

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI RICCI

Sulla convergenza assoluta delle serie trigonometriche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 1, n° 4
(1932), p. 399-412

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_4_399_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA CONVERGENZA ASSOLUTA DELLE SERIE TRIGONOMETRICHE

di GIOVANNI RICCI (Pisa).

È ben noto il teorema di FATOU ⁽¹⁾: « Se la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$$

è assolutamente convergente in tutto un intervallo (c, d) le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono ambedue assolutamente convergenti », che si può dedurre immediatamente dal teorema più generale di DENJOY-LUSIN ⁽²⁾: « Se le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ non sono entrambe assolutamente convergenti la serie trigonometrica sopra scritta converge assolutamente al più in un insieme di misura nulla » ⁽³⁾.

Si conoscono tipi di serie trigonometriche che convergono assolutamente soltanto in punti isolati, ad esempio la serie di seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sin knx \quad (k \text{ intero positivo})$$

la quale, quando $|a_{kn}|$ sia non crescente al crescere di n e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{kn}|$ sia divergente, converge assolutamente in tutti e soli i k punti $0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}$ dell'intervallo $(0, \pi)$ e in tutti quelli congrui a questi (mod π).

Si conoscono anche tipi di serie trigonometriche le quali, pur non convergendo assolutamente in nessun intervallo per quanto piccolo, ammettono infiniti

⁽¹⁾ P. FATOU: *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Mathematica, t. 30, 1906; pp. 335-400.

⁽²⁾ A. DENJOY: *Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques*, Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, t. 155, 1912, pp. 135-136. — N. LUSIN: *Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques*, Ibid. pp. 580-582.

⁽³⁾ Ved. L. TONELLI: *Serie trigonometriche*, Bologna, 1928, p. 22 e segg.

punti di convergenza assoluta costituenti un insieme ovunque denso. Ad esempio le serie di seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } n!x,$$

già considerata da RIEMANN, non converge assolutamente in alcun intervallo e d'altronde converge assolutamente negl'infiniti punti $x = \frac{p}{q}\pi$ (p, q interi, $q \neq 0$) (4).

In questo lavoro prendiamo a considerare le *serie trigonometriche non ovunque assolutamente convergenti* e ci proponiamo di dimostrare alcune proposizioni mediante le quali:

1°) si individuano tipi alquanto generali di serie trigonometriche che ammettono *al più un numero finito di punti di convergenza assoluta* (n.° 2);

2°) si stabilisce una condizione necessaria a cui deve soddisfare *il numero dei punti di convergenza assoluta* di tali serie, quando di questi ne esistano, e implicitamente si assegna anche un limite superiore per tale numero (n.° 2);

3°) si stabiliscono, in funzione della successione dei coefficienti a_n, b_n della serie, alcune condizioni necessarie a cui deve soddisfare *ciascun punto di convergenza assoluta* (n.° 3, n.° 4), le quali, in casi abbastanza generali (ved. n.° 5-7), semplificano la ricerca di tali punti riducendola all'esame di un insieme finito (5).

1. - Osserviamo innanzi tutto che il comportamento di una serie trigonometrica rispetto alla convergenza assoluta è identico in punti congrui secondo il modulo π , conviene quindi limitarci allo studio dell'intervallo $(0, \pi)$ aperto a destra.

Premettiamo due lemmi:

1° LEMMA. - Supponiamo che nella serie trigonometrica

$$(1) \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \{a_{n_r} \cos n_r x + b_{n_r} \text{sen } n_r x\}$$

1°) nessun termine sia identicamente nullo ($\varrho_{n_r} = \sqrt{a_{n_r}^2 + b_{n_r}^2} > 0, r = 1, 2, 3, \dots$),

2°) la successione $\varrho_{n_{r+1}}/\varrho_{n_r}$ ($r = 1, 2, 3, \dots$) sia limitata,

3°) la serie $\sum_{r=1}^{\infty} \varrho_{n_r}$ sia divergente.

Se esistono due punti distinti x_1 e x_2 nei quali la serie (1) converge assolutamente è soddisfatta la condizione seguente:

(4) L. TONELLI, op. cit., p. 28 e p. 23.

(5) Nelle proposizioni cui perveniamo ne sono contenute molte altre, come casi particolari, riguardanti la convergenza assoluta delle serie di coseni e delle serie di seni (ved. n.° 5 e n.° 7; L. TONELLI, op. cit. pp. 26-29).

Fissati il numero ω positivo comunque piccolo e l'intero M comunque grande, nella successione

$$(2) \quad n_r(x_1 - x_2) \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

si trovano M elementi consecutivi congrui (mod π) a valori dell'intervallo $(-\omega, \omega)$.

Dimostrazione. - Procediamo per assurdo dimostrando che la convergenza assoluta simultanea della (1) in x_1 e x_2 , quando non sia soddisfatta la condizione precedente, porta la convergenza di $\sum_{r=1}^{\infty} \varrho_{n_r}$.

Posto $a_{n_r} = \varrho_{n_r} \cos n_r a_{n_r}$, $b_{n_r} = \varrho_{n_r} \sin n_r a_{n_r}$, la serie dei valori assoluti dei termini della (1) può scriversi

$$\frac{1}{2} |a_0| + \sum_{r=1}^{\infty} \varrho_{n_r} |\cos n_r(x - a_{n_r})|.$$

Dalla convergenza assoluta della (1) in x_1 e x_2 segue che converge la serie

$$(3) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \varrho_{n_r} \{ |\cos n_r(x_1 - a_{n_r})| + |\cos n_r(x_2 - a_{n_r})| \}$$

e la differenza fra i due argomenti che compariscono nell' r^{esimo} termine, al variare di r , descrive la successione (2).

Supponiamo che non sia soddisfatta la condizione del lemma; allora esistono un numero positivo ω e un intero positivo M tali che in qualunque gruppo di M elementi consecutivi della (2) se ne trova almeno uno che non sia congruo (mod π) ad un valore dell'intervallo $(-\omega, \omega)$.

Consideriamo la successione di coppie

$$(4) \quad n_r(x_1 - a_{n_r}), \quad n_r(x_2 - a_{n_r}) \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

e dividiamo tali coppie in due categorie ⁽⁶⁾ ponendo nella prima categoria ogni coppia i cui elementi *ambidue* siano congrui (mod π) a valori dell'intervallo

$$\left(\frac{\pi - \omega}{2}, \frac{\pi + \omega}{2} \right),$$

e nella seconda categoria le coppie rimanenti. La differenza fra i due elementi della stessa coppia è $n_r(x_1 - x_2)$ e al variare di r descrive la successione (2).

Pel modo con cui sono stati scelti ω e M possiamo dire che in ogni gruppo di M coppie successive della (4) ne esiste almeno una appartenente alla seconda categoria, poichè se tutte M appartenessero alla prima categoria, tutti gli M elementi corrispondenti della (2) sarebbero congrui (mod π) a valori dell'inter-

⁽⁶⁾ Questo procedimento è analogo a quello che si trova in L. TONELLI, op. cit., p. 27.

vallo $(-\omega, \omega)$, ciò che non è. Ne segue che in (4) ogni coppia della seconda categoria è seguita al più da $M-1$ coppie della prima.

Denotando con \sum' e \sum'' le sommatorie estese ai termini della serie (3) corrispondenti alle coppie della (4) rispettivamente della prima e della seconda categoria, ed osservando che per ogni coppia della seconda categoria è

$$|\cos n_r(x_1 - a_{n_r})| + |\cos n_r(x_2 - a_{n_r})| > \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$$

abbiamo

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_{n_r} \cos n_r x_1 + b_{n_r} \operatorname{sen} n_r x_1| + \sum_{r=1}^{\infty} |a_{n_r} \cos n_r x_2 + b_{n_r} \operatorname{sen} n_r x_2| > \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \sum'' \varrho_{n_r}.$$

Dalla convergenza assoluta della (1) in x_1 e x_2 segue che converge la serie $\sum'' \varrho_{n_r}$. D'altronde essendo i rapporti $\varrho_{n_{r+1}}/\varrho_{n_r}$ ($r=1, 2, 3, \dots$) complessivamente limitati esiste un numero positivo $L, \neq 1$, per cui $\varrho_{n_{r+1}} < L\varrho_{n_r}$ ($r=1, 2, 3, \dots$), e per quello che abbiamo veduto circa la distribuzione delle coppie della seconda categoria concludiamo

$$(5) \quad \sum' \varrho_{n_r} \leq \varrho_{n_1}(1 + L + \dots + L^{M-1}) + \sum'' \varrho_{n_r}(L + L^2 + \dots + L^{M-1}) = \\ = \frac{1-L^M}{1-L} \varrho_{n_1} + L \frac{1-L^{M-1}}{1-L} \sum'' \varrho_{n_r}$$

quindi converge anche $\sum' \varrho_{n_r}$.

Dalla convergenza delle due serie $\sum' \varrho_{n_r}$, $\sum'' \varrho_{n_r}$ segue la convergenza della serie $\sum_{r=1}^{\infty} \varrho_{n_r}$. Il lemma risulta così dimostrato.

2° LEMMA. - Sulla serie trigonometrica (1) facciamo le tre ipotesi del lemma precedente; se x^* ne è un punto di convergenza assoluta è soddisfatta la condizione seguente:

Fissati il numero positivo ω comunque piccolo e l'intero M comunque grande, nella successione

$$(6) \quad (n_{r+1} - n_r)x^* + \operatorname{arctg} \frac{b_{n_{r+1}}}{a_{n_{r+1}}} - \operatorname{arctg} \frac{b_{n_r}}{a_{n_r}}, \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

si trovano M elementi consecutivi congrui (mod π) a valori dell'intervallo $(-\omega, \omega)$.

Dimostrazione. - Per dimostrare questo lemma procederemo in modo analogo al precedente, cioè proveremo che se per il punto x^* non è soddisfatta la condizione enunciata, la convergenza assoluta della (1) nel punto x^* porta la convergenza della serie $\sum_{r=1}^{\infty} \varrho_{n_r}$.

Colle posizioni del lemma precedente risulta

$$n_r a_{n_r} \equiv \operatorname{arctg} \frac{b_{n_r}}{a_{n_r}}, \quad (\text{mod } \pi).$$

Supponiamo che esistano un numero positivo ω e un intero positivo M tali che in qualunque gruppo di M elementi consecutivi della (6) se ne trovi almeno uno che non sia congruo (mod π) ad un valore dell'intervallo $(-\omega, \omega)$.

Consideriamo la successione

$$(7) \quad n_r(x^* - a_{n_r}), \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

e dividiamone gli elementi in due categorie ponendo nella prima categoria tutti quelli congrui (mod π) a valori dell'intervallo $(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2})$ e nella seconda categoria tutti i rimanenti. La differenza fra ciascun elemento della (7) e il precedente descrive la successione (6).

Come nel lemma precedente si vede subito che fra i primi M elementi della (7) ne esiste almeno uno della seconda categoria e che ogni elemento della seconda categoria è seguito al più da $M-1$ elementi della prima; ed osservando che in corrispondenza ad un punto della seconda categoria è $|\cos n_r(x^* - a_{n_r})| > \sin \frac{\omega}{2}$ si completa la dimostrazione.

2. - TEOREMA I. - *Se nella serie trigonometrica*

$$(1) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \{ a_{n_r} \cos n_r x + b_{n_r} \sin n_r x \}$$

1°) *nessun termine è identicamente nullo* ($Q_{n_r} = \sqrt{a_{n_r}^2 + b_{n_r}^2} > 0; r=1, 2, 3, \dots$),

2°) *la serie* $\sum_{r=1}^{\infty} Q_{n_r}$ *è divergente,*

3°) *le successioni*

$$(a) \quad \frac{Q_{n_{r+1}}}{Q_{n_r}}, \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

$$(b) \quad n_{r+1} - n_r, \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

sono entrambe limitate, allora la serie (1) ammette nell'intervallo (0, π) aperto a destra, al più un numero finito di punti di convergenza assoluta; quando ne esistano, il loro numero k soddisfa alla condizione seguente:

Fissato comunque grande l'intero M , nella successione $n_{r+1} - n_r$ ($r=1, 2, 3, \dots$) si trovano M elementi consecutivi multipli di k .

Osservazioni. - a) Ne segue: se per la serie (1) sono verificate le prime due ipotesi ed inoltre essa ammette nell'intervallo $(0, \pi)$ infiniti punti di convergenza assoluta, allora una almeno delle due successioni (a) e (b) è illimitata.

b) Che nell'enunciato precedente compariscano contemporaneamente i caratteri di entrambe le successioni (a) e (b) risulta plausibile quando si pensi che, ammessa la (a) non limitata, si possono presentare gruppi sempre più numerosi

costituiti di termini piccolissimi in confronto di termini adiacenti, tali gruppi venendo a formare non vere e proprie *lacune* (cioè gruppi di termini identicamente nulli) ma, in un certo senso, lacune generalizzate.

c) L'esempio citato della serie di seni $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } n!x$ è in evidente accordo colla proposizione enunciata.

d) Come conseguenza del teorema precedente abbiamo: Siano k_1, k_2, \dots, k_l l interi dei quali diciamo d il massimo comune divisore; se per la serie (1) si fanno le ipotesi del teorema I e inoltre la successione (β) da un certo posto in poi coincide colla successione

$$k_1, k_2, \dots, k_l, k_1, k_2, \dots, k_l, k_1, k_2, \dots, k_l, \dots$$

allora la serie (1) stessa ammette al più un numero finito di punti di convergenza assoluta; quando di tali punti ne esistano il loro numero è divisore di d .

Dimostrazione. - Detto N il minimo intero per cui $n_{r+1} - n_r \leq N$, ($r=1, 2, 3, \dots$), cominciamo col provare che se esistono due punti distinti x_1 e x_2 di convergenza assoluta, una almeno delle N quantità

$$(8) \quad 1(x_1 - x_2), \quad 2(x_1 - x_2), \dots, \quad N(x_1 - x_2),$$

è congrua a zero (mod π).

Procediamo per assurdo e applichiamo il 1° lemma. Supponiamo che nessuna delle quantità (8) sia congrua a zero (mod π); è possibile determinare un numero positivo 2ω abbastanza piccolo in guisa che nessuno dei numeri (8) sia congruo (mod π) ad un punto dell'intervallo $(-2\omega, 2\omega)$. La differenza fra ciascun elemento della successione (2) (ved. n.° 1) e il precedente descrive la successione

$$(9) \quad (n_{r+1} - n_r)(x_1 - x_2) \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

la quale non ha alcun elemento congruo (mod π) ad un punto dell'intervallo $(-2\omega, 2\omega)$; ne segue che di due elementi consecutivi della successione (2) uno al più è congruo (mod π) ad un punto dell'intervallo $(-\omega, \omega)$; la condizione del 1° lemma non è soddisfatta, ma ciò è assurdo per l'ipotesi che x_1 e x_2 siano ambedue punti di convergenza assoluta.

Dimostriamo adesso che il minimo intero positivo h per cui si verifica

$$hx_1 \equiv hx_2, \quad (\text{mod } \pi)$$

ha infiniti multipli nella successione (β) , non solo, ma che comunque grande si fissi l'intero M , esistono in (β) M elementi consecutivi multipli di h .

Procedendo per assurdo, sia M un intero per cui non si verifica tale proprietà; ciò significa che fra i primi M elementi di (β) ne esiste almeno uno non multiplo di h , e che ogni elemento di (β) non multiplo di h è seguito al più

da $M-1$ elementi multipli di h . Determiniamo adesso un numero positivo 2ω in guisa che dei numeri (8) soltanto quelli congrui a zero (mod π) risultino congrui (mod π) a valori dell'intervallo $(-2\omega, 2\omega)$; possiamo allora dire che nella successione (9) fra i primi M elementi ne esiste uno non congruo (mod π) ad alcun valore dell'intervallo $(-2\omega, 2\omega)$, e che ogni elemento di questa specie è seguito al più da $M-1$ elementi congrui (mod π) a valori dell'intervallo $(-2\omega, 2\omega)$. Ne segue che in (2) fra i primi M elementi ne esiste almeno uno non congruo (mod π) ad alcun punto dell'intervallo $(-\omega, \omega)$, e che ogni elemento di questa specie è seguito al più da M elementi congrui (mod π) a valori dell'intervallo $(-\omega, \omega)$. Il 1° lemma conduce all'assurdo.

Dal fatto che l'intero h non supera N segue che i punti di convergenza assoluta della (1), quando ne esistano sono in numero finito che diciamo k . Essi, come è noto (7), per $k > 1$ si trovano ai vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$. Se ne prendiamo due consecutivi x_1 e x_2 il minimo intero positivo h per cui vale $hx_1 \equiv hx_2 \pmod{\pi}$ è appunto k . Dunque i multipli di k nella successione (β) verificano la proprietà enunciata.

Il teorema risulta così dimostrato.

3. - Veniamo adesso a stabilire per la serie (1) in relazione ai coefficienti a_{n_r} e b_{n_r} e alle differenze $n_{r+1} - n_r$, una condizione necessaria a cui devono soddisfare i punti di convergenza assoluta; tale condizione permette in molti casi di individuare un numero finito di punti fra i quali saranno da ricercarsi gli eventuali punti di convergenza assoluta (ved. n.º 5-7).

TEOREMA II. - *Se per la serie (1) valgono le ipotesi del teorema precedente e k_1, k_2, \dots, k_l sono tutti e soli i valori limiti della successione*

$$(\beta) \quad n_{r+1} - n_r \quad (r=1, 2, 3, \dots),$$

condizione necessaria perchè un punto x^ sia di convergenza assoluta per la (1) è che, fissati il numero positivo ω comunque piccolo e l'intero M comunque grande, nella successione*

$$(\gamma) \quad \operatorname{arctg} \frac{b_{n_{r+1}}}{a_{n_{r+1}}} - \operatorname{arctg} \frac{b_{n_r}}{a_{n_r}} \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

si trovino M elementi consecutivi ciascuno congruo (mod π) ad un valore di uno almeno degl'intervalli

$$(k_1x^* - \omega, k_1x^* + \omega), \quad (k_2x^* - \omega, k_2x^* + \omega), \dots, \quad (k_lx^* - \omega, k_lx^* + \omega).$$

(7) Ved. L. TONELLI, op. cit., p. 31.

Infatti pel 2° lemma, fissati ω e M come sopra è detto, nella successione

$$(6) \quad (n_{r+1} - n_r)x^* + \operatorname{arctg} \frac{b_{n_{r+1}}}{a_{n_{r+1}}} - \operatorname{arctg} \frac{b_{n_r}}{a_{n_r}}, \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

si trovano M elementi consecutivi congrui (mod π) a valori dell'intervallo $(-\omega, \omega)$. Osserviamo che ad ogni elemento di questa successione (6) congruo (mod π) ad un valore di $(-\omega, \omega)$ corrisponde (almeno a partire da un certo posto in poi) nella successione (γ) un punto che appartiene ad uno almeno degli l intervalli

$$(k_1x^* - \omega, k_1x^* + \omega), \quad (k_2x^* - \omega, k_2x^* + \omega), \dots, \quad (k_lx^* - \omega, k_lx^* + \omega).$$

Osservazione. - Se la successione (γ) converge, secondo il (mod π), ad un determinato limite (finito) λ , i punti di convergenza assoluta della (1) sono da ricercarsi fra i punti x^* che soddisfano ad una almeno delle congruenze

$$k_i x^* \equiv \lambda, \quad (\text{mod } \pi) \quad (i=1, 2, \dots, l).$$

4. - Una ulteriore condizione necessaria a cui devono soddisfare i punti di convergenza assoluta di una serie trigonometrica è assegnata dal seguente:

TEOREMA III. - *Se per la serie trigonometrica (1) valgono le ipotesi del 1° lemma (ved. n.° 1), condizione necessaria perchè un punto x^* sia di convergenza assoluta per la serie stessa è che, fissati il numero positivo ω comunque piccolo e l'intero M comunque grande, nella successione*

$$(\delta) \quad n_r x^* - \operatorname{arctg} \frac{b_{n_r}}{a_{n_r}} \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

si trovino M elementi consecutivi congrui (mod π) a valori dell'intervallo

$$\left(\frac{\pi}{2} - \omega, \frac{\pi}{2} + \omega\right).$$

Dimostrazione. - Procediamo per assurdo. Se ω e M sono due numeri pei quali la condizione non è verificata, dividiamo gli elementi di (δ) in due categorie ponendo nella prima categoria quelli congrui (mod π) a valori di $\left(\frac{\pi}{2} - \omega, \frac{\pi}{2} + \omega\right)$ e nella seconda categoria i rimanenti; fra i primi M elementi di (δ) ne esiste almeno uno della prima categoria ed ogni elemento della seconda categoria è seguito al più da M elementi della prima. Con ragionamento analogo a quello svolto nel 1° lemma (n.° 1), quando si tenga conto che per un punto della seconda categoria è $|\cos n_r(x^* - a_{n_r})| > \operatorname{sen} \omega$, si arriva a concludere che la convergenza assoluta della (1) nel punto x^* implica la convergenza della serie $\sum_{r=1}^{\infty} a_{n_r}$. Il teorema risulta dimostrato.

Osservazione. - Tutte le volte che la successione (δ) converge, secondo (mod π),

a $\frac{\pi}{2}$ la condizione necessaria è soddisfatta; quando invece la successione (δ) converge, secondo $(\text{mod } \pi)$, ad un valore diverso da $\frac{\pi}{2}$ la condizione necessaria non è soddisfatta e possiamo subito concludere che x^* non è punto di convergenza assoluta.

5. - Sulle serie prive di termini identicamente nulli.

Dai tre teoremi precedenti (n.° 2, 3, 4) segue immediatamente il seguente

Corollario. - Supponiamo che nella serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \}, \quad (\varrho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2})$$

nessun termine sia identicamente nullo, i rapporti ϱ_{n+1}/ϱ_n ($n=1, 2, \dots$) siano nel complesso limitati e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$ sia divergente; allora la serie trigonometrica stessa ammette, nell'intervallo $(0, \pi)$ aperto a destra, al più un solo punto x^ di convergenza assoluta. Quando tale punto esista, comunque si assegnino $\omega > 0$ e M intero > 0 , esistono nella successione*

$$(\gamma) \quad \arctg \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - \arctg \frac{b_n}{a_n}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

M elementi consecutivi congrui $(\text{mod } \pi)$ a valori dell'intervallo $(x^ - \omega, x^* + \omega)$, ed inoltre esistono nella successione*

$$(\delta) \quad nx^* - \arctg \frac{b_n}{a_n}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

M elementi consecutivi congrui $(\text{mod } \pi)$ a valori dell'intervallo $(\frac{\pi}{2} - \omega, \frac{\pi}{2} + \omega)$.

In particolare abbiamo:

a) Se $|a_n|$ e $|b_n|$ non crescono mai al crescere di n , e se il rapporto $\frac{b_n}{a_n}$, per $n \rightarrow \infty$, converge a un limite determinato e finito, condizione necessaria e sufficiente affinché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \}$$

converga assolutamente in un punto x_0 , è che sia convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ |a_n| + |b_n| \}.$$

Infatti, escluso il caso ovvio in cui i coefficienti a_n , e quindi anche i coefficienti b_n , da un certo indice in poi siano tutti nulli, la serie in questione si

trova nelle condizioni contemplate nel corollario precedente; la successione (γ) converge a zero, quindi $x^*=0$; d'altra parte per qualunque n l'elemento di (δ) è $\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$, e questo, per l'ipotesi fatta sul rapporto $\frac{b_n}{a_n}$, converge ad un valore diverso da $\frac{\pi}{2}$. La condizione riguardante la successione (δ) non è soddisfatta.

Ad esempio la serie trigonometrica

$$(\cos x + h \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} (\cos 2x + h \operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{3} (\cos 3x + h \operatorname{sen} 3x) + \dots$$

ottenuta come combinazione lineare delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

(già considerate da D. BERNOULLI), ovunque convergenti, non converge mai assolutamente.

b) Se $|a_n|$ non cresce mai col crescere di n , condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ converga assolutamente in un punto x_0 , è che sia convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ⁽⁸⁾.

c) Se $|b_n|$ non cresce mai col crescere di n , condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di seni $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$ converga assolutamente in un punto x_0 , non congruo a zero (mod π), è che sia convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ ⁽⁹⁾.

In questo caso la successione (γ) ha gli elementi tutti nulli, dunque $x^*=0$. La successione (δ) ha gli elementi tutti congrui a $\frac{\pi}{2}$ (mod π), quindi in $x^*=0$ tutte le condizioni necessarie stabilite risultano soddisfatte. Nel punto $x^*=0$ la serie di seni ha i termini tutti nulli quindi converge sempre assolutamente.

6. - Sulle serie con infiniti termini identicamente nulli.

I teoremi dimostrati ai n.° 2, 3, 4, quando ci si limiti al caso di serie trigonometriche in cui ogni termine non identicamente nullo è seguito da un numero fisso $k-1$ di termini identicamente nulli, ci pòrgono immediatamente le seguenti proposizioni:

⁽⁸⁾ P. FATOU: *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. 41, 1913, pp. 52-53; ed anche L. TONELLI, op. cit., p. 26.

⁽⁹⁾ P. FATOU: l. cit. in ⁽⁸⁾; e anche L. TONELLI, op. cit., p. 28.

Corollario. - Diciamo k e h due interi, con $k \geq 1$ e $h \geq 0$, e diciamo d il loro massimo comune divisore. Supponiamo che nella serie trigonometrica

$$(10) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \{ a_{kr+h} \cos (kr+h)x + b_{kr+h} \operatorname{sen} (kr+h)x \}$$

1°) nessun termine sia identicamente nullo ($Q_{kr+h} = \sqrt{a_{kr+h}^2 + b_{kr+h}^2} > 0$; $r=1, 2, 3, \dots$),

2°) i rapporti $Q_{k(r+1)+h}/Q_{kr+h}$ ($r=1, 2, 3, \dots$) siano nel complesso limitati,

3°) la serie $\sum_{r=1}^{\infty} Q_{kr+h}$ sia divergente;

allora la serie trigonometrica stessa ammette, nell'intervallo $(0, \pi)$ aperto a destra, al più un numero finito di punti x^* di convergenza assoluta.

Quando di tali punti x^* ne esistano, essi sono in numero multiplo di d e divisore di k e verificano una condizione del tipo

$$(\varepsilon) \quad kx^* \equiv \xi \pmod{\pi},$$

essendo ξ un punto limite della successione (calcolata secondo $(\operatorname{mod} \pi)$)

$$(\gamma) \quad \operatorname{arctg} \frac{b_{k(r+1)+h}}{a_{k(r+1)+h}} - \operatorname{arctg} \frac{b_{kr+h}}{a_{kr+h}}, \quad (r=1, 2, 3, \dots).$$

Inoltre, comunque si assegnino $\omega > 0$ e M intero > 0 , esistono nella successione (γ) M elementi consecutivi congrui $(\operatorname{mod} \pi)$ a valori dell'intervallo $(\xi - \omega, \xi + \omega)$, ed esistono nella successione

$$(\delta) \quad (kr+h)x^* - \operatorname{arctg} \frac{b_{kr+h}}{a_{kr+h}}, \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

M elementi consecutivi congrui $(\operatorname{mod} \pi)$ a valori dell'intervallo $(\frac{\pi}{2} - \omega, \frac{\pi}{2} + \omega)$.

Osservazione. - Si osserva subito che in due punti congrui secondo $(\operatorname{mod} \frac{\pi}{d})$ la serie trigonometrica in questione presenta lo stesso comportamento rispetto alla convergenza assoluta.

Detto \bar{x} un qualunque punto che soddisfa alla (ε) i k punti che soddisfano alla stessa relazione sono $\bar{x}, \bar{x} + \frac{\pi}{k}, \dots, \bar{x} + \frac{(k-1)\pi}{k} \pmod{\pi}$ e possono darsi nella forma

$$(11) \quad \bar{x} + \frac{l\pi}{k} + \frac{c\pi}{d} \quad (l=0, 1, \dots, \frac{k}{d} - 1; c=0, \dots, d-1).$$

I gruppi di d punti scelti fra i punti (11) in corrispondenza ad uno stesso valore di l sono costituiti o da punti tutti di convergenza assoluta, o da punti tutti di non convergenza assoluta. Pel fatto che i punti di convergenza assoluta, quando siano più d'uno, si trovano ai vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$, possiamo asserire che i valori di l corrispondenti ai

punti (11) di convergenza assoluta, quando ne esistano, sono tutti e soli gl'interi della forma $l_0 + sk'$ denotando l_0 il minimo di essi, k' un opportuno divisore di $\frac{k}{d}$ e $s=0, 1, \dots, \frac{k}{dk'} - 1$.

7. - In particolare:

a) Se $|a_{kr+h}|$ e $|b_{kr+h}|$ non crescono mai al crescere di r , e se il rapporto b_{kr+h}/a_{kr+h} , per $r \rightarrow \infty$, tende ad un limite determinato λ (finito o infinito) ⁽¹⁰⁾ si considerino gl'interi c scelti fra $0, 1, \dots, k-1$ pei quali

$$(12) \quad \frac{kc\pi}{k} - \operatorname{arctg} \lambda \equiv \frac{\pi}{2}, \pmod{\pi}.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie (10) converga assolutamente in un punto x_0 , incongruo $\pmod{\pi}$ a ciascuno dei punti $\frac{c\pi}{k}$, è che sia convergente la serie

$$(13) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \{|a_{kr+h}| + |b_{kr+h}|\}.$$

Infatti la serie (10) si trova nelle condizioni richieste dalla proposizione del n.º 6. La successione (γ) converge a zero, e dobbiamo considerare i k punti che soddisfano alla condizione $kx \equiv 0 \pmod{\pi}$, che sono $0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}$. Se la serie (13) non converge, gli eventuali punti di convergenza assoluta sono da ricercarsi fra i punti $0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}$.

Consideriamo la successione (δ) (n.º 6) per $x = \frac{\nu\pi}{k}$ ($0 \leq \nu \leq k-1$); essendo

$$(kr+h) \frac{\nu\pi}{k} - \operatorname{arctg} \frac{b_{kr+h}}{a_{kr+h}} \equiv \frac{h\nu\pi}{k} - \operatorname{arctg} \frac{b_{kr+h}}{a_{kr+h}}, \pmod{\pi}$$

la successione

$$\frac{h\nu\pi}{k} - \operatorname{arctg} \frac{b_{kr+h}}{a_{kr+h}}$$

converge, secondo il $\pmod{\pi}$, al punto

$$\frac{h\nu\pi}{k} - \operatorname{arctg} \lambda.$$

Per un determinato valore di ν , la condizione riguardante la successione (δ) (ved. n.º 6) è soddisfatta oppure no secondochè il punto $\frac{h\nu\pi}{k} - \operatorname{arctg} \lambda$ coincide oppure no col punto $\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

I valori c di ν per cui vale la (12), quando ne esistano, definiscono altrettanti punti $x = \frac{c\pi}{k}$ nei quali la serie (10) può convergere assolutamente senza che converga la serie (13).

⁽¹⁰⁾ Conveniamo di porre $b_{kr+h}/a_{kr+h} = \infty$ per $a_{kr+h} = 0$ e $b_{kr+h} \neq 0$.

Consideriamo ad esempio la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ \cos (6r+1)x + \sqrt{\frac{3r+1}{r}} \operatorname{sen} (6r+1)x \right\}.$$

Poichè $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ diverge, $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3r+1}{r}} = \sqrt{3}$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ e i valori di c , con $0 \leq c \leq 5$, per cui

$$\frac{c\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{2}, \quad (\text{mod } \pi)$$

si riducono all'unico $c=5$, concludiamo che questa serie trigonometrica non converge assolutamente in alcun punto x diverso da $\frac{5\pi}{6}$. Per $x = \frac{5\pi}{6}$ il termine generale della serie stessa risulta in valore assoluto

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3r+1}{r}}}$$

e risultando minore di $\frac{1}{r^2}$, la serie considerata converge assolutamente nel punto eccezionale $x = \frac{5\pi}{6}$.

Analogamente la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\log r} \left\{ \cos (6r+1)x + \sqrt{3 + \frac{1}{r}} \cdot \operatorname{sen} (6r+1)x \right\}$$

non ammette alcun punto di convergenza assoluta.

Dalla proposizione precedente seguono immediatamente queste ⁽¹⁴⁾:

b) Se k è un numero intero positivo e se $|a_{kr}|$ non cresce mai col crescere di r , condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di coseni $\sum_{r=1}^{\infty} a_{kr} \cos krx$ converga assolutamente in un dato punto x_0 , è che sia convergente la serie $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{kr}|$.

In questo caso risulta $\lambda=0$, $h=0$, quindi nessun valore di c può soddisfare la (12).

c) Se k è un intero positivo dispari, e se $|a_{kr+1}|$ non cresce mai col crescere di r , condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di coseni $\sum_{r=1}^{\infty} a_{kr+1} \cos (kr+1)x$ converga assolutamente in un dato punto x_0 , è che sia convergente la serie $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{kr+1}|$.

In questo caso risulta $\lambda=0$, $h=1$ ed essendo k dispari nessun valore di c può soddisfare la (12).

(14) Ved. L. TONELLI, op. cit., pp. 27-29.

d) Se k è un intero positivo, pari, e se $|a_{kr+1}|$ non cresce mai col crescere di r , condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di coseni $\sum_{r=1}^{\infty} a_{kr+1} \cos (kr+1)x$ converga assolutamente in un dato punto x_0 , non congruo a $\frac{\pi}{2}$ secondo $(\text{mod } \pi)$, è che sia convergente la serie $\sum_{r=1}^{\infty} |a_{kr+1}|$.

In questo caso risulta $\lambda=0$, $h=1$ ed essendo k pari esiste l'unico valore $c=\frac{k}{2}$ che soddisfa alla (12).

e) Se k è un intero positivo qualsiasi e se $|b_{kr}|$ non cresce mai col crescere di r , condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di seni $\sum_{r=1}^{\infty} b_{kr} \sin krx$ converga assolutamente in un dato punto x_0 , non congruo secondo $(\text{mod } \pi)$ ad uno dei punti $0, \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{(k-1)\pi}{k}$, è che sia convergente la serie $\sum_{r=1}^{\infty} |b_{kr}|$.

In questo caso risulta $\lambda=\infty$, $\text{arctg } \lambda=\frac{\pi}{2}$, $h=0$ quindi tutti i k valori di c ($0, 1, \dots, k-1$) soddisfano alla (12).

f) Se k è un intero positivo qualsiasi e se $|b_{kr+1}|$ non cresce mai col crescere di r , condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di seni $\sum_{r=1}^{\infty} b_{kr+1} \sin (kr+1)x$ converga assolutamente in un punto x_0 , non congruo a 0 secondo $(\text{mod } \pi)$, è che sia convergente la serie $\sum_{r=1}^{\infty} |b_{kr+1}|$.

In questo caso risulta $\lambda=\infty$, $\text{arctg } \lambda=\frac{\pi}{2}$, $h=1$, quindi esiste l'unico valore $c=0$ che soddisfa alla (12).