ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FRANCESCO TRICOMI

Integrazione di un' equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 1 (1933), p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_1_1_0>

INTEGRAZIONE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PRESENTATASI IN ELETTROTECNICA

di FRANCESCO TRICOMI (Torino).

1. - Nella teoria delle macchine elettriche sincrone s'incontra l'equazione differenziale di second'ordine

$$\frac{d^2y}{dt^2}+M\frac{dy}{dt}+N\sin y+P=0, \tag{1}$$

dove M, N, P denotano tre costanti positive, il cui studio mi è stato proposto da S. E. VALLAURI, che mi è grato qui ringraziare pubblicamente per aver attirata la mia attenzione su di un'equazione che, se non m'inganno, è molto interessante anche dal punto di vista analitico.

In particolare interessava stabilire se la (1) potesse ammettere, come considerazioni fisiche lasciavano presumere, soluzioni che fossero somma di un termine lineare e di un termine periodico nel tempo, e studiare tali soluzioni specie nei riguardi del corrispondente valor medio di $\sin y$ nel tempo.

Tale presunzione risulta pienamente confermata dai risultati che verranno qui stabiliti, da cui in particolare si ha che, tranne per certi sistemi di valori di M, N, P, la (1) ammette *una ed una sola* (a meno di un'irrilevante costante arbitraria, dipendente dalla scelta dell'origine dei tempi) *soluzione del tipo indicato, cui, al crescere di t, tendono asintoticamente infinite altre soluzioni*, e precisamente tutte quelle per cui le condizioni iniziali soddisfano ad opportune condizioni di *disuguaglianza*. Inoltre, nelle pagine che seguono, verrà calcolato l'accennato valor medio di $\sin y$, che risulta sempre *negativo*, e s'indicheranno dei metodi d'approssimazione, grafici e numerici, atti alla effettiva determinazione della precedente nonchè delle altre soluzioni della (1).

Osservo infine che non pochi dei risultati che saranno in appresso stabiliti, potrebbero facilmente estendersi ad equazioni più generali della (1) ([1]), ma di ciò non mi occuperò nel presente lavoro.

([1]) Per esempio la circostanza che le costanti M e P siano positive è irrilevante perchè il cambiamento di t in $-t$ cambia M in $-M$ e quello di y in $-y$ cambia P in $-P$. Può inoltre osservarsi che la (1) per $M=P=0$ si riduce alla ben nota equazione del pendolo libero.

2. - Osserviamo anzitutto che il numero dei parametri che figurano nell'equazione si può ridurre da *tre* a *due*. Infatti, ponendo

(2) $$x=\sqrt{2N}t$$

e inoltre

(3) $$\frac{2M}{\sqrt{2N}}=\alpha, \qquad \frac{P}{N}=\beta,$$

la (1) diviene

(4) $$2\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}+\sin y+\beta=0.$$

Inoltre, poichè nell' equazione non figura esplicitamente la variabile indipendente, essa si può abbassare al prim' ordine ponendo

(5) $$\frac{dy}{dx}=z$$

e risguardando y come variabile indipendente, con che si ottiene l' equazione

(6) $$\boxed{2z\frac{dz}{dy}+\alpha z+\beta+\sin y=0}$$

o anche

(6′) $$\boxed{\frac{dz^2}{dy}+\alpha z+\beta+\sin y=0},$$

con α e β costanti positive, cui tutto è sostanzialmente ridotto.

Invero, nota che sia una soluzione $z=z(y)$ della (6)-(6′), si passa subito ad una corrispondente soluzione della (1) mediante la formula

(7) $$\sqrt{2N}(t-t_0)=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{z(y)},$$

dove y_0 denota un punto qualsiasi dell' intervallo in cui $z(y)$ è definita e t_0 un' irrilevante costante arbitraria dipendente dalla scelta dell' origine dei tempi.

L' equazione (6′) però, tranne nel caso particolare $\alpha=0$ in cui le variabili si separano immediatamente e si ottiene

(8) $$z^2=\cos y-\beta y+\text{cost.},$$

non sembra integrabile elementarmente.

3. - Per orientarci nella discussione della (6) è opportuno premettere alcune semplici osservazioni sui rapporti fra una generica equazione di second' ordine non contenente esplicitamente la x:

(9) $$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

e la sua trasformata di prim'ordine mediante la sostituzione (5):

$$F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right)=0. \tag{10}$$

In particolare interessa stabilire a qual genere di soluzioni della (10) corrispondono soluzioni della (9) diciamo *di tipo Vallauri*, e cioè della forma

$$y=a+bx+\varphi(x) \tag{11}$$

con φ funzione periodica di un certo periodo ω.

A tale scopo osserviamo che se la (9) ammette una soluzione del tipo (11), la corrispondente curva integrale della (10) sarà rappresentabile parametricamente mediante le equazioni

$$\begin{cases} y=a+bx+\varphi(x) \\ z=b+\varphi'(x) \end{cases}$$

e quindi sarà una *curva periodica* col periodo $\omega'=b\omega$, cioè sarà la rappresentatrice di una funzione $z=Z(y)$ periodica col periodo ω'. Viceversa, se la (10) ammette una certa soluzione $z=Z(y)$, periodica col periodo ω', la (9) ammetterà in corrispondenza la soluzione

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{Z(y)}+\text{cost.}$$

che, supposto

$$\omega=\int_{y_0}^{y_0+\omega'}\frac{dy}{Z(y)}\neq 0, \tag{12}$$

è effettivamente del tipo (11). Invero, aumentando y di un multiplo qualsiasi $k\omega'$ di ω', x non subisce altra modificazione che un aumento di $k\omega$, ciò che può anche esprimersi dicendo che quando x aumenta di $k\omega$ la y aumenta di $k\omega'=kb\omega$ (avendo posto $b=\omega'/\omega$); dunque la differenza fra y e bx è una funzione periodica di x col periodo ω, come vuole la (11).

Similmente si prova che alle eventuali curve integrali *chiuse* della (10) corrispondono soluzioni *periodiche* della (9) e viceversa, ma su ciò non ci soffermeremo non dovendocene avvalere nel seguito.

Risulta da quanto sopra che la ricerca delle soluzioni tipo VALLAURI della (1) equivale alla ricerca delle soluzioni periodiche dell'equazione (6)-(6'), e cioè ad un caso particolare di un problema cui si riferiscono ricerche classiche, come quelle ben note di POINCARÉ. Però in tali ricerche entra in gioco in modo essenziale l'ipotesi, che nel nostro caso non si verifica, che le equazioni che si considerano, almeno per un valore particolare di uno dei parametri da cui dipendono, ammettano certo soluzioni periodiche; esse saranno quindi di poco giovamento nel caso attuale. Occorrerà perciò battere altra strada, e propria-mente procedere ad una discussione qualitativa dell' andamento delle curve integrali della (6) guidata dalle due osservazioni seguenti:

1°) Che, potendosi l'equazione scrivere sotto la forma

$$\frac{dz^2}{dy}+az+\beta=-\sin y,$$

se c'è una soluzione periodica, essa deve avere necessariamente il periodo 2π.

2°) Che, affinchè un certo integrale $z=Z(y)$ della (6)-(6') sia una funzione periodica di y col periodo 2π, è necessario e sufficiente che, anche per un solo y_0, si abbia

$$Z(y_0+2\pi)=Z(y_0). \tag{13}$$

La seconda osservazione, che ovviamente si applica anche a casi ben più generali, mostra che, in fondo, la ricerca delle soluzioni periodiche di un'equazione di prim'ordine è un particolare *problema dei valori al contorno* per equazioni differenziali ordinarie. Solo che, non essendo la (6) lineare, i noti metodi per la risoluzione di questo classico problema, non sono applicabili al nostro caso.

Del resto un criterio, concettualmente molto semplice, per l'esistenza di soluzioni periodiche della (6) si trova facilmente combinando la condizione (13) col noto teorema generale sulle equazioni differenziali che asserisce che, in ogni dominio in cui non cadono punti singolari, le soluzioni variano con continuità al variare delle condizioni iniziali. E invero, in virtù di detto teorema, se riusciremo comunque a determinare due integrali particolari z_1 e z_2 della (6) per cui si abbia rispettivamente

$$z_1(y_0+2\pi)\leqslant z_1(y_0), \qquad z_2(y_0+2\pi)\geqslant z_2(y_0), \tag{14}$$

e se inoltre fra di essi non cade nessun punto singolare della equazione, potremo senz'altro asserire che, fra i due, esiste almeno un integrale particolare Z della (6) che, soddisfacendo la (13), è una funzione periodica di y col periodo 2π.

4. - Prima di proceder oltre sarà però opportuno, anche per poter servirsi del criterio precedente, procedere alla ricerca e discussione degli eventuali *punti singolari* della nostra equazione, che, potendosi questa scrivere sotto la forma

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{a}{2}-\frac{\beta+\sin y}{2z}, \tag{15}$$

sono visibilmente (al finito) tutti e soli i punti del piano (y, z) per cui si ha

$$\beta+\sin y=0, \qquad z=0.$$

Due casi sono pertanto qui da distinguersi:

1°) Se $\beta>1$ l'equazione non ha (al finito) alcun punto singolare.

2°) Se $\beta \leqslant 1$ l'equazione ha invece un'infinità numerabile di punti singolari al finito, e precisamente, posto

$$\text{arc sin}\,\beta = \theta, \qquad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \tag{16}$$

sono singolari tutti e soli i punti dell'asse y:

$$A_k \equiv \begin{cases} y = \theta - \pi + 2k\pi \\ z = 0, \end{cases} \qquad B_k \equiv \begin{cases} y = -\theta + 2k\pi \\ z = 0, \end{cases}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cominciando dallo studio dei punti A_k, osserviamo che ponendo

$$y = \theta - \pi + 2k\pi + \eta$$

e sviluppando $\sin y$ in serie di potenze di η, l'equazione differenziale può scriversi

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{\eta \cos\theta - az - \frac{1}{2}\eta^2 \cos\theta + \ldots}{2z}, \tag{17}$$

epperò l'*equazione caratteristica* del punto singolare A_k si presenta sotto la forma

$$\lambda^2 + a\lambda - 2\cos\theta = 0.$$

Ne segue (²) che, avendo l'equazione precedente le sue radici *reali, distinte* e *di segni contrarî*, il punto A_k è sempre un *colle* (*Sattelpunkt*) dell'equazione, e cioè un punto per cui, fra l'altro, passano *due* curve integrali della (6) aventi ivi tangenti i cui coefficienti angolari m soddisfano all'equazione

$$2m^2 + am - \cos\theta = 0. \tag{18}$$

Tal quale si trova che l'equazione caratteristica dei punti B_k è invece

$$\lambda^2 + a\lambda + 2\cos\theta = 0,$$

la quale ha due radici *reali* e *dello stesso segno* finchè è

$$a^2 \geqslant 8\cos\theta = 8\sqrt{1-\beta^2}, \tag{19}$$

mentre ha invece due radici *complesse coniugate* (ma mai immaginarie pure finchè è $a \neq 0$) se è

$$a^2 < 8\cos\theta = 8\sqrt{1-\beta^2}. \tag{19'}$$

Dunque il punto B_k è un *nodo* (*Knotenpunkt*) o un *fuoco* (*punto asintotico, Strudelpunkt*) dell'equazione secondochè è $a^2 \geqslant 8\sqrt{1-\beta^2}$ oppure $a^2 < 8\sqrt{1-\beta^2}$ rispettivamente.

(²) V. per esempio L. BIEBERBACH: *Differentialgleichungen* (Berlin, Springer, 1926), Kap. III, §§ 3-4.

Notiamo infine che nel caso particolare di $\alpha=0$, i punti B_k, che coincidono allora con gli A_k, invece che fuochi sono *vertici* (*Wirbelpunkte*) dell'equazione, e cioè punti intorno a cui esistono infinite curve integrali *chiuse*, una dentro l'altra.

5. - Dalla (6) segue immediatamente che il luogo dei punti del piano (y, z) in cui si ha $dz/dy=0$, è la sinusoide σ di equazione

$$z=-\frac{\beta+\sin y}{\alpha},$$

che, come vedremo, ha una grande importanza in tutta la discussione dell'equazione differenziale. Tale sinusoide, che ha le sue ordinate comprese fra $-(1+\beta)/\alpha$ e $(1-\beta)/\alpha$, sta tutta *aldisotto* dell'asse y se $\beta<1$, mentr'invece, se $\beta>1$, sta parte *aldisotto* e parte *aldisopra* di detto asse che taglia nei punti singolari A_k e B_k. Nel primo caso dz/dy è positiva nell'area compresa fra σ e l'asse y (tratteggiata nella fig. 1) e negativa sotto σ e sopra l'asse y. Nel secondo caso invece dz/dy è positiva nelle aree alternativamente sopra e sotto l'asse y determinate da questa retta e dalla sinusoide σ (aree tratteggiate nella fig. 2), e negativa fuori di quelle. Da ciò segue in particolare che gli archi ascendenti di σ posti nel semipiano $z<0$ e gli eventuali archi discendenti del semipiano $z>0$, sono luoghi di *massimi* delle curve integrali della (6) mentr'invece gli archi discendenti in $z<0$ o ascendenti in $z>0$ sono luoghi di *minimi* delle medesime.

Ciò premesso è facile vedere che dei due integrali particolari z_1 e z_2 di cui si parla nel § 3, z_1, cioè quello soddisfacente alla prima delle (14), si determina subito qualunque siano α e β.

Invero, considerato che *aldisotto* della sinusoide σ, e quindi *a fortiori* per $z<-(1+\beta)/\alpha$, è sempre $dz/dy<0$, basterà assumere come z_1 la curva integrale passante pel punto (y_0, z_0) con $z_0<-(1+\beta)/\alpha$ in quanto, essendo questa curva sempre *discendente*, sarà certo

$$z_1(y_0+2\pi)<z_1(y_0).$$

Più difficile, anzi non sempre possibile, è la ricerca di z_2. Comunque vere difficoltà si presentano soltanto se $\beta\leqslant 1$, chè invece *nel caso di* $\beta>1$, in cui fra l'altro non c'è la noia dei punti singolari, un integrale z_2 soddisfacente alla seconda delle (4) esiste sempre, epperò *esiste sempre almeno una soluzione periodica della nostra equazione.*

Infatti poniamo $y_0=-\pi/2$, in modo che ad y_0 ed $y_0+2\pi$ corrispondano due successivi punti di massimo M_0 ed M_1 della sinusoide σ (che ha invece un minimo N_0 nel punto $\pi/2$), e fissiamo la nostra attenzione sul prolungamento *verso sinistra* della curva integrale passante per M_1, la quale avrà ivi tangente orizzontale. Poichè in tutta l'area tratteggiata in figura è sempre $dz/dy>0$, detta curva, nel verso indicato, non potrà inizialmente che *scendere*, e ciò precisamente fino a che sarà venuta ad incontrare lo sinusoide σ in un certo punto P dell'arco M_0N_0, dove si verificherà un minimo della corrispondente soluzione. Oltrepassato P la curva integrale salirà invece, andando a tagliare la retta $y=y_0$ in un certo punto Q che sicuramente *non è aldisopra di* M_0 perche l'arco M_0P di σ, essendo un luogo di minimi delle curve integrali, non può venir traversato da queste, nel verso delle y decrescenti, se non per *uscire* dall'area tratteggiata. Ne segue che, se indicheremo con $z_2(y)$ la soluzione corrispondente alla considerata curva integrale, sarà certamente

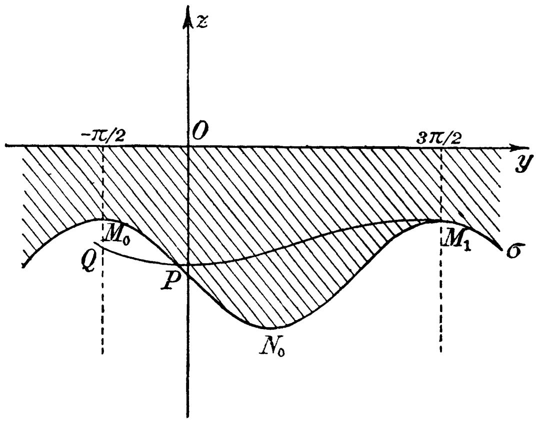

Fig. 1.

$$z_2(y_0) \leqslant z_2(y_0+2\pi), \quad \text{c. b. d.}$$

Dimostriamo infine che *la soluzione periodica di cui si è provata l'esistenza, è unica.*

Infatti, integrando ambo i membri della (6') fra y_0 ed $y_0+2\pi$, si ha l'uguaglianza importante

$$z^2(y_0+2\pi)-z^2(y_0)+a\int_{y_0}^{y_0+2\pi} z(y)dy+2\pi\beta=0 \tag{20}$$

che, nel caso particolare di una soluzione periodica, può scriversi

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{y_0}^{y_0+2\pi} z(y)dy=-\frac{\beta}{a}}, \tag{21}$$

cioè *le soluzioni periodiche della nostra equazione sono tali che il loro valor medio in un intervallo di ampiezza* 2π *è uguale a* $-\beta/a$. Da ciò segue senz'altro l'unicità della soluzione periodica perchè, se ce ne fossero due z' e z'', dato che due curve integrali di un'equazione differenziale di prim'ordine non possono mai tagliarsi fuori dei punti singolari, o dovrebbe esser sempre $z'<z''$ o sempre $z'>z''$ e in entrambi i casi i due valor medi non potrebbero essere uguali.

Si noti che il ragionamento precedente non cessa di esser applicabile ancorchè sia $\beta\leqslant 1$, purchè fra le due eventuali soluzioni periodiche z' e z'' non cadano punti singolari, come sarà sempre il caso nel seguito.

6. - Passiamo ora alla ricerca, ove possibile, dell'integrale z_2 nel caso più delicato in cui, essendo $\beta\leqslant 1$, esistono i punti singolari A_k e B_k.

A tale scopo, ricordando che da A_k escono *due* curve integrali della (6) le cui tangenti all'origine hanno i coefficienti angolari determinati dalla (18), fissiamo la nostra attenzione sul prolungamento *verso destra* Γ_0 della curva integrale uscente da A_0 col coefficiente angolare negativo

$$m_0 = -\frac{a}{4} - \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{\cos\theta}{2}}, \tag{22}$$

nonchè sul prolungamento *verso sinistra* Γ_1 della curva integrale uscente da A_1 col coefficiente angolare positivo

$$m_1 = -\frac{a}{4} + \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{\cos\theta}{2}}. \tag{22'}$$

Inoltre consideriamo le due parallele r ed s all'asse z condotte per A_0 e B_0 rispettivamente, cioè le due rette di equazioni $y = y_0 = \theta - \pi$ e $y = -\theta$.

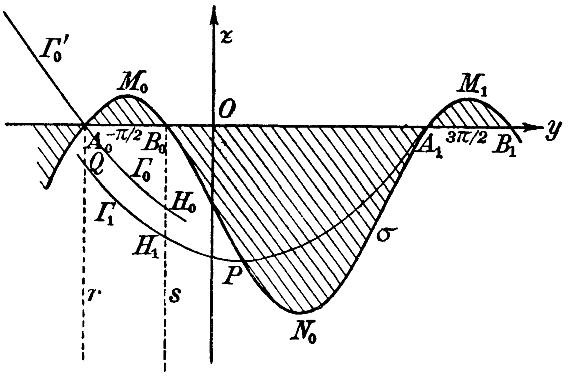

Fig. 2.

Poichè nella parte del semipiano $z < 0$ compreso fra r ed s si ha

$$\beta + \sin y < 0, \qquad z < 0,$$

in virtù della (15) sarà ivi $dz/dy < 0$, anzi addirittura

$$\frac{dz}{dy} < -\frac{a}{2},$$

epperò la curva Γ_0, a sinistra di s, non potrà che *scendere*, andando a tagliare detta retta in un certo punto H_0 la cui ascissa, che diremo h_0, dovrà necessariamente esser tale da aversi

$$h_0 < -[-\theta - (\theta - \pi)]\frac{a}{2}$$

cioè

$$h_0 < -a\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{23}$$

Analogamente, tenuto conto che m_1 è sempre minore del coefficiente angolare $(\cos\theta)/a$ della tangente alla sinusoide σ nel punto A_1, anche la curva Γ_1 non potrà inizialmente che *scendere* (nel verso delle y decrescenti) e precisamente fino all'incontro con la sinusoide σ in un certo punto P dell'arco B_0N_0. Dopo invece la curva risalirà, andando a tagliare la retta s in un certo punto H_1, di ordinata h_1, certo *non aldisopra di* B_0, ma sulla cui posizione rispetto ad H_0, nulla si può dire *a priori*.

Per meglio dire, l'unica cosa che può asserirsi subito è che vi sono tanto casi in cui H_0 è *aldisotto* di H_1 quanto casi in cui è *aldisopra* è quindi, per la continuità, anche casi in cui H_0 coincide con H_1.

Invero, *se* a *è sufficientemente grande,* H_0 *è certo aldisotto di* H_1, perchè, mentre l'ordinata h_0 di H_0, in forza della (23), tende a $-\infty$ per $a \to \infty$; invece l'ordinata h_1 di H_1, dovendo esser maggiore di quella di P, che a sua volta non può essere inferiore a $-(1+\beta)/a$, soddisferà alla disuguaglianza

$$h_1 > -\frac{1+\sin\theta}{a} \tag{24}$$

donde segue

$$\lim_{a\to\infty} h_1 = 0.$$

Al contrario, *se* a *è sufficientemente piccolo,* H_0 *è certo aldisopra di* H_1, perchè per $a=0$ è certo $h_0 > h_1$, come si verifica subito osservando che, in virtù della (8), in detto caso le due curve Γ_0 e Γ_1 sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni

$$\begin{cases} z = -\sqrt{\cos y + \cos\theta + (\theta - \pi - y)\sin\theta}, & (y > \theta - \pi); \\ z = -\sqrt{\cos y + \cos\theta + (\theta + \pi - y)\sin\theta}, & (y < \theta + \pi) \end{cases} \tag{25}$$

che, per $y = -\theta$, forniscono

$$h_0 = -\sqrt{2\cos\theta - (\pi - 2\theta)\sin\theta}, \qquad h_1 = -\sqrt{2\cos\theta + (\pi + 2\theta)\sin\theta}.$$

7. - Ci siamo soffermati un momento a studiare i casi possibili circa la reciproca posizione dei due punti H_0 ed H_1, perchè si tratta di circostanza importante ai nostri fini. Invero è in primo luogo ben facile dimostrare che *se* H_0 *è aldisopra di* H_1, come certamente avviene per a sufficientemente piccolo, esiste certo un integrale z_2 soddisfacente la seconda delle (14) e quindi *esiste una* (*ed una sola*) *soluzione periodica della nostra equazione.*

Infatti basta osservare che, nel caso in esame (che è quello della fig. 2), la curva Γ_1, prolungata oltre H_1 fino all'incontro con la retta r, non potendo tagliare Γ_0 prima di A_1, incontrerà detta retta r in un certo punto Q che, non potendo essere aldisopra di A_1, avrà ordinata certo non superiore a *zero*, cioè all'ordinata di Γ_1 per $y = y_0 + 2\pi$.

Se invece $H_0 \equiv H_1$, e quindi Γ_0 e Γ_1 costituiscono un'unica curva integrale, che diremo Γ, simultaneamente passante per A_0 ed A_1, allora *la soluzione periodica,* per quanto un po' spuria perchè dotata di punti angolosi, *è data proprio da* Γ prolungata prima di A_0 e oltre A_1 con traslazioni d'ampiezza multipla di 2π fatte parallelamente all'asse y.

Finalmente, mostreremo fra breve che, se H_0 *è aldisotto di* H_1, *non vi sono soluzioni periodiche di sorta.*

A tal fine però, nonchè per dimostrare che *ad ogni β minore di 1 corrisponde uno ed un sol valore α_0 di α per cui $H_0 \equiv H_1$*, proposizione da cui, e dalla precedente, discenderà senz'altro che per $\alpha < \alpha_0$ ci sono soluzioni periodiche mentre per $\alpha > \alpha_0$ non ce ne sono; è anzitutto necessario stabilire un *teorema di confronto* fra soluzioni della (6') corrispondenti a diversi valori di α.

Siano dunque z' e z'' due soluzioni particolari della (6') rispettivamente corrispondenti ai due valori α' e α'' ($\alpha' < \alpha''$) di α, le quali assumano rispettivamente i valori z_0' e z_0'' in un certo punto $y = y_0$; dico allora che:

1°) *Se $z_0'' \geqslant z_0' > 0$ oppure $z_0'' > z_0' \geqslant 0$, per $y < y_0$ e finchè z' e z'' si conservano positive, sarà sempre $z'' > z'$.*

2°) *Se $z_0'' \leqslant z_0' < 0$ oppure $z_0'' < z_0' \leqslant 0$, per $y > y_0$ e finchè z' e z'' si conservano negative, sarà sempre $z'' < z'$.*

3°) *Se $z_0'' = z_0' = 0$ e se inoltre le due soluzioni sono tali che, in un intorno comunque piccolo di y_0, z', z'' e $z'' - z'$ abbiano segno opposto a quello di $y - y_0$; lo stesso si verificherà anche lontano da y_0, almeno finchè z' non avrà riattraversato l'asse y.*

Infatti, basta osservare che dalle due equazioni

$$\frac{dz'^2}{dy} + \alpha' z' + \beta + \sin y = 0$$

e

$$\frac{dz''^2}{dy} + \alpha'' z'' + \beta + \sin y = 0$$

segue

$$\frac{d(z'^2 - z''^2)}{dy} = \alpha'' z'' - \alpha' z' = (\alpha'' - \alpha') z'' + (z'' - z')\alpha'$$

e che inoltre, essendo

$$z'^2 - z''^2 = (z' - z'')(z' + z'')$$

le due differenze $z'^2 - z''^2$ e $z' - z''$ variano nello stesso senso o in sensi contrarî secondochè z' e z'' sono entrambe positive o entrambe negative.

In particolare segue dal teorema precedente che *due curve integrali $z = z'(y)$ e $z = z''(y)$ della nostra equazione corrispondenti a due diversi valori α' e α'' di α non possono mai aver in comune due o più punti fuori dell'asse y, ammenochè negli intervalli interposti non attraversino detto asse.*

Infatti, supposto per esempio che le due curve abbiano in comune i due punti A e A' di ascisse y_0 e y_0' ($y_0 < y_0'$) del semipiano $z < 0$ e che nell'intervallo $< y_0, y_0' >$ non abbandonino mai questo semipiano; dal 2° caso del teorema di confronto, supposto altresì che sia $\alpha' < \alpha''$, seguirebbe $z'(y_0') > z''(y_0')$ contrariamente all'ipotesi che anche per $y = y_0'$ si abbia $z' = z''$.

Notiamo infine che, con qualche ipotesi supplementare, questo corollario potrebbe anche estendersi a casi in cui non si esclude più che i punti comuni alle due curve possano cadere sull'asse y; anzi sarà proprio in uno di questi casi che dovremo avvalercene di qui a un momento.

8. - Siamo ora in grado di dimostrare che, come si è già accennato, il valor critico a_0 di a è *unico*, ossia che *ad un medesimo valore di* β, *minore di* 1, *non possono corrispondere due diversi valori* a_0' e a_0'' *di* a *per cui si abbia* $H_0 \equiv H_1$, *cioè per cui esista una curva integrale* Γ *collegante* A_0 *con* A_1 *attraverso punti del semipiano* $z<0$.

Infatti, supposto $a_0'<a_0''$ e dette Γ' e Γ'' le corrispondenti curve Γ, per le (22) e (22') dovrebbe aversi (con chiaro simbolismo)

$$m_0'>m_0'', \qquad m_1'>m_1'',$$

epperò nell'intorno destro di A_0 Γ'' dovrebbe stare sotto Γ' mentre nell'intorno sinistro di A_1 dovrebbe verificarsi il contrario, il che implica che le due curve Γ' e Γ'' dovranno tagliarsi in almeno un punto A del semipiano $z<0$, avente ascissa compresa fra quelle di A_0 ed A_1. Ma, d'altra parte, verificandosi nell'intorno destro di A_0 le condizioni volute dal terzo caso del teorema di confronto, in tutto l'intervallo A_0 A_1, la curva Γ'' dovrebbe rimanere sempre aldisotto di Γ'; dunque l'ipotesi che esistano due diversi a_0 conduce ad una contradizione e se ne conclude che a_0 è unico.

Passiamo finalmente a dimostrare che *per* $a>a_0$, *cioè quando* H_0 *è aldisotto di* H_1, *non vi possono essere soluzioni periodiche.*

Infatti, nel semipiano $z>0$, consideriamo il prolungamento Γ_0' a sinistra di A_0 della curva integrale uscente da questo punto col coefficiente angolare m_0 (v. fig. 2). Poichè, pel terzo caso del teorema di confronto, detta curva deve stare tutta aldisopra dell'analoga curva relativa al caso di $a=0$ (che esce da A_0 col coefficiente angolare $-\sqrt{\frac{1}{2}\cos\theta}>m_0$) e poichè quest'ultima curva, essendo rappresentata dall'equazione

$$z=\sqrt{\cos y+\cos\theta+(\theta-\pi-y)\sin\theta}, \qquad (y<\theta-\pi)$$

(si confronti la prima delle (25)), ha la sua ordinata indefinitamente crescente al diminuire di y; *a fortiori* lo stesso accadrà per la curva Γ_0', epperò detta curva costituirà, nel semipiano $z>0$, un ostacolo invalicabile per tutte le curve integrali, e in particolare per le eventuali soluzioni periodiche della nostra equazione. Ne segue che, se vi è una soluzione periodica $Z(y)$ della (6), dovrà essere necessariamente $Z(\theta-\pi)\leqq 0$, anzi addirittura $Z(\theta-\pi)<0$ se $a\neq a_0$; epperò, in forza del 2° caso del teorema di confronto, supposto $a>a_0$, in tutto l'intervallo $<\theta-\pi,\ \theta+\pi>$ la curva $z=Z(y)$ dovrà star sempre *aldisotto della curva* Γ, relativa al caso di $a=a_0$.

D'altra parte, essendo il valor medio di una soluzione periodica della (6) in un intervallo d'ampiezza 2π uguale a $-\beta/a$, ch'è una funzione crescente di a, per $a>a_0$ la curva $z=Z(y)$ dovrebbe o stare tutta aldisopra di Γ o almeno tagliare questa curva; dunque il supporre che per $a>a_0$ esistono ancora delle soluzioni periodiche, conduce ad una contradizione.

9. - Le considerazioni dei §§ precedenti mostrano l'importanza del numero a_0, caratterizzato dalla proprietà di essere quell'unico valore di a per cui esiste una curva integrale Γ simultaneamente passante per A_0 ed A_1, il quale separa i valori di a per cui la (6) ammette una (ed uua sola) soluzione periodica da quelli per cui tale soluzione invece non esiste.

Questo numero a_0 è una funzione non negativa di β, definita nell'intervallo $<0, 1>$, la cui espressione esplicita non sembra facile ad ottenersi. Possiamo però assegnare alcune utili limitazioni di questa funzione:

Allo scopo indicato cominciamo con l'osservare che per $a = a_0$, cioè per $H_0 \equiv H_1$, $h_0 = h_1$, dalle disuguaglianze (23) e (24) segue che dev'essere necessariamente

$$-a_0\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) > -\frac{1 + \sin\theta}{a_0},$$

donde si trae subito la seguente limitazione superiore per a_0:

$$\boxed{a_0^2 < \frac{1 + \sin\theta}{\pi/2 - \theta}}. \tag{26}$$

Meno semplice è invece la determinazione di un confine inferiore di a_0, e precisamente occorre cominciare con l'osservare che *la curva Γ, nell'intervallo $<\theta - \pi, \theta + \pi>$, resta sempre aldisopra della propria tangente t_0 nel punto A_0* (3).

Infatti, se la curva Γ scendesse aldisotto di t_0, dovrebbe poi necessariamente riattraversare tale retta per andare a passare pel punto A_1, epperò, pel teorema del valor medio, esisterebbe almeno un punto *aldisotto* di t_0 in cui si avrebbe $dz/dy = m_0$. Ma, com'è facile constatare con calcoli molto semplici, il luogo geometrico dei punti del piano (y, z) in cui si ha $dz/dy = m_0$ è la sinusoide

$$z = -\frac{m_0}{\cos\theta}(\beta + \sin y),$$

la quale, nell'intervallo $<\theta - \pi, \theta + \pi>$, sta sempre aldisopra della retta t_0 che solo la tocca nel punto A_0; dunque è impossibile che aldisotto di t_0 ci sia un punto in cui si abbia $dz/dy = m_0$.

Segue da quanto sopra che la curva Γ è tutta compresa nel triangolo formato dalla retta t_0, dal segmento $A_0 A_1$ dell'asse y e dalla retta $y = \theta + \pi$, la cui area (in valor assoluto) è data da

$$\frac{1}{2}(2\pi)^2 |m_0|,$$

dunque sussisterà la disuguaglianza

$$\frac{\beta}{a_0} = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} z_\Gamma \, dy\right| < \frac{1}{4\pi}(2\pi)^2 |m_0|$$

---

(3) Tale proprietà non vale invece, in generale, per la tangente t_1 a Γ nel punto A_1.

donde segue

$$\frac{\beta}{a_0} < \pi \,|\, m_0 \,|$$

e successivamente

$$\frac{\pi a_0}{\sin\theta} > \frac{2}{\cos\theta}\, m_1 = \frac{2}{\cos\theta}\left[\sqrt{\left(\frac{a_0}{4}\right)^2 + \frac{\cos\theta}{2}} - \frac{a_0}{4}\right]$$

avendo tenuto conto che $m_0 m_1 = -\frac{1}{2}\cos\theta$ e che $\beta = \sin\theta$. Non resta ora che da isolare il radicale nella precedente disuguaglianza ed elevare poi a quadrato, per ottenere l'accennata limitazione inferiore di a_0 sotto forma della disuguaglianza

$$\boxed{a_0^2 > \frac{2\sin^2\theta}{\pi(\pi\cos\theta + \sin\theta)}}\,. \tag{27}$$

Notiamo infine che una limitazione inferiore più aderente di a_0, ma espressa da formule non semplici, può ottenersi facilmente utilizzando il fatto che la curva Γ, a destra del punto $y = \pi/2$, non può mai scendere al disotto dell'arco $N_0 A_1$ della sinusoide σ nè, a sinistra di $\pi/2$, aldisotto della parallela $z = -(\beta + 1)/a_0$ all' asse y.

10. - Dimostriamo ora che la soluzione periodica $z = Z(y)$ della (6), quando esiste, ha anche carattere di *soluzione asintotica*, nel senso che *vi sono infinite curve integrali dell'equazione che, al decrescere indefinitamente di y, si approssimano asintoticamente alla curva $z = Z(y)$.*

In particolare dico che *questo succede per tutte le curve integrali passanti per punti del piano (y, z) sottostanti alla curva $z = Z(y)$*, senza peraltro escludere che lo stesso possa succedere (per $a \neq a_0$) anche per parte delle restanti curve integrali, perchè uscenti sempre da punti del semipiano $z \leq 0$.

Infatti, detta $z = z(y)$ la soluzione corrispondente ad una qualunque delle curve integrali uscenti da un punto sottostante a $z = Z(y)$, poichè dovrà ovviamente esser sempre

$$z(y) < Z(y),$$

avremo che

$$\int_{y_0-2\pi}^{y_0} z(y)\,dy < \int_{y_0-2\pi}^{y_0} Z(y)\,dy = -2\pi\frac{\beta}{a},$$

epperò, in virtù della (20), avremo altresì che

$$z^2(y_0) - z^2(y_0 - 2\pi) = -a\int_{y_0-2\pi}^{y_0} z(y)\,dy - 2\pi\beta > 0,$$

donde, tenuto conto che $z(y_0)$ e $z(y_0 - 2\pi)$ sono negativi, segue

$$z(y_0) < z(y_0 - 2\pi).$$

Tal quale si constata che

$$z(y_0-2\pi)<z(y_0-4\pi)<z(y_0-6\pi)<\dots,$$

epperò la successione di numeri negativi crescenti

$$z(y_0),\quad z(y_0-2\pi),\quad z(y_0-4\pi),\dots$$

tenderà necessariamente ad un limite finito, di guisa che, dato un numero positivo ε, piccolo a piacere, si potrà sempre trovare un n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ si abbia

$$z^2(y_0-2n\pi)-z^2[y_0-2(n+1)\pi]<\varepsilon.$$

Ne segue, sempre in virtù della (20), che per $n \geqslant n_0$ si avrà

$$0<-\alpha\int_{y_0-2(n+1)\pi}^{y_0-2n\pi} z(y)dy-2\pi\beta<\varepsilon$$

o anche

$$0<\alpha\int_{y_0-2(n+1)\pi}^{y_0-2n\pi}[Z(y)-z(y)]dy<\varepsilon$$

donde, considerato che la differenza sotto integrale è sempre positiva, si trae *a fortiori* che, nell'intervallo $\langle y_0-2(n+1)\pi,\ y_0-2n\pi\rangle$, si ha

$$\operatorname{Max}[Z(y)-z(y)]<\frac{\varepsilon}{2\pi\alpha},$$

e ne segue l'assunto.

Concludendo, possiamo riassumere i principali risultati conseguiti nella discussione dell'equazione (6) enunciando che:

Se β è maggiore di 1 *oppure, essendo $\beta \leqslant 1$, α non è superiore ad un certo α_0, funzione univoca di β, caratterizzato dal fatto che ad esso e ad esso solo corrisponde una curva integrale simultaneamente passante pei due punti A_0 e A_1 e tale che*

$$\frac{2\sin^2\theta}{\pi(\pi\cos\theta+\sin\theta)}<\alpha_0^2<\frac{1+\sin\theta}{\pi/2-\theta},\qquad \left(0<\theta=\arcsin\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right);$$

allora l'equazione differenziale (6) *ammette una ed una sola soluzione periodica col periodo 2π, $z=Z(y)$, soddisfacente all'ovvia limitazione*

$$-\frac{\beta+1}{\alpha}\leqslant Z(y)\leqslant\begin{cases}0, & (\beta\leqslant 1)\\ -\frac{\beta-1}{\alpha}, & (\beta>1)\end{cases}\tag{28}$$

e tale che il suo valor medio in ogni intervallo d'ampiezza 2π è $-\beta/\alpha$.

A tale soluzione periodica, quando esiste, tendono asintoticamente, per $y\to-\infty$, infinite altre soluzioni, fra cui tutte quelle passanti per punti del piano (y, z) sottostanti alla curva $z=Z(y)$.

Notiamo inoltre che: 1°) Poichè la curva $z = Z(y)$, in ogni intervallo di ampiezza 2π, incontra due e due sole volte la sinusoide σ; la funzione $Z(y)$ ha, in ogni intervallo siffatto, uno e un solo massimo e uno e un sol minimo. 2°) Poichè due curve periodiche $z = Z'(y)$ e $z = Z''(y)$ corrispondenti a due diversi valori a' ed a'' di a non possono mai incontrarsi, visto che, se esse avessero un punto in comune, ne dovrebbero avere infiniti, in contrasto col corollario del teorema di confronto; sarà sempre $Z'(y) > Z''(y)$ oppure $Z'(y) < Z''(y)$ secondochè è rispettivamente $a' > a''$ oppure $a' < a''$.

11. - Determinata che sia la soluzione periodica $Z(y)$, pel che potranno servire i metodi cui si accennerà tra breve, si passa subito alla corrispondente soluzione *tipo Vallauri* della (1), invertendo la funzione $t(y)$ data dalla (7), cioè considerando la funzione $y(t)$ definita dall'equazione

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2N}} \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Z(y)},$$

dove y_0 è una costante qualsiasi. Per esempio potrà prendersi $y_0 = 0$ e supporre inoltre *scelto come origine dei tempi l'istante in cui si ha* $y = 0$, con che l'equazione precedente prende l'aspetto formalmente più semplice:

$$\boxed{t = \frac{1}{\sqrt{2N}} \int_{0}^{y} \frac{dy}{Z(y)}}. \tag{29}$$

Le considerazioni generali del § 3 ci dicono allora che, posto [4]

$$\frac{1}{b} = -\frac{\omega}{\omega'},$$

cioè

$$\boxed{\frac{1}{b} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2N}} \int_{0}^{2\pi} \frac{dy}{Z(y)}}, \tag{30}$$

la soluzione $y = y(t)$ della (1) definita dalla (29) sarà del tipo

$$\boxed{y = -bt + \varphi(t)}, \tag{31}$$

dove φ denota una funzione periodica col periodo $2\pi/b$ e nulla per $t = 0$, la cui determinazione a mezzo della (29) non offre alcuna sostanziale difficoltà, conosciuta che sia la $Z(y)$.

Otterremo poi un'interessante limitazione superiore della quantità essenzial-

---

[4] Per farla risultare positiva, abbiamo qui cambiata la b del § 3 in $-b$.

mente positiva b ricordando che, per la disuguaglianza di SCHWARZ, il valor medio dell'inversa di una funzione sempre positiva in un intervallo è maggiore dell'inversa del valor medio della funzione nel medesimo intervallo. Invero, applicando questa proposizione alla funzione $-Z(y)$, sempre positiva nell'intervallo $<0, 2\pi>$, avremo che

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dy}{Z(y)} > \frac{1}{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z(y)dy} = \frac{\alpha}{\beta},$$

donde, sostituendo nella (30) e ricordando le (3), segue che

(32) $$\boxed{b < \frac{P}{M}}.$$

Notiamo inoltre che, se $\beta > 1$ cioè se $P > N$, dalla (28) segue l'altra interessante disuguaglianza:

(33) $$\boxed{b > \frac{P-N}{M}}.$$

Finalmente occupiamoci della determinazione del valor medio nel tempo di $\sin y$ in corrispondenza alla soluzione (31), cioè, più precisamente, della determinazione del numero

$$\mu = \frac{1}{2\pi/b}\int_0^{\frac{2\pi}{b}} \sin y dt,$$

considerato che $\sin y$ è visibilmente una funzione periodica di t col periodo $2\pi/b$. A tal uopo osserviamo che dalla (1), integrando rispetto a t da 0 a $2\pi/b$, si ha senz'altro

$$-N\frac{2\pi}{b}\mu = \left[\frac{dy}{dt} + My + Pt\right]_0^{\frac{2\pi}{b}},$$

donde, tenendo conto che, per la (31), dy/dt resta invariata quando t aumenta di $2\pi/b$, mentre y diminuisce di 2π, segue

$$-N\frac{2\pi}{b}\mu = -2\pi M + \frac{2\pi}{b}P,$$

cioè

(34) $$\boxed{\mu = \frac{Mb - P}{N}},$$

il che, in virtù della (32), mostra che *il valor medio* μ *di* $\sin y$ *è sempre negativo*; inoltre si ha che, se $P \leqq N$, è

(35) $$\boxed{|\mu| < \frac{P}{N}}.$$

12. - Da quanto precede risulta che l'unica difficoltà da superare per l'effettiva determinazione delle soluzioni *tipo Vallauri* della (1), consiste nella effettiva determinazione della soluzione periodica $Z(y)$ dell'equazione di primo ordine (6). Invero, conosciuta che sia Z, la determinazione di b e di φ per mezzo della (29) e della (30) si riduce ad un problema di quadrature numeriche.

Per l'effettiva determinazione di $Z(y)$ si può seguire sia un metodo grafico, sia un metodo numerico di approssimazioni successive. Meglio, converrà servirsi di tutti e due, utilizzando il metodo numerico per migliorare l'approssimazione ottenuta graficamente.

Il metodo grafico cui si allude non è altro che quello classico del disegno del *Richtungsfeld* dell'equazione ([5]) e successivo tracciamento ad occhio delle curve integrali; metodo che nel caso della (6) è d'impiego particolarmente comodo in quanto il luogo geometrico dei punti del piano (y, z) per cui dz/dy ha un determinato valore m, è la sinusoide

$$z=-\frac{\beta+\sin y}{\alpha+2m}, \tag{36}$$

cioè una curva ben facile a tracciarsi. Oppure si può utilizzare l'osservazione che, se (y_0, z_0) sono le coordinate di un punto qualsiasi della sinusoide σ dei massimi e minimi, nel punto (y_0, kz_0) si ha

$$\frac{dz}{dy}=\alpha\frac{1-k}{2k}, \tag{37}$$

ciò che, con opportuni accorgimenti pratici, dà luogo ad una costruzione assai rapida del *Richtungsfeld.*

Si noti inoltre che il disegno del *Richtungsfeld* dell'equazione serve anche bene per decidere se la soluzione periodica $Z(y)$ c'è o non c'è, ove non ci si trovi in uno di quei casi in cui la cosa possa decidersi *a priori* per mezzo delle (26) e (27), o formule analoghe.

Il metodo numerico, che consiglio specialmente per migliorare l'approssimazione della soluzione ottenuta col metodo precedente, è invece un metodo d'approssimazioni successive fondato sull'osservazione che dalla (6′), integrando rispetto a y da y_0 ad y, si ha

$$z^2(y)=z^2(y_0)-\alpha\int_{y_0}^{y}z(y)dy-\beta(y-y_0)+\cos y-\cos y_0,$$

e sul fatto che il valor medio in $\langle y_0, y_0+2\pi\rangle$ della soluzione periodica è, come ben sappiamo, uguale a $-\beta/\alpha$.

Precisamente, supposta nota *a priori* una prima approssimazione $z=z_0(y)$

([5]) V. per esempio BIEBERBACH, loc. cit., Kap. 2.

della cercata funzione $Z(y)$, calcoliamoci anzitutto una seconda approssimazione $z_1(y)$ mediante la formula

$$z_1^2(y) = z_1^2(y_0) - a\int_{y_0}^{y} z_0(y)\,dy - \beta(y-y_0) + \cos y - \cos y_0, \tag{38}$$

determinando la costante $z_1^2(y_0)$ in modo da ottenere che già $z_1(y)$ soddisfi esattamente alla condizione relativa al valor medio, cioè in modo che sia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{y_0}^{y_0+2\pi} z_1(y)\,dy = -\frac{\beta}{a}. \tag{39}$$

Ciò posto calcoliamoci le successive approssimazioni mediante la formula ricorrente

$$\boxed{z_{n+1}(y) - z_n(y) = \frac{1}{2z_n(y)}\left\{k_n - a\int_{y_0}^{y}[z_n(y) - z_{n-1}(y)]\,dy\right\}} \tag{40}$$

(ottenuta sottraendo membri a membro le due formule analoghe alla (38) relative a z_{n+1} e z_n e sostituendo quindi $2z_n$ a $z_n + z_{n+1}$) dove la costante k_n dev'essere scelta in modo che sia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{y_0}^{y_0+2\pi} z_{n+1}(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{y_0}^{y_0+2\pi} z_n(y)\,dy = -\frac{\beta}{a},$$

condizione da cui si ricava l'equazione lineare in k_n:

$$\boxed{k_n\int_{y_0}^{y_0+2\pi}\frac{dy}{z_n(y)} = a\int_{y_0}^{y_0+2\pi}\frac{dy}{z_n(y)}\int_{y_0}^{y}[z_n(\eta) - z_{n-1}(\eta)]\,d\eta}\,, \tag{41}$$

che mostra come k_n sia una *media pesata* (relativa alla *funzione-peso* $1/z_n(y)$) dei valori dell'integrale

$$I_n(y) = a\int_{y_0}^{y}[z_n(\eta) - z_{n-1}(\eta)]\,d\eta$$

nell'intervallo $<y_0, y_0 + 2\pi>$.

13. - Passiamo ora a giustificare il precedente metodo di approssimazioni successive, facendo vedere che esso, *almeno per a sufficientemente piccolo, è certamente convergente.* Precisamente dico che se a e l'approssimazione iniziale $z_0(y)$ sono tali che, posto

$$\mathrm{Max}\,|z_1(y) - z_0(y)| = \varepsilon_1, \qquad \min\,|z_1(y)| = \eta_1, \quad (y_0 \leq y \leq y_0 + 2\pi),$$

sono verificate le condizioni,

$$(42)\qquad \boxed{\eta_1 > \varepsilon_1, \qquad 2\pi a < (\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\varepsilon_1})^2},$$

allora le funzioni $z_n(y)$ costituiscono una successione *uniformemente convergente*, il che implica ovviamente che sarà

$$\lim_{n\to\infty} z_n(y) = Z(y).$$

Infatti, posto in generale

$$\operatorname{Max} |z_n(y) - z_{n-1}(y)| = \varepsilon_n, \qquad \min |z_n(y)| = \eta_n, \quad (y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + 2\pi),$$

si ha evidentemente

$$\left.\begin{array}{r} |I_n(y)| \\ |k_n| \end{array}\right\} \leqslant 2\pi a \varepsilon_n,$$

e quindi, in forza della (40), sarà

$$(43)\qquad \varepsilon_{n+1} \leqslant 2\pi a \frac{\varepsilon_n}{\eta_n},$$

mentre, d'altra parte, si ha ovviamente

$$(44)\qquad \eta_{n+1} \geqslant \eta_n - \varepsilon_n.$$

Avremo dunque

$$(45)\qquad \varepsilon_2 \leqslant 2\pi a \frac{\varepsilon_1}{\eta_1}, \quad \varepsilon_3 \leqslant (2\pi a)^2 \frac{\varepsilon_1}{\eta_1(\eta_1 - \varepsilon_1)}, \quad \varepsilon_4 \leqslant (2\pi a)^3 \frac{\varepsilon_1}{\eta_1(\eta_1 - \varepsilon_1)(\eta - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}, \ldots$$

purchè, beninteso, non solo ε_1, ma anche le somme $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$,.... risultino tutte minori di η_1.

Ciò posto ammettiamo per un momento di aver già dimostrato ch'è possibile determinare almeno un numero positivo E, minore di η_1, tale che posto

$$(46)\qquad \varepsilon_1^* = \varepsilon_1; \qquad \varepsilon^*_{n+1} = \varepsilon_1 \left(\frac{2\pi a}{\eta_1 - E}\right)^n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

risulti

$$(47)\qquad \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* + \ldots = E,$$

ed osserviamo che si avrà allora evidentemente:

$$\varepsilon_2^* > \varepsilon_1 \frac{2\pi a}{\eta_1} \geqslant \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3^* > \varepsilon_1 \frac{(2\pi a)^2}{\eta_1(\eta_1 - \varepsilon_1^*)} = \varepsilon_1 \frac{(2\pi a)^2}{\eta_1(\eta_1 - \varepsilon_1)} \geqslant \varepsilon_3,$$
$$\varepsilon_4^* > \varepsilon_1 \frac{(2\pi a)^3}{\eta_1(\eta_1 - \varepsilon_1^*)(\eta_1 - \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)} > \varepsilon_1 \frac{(2\pi a)^3}{\eta_1(\eta_1 - \varepsilon_1)(\eta_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \geqslant \varepsilon_4, \ldots,$$

epperò la serie $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$, ammettendo come maggiorante la serie convergente $\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* + \ldots$ sarà certamente convergente, dal che, considerato il significato di ε_n, segue senz'altro l'assoluta ed uniforme convergenza della successione $z_0(y)$, $z_1(y)$, $z_2(y)$,.... nell'intervallo $< y_0, y_0 + 2\pi >$.

Come si vede, tutto sta dunque a dimostrare la possibilità di determinare E in modo che sia soddisfatta la condizione (47), cioè in modo che sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_1 \left(\frac{2\pi a}{\eta_1 - E}\right)^n = E,$$

il che dà luogo alle condizioni:

$$\begin{cases} 0 < E < \eta_1 + 2\pi a \\ E^2 - (\eta_1 + \varepsilon_1 - 2\pi a)E + \eta_1\varepsilon_1 = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Proviamo così ch'è anzitutto necessario che sia

$$(\eta_1 + \varepsilon_1 - 2\pi a)^2 \geqslant 4\eta_1\varepsilon_1, \tag{49}$$

cioè

$$(2\pi a)^2 - 2(\eta_1 + \varepsilon_1)(2\pi a) + (\eta_1 - \varepsilon_1)^2 < 0,$$

condizione ch'è certo soddisfatta se è

$$2\pi a < \eta_1 + \varepsilon_1 - \sqrt{(\eta_1 + \varepsilon_1)^2 - (\eta_1 - \varepsilon_1)^2} = (\sqrt{\eta_1} - \sqrt{\varepsilon_1})^2,$$

che non è altro se non la seconda delle (42). Non potremo invece tentare di soddisfare la (49) ponendo

$$2\pi a > \eta_1 + \varepsilon_1 + \sqrt{(\eta_1 + \varepsilon_1)^2 - (\eta_1 - \varepsilon_1)^2},$$

perchè allora $\eta_1 + \varepsilon_1 - 2\pi a$ sarebbe negativo e quindi la seconda delle (48) non potrebbe certo darci per E un valore positivo.

La precedente condizione non è però soltanto necessaria, ma anche sufficiente per la determinabilità di E.

Invero, supponendola soddisfatta, la seconda delle (48) fornisce

$$E = \frac{1}{2}\left[\eta_1 + \varepsilon_1 - 2\pi a \pm \sqrt{(\eta_1 + \varepsilon_1 - 2\pi a)^2 - 4\eta_1\varepsilon_1}\right], \tag{50}$$

che, com'è facile verificare, sono due valori entrambi compresi nell'intervallo $<0, \eta_1 + 2\pi a>$; dunque, sotto le ipotesi (42), non solo è possibile trovare un E soddisfacente la condizione (47) ma anzi se ne possono trovar due, e ne segue l'assunto.