline{P}_1, \quad \overline{R}, \quad \overline{R}_1.$$

Ils satisfont le système (II').

Pour construire une transformation T de la congruence (x_1x_2) il faut déterminer les coordonnées p, q, p_1, q_1 qui satisfont les équations (II) et (12).

Or, le système (II) est satisfait en vertu des équations (II'); quant aux équations (12), nous les transformons à l'aide du tableau (III)

$$\left\{\begin{array}{l} q_u=-p_1q-p\delta+\delta_v, \\ q_v=-p_1\Delta-pq+\Delta_u-\overline{P}_1\Delta-\overline{P}q, \\ q_{1u}=-p\Delta_1-p_1q_1+\Delta_{1v}-\overline{P}\Delta_1-\overline{P}_1q_1, \\ q_{1v}=-pq_1-p_1\delta_1+\delta_{1u}. \end{array}\right. \tag{14}$$

Les équations (14) déterminent la transformation T.

Le systeme (14) contient p et p_1 en termes finis. En les éliminant nous obtenons pour q et q_1 deux équations du premier ordre qu'on peut résoudre par rapport aux dérivées q_u, q_{1u} si $\delta_1q-\Delta q_1$ n'est pas nul.

Donc, quelles que soient deux surfaces reglées circonscrites autour des sur-

(5) De façon générale

$$(x_1x_2x_3x_4)=\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix}.$$

faces (x_1) et (x_2) le long d'une ligne $v=$const, à moins que $\delta_1 q - \Delta q_1$ ne soit nul, il existe une transformation T et une seulement dont les congruences auxiliaires contiennent les surfaces gauches données.

10. - *Congruences W à focales réglées.* — Les raisonnements précédents sont en défaut si le système (14) ne peut pas être résolu par rapport à p et p_1. Or, cela nous ramène aux équations

$$q^2 = \Delta\delta, \qquad q_1^2 = \Delta_1\delta_1, \qquad \Delta\Delta_1 = \delta\delta_1. \tag{15}$$

Comme les droites (x_1x_3) et (x_2x_4) touchent sur les surfaces (x_1) et (x_2) les lignes

$$\delta du + q dv = 0, \qquad q_1 du + \delta_1 dv = 0$$

les équations (4) montrent que les congruences auxiliaires (15) sont engendrées par les tangents asymptotiques des surfaces (x_1) et (x_2). Si leurs foyers (x_1) et (x_3), (x_2) et (x_4) ne se confondent pas, chacune des congruences dégénère en une famille de génératrices rectilignes d'une surface gauche. La congruence (x_1x_2) est une congruence W à focales reglées. Elle est en transformation T avec elle même d'une infinité de manières, le rayon homologue de la congruence transformée (x_3x_4) étant un rayon arbitraire qui intercepte les mêmes génératrices.

11. - *Congruence d'un complexe linéaire.* — Si l'expression $\delta_1 q - \Delta q_1$ est nulle identiquement, nous avons, t étant une nouvelle fonction inconnue

$$q = \Delta t, \qquad q_1 = \delta_1 t.$$

En portant ces expressions dans les équations (14) nous obtenons, les dérivées de la fonction t éliminées,

$$t\left[\overline{P} + \left(\lg \frac{\Delta}{\delta_1}\right)_v\right] + \overline{P}_1 + \left(\lg \frac{\delta_1}{\Delta}\right)_u = 0$$

et cette équation est vérifiée identiquement si

$$\overline{P} = \left(\lg \frac{\delta_1}{\Delta}\right)_v, \qquad \overline{P}_1 = \left(\lg \frac{\Delta}{\delta_1}\right)_u.$$

Or, il suit de là en vertu des équations (II′) la condition caractéristique (10). Donc la congruence (x_1x_2) est une congruence d'un complexe linéaire.

Inversement, soit (x_1x_2) une congruence L. Les paramètres u, v bien choisis, nous avons

$$\delta = \Delta_1, \qquad \delta_1 = \Delta, \qquad \overline{P} = 0, \qquad \overline{P}_1 = 0$$

et le système (14) prend la forme

$$\left\{\begin{array}{ll} q_u + p_1 q + p\delta = \delta_v, & q_v + pq + p_1\delta_1 = \delta_{1u}, \\ q_{1u} + p_1 q_1 + p\delta = \delta_v, & q_{1v} + pq_1 + p_1\delta_1 = \delta_{1u}, \end{array}\right. \tag{16}$$

donc

$$(q - q_1)_u = -p_1(q - q_1), \qquad (q - q_1)_v = -p(q - q_1). \tag{17}$$

Le système (17) a une solution évidente

$$q_1 = q.$$

Le système (16) détermine p et p_1 et la fonction q reste arbitraire. La congruence (x_3x_4) appartient au même complexe. Cela découle immédiatement des équations (9).

Si les fonctions q et q_1 ne sont pas égales, les équations (17) déterminent p, p_1 et le système (16) donne q et q_1 avec deux fonctions arbitraires d'un argument.

On démontre sans peine que deux congruences du même complex linéaire sont toujours en transformation T.

La congruence A des tangentes communes de deux nappes quelconques de l'une et de l'autre surface focales de nos congruences, établit entre leurs rayons une correspondance. Soient (x_1x_2) et (x_3x_4) les rayons correspondants, (x_1x_3) — celui de la congruence A et les quatre points (x_i) — leurs foyers. Les plans $(x_1x_2x_3)$ et $(x_3x_4x_1)$ comme plans focaux sont conjugués aux foyers (x_2) et (x_4) par rapport au complexe en question. Les deux droites (x_1x_3) et (x_2x_4) sont donc réciproques et les plans $(x_1x_2x_4)$ et $(x_3x_4x_2)$, conjugués aux foyers (x_1) et (x_3), sont les plans focaux des rayons. Les quatre foyers étant mutuellement situés dans les plans focaux, les deux congruences sont en transformation T.

THÉORÈME. - *Quelle que soit la congruence donnée, il existe ∞ congruences transformées T dépendant de deux fonctions d'un argument. La congruence d'un complexe linéaire peut être transformée en outre en n'import quelle congruence du même complexe, la congruence W à focales reglées - en elle même.*

12\. - *Correspondance des développables.* — Selon le beau théorème de M. FUBINI (6), si deux congruences sont en transformation T et correspondent par leurs développables, toutes les deux sont des congruences R composant un couple stratifiable conjugué et les congruences auxiliaires sont les congruences de M. JONAS.

Le théorème de M. FUBINI suppose que la correspondance des développables est directe c'est-à-dire que les arêtes de rebroussement des développables correspondantes sont situées sur les focales de la même congruence auxiliaire.

Nous allors examiner la transformation T à correspondance inverse des développables. Pour simplifier les raisonnements, supposons que les développables des congruences auxiliaires correspondent inversement.

Comme il suit du tableau (I)

$$\begin{aligned} -qx_{1u} + \delta x_{1v} &= p\delta x_1 + \delta x_3, \\ -q_1x_{4u} + \Delta_1 x_{4v} &= q_1P_1x_4 + (\Delta_1 m_1 - R_1q_1)x_2, \end{aligned}$$

(6) Annali di Matematica, 1924 (4), t. 1, p. 241.

une paire des développables correspondantes est

$$\delta du + q dv = 0, \qquad \Delta_1 du + q_1 dv = 0, \tag{18}$$

et la correspondance en question s'exprime par les équations

$$\delta q_1 - \Delta_1 q = 0, \qquad \delta_1 q - \Delta q_1 = 0. \tag{19}$$

13. - *Suite de Laplace périodique à période* 4. — Le système (19) est satisfait par les valeurs

$$q = 0, \qquad q_1 = 0.$$

En les portant dans le système (13) nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} p_u = \delta\delta_1 - m, \qquad p_{1v} = \delta\delta_1 - m_1, \\ P_u - p_u = P_{1v} - p_{1v} = \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1, \\ p = (\lg \delta)_v, \qquad p_1 = (\lg \delta_1)_u, \\ P = (\lg \Delta_1)_v, \qquad P_1 = (\lg \Delta)_u, \\ R_u = m_v + m(P + p), \qquad R_{1v} = m_{1u} + m_1(P_1 + p_1), \\ R\delta - R_1 \Delta = 0, \qquad R\Delta_1 - R_1\delta_1 = 0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Les deux dernières équations donnent, R et R_1 n'étant pas nuls,

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0;$$

donc la congruence est une congruence W; les paramètres bien choisis, P et P_1 sont égaux à p et p_1 et les équations (20) de la troisième et de la quatrième lignes nous ramènent à la condition (10). La congruence C est une congruence d'un complexe linéaire. La congruence transformée l'est aussi, conformément aux raisonnements de l'art. 11, le q étant égal à q_1.

Si

$$R = 0, \qquad R_1 = 0 \tag{21}$$

les raisonnement sont en défaut. Le tableau (I) nous montre que les développables de toutes les quatre congruences C, C_1, A_1, A_2 correspondent; donc nous avons une suite de LAPLACE périodique à période 4. Il est évident que chaque suite de LAPLACE périodique à période 4 présente une configuration T à correspondance inverse des développables.

R et R_1 étant nuls, les équations (20) de l'avant dernière ligne s'intégrent. Les paramètres u, v bien choisis, nous obtenons

$$m = \frac{1}{\delta\Delta_1}, \qquad m_1 = \frac{1}{\delta_1\Delta}.$$

Or, l'équation de la troisième et de la quatrième lignes nous donne, la normalisation des coordonnées convenable,

$$\frac{\Delta_1}{\delta} = \frac{\Delta}{\delta_1}. \tag{22}$$

Donc, en introduisant comme une nouvelle fonction inconnue t le rapport commun (22), nous avons le système

$$(23)\qquad \begin{cases} \Delta_1=\delta t, \qquad \Delta=\delta_1 t, \\ (\lg \delta)_{uv}=\delta\delta_1-\dfrac{1}{\delta^2 t}, \qquad (\lg \delta_1)_{uv}=\delta\delta_1-\dfrac{1}{\delta_1^2 t}, \\ (\lg t)_{uv}=\delta\delta_1(t^2-1), \end{cases}$$

qui détermine la configuration en question.

Observons que, la congruence (x_1x_2) étant une congruence W, le système (23) donne

$$t=1, \qquad \Delta_1=\delta, \qquad \Delta=\delta_1;$$

donc la première congruence appartient à un complexe linéaire; les coordonnées q et q_1 égales, la seconde l'est aussi.

14. - *Congruence d'un complexe linéaire.* — Si q et q_1 ne sont pas nuls, nous résoudrons les équations (19) en introduisant les fonctions auxiliaires λ et μ

$$(24)\qquad \delta=\lambda q, \qquad \delta_1=\mu q_1, \qquad \Delta=\mu q, \qquad \Delta_1=\lambda q_1.$$

En portant ces expressions dans le système (14) nous obtenons, les dérivées des fonctions inconnues λ, μ éliminées,

$$\lambda\left[\bar{P}+\left(\lg\frac{q}{q_1}\right)_v\right]+\bar{P}_1+\left(\lg\frac{q}{q_1}\right)_u=0,$$
$$\mu\left[\bar{P}_1+\left(\lg\frac{q}{q_1}\right)_u\right]+\bar{P}+\left(\lg\frac{q}{q_1}\right)_v=0;$$

donc

$$\lambda=\frac{1}{\mu}$$

ou bien

$$\bar{P}=\left(\lg\frac{q_1}{q}\right)_v, \qquad \bar{P}_1=\left(\lg\frac{q_1}{q}\right)_u.$$

La première supposition nous ramène immédiatement aux équations (15); la transformation T fait correspondre une congruence W à focales réglées à elle même.

La seconde supposition nous renvoie à l'art. 11; les deux congruences appartiennent au même complexe linéaire.

En resumé: les développables des congruences auxiliaires correspondent inversement: 1°) si la configuration T est une suite de LAPLACE périodique à période 4, 2°) si la transformation T fait correspondre deux congruences du même complexe linéaire ou bien, 3°) une congruence W à focales réglées à elle-même.

En excluant le cas de dégénérance nous avons le

THÉORÈME. - *Les développables des deux congruences en transformation T correspondent inversement: 1°) si la configuration T est une suite de Laplace périodique à période 4, et 2°) si les deux congruences en transformation sont réciproques dans la correspondance établie par un complexe linéaire.*

15. - *Congruences réciproques.* — Le théorème obtenu peut être démontré directement. Les développables correspondant, le tableau (I) nous montre que R et R_1 sont nuls et les deux dernières équations (13) nous donnent:

1°) $$q=0, \qquad q_1=0$$

ou bien 2°) $$m=m_1.$$

Dans le premier cas la configuration est une suite LAPLACE périodique à période 4 déterminée par le système (23).

Quant au second, on démontre sans peine que les congruences auxiliaires appartiennent au même complexe linéaire.

En portant les valeurs $R=0$, $R_1=0$ dans les équations (III) et (13) nous obtenons

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{ll} p_u=\delta\delta_1-qq_1-m, & p_v=\overline{R}-p^2-p\overline{P}-q_1\Delta-q\delta_1, \\ p_{1u}=\overline{R}_1-p_1^2-p_1\overline{P}_1-q\Delta_1-q_1\delta, & p_{1v}=\delta\delta_1-qq_1-m, \\ m_u=-m(2p+\overline{P}), & m_v=-m(2p_1+\overline{P}_1). \end{array}\right.$$

Les équations (14) et (25) composent un système complétement intégrable. Quelle que soit la congruence (x_1x_2), il existe ∞^5 transformations qui la font correspondre à une congruence réciproque.

CHAPITRE III.

Transformation T des congruences W.

16. - THÉORÈME. - *La transformée T de la congruence W est une congruence W.*

La congruence (x_1x_2) étant une congruence W, nous avons

$$\Delta\Delta_1-\delta\delta_1=0$$

et les deux dernières équations (13), les R, R_1 éliminés, nous donnent

$$(26)\qquad (m-m_1)(q\delta_1-q_1\Delta)=0.$$

Or, les asymptotiques sur les deux nappes focales (x_3) et (x_4) de la seconde congruence sont déterminées par les équations

$$(x_3x_{3u}x_{3v}d^2x_3)=0, \qquad (x_4x_{4u}x_{4v}d^2x_4)=0$$

ou bien en vertu du tableau (I)

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} (m\delta-qR_1)du^2+2(m-m_1)qdudv+(Rq-m_1\Delta)dv^2=0, \\ (R_1q_1-\Delta_1m)du^2+2(m_1-m)q_1dudv+(m_1\delta_1-q_1R)dv^2=0. \end{array}\right.$$

Donc, si

$$(28)\qquad m=m_1,$$

les asymptotiques sur toutes les quatre nappes focales (art. 5) sont

$$\delta du^2 - \Delta dv^2 = 0\,;$$

toutes les quatre congruences sont des congruences W et la configuration est celle du théorème de BIANCHI sur la permutabilité des transformations asymptotiques des surfaces.

Nous la nommons configuration de BIANCHI.

Le second facteur (26) nul, les asymptotiques (27) correspondent également. De plus, les équations (19) satisfaites, les développables des congruences auxiliaires correspondent inversement et nous revenons aux configurations des art. 13, 14. Or, la suite de LAPLACE périodique à période 4 contenant une congruence W, la congruence opposée l'est aussi et toutes les deux appartiennent au même complexe linéaire.

Donc, si la congruence primitive d'une transformation T est une congruence W, la congruence transformée l'est aussi et les congruences auxiliaires le sont également, à moins que ce ne soit la transformation de la congruence d'un complexe linéaire en une congruence du même complexe ou la transformation de la congruence W à focales reglées en elle même.

17. - *Configuration de Bianchi.* — Des considérations géométriques bien simples rendent évidente la proposition démontrée.

Il est facile à voir que, les suppositions faites, les surfaces (x_1) et (x_3) ont deux réseaux conjugués communs; le premier est intercepté par les développables de la congruence $(x_1 x_3)$ dont elles sont les focales. Quant au second, il correspond aux développables de la seconde congruence auxiliaire $(x_2 x_4)$: elles découpent un réseau conjugué sur chacune des deux nappes focales (x_2) et (x_4) et, les congruences $(x_1 x_2)$ et $(x_3 x_4)$ étant des congruences W, un système conjugué lui correspond sur la surface (x_1) et sur la surface (x_3).

Or, si les surfaces ont deux réseaux conjugués communs, tous les autres le sont. Donc la congruence $(x_1 x_3)$ et par analogie la congruence $(x_2 x_4)$ sont des congruences W — si toutefois les deux réseaux en question ne se confondent pas. Or, les deux réseaux confondus, les développables des congruences auxiliaires correspondent — et nous revenons aux raisonnements des art. 13-14.

La configuration de BIANCHI est caractérisée par les équations (12) et (28). En effet, les deux dernières équations (13) nous donnent, les fonctions m et m_1 égales, la condition (5), si toutefois R et R_1 ne sont pas nuls. Cette dernière supposition nous ramène aux congruences réciproques (art. 15).

18. - *Le couple des congruences stratifiable* est une configuration T particulière. M. FUBINI (7) l'a défini par la propriété suivante: chaque rayon d'une

(7) *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle transformazioni delle superficie R,*

et d'autre congruence est à la fois lieu de ∞^1 points M et l'axe de ∞^1 plans μ. Les points M engendrent ∞^1 surfaces dont les plans tangents sont les plans μ passant par le rayon correspondant de la seconde congruence.

Dans l'article déja cité ([8]) j'ai examiné la configuration en question. Les congruences qui entrent dans les couples stratifiables forment une classe de congruence spéciale, quoique étendue. Quant à la configuration, elle est déterminée par les équations (12) et l'équation

$$m+m_1=0. \tag{29}$$

Donc à un certain point de vue, la configuration du couple stratifiable est un antipode de la configuration de BIANCHI. La relation (29) rapprochée de l'équation (28), montre que la seule configuration du couple stratifiable qui est à la fois une configuration de BIANCHI est caractérisée par la condition

$$m=0, \qquad m_1=0.$$

C'est la configuration du couple de congruences stratifiables conjuguées, contenant deux congruences R [art. 29].

19. - *Congruences W stratifiables.* — Dans l'art. 16 nous avons trouvé deux classes (pas davantage) de congruences W qui entrent dans la configuration T sans que les congruences auxiliaires soient des congruences W c'est-à-dire sans que la configuration soit une configuration de BIANCHI: ce sont les congruences appartenant à un complexe linéaire et les congruences W à focales réglées. Il suit de là que dans la recherche des congruences W stratifiables en sus des congruences R nous n'avons à examiner que ces deux classes de congruences.

Toutes les deux possédent la propriété en question.

Dans le mémoire cité ([9]) je l'ai prouve pour les congruences appartenant à un complexe linéaire. Quelle que soit la congruence d'un complexe linéaire, il existe ∞ congruences du même complexe qui forment avec elle un couple stratifiable.

Quant à la congruence W à focales réglées, elle compose un couple stratifiable avec elle-même. Cela découle immédiatement des raisonnements de l'art. 10.

Une congruence W à focales réglées donnée, faisons correspondre deux rayons qui touchent une nappe de la surface focale aux points d'une même génératrice. En vertu du théorème de M. SEGRE sur la correspondance des génératrices, ils touchent la seconde nappe aux points d'une génératrice correspondante. La

---

Annali di Mat., 1924 (4), t. 1, pp. 241-257. La configuration se rencontre dans le mémoire de M. DEMOULIN: *Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K*, 1919. Bulletin de Bruxelles, n.i 2-3, p. 103.

([8]) Loco cit. ([1]).

([9]) Loco cit. ([1]), p. 350.

correspondance choisie détermine donc une transformation T de la congruence en elle-même. Or, le point de contact du second rayon avec la première nappe focale peut être pris arbitrairement sur la génératrice qui intercepte le premier rayon. On peut le choisir de manière à ce que la condition (29) soit satisfaite et que la congruence forme avec elle-même un couple stratifiable.

Prouvons le par la voie analytique. La configuration est caractérisée par les formules (15). Choisissons les paramètres u, v pour que les équations (6) soient satisfaites et portons les expressions de q et de q_1 tirées des équations (15) dans le système (14). Nous obtenons deux équations pour δ, Δ, δ_1, Δ_1 qui caractérisent la congruence à focales réglées

$$(\sqrt[4]{\delta^3\Delta})_v=(\sqrt[4]{\Delta^3\delta})_u, \qquad (\sqrt[4]{\delta_1^3\Delta_1})_u=(\sqrt[4]{\Delta_1^3\delta_1})_v \tag{30}$$

et une équation seulement contenant p et p_1

$$p\sqrt{\delta}+p_1\sqrt{\Delta}=\sqrt{\delta}\left(\lg\sqrt[4]{\frac{\delta}{\Delta}}\right)_v+\sqrt{\Delta}\left(\lg\sqrt[4]{\frac{\Delta}{\delta}}\right)_u.$$

En ajoutant l'équation (29) qui prend en vertu du tableau (III) et des équations (15) la forme

$$p_u+p_{1v}=0$$

nous aurons deux équations qui déterminent p et p_1 avec une fonction arbitraire d'un argument.

Chaque congruence à focales réglées est stratifiable avec elle-même d'une infinité de manières.

THÉORÈME. - *Les seules congruences W stratifiables sont:* 1°) *les congruences R qui font des couples stratifiables avec congruences R*; 2°) *les congruences appartenent à un complexe linéaire; elles sont stratifiables avec les congruences du même complexe et* 3°) *les congruences W à focales réglées qui sont stratifiables avec elles-mêmes.*

20. - *Faisceau de transformations T.* — La configuration de BIANCHI est déterminée par les équations (12) avec les conditions (5) et (28). Celle-ci prend en vertu du tableau (III) la forme

$$p_u=p_{1v},$$

donc en introduisant une fonction auxiliaire φ nous avons

$$p=(\lg\varphi)_v, \qquad p_1=(\lg\varphi)_u. \tag{31}$$

En portant ces expressions dans le système (14) nous obtenons pour q et q_1 le système

$$\left\{\begin{aligned} &(q\varphi)_u=\varphi^2\left(\frac{\delta}{\varphi}\right)_v, &&(q\varphi)_v=\varphi^2\left(\frac{\Delta}{\varphi}\right)_u,\\ &(q_1\varphi)_u=\varphi^2\left(\frac{\Delta_1}{\varphi}\right)_v, &&(q_1\varphi)_v=\varphi^2\left(\frac{\delta_1}{\varphi}\right)_u \end{aligned}\right. \tag{32}$$

dont la condition d'intégrabilité est

$$(33)\qquad \begin{cases} \delta\varphi_{vv}-\varDelta\varphi_{uu}=\varphi(\delta_{vv}-\varDelta_{uu}), \\ \delta_1\varphi_{uu}-\varDelta_1\varphi_{vv}=\varphi(\delta_{1uu}-\varDelta_{1vv}). \end{cases}$$

Les deux équations (33) se confondent en vertu de la relation

$$\delta_1(\delta_{vv}-\varDelta_{uu})+\varDelta(\delta_{1uu}-\varDelta_{1vv})=0$$

qui découle, les $\overline{R}$ et $\overline{R}_1$ éliminées, du tableau (II') en vertu des équations (5) et (6). Il est évident que les équations (32) nous renvoient à la transformation de MOUTARD de l'équation (33).

L'équation (33) est homogène par rapport à la fonction inconnue φ, d'où suit que, φ' et φ'' étant deux solutions,

$$\varphi=C_1\varphi'+C_2\varphi'' \qquad\qquad C_i=\text{const}$$

l'est également. Les équations (31) et (32) nous donnent les coordonnées du rayon (x_3x_4) qui correspond à la solution φ.

$$p=\frac{C_1\varphi'p'+C_2\varphi''p''}{C_1\varphi'+C_2\varphi''}, \qquad p_1=\frac{C_1\varphi'p_1'+C_2\varphi''p_1''}{C_1\varphi'+C_2\varphi''},$$
$$q=\frac{C_1\varphi'q'+C_2\varphi''q''}{C_1\varphi'+C_2\varphi''}, \qquad q_1=\frac{C_1\varphi'q_1'+C_2\varphi''q_1''}{C_1\varphi'+C_2\varphi''},$$

où p', q' et p'', q'' correspondent aux solutions φ' et φ'' et les constantes insignifiantes d'intégration sont omises.

Or, p, q, 1 sont les coordonnées du foyer (x_3) par rapport au triangle (x_1, x_2, x_{1v}). Donc en multipliant les coordonnées (x_3) et (x_4) par la solution φ correspondante nous avons les relations

$$(34)\qquad x_3=C_1x_3'+C_2x_3'', \qquad x_4=C_1x_4'+C_2x_4''$$

d'où suit que deux transformations T d'une congruence W déterminent un faisceau ([10]) de transformations T. Les foyers des rayons homologues des congruences du faisceau divisent les distances entre les foyers qui correspondent aux deux transformations données en rapports constants.

Il suit de là que les rayons homologues des congruences du faisceau forment une demiquadrique Q qui répose sur deux droites $(x_3'x_3'')$ et $(x_4'x_4'')$, lieux des foyers correspondants.

Nous reviendrons à l'examen de la demiquadrique introduite dans le chapitre suivant [art. 25].

([10]) TORTORICI: *Sulle deformazioni infinitesimi etc.* 1913. Rendiconti, Palermo, t. 35, p. 289.

CHAPITRE IV.

Théorème de permutabilité des transformations T.

21. - *Produit des transformations T.* — Convenons d'appeler le produit des deux transformations T une transformation T du second ordre.

Existe-t-il des transformations égales parmi les transformations T du second ordre d'une congruence donnée? S'il en est ainsi, nous disons que les transformations T du premier ordre sur lesquelles elle base sont permutables.

Si (x_3x_4) et $(x_3'x_4')$ sont deux congruences transformées T du premier ordre et (z_1z_2) leur commune transformée T du second ordre, les foyers (z_1) et (z_2) en sont situés dans les plans focaux des deux premières et vice versa. En choisissant convenablement les coefficients a_i, b_i nous avons donc

$$\tag{35} \begin{cases} z_1 = x_1 + a_3x_3 + a_4x_4 \\ z_2 = x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 \end{cases}$$

et $$(x_1x_3'x_4'z_1) = 0, \qquad (x_2x_3'x_4'z_2) = 0, \qquad (x_3z_1z_2x_3') = 0, \qquad (x_4z_1z_2x_4') = 0.$$

En y portant les expressions (35) nous obtenons

$$\tag{36} \begin{cases} a_3 = \lambda(p_1 - p_1'), & a_4 = -\lambda(q - q'), \\ b_3 = -\lambda(q_1 - q_1'), & b_4 = \lambda(p - p') \end{cases}$$

où λ est une fonction auxiliaire et les composants du second tétraèdre $(x_1x_2x_3'x_4')$ sont indiqués par l'accent

$$\tag{37} \begin{cases} x_3' = (p - p')x_1 + (q - q')x_2 + x_3, \\ x_4' = (q_1 - q_1')x_1 + (p_1 - p_1')x_2 + x_4. \end{cases}$$

Il ne nous reste qu'à mettre en équation que les plans $(z_1z_2x_3)$ et $(z_1z_2x_4)$ touchent les surfaces (z_1) et (z_2) c'est-à-dire qu'ils contiennent les points (z_{1u}), (z_{1v}) et (z_{2u}), (z_{2v}) respectivement. Cela nous conduit aux équations

$$\tag{38} \begin{cases} a_{4u} = qa_3 + P_1a_4 + \delta b_4 + (ma_3 + R_1b_4)a_4, \\ a_{4v} = \Delta a_3 + pa_4 + qb_4 + (Ra_3 + m_1b_4)a_4, \\ b_{3u} = q_1a_3 + p_1b_3 + \Delta_1b_4 + (ma_3 + R_1b_4)b_3, \\ b_{3v} = \delta_1a_3 + Pb_3 + q_1b_4 + (Ra_3 + m_1b_4)b_3. \end{cases}$$

En y portant les expressions (36) nous n'obtenons que deux équations indépendantes

$$\tag{39} \begin{cases} (\lg \lambda)_u = p_1' + P_1 + \lambda[m(p_1 - p_1') + R_1(p - p')], \\ (\lg \lambda)_v = p' + P + \lambda[R(p_1 - p_1') + m_1(p - p')]. \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité est

$$\tag{40} \begin{aligned} &(p_1 + p_1')_v - (p + p')_u + \lambda\{m(p_1 - p_1')_v - m_1(p - p')_u + \\ &+ (m_1 - m)(p - p')(p_1 - p_1') + R_1(p - p')_v - R(p_1 - p_1')_u + \\ &+ R_1(p - p')(p' + P) - R(p_1 - p_1')(p_1' + P_1)\} = 0. \end{aligned}$$

22. - *Transformations des congruences réciproques.* — La valeur de λ tirée de l'équation (40) ne vérifie pas, en général, le système (39). Donc deux transformations quelconque d'une congruence donnée (x_1x_2) ne sont pas permutables. Les congruences permutables en sont déterminées par les 9 quantités p, q, p_1, q_1, p', q', p_1', q_1' et λ qui sont assujeties à satisfaire les 10 équations: deux fois le système (14) (par les valeurs de p, q et par celles de p', q') et les équations (39). Le système obtenu a toujours des solutions.

Quelle que soit la congruence (x_1x_2), toutes les transformations qui lui font correspondre une congruence réciproque par rapport à un complexe linéaire, sont permutables.

En effet, les transformations en question sont caractérisées (art. 15) par les équations

$$m=m_1, \qquad R=0, \qquad R_1=0. \tag{41}$$

Comme il suit de là

$$p_{1v}=p_u,$$

l'équation (40) est vérifiée identiquement et le système (39) détermine λ avec une constante arbitraire. Deux transformations (41) données, il existe ∞^1 transformations communes du second ordre. Chacune des congruences obtenues et la congruence primitive sont réciproques par rapport à un complexe linéaire.

23. - *Transformations spéciales des congruences d'un complexe linéaire.* — Quelle que soit la transformation T d'une congruence appartenant à un complexe linéaire, la transformation spéciale qui fait correspondre à la congruence (x_1x_2) une congruence du même complexe (art. 11), est permutable avec elle.

Les quantités caractéristiques de cette transformation p', p_1', $q'=q_1'$ sont déterminées par le système (16) d'ou l'on dérive

$$p'_{1v}q'+p_v'\delta-p'_{1u}\delta_1-p_u'q'=p_1'^2\delta-p'^2\delta_1+\overline{R}\delta-\overline{R}_1\delta_1. \tag{42}$$

Les équations (16), (42), (39) et (40) composent un système en involution pour p', q', p_1', et λ, d'où suit la proposition.

Trois fonctions p', p_1', q' données, il n'existe qu'une seule fonction λ. Donc chaque paire des congruences permutables possède, en général, une seule transformation T commune du second ordre.

24. - THÉORÈME. - *Les seules congruences dont toutes les transformations T sont permutables, sont les congruences W.*

Si deux transformations T quelconques (p, p_1, q, q_1) et (p', p_1', q', q_1') sont permutables, l'expression de λ tirée de l'équation (40) vérifie le système (39) en vertu des équations (14).

Or, en éliminant les dérivées de q, q_1 du système (14) nous obtenons

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} p_v\delta+p_{1v}q&=p_uq+p_{1u}\Delta+p_1(p_1+\bar{P}_1)\Delta-\\ &\quad -p(p+\bar{P})\delta+\bar{P}_uq+\bar{R}\delta-\bar{R}_1\Delta,\\ p_v\Delta_1+p_{1v}q_1&=p_uq_1+p_{1u}\delta_1+p_1(p_1+\bar{P}_1)\delta_1-\\ &\quad -p(p+\bar{P})\Delta_1-\bar{P}_{1v}q_1+\bar{R}\Delta_1-\bar{R}_1\delta_1.\end{aligned}\right.$$

Les mêmes équations pour p', q' etc. Donc, en éliminant les dérivées p_v', p'_{1v} nous obtenons de l'équation (40)

$$\lambda=\frac{B}{A},$$

$$\begin{aligned} A&=p_u'(m_1-m)(\delta q_1'-\Delta_1q')+p'_{1u}[m(\Delta\Delta_1-\delta\delta_1)+\\ &\qquad +R(\delta q_1'-\Delta_1q')-R_1(\Delta q_1'-\delta_1q')]+....\\ B&=p'_{1u}(\Delta\Delta_1-\delta\delta_1)+....\end{aligned}$$

Les termes non écrits ne contiennent pas les dérivées de p' et p_1'.

En portant cette expression de λ dans la première équation (39) nous obtenons

$$\begin{aligned} p'_{uu}(m_1-m)(\delta q_1'-\Delta_1q')A+p'_{1uu}[(\Delta\Delta_1-\delta\delta_1)(Am-B)+\\ +R(\delta q_1'-\Delta_1q')A-R_1(\Delta q_1'-\delta_1q)A]+....=0.\end{aligned}$$

Les termes non écrits ne contiennent pas les secondes dérivées de p' et p_1'.

L'équation obtenue doit être vérifiée identiquement en vertu des équations (43) écrites pour p', p_1'. Or, cela n'est possible que si

$$(28)\qquad m=m_1$$

et cette condition nous ramène aux configuration de BIANCHI [art. 17]. Le cas d'exception $R=0$, $R_1=0$ nous avons examiné; il ne donne pas de solutions du problème.

Il nous reste à montrer que les transformations T des congruences W possédent la propriété en question.

Or, il suit de la condition (28)

$$p_u=p_{1v}$$

et les équations (43) donnent, les paramètres bien choisis (art. 5)

$$\Delta(p_{1u}+p_1^2-\bar{R}_1)=\delta(p_v+p^2-\bar{R}).$$

En portant ces expressions dans l'équation (40) nous verrons qu'elle se vérifie identiquement.

25. - *Configuration P.* — Les rayons homologues de la congruence primitive C, des deux congruences transformées T du premier ordre C_1 et C_2 et de la congruence C' du théorème de permutabilité avec 8 rayons correspondants des congruences auxiliaires composent une configuration 8_4 de MÖBIUS. Les 8 sommets de la configuration sont les foyers des rayons homologues, ses 8 plans sont les plans focaux correspondants. Chaque plan contient 4 sommets, chaque sommet 4 plans. Quand la configuration se déplace, les 8 sommets décrivent 8 surfaces qui sont touchées par tous les plans et les arêtes de la configuration ([11]).

La configuration du théorème de permutabilité lié à la congruence W ([12]) est encore plus remarquable. Le système (39) est alors complétement intégrable et détermine λ avec une constante arbitraire. Il existe donc ∞^1 congruences C' qu'on obtient en appliquant une transformation T convenable, soit à la congruence C_1, soit à la congruence C_2. Les foyers homologues de ∞^1 congruences C' sont situés sur les deux droites (x_1z_1) et (x_2z_2). Cela découle immédiatement des formules (35), (36): λ variant, (z_1) se déplace le long d'une droite.

Or, il est évident que le rayon (z_1z_2) intercepte aussi les droites (x_3x_3'), (x_4x_4') qui sont situées dans les plans focaux du rayon $(z_1x_3x_3')$ et $(z_2x_4x_4')$. Donc le rayon (z_1z_2) se déplace, λ variant, en s'appyant sur 4 droites et engendre une demi-quadrique Q.

En partant de la congruence C_1 nous obtenons par l'application de la transformation T les deux congruences C et C'; le théorème de permutabilité nous donne alors la congruence C_2 et ∞^1 congruences qui appartiennent au faisceau de congruences $W(C_1C_2)$. Leurs foyers homologues sont situés sur les droites (x_3x_3'), (x_4x_4'); leurs rayons intercoptent les droites (x_1z_1), (x_2z_2) qui sont situées dans leurs plans focaux $(x_3x_1z_1)$ et $(x_4x_2z_2)$ respectivement. Les rayons homologues du faisceau (C_1C_2) appartiennent donc à la même demiquadrique Q.

Nous désignons l'ensemble de congruences des faisceaux (C_1C_2) et (CC') et des congruences auxiliaires par le nom de configuration P.

26. - THÉORÈME. - *Les configurations qui contiennent les congruences réciproques excluses, toutes les congruences de la configuration P sont des congruences W.*

Comme les deux congruences C et C' déterminent maintenant un faisceau, le système (39) est complètement intégrable et l'équation (40) est vérifiée identiquement; donc

$$(p_1+p_1')_v=(p+p')_u. \tag{44}$$

En ajoutant les équations homologues des deux tableaux (I) écrits pour les deux transformations T_1 et T_2 nous obtenons par exemple

$$x_{1v}=\frac{p+\mu p'}{1+\mu}\,x_1+\frac{q+\mu q'}{1+\mu}\,x_2+\frac{x_3+\mu x_3'}{1+\mu}$$

où μ est une fonction arbitraire.

([11]) L. BIANCHI: *Sulle configurazioni mobili di Möbius.* 1908. Rendiconti Palermo t. 25, p. 306.

([12]) Exception faite des transformations spèciales des congruences appartenant à un complexe linéaire.

Donc les foyers des congruences du faisceau (C_1, C_2) et les coordonnées de leurs rayons sont

$$\frac{x_3 + \mu x_3'}{1+\mu}, \quad \frac{p+\mu p'}{1+\mu}, \quad \frac{q+\mu q'}{1+\mu}, \text{ etc.}$$

En portant ces expressions dans le système (14) nous n'obtenons que deux équations indépendantes

$$(\lg \mu)_u = p_1' - p_1, \qquad (\lg \mu)_v = p' - p.$$

La condition d'intégrabilité en est

$$(p_1 - p_1')_v = (p - p')_u. \tag{45}$$

En rapprochant les équations (44) et (45) nous avons

$$p_{1v} = p_u$$

et par suite

$$m = m_1.$$

Donc la congruence est une congruence W à moins que R et R_1 ne soient nuls et que deux congruences ne soient réciproques.

27. - *Trois couples stratifiables de la configuration P.* — Les transformations des congruences réciproques excluses, la configuration P contient trois paires de faisceaux de congruences W. La première est formée de la congruence C et ses transformées T du premier et du second ordre. La seconde contient les faisceaux (A_1A) et (A_2A'), A_1 et A_2 étant des congruences auxiliaires de la transformation T qui amène la congruence C en congruence C_1 et A, A', celles de la transformation qui fait correspondre la congruence C' à la congruence C_2. La troisième est composée des faisceaux des congruences auxiliaires (B_1B) et (B_2B') qui correspondent aux transformations de C en C_2 et de C_1 en C'.

Les rayons homologues en forment trois demiquadriques Q_1, Q_2, Q_3. Les foyers homologues (dont les développables correspondent) de chaque paire de faisceaux engendrent un couple stratifiable.

Les premiers foyers des faisceaux (C), par exemple, engendrent les droites (x_1z_1) et (x_3x_3'). Chaque droite porte les points de ∞^1 surfaces des premiers nappes focales des congruences des faisceaux. Leurs plans tangents passent par la seconde droite: le plan tangent de la surface (z_1), par exemple, par la droite (x_3x_3'). Les ∞^1 surfaces stratifient donc le couple.

Les seconds foyers des mêmes faisceaux (C) engendrent le couple (x_2z_2), (x_4x_4'). Les surfaces qui stratifient les deux couples sont liées deux à deux par les congruences des faisceaux dont elles sont les nappes focales.

28. - *La transformation P des couples stratifiables* découle naturellement de ces raisonnements.

Soient $(x_1 x_2)$ et $(x_3 x_4)$ deux congruences d'un couple stratifiable déterminées par les équations (12) et (29). Les surfaces qui stratifient ce couple sont $(x_1+\lambda x_2)$, $(x_3+\mu x_4)$ où λ et μ sont déterminés ([13]) par les deux systèmes complètement intégrables

$$(46)\qquad \begin{cases} \lambda_u = q_1\lambda^2 - p_1\lambda - \delta, & \mu_u = -\Delta_1\mu^2 + P_1\mu + q \\ \lambda_v = \delta_1\lambda^2 + p\lambda - q, & \mu_v = -q_1\mu^2 - P\mu + \Delta. \end{cases}$$

Nous déterminons le couple transformé par les points (y_i)

$$(47)\qquad \begin{cases} y_1 = a_1x_3 + b_1x_4 + x_1, & y_3 = a_3x_1 + b_3x_2 + x_3 \\ y_2 = a_2x_3 + b_2x_4 + x_2, & y_4 = a_4x_1 + b_4x_2 + x_4 \end{cases}$$

où ses deux rayons (y_1y_2) et (y_3y_4) coupent les plans focaux du premier.

Les plans tangents des surfaces $(x_1+\lambda x_2)$, $(x_3+\mu x_4)$ sont les plans

$$(x_1+\lambda x_2, x_3, x_4) \quad \text{et} \quad (x_3+\mu x_4, x_1, x_2)\,;$$

ils rencontrent les rayons du second couple, évidemment, aux points $(y_1+\lambda y_2)$ et $(y_3+\mu y_4)$. Selon la définition de la transformation, les surfaces $(y_1+\lambda y_2)$, $(y_3+\mu y_4)$ stratifient le second couple. Leurs plans tangents sont $(y_1+\lambda y_2, y_3, y_4)$, $(y_3+\mu y_4, y_1, y_2)$. Ils contiennent les points $(x_1+\lambda x_2)$, $(x_3+\mu x_4)$ qui composent avec ceux-là les paires de foyers des rayons qui relient les deux couples stratifiables. Donc

$$(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, y_3, y_4)=0, \qquad (x_3+\mu x_4, y_3+\mu y_4, y_1, y_2)=0\,;$$

en y portant les expressions (47) nous avons, λ et μ étant arbitraires,

$$b_1 = tb_3, \qquad b_2 = -ta_3, \qquad a_1 = -tb_4, \qquad a_2 = ta_4$$

où t est une nouvelle fonction inconnue.

Il ne nous reste qu'à mettre en équation que les plans $(y_1+\lambda y_2, y_3, y_4)$ et $(y_3+\mu y_4, y_1, y_2)$ touchent les surfaces $(y_1+\lambda y_2)$, $(y_3+\mu y_4)$. Cela nous donne en vertu des systèmes (46) le tableau

$$(48)\qquad \begin{cases} a_{1u} = \varphi a_1 + \delta a_2 + \Delta_1 b_1 + R_1 t, \\ a_{1v} = (P+p+\psi)a_1 + qa_2 + q_1b_1 - 1 - mt, \\ b_{1u} = qa_1 + (P_1+\varphi)b_1 + \delta b_2, \\ b_{1v} = \Delta a_1 + (p+\psi)b_1 + qb_2, \\ a_{2u} = q_1a_1 + (p_1+\varphi)a_2 + \Delta_1 b_2, \\ a_{2v} = \delta_1 a_1 + (P+\psi)a_2 + q_1b_2, \\ b_{2u} = qa_2 + q_1b_1 + (P_1+p_1+\varphi)b_2 - 1 + mt, \\ b_{2v} = \Delta a_2 + \delta_1 b_1 + \psi b_2 + Rt \end{cases}$$

où φ et ψ sont des fonctions auxiliaires.

([13]) Loco cit ([1]) p. 316, 321.

La condition d'intégrabilité du système (48) consiste en trois équations

$$(49)\qquad \begin{cases} \varphi_v - \psi_u + 2m = 0, \\ m(\lg t)_u + R_1(\lg t)_v = R_1(P+p+\psi) + m(P_1+p_1+\varphi) + \frac{\varphi}{t}, \\ R(\lg t)_u - m(\lg t)_v = R(P_1+p_1+\varphi) - m(P+p+\psi) + \frac{\psi}{t}. \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent, les dérivées de t éliminées,

$$(50)\qquad m\varphi_v + R_1\psi_v - R\varphi_u + m\psi_u + \ldots = 0.$$

Les termes non écrits ne contiennent pas de dérivées des fonctions inconnues.

Les équations (48), (49), (50) composent un système en involution et déterminent les a_i, b_i, φ, ψ, t avec deux fonctions arbitraires d'un argument.

Les deux congruences (47) forment un couple stratifiable qui détermine avec le couple primitif la configuration P. Les congruences $(x_1+\lambda x_2,\ y_3+\mu y_4)$, $(x_3+\mu x_4,\ y_1+\lambda y_2)$, λ et μ étant des solutions quelconques des systèmes (46), sont les échantillons particuliers de ∞^2 couples stratifiables associés à la transformation P.

CHAPITRE V.

Transformation de M. Jonas.

29. - *Transformation simultanée des congruences d'une suite de Laplace.* — Une congruence W (x_1x_2) transformée en une congruence (x_3x_4), ses transformées de LAPLACE (x_1y_1) et (x_3y_3) ne peuvent pas, en général, être reliées par aucune transformation T.

Si le quadrilatère gauche $(x_1y_1y_3x_3)$ engendre une configuration T, elle contient quatre congruences W: la congruence (x_1x_3) étant une congruence W, la congruence opposée (y_1y_3) l'est aussi et les deux autres le sont [art. 16], à moins que les développables des congruences auxiliaires (x_1y_1) et (x_3y_3) ne correspondent inversement. Or, les développables de toutes les congruences d'une suite de LAPLACE ont les mêmes équations, les développables des congruences homologues correspondent inversement et les deux suites sont réciproques [art. 14] par rapport à un complexe linéaire. C'est ce qui est impossible, le foyer (x_1), par exemple, étant conjugué à deux plans $(x_1x_3x_4)$ et $(x_1x_3y_3)$ à la fois.

Toutes les congruences des deux suites étant des congruences W, les deux suites sont des suites R.

Inversement, M. FUBINI à demontré que la congruence R étant transformée T en congruence R, leurs transformées de LAPLACE sont liées par la même transformation T. Les développables des deux suites correspondent et toutes les nappes focales sont des surfaces R, liées avec surfaces homologues par les congruences de M. JONAS.

Nous désignons cette transformation par le nom de transformation de M. JONAS.

30. - *Transformation de M. Jonas.* — Soit (x_1x_2) une congruence R [art. 6] est choisissons les paramètres u, v et la normalisation des coordonnées pour satisfaire les équations (8). Les développables correspondant nous avons

$$m=m_1=0$$

et les équations (13) donnent $R=R_1=\text{const.}$

En y ajoutant les équations (12) nous obtenons à l'aide du tableau (III) le système

$$(51)\quad \left\{\begin{array}{ll} p_u=\delta\delta_1-qq_1, & p_v=-p^2-q\delta_1-q_1\delta+\overline{R}-R, \\ p_{1u}=-p_1^2-q\delta_1-q_1\delta+\overline{R}_1-R, & p_{1v}=\delta\delta_1-qq_1, \\ q_u=-p_1q-p\delta+\delta_v, & q_v=-pq-p_1\delta+\delta_u, \\ q_{1u}=-p_1q_1-p\delta_1+\delta_{1v}, & q_{1v}=-pq_1-p_1\delta_1+\delta_{1u} \end{array}\right.$$

qui déterminent la transformation de M. JONAS. R étant constant, le système (51) est complétement intégrable et donne la transformation avec 5 constantes arbitraires, y compris la constante R.

La déformation projective simultanée de la congruence (x_1x_2) et de ses deux nappes focales, augmente $\overline{R}$ et $\overline{R}_1$ d'une même constante; en la prenant égale à R nous réduirons celle-ci à zéro et la seconde congruence à une seule droite.

D'où suit la méthode de M. FUBINI d'obtenir les transformations de M. JONAS par une déformation de la surface R.

31. - *Théorème de permutabilité des transformations de M. Jonas.* — Deux transformations de M. JONAS d'une même congruence (x_1x_2) étant données, le théorème de permutabilité nous donne ∞^1 congruences transformées (z_1z_2) qui sont bien des congruences W, mais ne sont pas, en général, des congruences R.

Comme les secondes formes fondamentales des nappes focales des congruences (z_1z_2) et (x_1x_2) sont les mêmes, il suffit que les surfaces coordonnées en sont développables pour qu'elles interceptent sur les focales des réseaux isotherme-conjugués et que les congruencens (z_1z_2) soient des congruences R [art. 6].

En portant les expressions (35) dans les relations

$$z_{1u}=A_1z_1+B_1z_2, \qquad z_{2v}=A_2z_1+B_2z_2$$

nous obtenons, après avoir éliminé les facteurs A_i, B_i, une seule condition

$$(52)\qquad \lambda\vartheta=\frac{R'}{R}-1,$$

$$\vartheta=(q-q')(q_1-q_1')-(p-p')(p_1-p_1').$$

L'accent désigne les quantités qui caractérisent la seconde transformation.

Or, le tableau (51) nous donne immédiatement

$$(53)\qquad \begin{cases} \vartheta_u = -\vartheta(p_1+p_1') + (p-p')(R-R'), \\ \vartheta_v = -\vartheta(p+p') + (p_1-p_1')(R-R') \end{cases}.$$

et un bref calcul nous montre que la valeur (52) de λ satisfait le système (39).

Donc, les constantes R et R' différentes, il existe une solution λ et une seulement qui détermine une congruence R parmi les congruences transformées T du second ordre $(z_1 z_2)$.

Si R et R' sont égaux, la formule (52) donne une solution banale $\lambda=0$. Il n'existe pas de congruences R parmi les congruences transformées, si toute fois ϑ n'est pas nul, auquel cas toutes les congruences le sont.

Or les équations (53) ont maintenant une solution évidente $\vartheta=0$. Il suffit donc de choisir les valeurs initiales de p, p_1, q, q_1 satisfaisant l'identité $\vartheta=0$ pour que celle-ci soit juste toujours.

32. - *Application successive de la méthode.* — Il suit de l'article précédent que, les transformations du premier ordre connues, l'application suivante du procédé n'exige pas même de quadratures, en parfaite analogie avec les transformations successives des surfaces à courbure constante.

Adoptons pour la congruence R primitive une congruence linéaire dont les focales sont

$$x_1 = C_1 v + C_2, \qquad x_2 = C_3 u + C_4,$$

C_i^k étant des constantes.

Toutes les quantités caractéristiques de la congruence étant nulles

$$\delta=\delta_1=\Delta=\Delta_1=0, \qquad \overline{R}=\overline{R}_1=0,$$

la congruence est une congruence R dégénérée.

Le système (51) a la solution générale

$$q=\frac{k}{A\sin\alpha+B\sin\beta}, \qquad q_1=\frac{k(A^2-B^2)}{A\sin\alpha+B\sin\beta},$$

$$p=k\frac{A\cos\alpha-B\cos\beta}{A\sin\alpha+B\sin\beta}, \qquad p_1=k\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta}{A\sin\alpha+B\sin\beta}$$

où

$$\alpha=k(u+v)+a, \qquad \beta=k(u-v)+b$$

et A, B, $k^2=R$, a, b sont des constantes arbitraires dont les deux dernières peuvent être ramenées à zéro.

Toutes les congruences R transformées du premier ordre sont données par les formules

$$x_3 = C_1-(C_1v+C_2)p-(C_3u+C_4)q,$$
$$x_4 = C_2-(C_1v+C_2)q_1-(C_3u+C_4)p_1.$$

D'où suit que l'application suivante du procédé n'exige que des différentiations et des opérations algébriques.

L'équation (52) donne λ et les formules (35), (36) déterminent les foyers des congruences transformées en termes finis.

33. - *Transformation P des congruences R.* — Reprenons les notations de l'art. 28 et soit (x_1x_2), (x_3x_4) un couple des congruences R. En portant les expressions (8) dans le système (49) nous le réduirons à la forme

$$\varphi_v - \psi_u = 0,$$

$$(\lg t)_u = P_1 + p_1 + \varphi + \frac{\psi}{Rt}, \qquad (\lg t)_v = P + p + \psi + \frac{\varphi}{Rt} \tag{54}$$

et la condition d'intégrabilité des deux dernières équations est

$$\varphi_u - \varphi^2 - 2p_1\varphi = \psi_v - \psi^2 - 2p\psi. \tag{55}$$

Les équations (54), (55) composent un système en involution. Elles déterminent φ, ψ avec deux fonctions arbitraires d'un argument et pour chaque solution φ, ψ la fonction t avec une constante arbitraire.

Les congruences (y_1y_2), (y_3y_4) ne sont pas, en général, des congruences R. Or leurs développables sont

$$\Phi_1[\Phi_2 b_2 - \Phi_1 a_2 b_1]du^2 + [\Phi_2\Psi_2 + \Phi_1\Psi_1(a_1b_2 - 2a_2b_1)]dudv + \\ + \Psi_1[\Psi_2 a_1 - \Psi_1 a_2 b_1]dv^2 = 0$$

$$\Psi_1[\Psi_2 a_1 - \Psi_1 a_2 b_1]du^2 + [\Psi_2\Phi_2 + \Psi_1\Phi_1(a_1b_2 - 2a_1b_2)]dudv + \\ + \Phi_1[\Phi_2 b_2 - \Phi_1 a_2 b_1]dv^2 = 0$$

où

$$\Phi_1 = \varphi - Rb_2, \qquad \Phi_2 = \varphi a_1 + R(t - a_2b_1),$$
$$\Psi_1 = \psi - Ra_1, \qquad \Psi_2 = \psi b_2 + R(t - a_2b_1).$$

Il suit de là que les surfaces coordonnées des deux congruences sont développables et le couple stratifiable est conjugué si [14]

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 = 0 \tag{56}$$

ou

$$\Phi_2 b_2 - \Phi_1 a_2 b_1 = 0, \qquad \Psi_2 a_1 - \Psi_1 a_2 b_1 = 0. \tag{57}$$

Les expressions (56) aussi bien que les expressions (57) vérifient le système (54), (55). Donc le système

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{1u} = \delta a_2 + \delta_1 b_1 + Rt + Ra_1b_2, & a_{1v} = qa_2 + q_1b_1 + 2pa_1 + Ra_1^2 - 1, \\ b_{1u} = qa_1 + \delta b_2 + p_1b_1 + Rb_1b_2, & b_{1v} = \delta a_1 + qb_2 + pb_1 + Ra_1b_1, \\ a_{2u} = q_1a_1 + \delta_1 b_2 + p_1a_2 + Ra_2b_2, & a_{2v} = \delta_1 a_1 + q_1b_2 + pa_2 + Ra_1a_2, \\ b_{2u} = qa_2 + q_1b_1 + 2p_1b_2 + Rb_2^2 - 1, & b_{2v} = \delta a_2 + \delta_1 b_1 + Rt + Ra_1b_2, \\ t_u = a_1 + Rb_2t + 2p_1t & t_v = b_2 + Ra_1t + 2pt. \end{array}\right. \tag{58}$$

---

[14] Le cas $\Phi_1 = 0$, $\Psi_2 a_1 - \Psi_1 a_2 b_1 = 0$ ne donne pas de solutions pour une congruence R arbitraire.

Aussi bien que le système

$$(59)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_{1u}=\delta a_2+\delta_1 b_1-\theta a_2 b_1, & a_{1v}=q a_2+q_1 b_1+2p a_1-\theta a_1^2-1, \\ b_{1u}=q a_1+\delta b_2+p_1 b_1-\theta b_1 b_2, & b_{1v}=\delta a_1+q b_2+p b_1-\theta a_1 b_1, \\ a_{2u}=q_1 a_1+\delta_1 b_2+p_1 a_2-\theta a_2 b_2, & a_{2v}=\delta_1 a_1+q_1 b_2+p a_2-\theta a_1 a_2, \\ b_{2u}=q a_2+q_1 b_1+2p_1 b_2-\theta b_2^2-1, & b_{2v}=\delta a_2+\delta_1 b_1-\theta a_2 b_1, \\ t=\theta(a_1 b_2-a_2 b_1), & \theta=\mathrm{const} \end{array}\right.$$

déterminent les congruences R $(y_1 y_2)$ et $(y_3 y_4)$ avec 5 constantes arbitraires.

CHAPITRE VI.

Transformation à l'aide d'une famille de quadriques osculatrices.

34. - *Préliminaires sur les coordonnées linéaires locales.* — Nous allons maintenant prouver le théorème que nous avons énoncé dans l'introduction sur l'analogie entre la transformation T et les transformation asymptotiques des surfaces.

Introduisons les coordonnées linéaires r_{ik} du rayon $(x_i x_k)$

$$r_{ik}^{\alpha\beta}=(x_i x_k)=\begin{vmatrix} x_i^\alpha x_k^\alpha \\ x_i^\beta x_k^\beta \end{vmatrix}$$

et les coordonnées linéaires locales ϱ^{ik} d'une droite (R) définies par les formules

$$(60)\qquad R^{\alpha\beta}=\sum_{(i,k)} \varrho^{ik} r_{ik}^{\alpha\beta}$$

si le tétraèdre se déplace et la droite (R) ne bouge pas, les coordonnées fixes en sont constantes et les coordonnées locales obtiennent les accroissements

$$(61)\qquad d\varrho^{ik}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{4}(A_{\alpha\beta}^{ik}du+B_{\alpha\beta}^{ik}dv)\varrho^{\alpha\beta}.$$

En différentiant les équations (60) dans la supposition que $R^{\alpha\beta}=\mathrm{const}$, nous obtenons à l'aide du tableau (I) les composants $A_{\alpha\beta}^{ik}$, $B_{\alpha\beta}^{ik}$.

Le tableau suivant les donne. Les lignes horizontales les contiennent avec les indices au pied qui sont indiqués au commencement de la ligne.

(62)

A	12	13	14	23	42	34	B	12	13	14	23	42	34
12	$-p_1$	0	-1	0	0	0	12	$-p$	0	0	1	0	0
13	$-n$	0	q	$-\delta$	0	0	13	$-N$	$P-p$	Δ	$-q$	0	0
14	$-R_1$	Δ_1	P_1	0	δ	0	14	$-m_1$	q_1	$-p$	0	q	-1
23	m	$-q_1$	0	$-p_1$	$-q$	1	23	R	$-\delta_1$	0	P	$-\Delta$	0
42	$-N_1$	0	q_1	$-\Delta_1$	P_1-p_1	0	42	$-n_1$	0	δ_1	$-q_1$	0	0
34	0	N_1	$-m$	R_1	n	P_1	34	0	n_1	$-R$	m_1	N	P

35. - *Demiquadrique D osculatrice.* — Soit (x_1x_2) et (x_3x_4) deux congruences déterminées par les composants (I) des déplacements d'un tétraèdre normal Δ.

Une demiquadrique D qui les touche est déterminée par trois équations linéaires entre les coordonnées locales courantes $\varrho^{\alpha\beta}$

$$(63) \qquad \sum a_{ik}\varrho^{ik}=0, \qquad \sum b_{ik}\varrho^{ik}=0, \qquad \sum c_{ik}\varrho^{ik}=0.$$

Comme elle contient les deux rayons correspondants (x_1x_2) et (x_3x_4), les équations (63) sont vérifiées par les valeurs $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Donc

$$a_{12}=b_{12}=c_{12}=0, \qquad a_{34}=b_{34}=c_{34}=0.$$

Elle contient aussi leur infiniment-voisin. Les équations (63) seront donc satisfaites par les coordonnées des mêmes arêtes du tétraèdre après son déplacement infiniment petit dans la direction convenablement choisie.

Or, le tétraèdre se déplaçant, les coordonnées des droites immobiles éprouvent les accroissements (61). Donc le changement des coordonnées dû à ce déplacement s'exprime par les mêmes formules.

Faisons le dans les équations (63) et portons y les coordonnées $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Nous obtenons la condition que la demiquadrique (63) touche les surfaces réglées $du:dv$, $\delta u:\delta v$ des deux congruences (x_1x_2) et (x_3x_4)

$$(64) \qquad a_{14}du-a_{23}dv=0,$$
$$(N_1a_{13}-ma_{14}+R_1a_{23}+na_{42})\delta u+(n_1a_{13}-Ra_{14}+m_1a_{23}+Na_{42})\delta v=0.$$

Les mêmes équations pour les coefficients b_{ik}, c_{ik}.

La première équation (64) donne la proportionnalité

$$a_{14}:a_{23}=b_{14}:b_{23}=c_{14}:c_{23}.$$

On peut donc éliminer ces deux termes des deux équations (63); le système (63) prend la forme

$$(65) \qquad \varrho^{13}=0, \qquad \varrho^{42}=0, \qquad a_{14}\varrho^{14}+a_{23}\varrho^{23}=0$$

et les secondes équations (64) deviennent

$$(66) \qquad \left\{\begin{array}{l} N_1\delta u+n_1\delta v=0, \qquad n\delta u+N\delta v=0, \\ a_{14}(m\delta u+R\delta v)=a_{23}(R_1\delta u+m_1\delta v). \end{array}\right.$$

L'élimination du quotient $\delta u:\delta v$ nous donne deux équations

$$(67) \qquad NN_1-nn_1=0,$$

$$(68) \qquad a_{14}(mN-Rn)=a_{23}(R_1N-m_1n).$$

La seconde détermine le quotient $a_{14}:a_{23}$ c'est-à-dire la demiquadrique D; la première est une condition imposée aux congruences (x_1x_2) et (x_3x_4).

36. - *Deux congruences reliées par une famille de D.* — Quelles que soient deux congruences C et C_1, on peut, en général, établir entre leurs rayons une correspondance qui satisfait l'équation (67). En effet la condition (67) contient, aprés avoir transformée à l'aide du tableau (III), les quantités p, q, p_1, q_1 qui déterminent les points (x_3) et (x_4) où le rayon de la seconde congruence C_1 intercepte les plans focaux correspondants de la première. La congruence C_1 donnée, l'équation (67) détermine la correspondance entre leurs rayons. Donc, en général, deux congruences C et C_1 peuvent être reliées par une famille de demiquadrique D, en parfaite analogie avec deux surfaces et la congruence de leurs tangentes communes.

37. - *Transformation T.* — L'équation (68) est vérifiée identiquement et la demiquadrique D est indéterminée si

$$mN-Rn=0, \qquad R_1N-m_1n=0. \tag{69}$$

Or le tableau (I) nous donne maintenant

$$\begin{aligned} Rx_{3u}-mx_{3v}&=Pmx_3+(m\Delta-Rq)x_4, \\ m_1x_{4u}-R_1x_{4v}&=(q_1R_1-m_1\Delta_1)x_3-P_1m_1x_4 \end{aligned}$$

donc les points (x_3) et (x_4) sont les foyers du rayon (x_3x_4).

Les plans focaux contiennent respectivement les foyers des rayons homologues et les deux congruences sont en transformation T.

Les demiquadriques D sont déterminées par le système

$$\varrho^{13}=0, \qquad \varrho^{42}=0, \qquad \varrho^{14}=a\varrho^{23} \tag{70}$$

où le coefficient a est arbitraire.

Une demiquadrique (70) touche les deux congruences (x_1x_2) et (x_3x_4) le long des surfaces gauches

$$\left\{\begin{aligned} &(m+aR_1)du+(R+am_1)dv=0 \\ &du+adv=0 \end{aligned}\right. \tag{71}$$

respectivement. Les équations (71) établissent une correspondance entre les surfaces gauches des deux congruences où les développables correspondent. Elle est involutive, si $m=m_1$.