

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIULIO ANDREOLI

Parallelismi trasporti rigidi, riferimenti locali nelle V_2

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 1, n° 4
(1932), p. 315-332

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_4_315_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PARALLELISMI TRASPORTI RIGIDI, RIFERIMENTI LOCALI NELLE V_2

di GIULIO ANDREOLI (Napoli).

INDICE-SOMMARIO

Introduzione.

§ 1. *Parallelismi nelle varietà ametriche.*

1. Parallelismi assoluti, generalizzati, sistemi di parallelismi.
2. Trasporti rigidi e riferimenti locali.
3. Conformabilità di due V_2 ametriche.

§ 2. *Parallelismi nelle varietà metriche.*

4. Curvatura metrica e di parallelismo di una linea in una V_2 .
5. Curvatura ordinaria e di parallelismo di una V_2 in un suo punto.
6. Torsioni in una V_2 munita di parallelismo.
7. Varietà metriche con parallelismi completamente tangenti in un punto.
8. Varietà metriche con parallelismi, dotate di movimenti in sè stesse.
9. Caratteri di una curva tracciata in una V_2 . Curve assolute.

Introduzione.

Nella presente Memoria — brevissima del resto — ci proponiamo di coordinare, dal solo punto di vista geometrico, tutto quanto possa riguardare i parallelismi nelle V_2 . Prendendo le mosse dal parallelismo assoluto e risalendo quindi a quello generalizzato, riesce possibile esaminare il comportamento delle V_2 sia in assenza, che in presenza di una metrica lineare. I concetti di curvatura di una linea, di curvatura e di torsione della V_2 stessa in un suo punto, vengono così a presentarsi come derivanti dalla connessione fra metrica e parallelismo. Vi sono bensì proprietà del parallelismo in sè stesso: ma esse allora riguardano addirittura il gruppo delle trasformazioni conformi o altre più ampie.

Si presenta fondamentale la considerazione duale di fasci di direzioni e di punteggiate: il collegamento dei primi spetta al parallelismo, quello delle seconde alla metrica; attraverso tale considerazione, ad esempio, la curvatura geodetica resta caratterizzata come elemento metrico (perchè non occorre riferire fasci) e viene invece a delinearci una curvatura di parallelismo come contrapposto duale, quasi, ad essa.

In sostanza una varietà metrica dotata di parallelismo risulta ancora più vincolata nei suoi elementi: e resta — come parallelismo più naturale e meno vincolante — il parallelismo del LEVI-CIVITA.

Sulla V_2 si considerano, in quanto segue, a fianco delle geodetiche, le auto-parallelle, formanti anch'esse un sistema ∞^2 ; e se le prime estremizzano l'integrale che esprime la lunghezza, si può dare alle seconde un carattere analogo: ovverosia sono quelle curve che estremizzano l'integrale del quadrato dell'angolo nel trasporto rigido lungo un cammino. Quindi la contrapposizione v'è, completa. Non è stata qui svolta, poichè altrove sarà sviluppata la parte analitica da un doppio punto di vista, sì da permetterne l'estensione alle V_3 o alle connessioni affini. In quanto a queste ultime, il sistema delle autoparallele avrà ancora significato fondamentale.

A causa della dimostrata identità fra parallelismi, trasporti rigidi, riferimenti locali, si può dire che vengono — in sostanza — fissate leggi di derivazioni covarianti: ma anche ciò è fuori del quadro della presente Memoria, che vuole avere *soltanto* carattere geometrico, quasi intuitivo, per la necessaria coordinazione di concetti e definizioni sinora staccate oppure date per via analitica. La Memoria stessa, sorta da una serie di conversazioni fra la collega NALLI e me, presenta linee di ulteriori sviluppi, sia analitici che geometrici (per le V_3 , o per connessioni affini etc.): la collega NALLI si occuperà della parte analitica — non funzionale — per proprio conto. Infine in questa Memoria si trovano incluse e sviluppate parecchie delle nozioni introdotte dal Dott. G. BARBA in alcune recenti note lincee.

§ 1. - Parallelismo nelle V_2 ametriche.

1. - Parallelismi assoluti, generalizzati, sistemi di parallelismi.

(1a). Sia assegnata una certa V_2 analitica, cioè costituita da coppie di numeri reali; in essa un sistema di coordinate; ed in ogni punto una metrica angolare ⁽¹⁾ che fissi l'angolo di due direzioni spiccate da un generico punto P . Inoltre sia ulteriormente assegnato, in essa V_2 così pensata (*ametrica*), un parallelismo assoluto *II*. Ciò significa che, fissata una qualsiasi direzione spiccata da un generico punto P , resta determinata in modo univoco per qualsiasi punto Q (almeno di un conveniente intorno di P) una direzione corrispondente; in modo tale che l'angolo di due qualsivogliano direzioni in P sia eguale a quelle corri-

⁽¹⁾ La metrica angolare fissata nel punto dove può essere *additiva*, nel senso che fissato un *verso* e fissate le tre direzioni t_1, t_2, t_3 , sia $\text{ang}(t_1 t_2) + \text{ang}(t_2 t_3) + \text{ang}(t_3 t_1) \equiv 0$; e che $\text{ang}(t_1, t_1)$ deve essere definito come nullo, a meno dei multipli interi di una certa quantità fissa. Naturalmente qui il concetto di somma è inteso in senso lato; qualunque operazione tale che $a * b = b * a$; $a * (b * c) = (a * b) * c$; $a * 0 = a$ può essere assunta come somma; ad esempio la $\varphi(f(a) + f(b))$, φ e f essendo inverse. Così, scelta in un fascio come misura angolare la tangente μ dell'angolo m , la somma resta definita da $\mu_1 * \mu_2 \equiv \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2}$ godente delle proprietà richieste.

spondenti in Q . Beninteso l'angolo in ogni punto essendo misurato nella rispettiva metrica angolare.

Sotto certe condizioni, che saranno acclarate in seguito, la V_2 risulta ricoverta da un sistema ∞^2 di linee; in modo che per un punto generico ne passi un sistema ∞^1 , e per due punti generici ne passi una sola (almeno se i due punti sono in un certo intorno); e tale che, esso sistema, risulti scomponibile in ∞^1 sistemi (formati ciascuno da ∞^1 linee) godenti della proprietà che una qualsiasi curva di uno di essi incontri una qualsiasi curva di un altro sotto un angolo costante, caratteristico della coppia di sistemi scelti. Il sistema di ∞^2 curve si dirà costituito da ∞^1 sistemi mutuamente isogonali; ed è quindi ovvio che per fissare Π basterà fissare uno di tali sistemi, gli altri restando definiti come le sue traiettorie isogonali.

Se sulla V_2 si volesse assegnare un altro parallelismo assoluto Π_1 per caratterizzare questo rispetto al primitivo Π , basta assegnare l'angolo α di cui deve rotare su sè stesso il fascio di direzioni in un punto generico $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ per ottenere la corrispondenza col punto iniziale P .

Con procedimento equivalente si può anche procedere come segue. Assegnato P si consideri il fascio di autoparallele (cioè di quelle linee) per esso passanti; per un punto generico Q si faccia ruotare la tangente (*direzione*) all'autoparallela dell'angolo α dianzi definito. Si verrà così a determinare un secondo fascio di nuove linee passanti per P .

Quindi, per un generico punto Q della V_2 passa un autoparallela $[l]$ del primo sistema; una $[l_1]$ del secondo sistema; l'angolo delle direzioni tangenti in Q , diminuito dell'angolo che esse formano in P caratterizza Π_1 rispetto a Π .

Si vede chè se invece di partire dal punto P si partisse da un altro punto P_1 , una volta assegnata la funzione α , il parallelismo Π_1 resterebbe lo stesso.

Sostanzialmente, nel parallelismo assoluto, avviene che scelto uno qualunque dei sistemi isogonali come fondamentale, bisogna assumere in due qualsiasi punti della V_2 come *parallele* le direzioni delle tangenti alle curve di quel sistema (isogonale agli altri) prescelto; e di conseguenza sia mutando il sistema isogonale, sia mutando il punto originario P di riferimento, le direzioni parallele in Q' e Q'' restano *sempre* le stesse.

(1b). Supponiamo ora, di costruire sulla V_2 , a partire ed in dipendenza della scelta di un punto P un nuovo parallelismo assoluto, servendoci del fascio spiccato da P stesso. Sia $\Pi(P)$ tale parallelismo che soddisfi alla condizione essenziale:

L'autoparallela $[l]$ spiccata da P nel parallelismo assoluto $\Pi(P)$, resti ancora autoparallela in qualsiasi altro parallelismo $\Pi(P_1)$, determinato da P_1 , purchè ⁽²⁾ questo sia scelto su $[l]$.

(²) Se $[l]$ restasse sempre autoparallela, per qualunque scelta di P_1 in V_2 (invece che su $[l]$ stessa) si ricadrebbe ovviamente su un parallelismo assoluto.

In altri termini, $[I]$ deve restare autoparallela per uno qualsiasi dei parallelismi assoluti, determinato da uno qualsiasi dei suoi punti.

È ovvio che con tale procedimento si viene a definire un sistema ∞^2 di linee (come vedremo fra breve) tali che per un punto generico ne passa un sistema ∞^2 e per due punti P e Q una sola; e sin qui si conserva l'analogia con i parallelismi assoluti. Viene però a cadere la possibilità di scindere tale sistema in ∞^1 sistemi due a due isagonali.

Si è venuto così a definire un parallelismo generalizzato. In altri termini, se si riferiscono i punti di V_2 a P , resta definita in ogni P_1 la direzione parallela ad una direzione di P ; mediante il fascio di autoparallele passanti per P stesso; similmente se si riferiscono i punti di V_2 a P_1 , resta definito in P_2 il parallelismo fra le direzioni spiccate da P_2 stesso rispetto a quelle spiccate da P_1 (e quindi, per tramite di queste, a quelle spiccate da P). Ma, il riferimento diretto di P_2 a P , dà risultati diversi che non il riferimento successivo di P_2 a P_1 e da P_1 a P . Ove invece si avessero risultati eguali, si avrebbe di nuovo un parallelismo assoluto.

Vi è tuttavia una eccezione: Se i punti P, P_1, P_2 stanno su una stessa autoparallela, allora il riferimento diretto di P_2 a P e quello indiretto di P_2 a P pel tramite di P_1 danno lo stesso risultato.

Il parallelismo generalizzato resta (analogamente a quello assoluto) definito da quell'angolo α ; però α è funzione delle coordinate di $P \equiv (x_0, y_0)$ oltre che di quelle di $P_1 \equiv (x_1, y_1)$; con la condizione $\alpha(x_0, y_0; x_1, y_1) + \alpha(x_1, y_1; x_0, y_0) = 0$, che si ottiene riferendo P_1 a P , e poi P a P_1 : cioè P a sè stesso col tramite di P_1 .

Che il sistema di curve sia ∞^2 si vede facilmente, poichè si ha un sistema di curve tale che per ogni punto del piano ne passa un sistema ∞^1 (e quindi dovrebbero essere ∞^3); ma una qualsiasi coppia PQ determina una curva che è la stessa comunque si vari la scelta di P e Q sulla curva stessa (poichè, abbiamo detto che se P, P_1, P_2 sono su un' autoparallela, questa si può considerare tanto come fissata da P_1 o P_2 nel fascio di centro P ; quanto da P o P_2 in quello di centro P_1 o da P e P_1 in quello di centro P_2). Quindi il sistema si abbassa ad ∞^2 curve.

(1c). Più generalmente abbandoniamo la condizione che se P_2 è sull' autoparallela da P a P_1 , con essa coincidano l' autoparallela da P a P_2 (e quelle da P_1 a P , da P_1 a P_2 etc).

Si verranno così ad avere ∞^2 parallelismi assoluti $II(P)$ ciascuno dei quali fissato per mezzo della scelta del punto P e di un fascio di autoparallele per esso. Si avrà sulla V_2 un sistema ∞^3 di curve tali che per ogni punto ne passano ∞^2 ; e per due punti qualunque una semplice infinità.

Su ogni curva è fissato un punto (quello formante centro del parallelismo assoluto cui essa si riferisce come curva del fascio) e così via.

L'ente così costituito lo diremo « sistema di parallelismi assoluti ». Esso è

tale che si possono sempre determinare terne di punti PP_1P_2 fra i quali valga un parallelismo assoluto; ma fissati P e P_1 , P_2 non varia su una curva autoparallela (come avveniva nel parallelismo generalizzato).

(1d). Un'ultima osservazione importante riguarda la composizione dei parallelismi. Se a partire da un parallelismo II (assoluto o no) si costruisca per mezzo della funzione α un nuovo parallelismo II_1 ; a partire da questo e per mezzo della funzione α_1 un terzo parallelismo II_2 , ciò equivale a costruire direttamente il parallelismo II_2 , servendosi della funzione $\alpha_1 + \alpha_2$, a partire da II : ciò che equivale a comporre i parallelismi col mezzo della somma di angoli.

Ovviamente valgono le seguenti proprietà:

I. Componendo parallelismi assoluti si hanno ancora parallelismi assoluti.

II. Se uno di essi è assoluto, allora il residuo ⁽³⁾ nei riferimenti successivi di P_1 a P ; P_2 a P_1 ; P a P_2 , di quello composto, è uguale al residuo di quello non assoluto.

III. Se ambedue i parallelismi componenti *non* sono assoluti, il residuo di quello composto è la somma dei loro residui.

2. - Trasporti rigidi e riferimenti locali.

(2a). Sia ora assegnata sulla V_2 munita soltanto della metrica angolare in ogni suo punto e del parallelismo (assoluto o no) fondamentale II , una certa legge funzionale di trasporto.

Ossia dati due punti P e Q congiunti da una linea $[l]$ di cui essi sono gli estremi, resti definito un certo angolo α di rotazione del fascio di direzione in B (riferendosi alla posizione che gli spetterebbe rispetto ad A , a causa di II), funzione di $[l]$: cioè

$$\alpha = \alpha[l].$$

Il trasporto sarà detto *additivo* se dati comunque i punti P , Q , R sulla $[l]$, avvenga che il trasporto da P a Q lungo $[l_1]$ e da Q ad R lungo $[l_2]$ dia lo stesso risultato che il trasporto da P ad R lungo $[l] \equiv [l_1] + [l_2]$, ove $[l]$ sia l'arco PR etc. In altri termini: se

$$[l] = [l_1] + [l_2]$$

⁽³⁾ Chiameremo *residuo* di parallelismo nella catena chiusa $P, P_1, P_2, \dots, P_n, P$, l'angolo che si ottiene in P col riferire successivamente P_1 a P , P_2 a P_1, \dots, P a P_n . È immediato che tale angolo (a meno di multipli di quello equivalente all'angolo nullo) equivale alla somma degli angoli esterni nella poligonale $PP_1P_2P_3 \dots P_nP_1$ i cui lati successivi siano autoparallele.

Il residuo gode ovviamente della proprietà additiva rispetto ai poligoni: infatti si vede che spezzando la catena nelle due $PP_1 \dots P_mP$; $PP_mP_{m+1} \dots P_nP$ si ha la proprietà additiva; e che quindi $\text{res}(PP_1P_2 \dots P_nP) = \text{res}(QPP_1Q) + \text{res}(QP_1P_2Q) + \dots + \text{res}(QP_nPQ)$ essendo Q un arbitrario punto.

Nei parallelismi assoluti il residuo è *nullo*.

si abbia anche

$$\alpha[l] = \alpha[l_1] + \alpha[l_2]$$

e

$$\alpha[l] + \alpha[\bar{l}] = 0$$

intendendo $[\bar{l}]$ la $[l]$ percorsa da B verso A .

Inoltre, vi sia una opportuna continuità funzionale di I° ordine.

Segnata sulla $[l]$ una qualunque successione di punti A_1, A_2, \dots intermedia fra P e Q , valga la

$$\alpha[l] = \sum \alpha[l_r]$$

ove $[l_r]$ sia l' r mo archetto di curva $[l]$ definito colla successione delle A .

Nelle condizioni premesse, il funzionale che definisce il trasporto rigido è un integrale di Stieltjes (4):

Diremo *autoparallele nel trasporto rigido* (additivo) una curva tale che per due suoi punti qualunque, definenti l'arco l^* , sia sempre:

$$\alpha[l^*] = 0.$$

Per la legge da noi imposta, l'integrale di Stieltjes equivale ad eseguire il trasporto rigido lungo una qualunque poligonale di autoparallele (in tal senso) inscritta ad l_1 con i vertici A ; e facendo ruotare nei punti angolosi il fascio di direzioni trasportate; indi facendo tendere la poligonale alla curva.

Pertanto: *I trasporti rigidi additivi restano perfettamente determinati, allorchè sia assegnato un parallelismo generalizzato, da un processo integrale di tipo Stieltjes, effettuato lungo l'arco di trasporto, mediante la funzione α .*

Reciprocamente, se si esamina la definizione di autoparallela in un trasporto rigido additivo, si vede che essa soddisfa alle condizioni di quelle di un parallelismo generalizzato; e quindi si può affermare che:

Un trasporto rigido additivo resta equivalente ad un parallelismo generalizzato.

Se in particolare il parallelismo è assoluto, allora il trasporto rigido *non* dipende dalla linea $[l]$ ma soltanto dagli estremi e reciprocamente.

(2b). Diremo di aver fissato un « *riferimento locale* » ogni qualvolta dato un punto P ed uno ad esso infinitamente vicino $P_1 \equiv P + dP$, resti fissato in P_1 il riferimento del fascio delle direzioni relativamente a P , a partire dalla PP_1 . Ciò equivale, in altri termini, a considerare le direzioni spiccate da P come direzioni autoparallele; ed a riferire quindi all'intorno di P — in P_1 ad esempio — le direzioni spiccate in questi nuovi punti a quelle originarie.

In altri termini si definisce nell'intorno di P un sistema di parallelismi, che (mantenendosi soltanto nell'intorno di I° ordine di P stesso) può pensarsi come un parallelismo generalizzato in tale intorno di P .

(4) Cfr.: *Processi integrali di Stieltjes* di P. NALLI e G. ANDREOLI. Annali di Matematica, 1929-30.

Reciprocamente, definito un qualunque parallelismo generalizzato, esso subordina nell'intorno di P un riferimento locale.

Se però teniamo presente la grande latitudine di forma che abbiamo lasciato alla funzione α , osserveremo che, in generale nel passaggio da P a P_1 , l'angolo α non è dello stesso ordine ⁽⁵⁾ di $|dP|$.

Ciò implica che data una linea $[l]$ da P a Q , operando con riferimenti locali infinitesimi (cioè operando con una qualunque successione di poligoni inscritti in una curva l) il trasporto lungo questa linea $[l]$ conduce, *in generale*, ad un angolo nullo (se l'ordine di da è maggiore di quello di $|dP|$) o infinito (se è minore). Solo nel caso che la funzione $\alpha(x_0, y_0; x_1, y_1)$ diventi *dovunque* infinite-sima dello stesso ordine di $|dP|$, potrà aversi un angolo finale di trasporto, finito.

Tuttavia le autoparallele si possono anche qui definire, come quelle curve lungo le quali l'angolo finale di trasporto diventi infinitesimo d'ordine maggiore che non lungo un'altra curva qualunque.

Se dunque il riferimento locale dà angoli dello stesso ordine di una qualunque distanza cayleyana nella V_2 , esso definisce altresì un trasporto rigido additivo, ed un parallelismo generalizzato (di forma speciale).

Riassumendo:

Riferimenti locali, trasporti rigidi additivi, parallelismi generalizzati possono ritenersi perfettamente equivalenti l'uno all'altro, poichè ciascuno di essi subordina nella V_2 gli altri due.

Si osservi che il parallelismo di FERMI *non* rientra nelle considerazioni qui svolte; in quanto in esso una $[l_n]$ può tendere ad una $[l]$ nell'intorno funzionale di I° ordine, senza che le rispettive tangenti estreme coincidono. E quindi cade una delle condizioni da noi imposte, poichè il parallelismo di FERMI richiede anche la continuità funzionale del II° ordine. Sarà tuttavia possibile sviluppare le definizioni, sì da includerlo, e trovarlo in certo senso analogo a quello assoluto.

Gli enti dianzi introdotti (parallelismi; trasporti rigidi additivi; riferimenti locali) saranno detti di I° ordine per ricordare che le funzioni (e gli integrali relativi) dipendono da due punti soltanto.

3. - Conformabilità di due V_2 ametriche.

(3a). Siano assegnate due V_2 ametriche, ciascuna dotata di un parallelismo fissato rispetto alle metriche angolari caratterizzate in ciascun loro punto. Noi diremo che vi è *conformabilità assoluta* fra di esse se è possibile riferire l'una all'altra, puntualmente in modo che nei punti corrispondenti P e P_1 della V_2' e Q e Q_1 della V_2'' sia subordinato lo stesso parallelismo fra i fasci di direzioni;

⁽⁵⁾ Senza riferirci ad una speciale metrica nella V_2 , noi diremo che $|dP|$ ha l'ordine di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; il quale ordine non muta se si fissa per le distanze (e quindi nella V_2) un'altra qualunque metrica cayleyana nell'intorno di ogni punto.

e che inoltre la metrica angolare dia lo stesso riferimento per direzioni corrispondenti.

In altri termini deve avvenire, se P e Q, \dots si corrispondono in V_2', V_2'' :

I. Che ad una certa direzione spiccata da P corrisponda una certa direzione spiccata da Q .

II. Che la metrica angolare attorno a P , sia la stessa di quella attorno a Q .

III. Che il riferimento del fascio in P al fascio in P_1 , su V_2' sia lo stesso che tra il fascio in Q e quello in Q_1 su V_2'' ; comunque siano scelti P, P_1 .

Se invece le metriche angolari in P e Q *non* sono identiche, ma esiste un'unica trasformazione (valevole qualunque sia il punto P) che le muti l'una nell'altra, diremo che vi è « *conformabilità affine* »; mentre se la trasformazione non è unica ma varia da punto a punto, vi è « *conformabilità semplice* ».

Attraverso tali definizioni si vede che in una qualunque conformabilità al sistema delle autoparallele della V_2' deve corrispondere il sistema delle autoparallele della V_2'' , sì da corrispondersi una per una e fascio per fascio le autoparallele stesse; e che reciprocamente, esempi di tali conformabilità sono:

a) *Assoluta*. La trasformazione conforme di un piano euclideo con un altro, determinato da una qualsiasi funzione di variabile complessa: autoparallele del I° piano essendo le rette.

b) *Ristretta*. La trasformazione indotta fra due altri piani collegati a ciascuno dei due precedenti da una trasformazione affine (autoparallele ivi essendo le rette, ancora).

c) *Semplice*. La corrispondenza fra una superficie munita di autoparallele (in particolare delle geodetiche) e il piano su cui essa sia proiettata.

In quanto poi ai residui si può osservare che la condizione di corrispondenza fra i due sistemi di autoparallele implica che il residuo del triangolo P, P_1, P_2 di V_2' deve essere eguale al residuo nel triangolo corrispondente Q, Q_1, Q_2 di V_2'' .

Si può dunque, sez'altro, affermare che

I. *Due varietà ametriche dotate di parallelismo assoluto sono sempre conformabili l'una nell'altra.*

II. *Se due varietà ametriche dotate di parallelismo sono conformabili, lo saranno altresì quando il parallelismo di ciascuna di esse si componga con un parallelismo assoluto.*

III. *Se due varietà ametriche dotate di certo parallelismo sono conformabili, e lo sono altresì secondo un altro parallelismo, restano conformabili dopo aver composto tali parallelismi.*

Infine:

IV. *I riferimenti derivati dal trasporto rigido da P a P_1 lungo $[l]$ in V_2' è eguale al riferimento derivante dal triangolo rigido da Q a Q_1 lungo $[m]$ in V_2'' ; ove $P, P_1, [l]$ corrispondono a $Q, Q_1, [m]$ e coincidono altresì i riferimenti locali in P su V_2' , in Q su V_2'' .*

(3b). Per quanto precede, una qualunque varietà a parallelismo assoluto è sempre conformabile sul piano euclideo, ed una a parallelismo generalizzato è sempre conformabile sul piano munito di un opportuno parallelismo generalizzato.

Inoltre, a causa della corrispondenza biunivoca intercedente fra i fasci di direzione sarà sempre possibile pensare nella conformabilità semplice ad una proiezione da un piano ad una superficie; sicchè in definitiva la più generale condizione di conformabilità assoluta riconduce a quella semplice a meno di tali proiezioni; ed in quella assoluta basterà riferirsi alla metrica angolare fissata euclideamente nei piani tangenti.

Sicchè in sostanza la conformabilità assoluta equivale alla possibilità di rappresentazione conforme; quella semplice a questa, a meno di trasformazioni affini localmente.

Così ad esempio, la sfera ricoverta dalle lossodromie passanti per due poli (diametralmente opposti), dai relativi circoli massimi e dai paralleli ad essa ortogonali, è conformabile in modo assoluto sul piano ricoverto da un fascio di rette, dalle logaritmiche aventi lo stesso centro del fascio, e da circoli ivi concentrici; e due sfere con le rispettive lossodromie sono altresì conformabili.

In definitiva:

La conformabilità (assoluta o semplice) è data dallo studio delle proprietà affini invariantive delle reti (sistemi ∞^2) di linee su una V_2 .

L'assoluta è connessa alle trasformazioni che lasciano invariato l'angolo di due direzioni: per quella semplice tale condizione viene a mancare.

§ 2. - Parallelismi nelle V_2 metriche.

4. - Curvature metrica e di parallelismo di una linea in una V_2 .

(4a). Sia assegnata una V_2 munita di una metrica lineare (rappresentata dal radicale di una forma quadratica differenziale) e della metrica angolare così subordinata in ogni punto.

Non è possibile definire una metrica angolare indipendente se si vuole che — sino agli infinitesimi di I° ordine — un triangolo infinitesimo sia trasportabile nella V_2 conservando angoli e distanze.

È fondamentale la definizione di curvatura geodetica, che può avvenire indipendentemente da qualsiasi parallelismo.

È fondamentale altresì il seguente fatto: per la dualità nel piano, una curva può essere definita o come *limite di poligoni inscritti*, cioè come porzioni di punteggiate raccordate nel fascio direzioni spiccate negli estremi di ogni segmento; oppure come *limite di poligoni circoscritti*, cioè come porzioni di fasci raccordate lungo punteggiate.

Quindi, nel piano euclideo, si hanno per una linea *due possibilità* di defi-

nire la curvatura, *conducenti però allo stesso risultato*. La prima coinvolge due elementi di punteggiata ed i fasci agli estremi e *richiede* quindi la nozione di parallelismo; la seconda invece due segmenti ed un solo angolo, ed *esclude* la nozione anzidetta.

Con maggior precisione; la curvatura può essere definita:

I. Come doppio del limite del rapporto fra l'angolo della tangente in P_1 con la parallela alla tangente in P condotta da P_1 , diviso per l'arco $\overline{PP_1}$ (fascio di direzioni in P , fascio di direzioni in P_1 , segmento PP_1 ; e quindi *parallelismo*); oppure

II. Come limite del rapporto fra l'angolo esterno ⁽⁶⁾ a P_1PP_2 e $\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$; e quindi occorrono due segmenti orientati e l'angolo fra essi compreso (quindi *manca* il parallelismo).

In una V_2 invece o non euclidea — non munita del parallelismo di LEVI-CIVITA — o in una euclidea come metrica, ma non come parallelismo, i due metodi conducono a risultati diversi.

E quindi si hanno in un punto della curva due curvatures di cui una, caratterizzata da due elementi metrici e da un angolo, indipendente dal parallelismo, mentre la seconda, caratterizzata da un elemento metrico e da due direzioni in punti distinti, dipende dal parallelismo.

La prima è la curvatura geodetica, la seconda è quella locale di parallelismo, della curva nel punto P ; esse coincidono solo nel parallelismo di LEVI-CIVITA (autoparallele-geodetiche).

Dunque, in generale, in una V_2 munita di metrica e di parallelismo $V_2(M, II)$, data una curva qualunque $[I]$, restano definite in un suo punto P : 1° la curvatura metrica (o geodetica) k_n , come limite del rapporto fra l'angolo (PP_1, t) e l'arco $|PP_1| = ds$, essendo t la (geodetica) direzione tangente in P e PP_1 la corda (geodetica) infinitesima da P a P_1 ; 2° la curvatura di parallelismo k , come limite del rapporto fra l'angolo (t_1, t^*) e l'arco $|PP_1|$, essendo t^* la direzione parallela a t spiccata da P_1 , e t_1 la direzione tangente in P_1 ove (t_1, t^*) e (t, t_1^*) differiscono per infinitesimi d'ordine superiore.

(4b). Si vede in tal guisa che in una $V_2(M, II)$ restano estesi i circoli dell'ordinaria geometria euclidea in ben sei modi distinti ⁽⁷⁾: dal punto di vista della curvatura noi diremo *cerchi geodetici* quelli a curvatura metrica costante; *cerchi di parallelismo* quelli a curvatura di parallelismo costante.

⁽⁶⁾ Si può anche pensare come limite del rapporto fra l'angolo *tangente-corda* diviso per elemento d'arco.

⁽⁷⁾ E precisamente si hanno le estensioni: I. Curve di equidistanza geodetica da un punto dato; II. Curve di equidistanza lungo autoparallele da un punto dato; III. Traiettorie ortogonali del fascio di geodetiche spiccate da un punto; IV. Traiettorie ortogonali del fascio di autoparallele spiccate da un punto; V. Linee a curvatura metrica costante; VI. Linee a curvatura di parallelismo costante. Solo nelle V_2 a curvatura costante coincidono I, III, V; e se inoltre vi è parallelismo di LEVI-CIVITA, coincideranno anche con II, IV, VI. Si osservi

I cerchi formano un sistema di linee ∞^3 tali che per un punto generico ne passano ∞^2 ; per due punti ∞^1 ; per tre punti (sufficientemente vicini), *uno solo*; per un punto generico e tangenzialmente ad una direzione ne passano ∞^1 ; per un punto ed una direzione in esso ed un altro punto, *uno solo*.

Si osservi che, ruotando la direzione della tangente in P , e supponendo di far rotare anche gli elementi di 1° e 2° ordine attorno al punto P , il sistema di cerchi non si muta in sè stesso cerchio per cerchio: o ciò avviene per i cerchi metrici o per quelli di parallelismo, salvo che nel punto considerato i cerchi di parallelismo abbiano anche curvatura metrica costante.

Ciò si può interpretare agevolmente in quanto si osservi che un parallelismo generalizzato subordina nell'intorno di ciascun punto un riferimento locale; ma che, se si tien conto degli elementi di 2° ordine la subordinazione cambia. In altri termini se P_1 e P_1^* sono due punti nell'intorno di P , la subordinazione dei fasci attorno a P_1 è diversa da quella che vi è attorno a P_1^* ; ed inoltre se P e Q sono punti distinti, la subordinazione attorno a P si può riferire a quella attorno a Q ma quelle attorno a punti P_1 non saranno tutte simultaneamente riferibili a quelle attorno ai corrispondenti Q_1 .

(4c). In quanto alle curvatures locali relative a diversi parallelismi fissati nella stessa V_2 metrica, si vede subito che valgono le seguenti proprietà:

I. *Assegnati due parallelismi Π_1 e Π_2 , una linea $[l]$ e su di essa un punto P , la differenza delle curvatures locali di $[l]$ in P , cioè $k_1 - k_2$ non dipende da $[l]$, ma soltanto dalla direzione tangente.*

II. *Assegnate due linee $[l']$ ed $[l'']$ nella stessa varietà, aventi in P la stessa tangente, se k' e k'' sono le loro due curvatures locali, allora la differenza $k' - k''$ è indipendente dal parallelismo.*

Si osservi esplicitamente che le curvatures possono essere munite di segno, in relazione al senso di percorso delle curve e del verso di rotazione dei fasci.

Attraverso le due precedenti proprietà si deduce che se la curvatura metrica di un'autoparallela in un punto P è k_m , la geodetica ad essa ivi tangente ha curvatura di parallelismo in P eguale a k_m ancora.

5. - Curvatura ordinaria e curvatura di parallelismo di una $V_2(M, \Pi)$ in un suo punto.

(5a). Sulla V_2 dotata di metrica e di parallelismo consideriamo un punto P ed a partire da esso il solito triangolo PP_1P_2 col suo residuo: res (PP_1P_2) .

Per le proprietà dimostrate il residuo è additivo rispetto ai triangoli. Pertanto dato un qualsiasi circuito chiuso attorno a P il residuo che si ottiene partendo da un qualsiasi punto A di tale circuito ed eseguendo il trasporto rigido lungo

che le IV in generale non sono curve chiuse; e mentre III e V coincidono per una V_2 , ciò non avviene per IV e VI.

il circuito $[c]$ sino a ritornare in A risulta funzione additiva superficiale della area $\{c\}$ racchiusa da $[c]$.

Pertanto tale residuo si potrà esprimere sia come integrale semplice esteso al circuito $[c]$ che come un integrale doppio esteso all'areola $\{c\}$ contornata da $[c]$.

E si vede facilmente che se l'angolo di parallelismo diventa infinitesimo dello stesso ordine di $|dP|$ tale residuo non è nullo, come è stato già detto. Considerandolo espresso da un integrale doppio, con note considerazioni elementari si deduce (come del resto si fa nel caso delle geodetiche e dei triangoli geodetici) che se $[c]$ tende a restringersi al punto P , il quoziente

$$\frac{\text{res } [c] - 2\pi}{\text{area } \{c\}}$$

tende ad un limite indipendente dalla successione di circuiti percorsa, e definisce una « derivata areolare » che è funzione soltanto del punto P ⁽⁸⁾.

Tale limite sarà detto: *curvatura di parallelismo della $V_2(M_1, II)$ in P , e sarà indicato con $K_\pi(P)$* . Se il parallelismo diventa quello ordinario di LEVICIVITA, la curvatura diventa quella metrica.

Si vede subito che:

I. *In una qualunque V_2 metrica, munita di parallelismo assoluto, la curvatura di parallelismo risulta nulla.*

II. *La curvatura di parallelismo resta invariata se si compone il parallelismo assegnato con uno assoluto.*

III. *La curvatura di parallelismo per un parallelismo composto mediante due altri, è la somma delle curvature relative dei due componenti.*

Seguendo la via da noi indicata altrove ⁽⁹⁾, ed introducendo il concetto di curvatura angolosa di una linea, di curvatura conica o angolosa di una V_2 , si può dire che in generale:

Il residuo relativo ad un circuito $[c]$ è l'integrale di Stieltjes della sua curvatura locale di parallelismo in ogni punto ed è altresì eguale all'integrale doppio di Stieltjes della curvatura di parallelismo (anche le coniche ed angolose) estese a tutta l'area $\{c\}$ limitata da $[c]$.

6. - Torsioni in una V_2 munita di parallelismo.

(6a). Nella solita V_2 munita di parallelismo si consideri il solito triangolo PP_1P_2 e lo si completi mediante i segmenti di autoparallele PP_1, P_1P_2, P_2P_3 . Si avranno tre lunghezze e tre angoli in un certo ordine. Nel piano euclideo,

⁽⁸⁾ Quindi in particolare esso limite può essere calcolato come segue: da P si spiechino due autoparallele e su esse i punti P_1, P_2 ; chiudendo il triangolo con l'autoparallela P_1P_2 . Il residuo di tale triangolo (diminuito di 2π) diviso per l'area PP_1P_2 tende al limite detto allorchè P_1, P_2 tendono a P .

⁽⁹⁾ Cfr. G. ANDREOLI: *Sulla curvatura e sul parallelismo, etc.* Rend. R. Acc. Lincei, 1927.

a partire da P si costruisca la poligonale $QQ_1Q_2Q^*$ nella quale ordinatamente si abbia

$$\overline{QQ_1} = \widehat{PP_1}; \quad \overline{Q_1Q_2} = \widehat{P_1P_2}; \quad \overline{Q_2Q^*} = \widehat{P_2P}.$$

$$\widehat{P_1} = \widehat{Q_1}; \quad \widehat{P_2} = \widehat{Q_2}.$$

Infine per Q tracciamo la direzione QR che faccia l'angolo \widehat{P} (orientato) con la QQ_1 , ed in Q^* la Q^*R^* che faccia l'angolo \widehat{P} (orientato in senso inverso) con Q_2Q^* .

L'angolo delle due direzioni RQ, Q^*R^* sarà il residuo di parallelismo (dianzi definito) del triangolo PP_1P_2 , diminuito di 2π .

Il segmento QQ^* orientato rispetto a QQ_1 si dirà invece la torsione assoluta della V_2 , relativa al triangolo PP_1P_2 nel punto P , dovuta al parallelismo II.

Più generalmente dato un qualsiasi circuito chiuso $[c]$ passante per P , la torsione assoluta connessa a P e dovuta a $[c]$ si definirà come segue.

In ogni punto $P(s)$ di $[c]$, la curvatura locale di questo è funzione di s ; cioè $K(P_1) = \varphi(s)$. Tracciamo nel piano euclideo una linea avente la stessa equazione intrinseca; cioè $[c^*]$ definita da

$$\frac{1}{\rho} = \varphi(s);$$

con l'avvertenza beninteso che se $[c]$ presenta un punto angoloso G_1 con l'angolo γ all'arco s_1 , in $[c^*]$ vi sarà anche un punto angoloso G_1^* con lo stesso angolo γ_1 allo stesso arco s_1 .

L'angolo, del piano euclideo, della tangente orientata in Q , con quella orientata in Q^* (quest'ultimo essendo il corrispondente di P dopo percorso $[c]$) darà il residuo di $[c]$; mentre il vettore QQ^* riferito alla tangente in Q , darà la torsione del ciclo stesso in P .

Sostanzialmente, se nelle V_2 il punto mobile A descrive il circuito $[c]$ infinite volte, nel piano euclideo il punto corrispondente B descrive una curva in generale aperta, composta di infiniti archi tutti sovrapponibili QQ^* ; Q^*Q^{**} , di cui gli estremi hanno una corda di lunghezza eguale $\overline{QQ^*} = Q^*Q^{**}$, e sono tutti situati su una circonferenza di raggio $R = \frac{QQ^*}{\text{tg } \delta}$ ove $\text{tg } \delta$ è l'angolo formato da QQ^* con Q^*Q^{**} , ovverosia è il residuo di parallelismo.

Le corde $BB^* = B^*B^{**}$ riferite alle diverse posizioni corrispondenti allo stesso punto A danno le torsioni relative ai diversi punti del ciclo stesso.

(6b). Si osservi ora che: la torsione in P è funzione additiva dell'area $\{c\}$. Per dimostrare ciò, consideriamo un qualsiasi punto P_1 sull'arco $[c]$; nell'interno di $\{c\}$ tracciamo una linea $[\gamma]$ che vada da P a P_1 e siano $[c_1]$ e $[c_2]$ rispettivamente gli archi PP_1, P_1P su $[c]$.

Chiamiamo ora τ', τ'', τ le torsioni relative a circuiti

$$[c'] = [c_1] + [\gamma]; \quad [c''] = [\gamma] + [c_2]; \quad [c].$$

Percorrendo $[c']$ si avrà un arco $[c']^*$ avente origine in Q e giungente in Q_1 (corrispondente a P_1) ed indi a Q_1^* (corrispondente a P su $[c']^*$); per $[c'']$ invece si avrà un nuovo arco che si potrà far partire da Q_1^* , ritorna in Q_1 (lungo lo stesso arco di prima, corrispondente a $[\gamma]$) e va a Q^{**} corrispondente di nuovo a P lungo $[c]$. Per le definizioni da noi date, il vettore QQ_1^* riferito alla tangente in Q dà la torsione di $[c']$ in P ; il vettore $Q_1^*Q^*$ riferito alla tangente in Q_1^* dà la torsione relativa al circuito $[c'']$.

E siccome il vettore QQ^* è la somma dei vettori QQ_1^* ; $Q_1^*Q^*$, se ne deduce che, tenuto conto del residuo, vale la proprietà additiva indicata.

Quindi:

La torsione, in un punto P , tenuto conto del residuo di parallelismo, è una funzione additiva dell'area.

Pertanto anch'esso si esprimerà come un integrale doppio esteso a $\{c\}$.

Quindi, esisterà (a meno di condizioni analitiche) il limite del rapporto fra torsione ed area di un ciclo infinitesimo $[c]$ tendente ad un punto, e tale limite si dirà: *torsione assoluta della V_2 nel punto P , dovuta al parallelismo Π* (o più semplicemente torsione assoluta).

Essa è rappresentata da un vettore.

Tale vettore ⁽⁴⁰⁾ si potrà calcolare a partire dal triangolo infinitesimo già detto PP_1P_2 , riportato nel piano euclideo. Oppure, più perspicuamente si potrà procedere come segue. Da P si consideri il segmento infinitesimo PP_1 ; da P_1 si stacchi un altro segmento infinitesimo P_1P_2 ; da P_2 si porti il segmento equipollente (secondo Π) a P_1P , con P_2P_3 ; da P_3 il segmento P_3P^* equipollente a P_2P_1 . Il segmento PP^* è quello che definisce la torsione.

(6c). Operiamo invece adesso nello stesso modo, ma nell'intorno infinitesimo di un punto P , riferendo la $V_2(M, \Pi)$ alla $V_2(M, L)$, cioè a se stessa munita però del parallelismo di LEVI-CIVITA. Si vede che sostanzialmente il procedimento non cambia, salvo che si è riferita *intrinsecamente* la varietà a se medesima.

Resta dunque definita in tal guisa una *torsione intrinseca* che caratterizza il comportamento diverso fra triangoli geodetici e triangoli autoparalleli aventi gli stessi vertici nell'intorno di un punto.

Più generalmente si potrebbero definire le torsioni relative di una V_2 riferendo un suo punto ad un altro suo punto oppure quelle relative di due diverse V_2 ; ma il riferimento stesso è privo di significato, potendosi sempre passare per

⁽⁴⁰⁾ Un semplice calcolo mostra che se su una V_2 è fissato un parallelismo assoluto per mezzo di un sistema isoterma per cui $ds^2 = \lambda^2 \{ du^2 + dv^2 \}$, allora la torsione ha per componenti rispettive secondo le u e le v , le quantità $\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}$; $\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}$; se invece su una superficie di rotazione si assume il parallelismo fissato da meridiani paralleli e lossodromie, si avrà che il vettore di torsione è perpendicolare al meridiano.

l'intermediario del piano euclideo e raffigurandosi così la torsione relativa come differenza delle torsioni assolute.

Ed anzi, applicando tale procedimento alla torsione intrinseca si vede che essa resta definita come unicamente eguale alla torsione assoluta, scegliendo però come direzione di riferimento quella che risulta dal residuo di parallelismo diminuito di quello geodetico; ed in effetti, per la sua stessa struttura (basta ricordare le costruzioni del LEVI-CIVITA) il parallelismo geodetico non dà torsione.

Quindi, sostanzialmente si può lasciare come definizione di base quella di torsione assoluta, la quale caratterizza in modo completo il diverso subordinamento degli elementi di secondo ordine.

7. - Varietà metriche con parallelismo completamente tangenti in un punto.

(7a). Siano assegnate $V_2(M, II)$; $V_2'(M', II')$ e siano P, P' due punti di esse corrispondenti in modo tale che le metriche angolari attorno a P e quelle attorno a P' riferiscano un fascio all'altro raggio per raggio sì da poterli sovrapporre; e che inoltre alle autoparallele di V_2 spiccate da P corrispondano le autoparallele spiccate da P' , punto per punto sino all'intorno di secondo ordine.

Ovvero più precisamente siano Q un punto nell'intorno di P , Q' il corrispondente nell'intorno di P' , avendosi che $\lim \frac{PQ}{P'Q'} = 1$, si deve anche avere che l'angolo α di rotazione attorno a Q nel riferimento di Q a P , e l'angolo α' nel riferimento di Q' a P' , siano tali che $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$.

In tal caso diremo che la V_2 e la V_2' sono *completamente tangenti* nei punti P e P' : ovverosia che la metrica e il parallelismo dell'una coincidono con quella dell'altra sino all'intorno di 1° ordine. La condizione di completa tangenza, per tutte le considerazioni che precedono può ridursi a questa:

Il sistema delle autoparallele spiccate da P in V_2 e quelle spiccate da P' in V_2' si devono corrispondere in modo tale che la curvatura geodetica in P e quella in P' delle autoparallele spiccate nelle direzioni corrispondenti, devono essere eguali; oltre beninteso ad essere eguale l'angolo fra una coppia di direzioni e quello fra le direzioni corrispondenti.

Quindi, in particolare se la V_2' è a metrica euclidea, si potrà sempre costituire in essa un parallelismo assoluto determinato da un sistema di cerchi passanti per P' , sì da renderla completamente tangente a $V_2(M, II)$.

E se invece la V_2' coincide con la V_2 stessa, avendosi inoltre $P \equiv P'$, allora il parallelismo dell'una risulterà completamente tangente a quella dell'altra purchè in P e nella direzione t si abbia la stessa curvatura metrica delle autoparallele.

Tuttavia se si vuol tenere anche conto dei residui si potrà sempre determinare un S_2 tangente in un punto della V_2 sì da aversi ivi tangenti i parallelismi ed anche eguali torsioni e residuo.

(7b). Osserviamo che in ogni punto P di una $V_2(M, II)$ e per ogni direzione t

da esso spiccata resta definito un numero k che è la curvatura geodetica della autoparallela spiccata da P , in direzione t ; oppure la curvatura locale della geodetica in tale direzione.

Orbene se dal punto P , nelle due direzioni t' e t'' formanti fra loro un angolo da spicchiamo due segmenti eguali ds , si dà avere il triangolo curvilineo PP_1P_2 ove $PP_1=PP_2=ds$, mentre PP_2 è di ordine superiore dato da $ds \cdot da + \dots$; allora se k' e k'' sono le due curvature relative a t' , t'' , si vede subito che tali elementi bastano a caratterizzare la curvatura e la torsione di parallelismo nel punto P . In quanto al procedimento per realizzare geometricamente il vettore di torsione ed il residuo di parallelismo, basta circoscrivere alla superficie lungo il circuito $[c]$ una rigata sviluppabile; lo sviluppo su di questa, della $[c]$ darà una curva $[c_1]$. Lungo la $[c_1]$ si ha tutta una catena di direzioni da considerare come parallele nel trasporto per archi crescenti. Se si storce la $[c_1]$ in una $[c^*]$, si dà rendere parallele in senso euclideo tali direzioni si otterrà l'immagine dianzi costruita.

Ciò equivale a dire che rappresentata la V_2 nell' S_3 euclideo con una superficie, detti P_1 e P_2 due suoi punti vicini; π_1 e π_2 i rispettivi piani tangenti; il riferimento dei fasci in P_1 e P_2 non avverrà *unicamente* facendo ruotare π_1 e π_2 attorno alla loro intersezione τ_{12} , ma completando tale operazione con una opportuna traslazione di π_1 e π_2 parallela a τ_{12} e con una rotazione attorno ad un certo punto di questa.

Se come caso degenerare la V_2 fosse già un piano, allora il riferimento di due fasci in P_1 e P_2 non si ottiene semplicemente col parallelismo euclideo, ma con opportuna rotazione attorno ad un centro determinato da P_1 e da P_2 .

8. - Varietà metriche con parallelismo, dotate di movimenti in sè stesse.

(8a). Se una V_2 è dotata di un gruppo di ∞^2 movimenti in sè stessa, come è ben noto, essa sarà a curvatura costante. Si abbia dunque un generico movimento che porti un punto P in un punto P_1 . Ciò significa che, localmente, il fascio di autoparallele passante per P e quello passante per P_1 , devono essere tali da sovrapporsi con una ulteriore rotazione attorno ai loro sostegni. Pertanto, a meno di una rotazione, le curvature geodetiche delle autoparallele per P , devono coincidere, direzione per direzione con quelle per P_1 . Ma d'altro canto eseguendo una qualsiasi rotazione della V_2 in sè, con centro P , il fascio di autoparallele deve sovrapporsi a sè stesso: dunque per un qualsiasi punto, le autoparallele da esso spiccate hanno tutte ivi la stessa curvatura geodetica.

In definitiva perciò si può dire:

Affinchè una $V_2(M, II)$ abbia un gruppo ∞^2 di movimenti in sè stessa, occorre e basta:

- I. *Che sia a curvatura ordinaria, di parallelismo, e a torsione, costanti;*
- II. *Che le autoparallele siano curve a curvatura geodetica costante.*

Quest'ultima condizione, per note proprietà delle V_2 a curvatura metrica costante, saranno dei circoli, cioè curve di equidistanza costante.

Se invece la V_1 è dotata soltanto di un gruppo ∞^1 di movimenti in sè stessa, allora per tale gruppo di movimenti ogni punto descrive una traiettoria; le tangenti su tali traiettorie devono potersi sovrapporre pel movimento dato, sicchè esse traiettorie dovranno essere sia a curvatura geodetica costante che a curvatura di parallelismo costante.

Inoltre, se $[p]$ è una di tali traiettorie, occorre che in due suoi punti P, P_1, \dots coincidono ordinatamente nelle diverse direzioni (a partire dalla tangente) le curvatures geodetiche delle diverse autoparallele spiccate. Se $[q]$ è un'altra di tali traiettorie con un punto Q , e se Q_1 è la posizione che su di esso corrisponde allorchè P passa su $[p]$ in P_1 , allora occorre che:

a) la geodetica e l'autoparallela passanti per P e Q si sovrappongano a quelle passanti per P_1 e Q_1 ;

b) che l'angolo formato dalla geodetica e dall'autoparallela uscenti da P sia eguale a quello uscente da P_1 .

Pertanto si può dire che:

• Affinchè una $V_2(M, II)$ abbia un gruppo ∞^1 di movimenti in sè stessa, occorre e basta:

I. *Che essa sia di rotazione* (o applicabile su questa).

II. *Che lungo i paralleli si abbia curvatura metrica, di parallelismo e di torsione costanti.*

III. *Che essi sieno altresì a curvatura locale di parallelismo costante, e che le loro traiettorie ortogonali siano geodetiche non solo, ma anche autoparallele.*

IV. *Che le autoparallele che incontrano un parallelo fissato sotto un angolo costante, abbiano nei punti d'incontro curvatura geodetica eguale.*

9. - Caratteri di una curva tracciata in una V_2 . Curve assolute.

(9a). Per quanto precede sulle curvatures di una linea, si vede che essa, nella V_2 ha due equazioni intrinseche da soddisfare simultaneamente cioè

$$\begin{aligned} k_\pi &= \varphi(s) \\ k_g &= \psi(s) \end{aligned}$$

ove s è la lunghezza d'arco intercorrente dall'origine sino al punto considerato, ed ove la k_π sia la curvatura di parallelismo e k_g quella metrica o geodetica.

Se pertanto da un altro punto P_1 oppure dallo stesso punto P ma in altra direzione t_1 si costruisse un'altra curva, allora se essa è definita intrinsecamente da una delle due equazioni, non potrà *in generale* soddisfare all'altra.

Il solo caso di eccezione che si presenta eventualmente è quello per cui le curve a curvatura locale costante sieno altresì a curvatura di parallelismo costante.

Ma, in tal caso occorre che le ∞^3 curve a curvatura metrica costante sieno anche le ∞^3 curve a curvatura locale costante; e quindi le autoparallele saranno a curvatura geodetica costante e fissa; le geodetiche, a curvatura locale costante e fissa.

In caso contrario *il trasporto rigido di tutto un arco di curva, in una $V_2(M, II)$ o deforma la curva dal punto di vista geodetico, lasciandola invariata come parallelismo; o la deforma come parallelismo lasciandola invariata dal punto di vista geodetico: e ciò fino agli elementi di secondo ordine della curva stessa.*

D'altro canto, se noi tracciamo nella V_2 le curve passanti per i punti ove essa ha la stessa curvatura metrica, quelle nei quali ha la stessa curvatura di parallelismo, quella nelle quali ha la stessa torsione (una volta come direzione, una volta come modulo) si hanno *in generale* curve distinte. E quindi una generica curva della V_2 stessa incontrerà nel suo percorso diverse di queste curve, sì che in funzione dell'arco s restano altresì determinati (in generale) la curvatura ordinaria etc. della V_2 in un punto P della curva. E pertanto in generale il trasporto rigido della curva non sarà possibile in modo completo (con gli elementi di tutti gli ordini cioè) se non nelle varietà di cui al numero precedente.

E se pure due curve avessero ambedue le equazioni intrinseche (di cui in principio) coincidenti, resterebbero diversi gli elementi sopradetti, sicchè a partire dal terzo ordine le curve stesse avranno comportamento diverso.

(9b). Infine osserviamo che su ogni $V_2(M, II)$ esiste un doppio sistema di curve — le geodetiche di lunghezza nulla — che sono simultaneamente geodetiche e autoparallele, per qualunque parallelismo fissato sulla V_2 . A seconda che la metrica sia definita o indefinita tali curve saranno immaginarie o reali (in tutta o in parte della V_2).

Se in effetti consideriamo la metrica della V_2 e la metrica angolare in ogni suo punto, le direzioni tangenti a quelle geodetiche di lunghezza nulla sono le due direzioni che restano invariate per qualsiasi rotazione del fascio per P in sè stesso; cioè le direzioni unite rispetto alle rotazioni.

Da un lato, lungo tali direzioni il ds è nullo; d'altro canto, per la loro proprietà d'invarianza rispetto alle rotazioni, esse si corrisponderanno sempre, qualunque sia la legge di riferimento del fascio per P a quello per P_1 . Costruiamo le curve aventi quelle direzioni come tangenti. Quindi tali curve da un lato appartengono al sistema delle geodetiche, ed hanno sempre lunghezza nulla fra due punti qualsivogliano; d'altro canto esse appartengono sempre al sistema delle autoparallele tracciate sulla V_2 . Esse saranno le *curve assolute* delle V_2 .

Osserviamo sin da ora che se si fissa arbitrariamente in ogni punto, una coppia di direzioni assolute (e se quindi si assegna arbitrariamente tale doppio sistema di curve) si avrà il passaggio dalle proprietà metriche a quelle affini.