ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EDGARDO CIANI

Una nuova forma canonica della ternaria cubica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 3 (1932), p. 215-228

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_215_0>

UNA NUOVA FORMA CANONICA DELLA TERNARIA CUBICA

di EDGARDO CIANI (Firenze).

... « non v'è campo si bene mietuto che nulla offra all'opera delle spigolatrici, non v'è argomento così trito che non permetta, a chi lo ricontempli con sguardo fresco ed acuto, di arricchirlo di qualche ulteriore osservazione »... G. SCORZA: *La matematica come arte*. Congresso delle Scienze. Trento, Settembre 1930.

1. - Chiamerò brevemente « *triangolo tangenziale* » di una cubica piana, ogni triangolo che si possa ordinare in guisa che ciascun vertice sia il tangenziale di quello che lo precede. Ammessa la esistenza di un tal triangolo e assumendolo come fondamentale, è ovvio che, disponendo opportunamente del punto unità, l'equazione della curva possa scriversi nella forma seguente

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1+2tx_1x_2x_3=0 \tag{1}$$

dove le x_i sono coordinate omogenee di punto e t è una costante. « *È questa la forma canonica alla quale allude il titolo di questo modesto scritto.* Per stabilirla, tutto si riduce a dimostrare che qualsiasi cubica generica possiede almeno un triangolo tangenziale. Intanto, la invarianza della (1) rispetto alla collineazione $(x_1x_2x_3)$ che permuta circolarmente $x_1x_2x_3$, dice che se un triangolo tangenziale esiste, i suoi vertici debbono essere permutati circolarmente da una delle collineazioni a periodo 3 spettanti alla cubica.

2. - Ciò premesso, si osservi che la Hessiana della (1) è la seguente

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-t^2(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1)-2(t^3+3)x_1x_2x_3=0. \tag{2}$$

Dalla coesistenza della (1) e della (2) si rivela così che i flessi della (1) esistono anche sulla

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=0 \tag{3}$$

la quale si spezza nelle 3 rette

$$\left\{\begin{array}{l} ax_1+a^2x_2+x_3=0, \\ a^2x_1+ax_2+x_3=0, \quad \text{con} \quad a^3=1 \\ x_1+x_2+x_3=0, \end{array}\right. \tag{4}$$

che sono i lati (uniti) del triangolo i cui vertici sono i punti uniti della collineazione a periodo 3

$$(x_1x_2x_3)$$

già segnalata alla fine del numero precedente. Questo triangolo è dunque un triangolo inflessionale della cubica fondamentale (1). Si è dunque indotti a ritenere, che mediante una trasformazione del tipo seguente

$$(5)\qquad \begin{cases} y_1 = a(\alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + x_3) \\ y_2 = b(\alpha^2 x_1 + \alpha x_2 + x_3) \\ y_3 = c(x_1 + x_2 + x_3) \end{cases}$$

si possa passare dalla forma (1) alla forma canonica consueta

$$(6)\qquad y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\lambda y_1 y_2 y_3 = 0.$$

Per comodità di calcolo è più semplice tentare il passaggio inverso dalla (6) alla (1) mediante le (5). Si trova allora, con tutta facilità, che lo scopo è raggiunto se le a, b, c vengono sottoposte alle seguenti condizioni

$$(7)\qquad \begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 + 6\lambda abc = 0 \\ a^3\alpha^2 + b^3\alpha + c^3 = 0 \end{cases}$$

adempiute le quali, la (6) si trasforma nella (1) con

$$t = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3\lambda abc}{a^3\alpha + b^3\alpha^2 + c^3}.$$

3. - In questo modo, la possibilità della trasformazione in parola dipende da qnella di 3 valori per a, b, c (nessuno dei quali sia nullo) capaci di soddisfare le (7). Ora, se si riguardano le a, b, c suddette quali coordinate omogenee di punto, in un piano, si vede che le (7) rappresentano due cubiche (una generica e una equianarmonica) dotate di un medesimo triangolo inflessionale (il fondamentale), ma non dei medesimi flessi. Così, ad esempio, quelli della 1ª situati sopra $c=0$ sono rappresentate da $a^3+b^3=0$ e quelli della 2ª da $a^3\alpha+b^3=0$. Non sono dunque due cubiche sizigetiche, che allora si potrebbe senz'altro affermare la esistenza di 9 punti comuni ad entrambe *tutti distinti*. In ogni modo si potrà asserire che questi punti comuni, effettivamente distinti, sono in numero finito non superiore a nove, il che assicura che *una almeno* delle trasformazioni (5) esiste e quindi esiste almeno un triangolo tangenziale capace di fare assumere alla equazione della cubica fondamentale la forma (1) che può quindi assumersi, manifestamente, quale una nuova equazione canonica (l'invariante assoluto venendo così a dipendere dall'unico parametro t). Quanti sieno poi questi triangoli tangenziali vedremo in seguito (n.º 7 e seguenti).

4. - Ma prima di procedere oltre è indispensabile eliminare un paradosso sul quale potrebbe fermarsi l'attenzione di chi osservasse che dal fascio sizigetico

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\lambda y_1 y_2 y_3 = 0$$

siamo passati, mediante la trasformazione (5), al fascio

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1+2tx_1x_2x_3=0$$

che evidentemente non è più sizigetico avendo raccolto i suoi punti base nei tre nuovi punti fondamentali. La contraddizione si toglie subito considerando che i coefficienti a, b, c che figurano nella trasformazione suddetta dipendono da λ mediante le equazioni (7), alle quali debbono soddisfare, e quindi variano al variare di λ. Non esiste dunque una trasformazione « *unica* » che faccia passare contemporaneamente da tutte le curve dell'un fascio a quelle dell'altro e quindi non accade che i punti-base del 1° si trasformino in quelli del 2°.

5. - Occorre anche ricordare rapidamente quali e quante sieno le collineazioni spettanti a una cubica piana (rispetto alle quali essa è invariante), allo scopo di rappresentarle analiticamente nel modo il più adatto per stabilire, anche nei casi particolari più consueti, il numero dei triangoli tangenziali.

Dunque, nel caso generico, assumendo la consueta forma canonica

$$y_1^3+y_2^3+y_3^3+6\lambda y_1y_2y_3=0 \tag{8}$$

si può osservare che le collineazioni che la lasciano invariata si ottengono sostituendo successivamente a

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3;$$

$$(y_i,\ y_h,\ y_k); \qquad (ay_i,\ a^2y_h,\ y_k); \qquad (a^2y_i,\ ay_h,\ y_k)$$

dove i, h, k è una qualunque permutazione di 1, 2, 3 (identità compresa) e $a^3=1$. Siccome tali permutazioni sono 6, si ottengono in tal guisa le 18 collineazioni del caso generico.

Nel caso equinarmonico è noto che si può fare $\lambda=0$ e vengono così ad aggiungersi le altre 36 seguenti

$$(ay_i,\ y_h,\ y_k); \qquad (y_i,\ ay_h,\ y_k); \qquad (y_i,\ y_h,\ ay_k);$$
$$(a^2y_i,\ y_h,\ y_k); \qquad (y_i,\ a^2y_h,\ y_k); \qquad (y_i,\ y_h,\ a^2y_k)$$

le quali, con le 18 già esistenti, completano le 54 del caso equianarmonico.

Nel caso armonico, si aggiunga alle 18 del caso generico la seguente

$$\left\{ \begin{matrix} ay_1+a^2y_2+y_3, & a^2y_1+ay_2+y_3, & y_1+y_2+y_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\} \tag{9}$$

e si imponga alla (8) precedente di rimanere invariata per effetto di quest'ultima. Si è così condotti alla condizione

$$2\lambda^2+2\lambda-1=0 \ . \tag{10}$$

adempiuta la quale la cubica è armonica giacchè la nota condizione per l'armonia è [1]

$$8\lambda^6+20\lambda^3-1=0$$

che si può scrivere

$$(2\lambda^2+2\lambda-1)(2a\lambda^2+2a^2\lambda-1(2a^2\lambda^2+2a\lambda-1)=0$$

di cui il 1° fattore è il 1° membro della (10).

Per vedere poi quante di queste nuove collineazioni si aggiungono, si osservi che il quadrato della (9) è

$$\left\{\begin{matrix} y_2 y_1 y_3 \\ y_1 y_2 y_3 \end{matrix}\right\}$$

ossia è l'omologia armonica che ha il centro nel flesso (1, −1, 0) e per asse la polare armonica $y_1-y_2=0$. Ne segue che il periodo della (9) è 4 e che il suo cubo (equivalente alla sua inversa) si ottiene scambiando, nella (9), a con a^2.

Dunque, nel caso armonico attuale, si vengono ad aggiungere, per ogni flesso, due tali collineazioni e si trovano così le 18 da aggiungere per ottenere le 36 spettanti, in totale, a questo caso particolare.

Finalmente se la cubica ha un punto doppio, a tangenti distinte, la forma canonica nota è [2]

$$y_1^3+y_2^3+6y_1y_2y_3=0$$

e le collineazioni relative si possono rappresentare tenendo fisso y_3 e sostituendo a y_1, y_2 successivamente

$$(ay_1,\ a^2y_2)\,;\qquad (a^2y_1,\ ay_2)\,;\qquad (y_2,\ y_1)\,;\qquad (ay_2,\ a^2y_1)\,;\qquad (a^2y_2,\ ay_1).$$

Se si aggiunge la identità si ha il gruppo relativo che è del 6° ordine.

Tralasciamo il caso della cubica cuspidale perchè vedremo che essa non possiede triangoli tangenziali (n.° 15).

6. - È anche indispensabile aggiungere le seguenti osservazioni.

Se la cubica fondamentale non ha punti doppi, i triangoli inflessionali sono i seguenti

$$\begin{gathered} y_1y_2y_3=0 \\ y_1^3+y_2^3+y_3^3-3y_1y_2y_3=0 \\ y_1^3+y_2^3+y_3^3-3ay_1y_2y_3=0 \\ y_1^3+y_2^3+y_3^3-3a^2y_1y_2y_3=0. \end{gathered}$$

Allora, dalle formule del numero precedente, risulta subito che, nel caso generico, ciascuno di essi è invariante rispetto al G_{18} formato dalle collineazioni spettanti alla cubica.

---

(1) Veggasi ad es. CIANI: *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee*, Sten, 2ª edizione. Torino, 1928, n.° 131.

(2) id. id. n.° 144.

Nel caso equianarmonico c'è uno solo di tali triangoli che è invariante: è il fondamentale, cioè quello che costituisce, in tal caso, l'Hessiana della cubica.

Nel caso armonico nessuno di tali triangoli è invariante. Ad esempio la collineazione (9) che viene ad aggiungersi, in questo caso (n.° 5), scambia il 1° col 2° dei triangoli precedenti e il 3° col 4°.

Finalmente nel caso della cubica nodale c'è di nuovo un triangolo invariante che è il fondamentale della forma canonica (n.° 5).

In conclusione dunque, soltanto nel caso armonico *non* esistono triangoli invarianti.

7. - Siamo adesso in grado di determinare, in ogni caso, il numero dei triangoli tangenziali della cubica fondamentale. A tale scopo osserveremo, che risolvendo le (5) rispetto a $x_1x_2x_3$, si trova facilmente che, quali formule inverse, si hanno le seguenti

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= bcy_1 + ca\alpha^2y_2 + ab\alpha y_3, \\ x_2 &= bc\alpha^2y_1 + cay_2 + ab\alpha y_3, \\ x_3 &= \alpha(bcy_1 + cay_2 + aby_3) \end{aligned}\right. \tag{11}$$

di guisa che il triangolo $x_1x_2x_3=0$ [tangenziale della cubica secondo la (1)] si rappresenta, nelle y_i, mediante la equazione

$$(bcy_1 + ca\alpha^2y_2 + ab\alpha y_3)(bc\alpha^2y_1 + cay_2 + ab\alpha y_3)(bcy_1 + cay_2 + aby_3) = 0$$

ossia

$$b^3c^3y_1^3 + c^3a^3y_2^3 + a^3b^3y_3^3 - 3a^2b^2c^2y_1y_2y_3 = 0. \tag{Δ_1}$$

Adesso, nel caso della cubica generica, applicando a (Δ_1) le collineazioni del n.° 5 si trovano i seguenti nuovi triangoli inflessionali

$$b^3c^3y_1^3 + c^3a^3y_3^3 + a^3b^3y_2^3 - 3a^2b^2c^2y_1y_2y_3 = 0, \tag{Δ_2}$$
$$b^3c^3y_3^3 + c^3a^3y_2^3 + a^3b^3y_1^3 - 3a^2b^2c^2y_1y_2y_3 = 0, \tag{Δ_3}$$
$$b^3c^3y_2^3 + c^3a^3y_1^3 + a^3b^3y_3^3 - 3a^2b^2c^2y_1y_2y_3 = 0, \tag{Δ_4}$$
$$b^3c^3y_2^3 + c^3a^3y_3^3 + a^3b^3y_1^3 - 3a^2b^2c^2y_1y_2y_3 = 0, \tag{Δ_5}$$
$$b^3c^3y_3^3 + c^3a^3y_1^3 + a^3b^3y_2^3 - 3a^2b^2c^2y_1y_2y_3 = 0. \tag{Δ_6}$$

Due qualunque di questi sei triangoli Δ_i non possono coincidere, altrimenti bisognerebbe che due dei tre cubi

$$a^3, \quad b^3, \quad c^3$$

fossero uguali. Ma, ad esempio, per $a^3=a^3$, la 2ª delle (7) dà anche $a^3=c^3$ e quindi ponendo $a^3=b^3=c^3=m$ e osservando che la 1ª delle (7) può scriversi

$$(a^3+b^3+c^3)^3 = -216\lambda^3a^3b^3c^3$$

ne seguirebbe (essendo $m \neq 0$)

$$8\lambda^3+1=0$$

ma allora la cubica fondamentale si spezzerebbe in 3 rette [3] e il problema dei triangoli tangenziali non avrebbe più senso. Dunque

« *Ogni triangolo inflessionale, come* $y_1 y_2 y_3 = 0$, *individua sei triangoli tangenziali* ».

8. - Osserveremo adesso che i triangoli Δ_1 e Δ_2 sono corrispondenti nelle 3 omologie armoniche seguenti

$$\left\{\begin{matrix} y_1, & y_3, & y_2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{matrix}\right\}; \qquad \left\{\begin{matrix} y_1, & ay_3, & a^2y_2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{matrix}\right\}; \qquad \left\{\begin{matrix} y_1, & a^2y_3, & ay_2 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{matrix}\right\}$$

che spettano alla cubica fondamentale, che hanno i centri nei tre flessi

$$(0, 1, -1); \qquad (0, a, -1); \qquad (0, a^2, -1)$$

situati sopra la retta inflessionale $y_1 = 0$ e che hanno per assi le tre polari armoniche relative

$$y_2 - y_3 = 0, \qquad a^2 y_2 - y_3 = 0, \qquad a y_2 - y_3 = 0$$

convergenti in $(1, 0, 0)$. Dunque questi due triangoli sono iscritti in una medesima conica, formano un esagono di Steiner e sulla conica si distribuiscono in tre involuzioni costituendo, ivi, una configurazione proiettivamente identica a quella dei 6 punti doppi in un piano doppio di una superficie di Kummer tre volte tetraedroidale [4]. Due tali triangoli tangenziali li chiameremo « *coniugati* ».

9. - Un facile calcolo conduce a trovare le seguenti espressioni per i vertici dei triangoli tangenziali Δ_i del n.° 7

(Δ_1)	(a, b, c);	(aa, a^2b, c);	(a^2a, ab, c);
(Δ_2)	(a, c, b);	(aa, c, a^2b);	(a^2a, c, ab);
(Δ_3)	(c, b, a);	(c, a^2b, aa);	(c, ab, a^2a);
(Δ_4)	(b, a, c);	(a^2b, aa, c);	(ab, a^2a, c);
(Δ_5)	(b, c, a);	(a^2b, c, aa);	(ab, c, a^2a);
(Δ_6)	(c, a, b);	(c, aa, a^2b);	(c, a^2a, ab)

ed è ovvio constatare la esistenza delle seguenti 9 coppie di triangoli tangenziali coniugati:

Δ_1 e Δ_2 iscritti entrambi nella conica $a^2 y_2 y_3 - bc y_1^2 = 0$;
Δ_1 e Δ_3 » » » » $b^2 y_3 y_1 - ca y_2^2 = 0$;

---

(3) CIANI: loc. cit., n.° 126.

(4) Veggasi ad es. CIANI: *Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer.* Giorn. di Matematica, vol. XXXVI.

Δ_1 e Δ_4 iscritti entrambi nella conica $c^2y_1y_2-aby_3^2=0$;
Δ_2 e Δ_5 » » » » $c^2y_1y_3-aby_2^2=0$;
Δ_2 e Δ_6 » » » » $b^2y_1y_2-acy_3^2=0$;
Δ_3 e Δ_5 » » » » $a^2y_1y_2-bcy_3^2=0$;
Δ_3 e Δ_6 » » » » $c^2y_2y_3-aby_1^2=0$;
Δ_4 e Δ_5 » » » » $b^2y_2y_3-acy_1^2=0$;
Δ_4 e Δ_6 » » » » $a^2y_1y_3-bcy_2^2=0$.

Si conclude dunque:

« *I sei triangoli tangenziali, individuati da un medesimo triangolo inflessionale, si distribuiscono in nove coppie di triangoli coniugati, in guisa che quelli di ogni coppia sono iscritti in una medesima conica sulla quale i sei vertici si corrispondono secondo tre involuzioni, componendo così una configurazione proiettivamente identica a quella di sei punti doppi in un piano doppio di una superficie di Kummer tre volte tetraedroidale.*

10. - Circa alle nove coniche del numero precedente, si può osservare che esse appartengono a tre, a tre, ad altrettanti fasci-schiera nel seguente modo

$$\left.\begin{array}{l} a^2y_2y_3-bcy_1^2=0 \\ b^2y_2y_3-cay_1^2=0 \\ c^2y_2y_3-aby_1^2=0 \end{array}\right\} \text{ del fascio-schiera } y_2y_3+hy_1^2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2y_3y_1-bcy_2^2=0 \\ b^2y_3y_1-cay_2^2=0 \\ c^2y_3y_1-aby_2^2=0 \end{array}\right\} \text{ del fascio-schiera } y_3y_1+hy_2^2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2y_1y_2-bcy_3^2=0 \\ b^2y_1y_2-cay_3^2=0 \\ c^2y_1y_2-aby_3^2=0 \end{array}\right\} \text{ del fascio-schiera } y_1y_2+hy_3^2=0.$$

È poi manifesto che ciascuna di queste coniche, di ognuno di questi fasci-schiera, taglia la cubica fondamentale secondo un esagono di Steiner (n.º 8), ma soltanto per tre di esse (in ciascun fascio-schiera) accade che l'esagono suddetto sia costituito da una coppia di triangoli tangenziali coniugati nel senso stabilito nel n.º 8.

Si può anche aggiungere che le coniche in parola possono distribuirsi nei seguenti sistemi, invarianti ciascuno, rispetto al G_{18} di collineazioni spettanti alla cubica generica

$$\left\{\begin{array}{l} a^2y_2y_3-bcy_1^2=0 \\ a^2y_3y_1-bcy_2^2=0 \\ a^2y_1y_2-bcy_3^2=0 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l} b^2y_2y_3-cay_1^2=0 \\ b^2y_3y_1-cay_2^2=0 \\ b^2y_1y_2-cay_3^2=0 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l} c^2y_2y_3-aby_1^2=0 \\ c^2y_3y_1-aby_2^2=0 \\ c^2y_1y_2-aby_3^2=0 \end{array}\right. .$$

11. - Siamo così pervenuti alle nove coniche precedenti partendo dal triangolo inflessionale $y_1y_2y_3=0$. Ebbene, partendo da un altro dei tre rimanenti triangoli inflessionali della cubica generica e ripetendo lo stesso procedimento, si troveranno altre nove coniche. Osserveremo adesso che nessuna delle prime può coincidere con alcuna delle seconde. Infatti, nella ipotesi contraria, dovrebbe una delle prime passare per due vertici del secondo triangolo inflessionale suddetto e non per il terzo vertice. Questo è impossibile: giacchè i vertici dei tre rimanenti triangoli inflessionali hanno per coordinate

$$\begin{array}{lll} (1, 1, 1); & (a, a^2, 1); & (a^2, a, 1) \\ (a, 1, 1); & (1, a, 1); & (1, 1, a) \\ (a^2, 1, 1); & (1, a^2, 1); & (1, 1, a^2) \end{array}$$

e se si impone il passaggio di una delle prime 9 coniche suddette, ad esempio della

$$a^2 y_2 y_3 - bc y_1^2 = 0$$

per uno solo dei vertici suddetti, si vede subito che ne consegue il passaggio per i due rimanenti.

Dunque si conclude che le coniche circoscritte a coppie di triangoli tangenziali coniugati, sono nove per ogni triangolo inflessionale e quindi, in totale, 36 « *tutte distinte* ». Ne segue che due qualunque di queste coniche, provenienti da due diversi triangoli inflessionali, non possono essere circoscritte ad un medesimo triangolo tangenziale, giacchè se questo fosse, per esempio, Δ_1 del n.° 9, applicando a Δ_1 una qualunque delle omologie armoniche rispetto a cui la cubica fondamentale è invariante, il triangolo Δ_1 si trasformerebbe in Δ_2, o Δ_3, o Δ_4 (n.° 9) e quindi le due coniche suddette, dovendo contenere i vertici di Δ_1 e Δ_2, o di Δ_1 e Δ_3, o finalmente di Δ_1 e Δ_4, dovrebbero coincidere il che abbiamo visto dianzi essere impossibile. Quindi niuno dei 6 triangoli tangenziali provenienti dal triangolo inflessionale $y_1 y_2 y_3 = 0$ secondo il n.° 7, può coincidere con alcuno dei 6 triangoli di uguale specie provenienti da uno dei tre rimanenti triangoli inflessionali. Si conclude dunque che

« *La cubica generica possiede* 24 *triangoli tangenziali* ».

E come ciascuno appartiene a 3 coppie di triangoli coniugati (n.° 9), così ne viene che tali coppie sono $\frac{24 \cdot 3}{2} = 36$, cioè tante quante le coniche prima considerate. Si può dunque aggiungere che

« *I* 24 *triangoli suddetti si distribuiscono in* 36 *coppie di triangoli coniugati* (*e quelli di ogni coppia sono iscritti in una medesima conica*) ».

12. - È pure utile di osservare (n.° 6) come non esista alcuna collineazione, spettante alla cubica generica, capace di trasportare un triangolo inflessionale in un altro; da cui segue che altrettanto accade per le coniche circoscritte a coppie di triangoli tangenziali coniugati inerenti ad un medesimo triangolo inflessionale, da trasportarsi in quelle inerenti ad altro triangolo inflessionale. Se dunque si

vogliono trovare le equazioni di tutte tali coniche, non basta applicare ad esse le collineazioni spettanti alla cubica generica, ma occorre aggiungere quelle già considerate nel n.° 6 e destinate a permutare fra loro i triangoli inflessionali.

13. - Quest' ultima considerazione dimostra che « *nel caso della cubica armonica non si trovano altri triangoli tangenziali, nè altre coniche circoscritte a coppie di tali triangoli* » giacchè le collineazioni che vengono ad aggiungersi a quelle del caso generico, non fànno altro che scambiare fra loro i triangoli inflessionali e quindi altrettanto faranno sopra i relativi triangoli tangenziali (da quelli dell' un triangolo inflessionale e quelli dell' altro) e anche sopra le relative coniche circoscritte a coppie di tali triangoli.

14. - Nel caso equianarmonico, riprendendo la (6) del n.° 2, è noto che si può fare $\lambda=0$, il che equivale ad assumere come triangolo di riferimento quello che costituisce l' Hessiana della cubica fondamentale. Allora le (7) divengono

$$a^3+b^3+c^3=0$$
$$a^3\alpha^2+b^3\alpha+c^3=0$$

da cui

$$b^3=\alpha^2 a^3\,; \qquad c^3=a^3\alpha$$

e quindi

$$b^2=\alpha^{\frac{1}{3}}a^2\,; \qquad c^2=\alpha^{\frac{2}{3}}a^2$$

e perciò

$$a^2b^2c^2=a^6$$
$$a^3b^3=\alpha^2a^6, \qquad b^3c^3=a^6, \qquad c^3a^3=\alpha a^6$$

dopo di che i 6 triangoli tangenziali del n.° 7 divengono adesso i seguenti

$$y_1^3+\alpha y_2^3+\alpha^2y_3^3-3y_1y_2y_3=0,$$
$$y_1^3+\alpha y_3^3+\alpha^2y_2^3-3y_1y_2y_3=0,$$
$$y_3^3+\alpha y_2^3+\alpha^2y_1^3-3y_1y_2y_3=0,$$
$$y_2^3+\alpha y_1^3+\alpha^2y_3^3-3y_1y_2y_3=0,$$
$$y_2^3+\alpha y_3^3+\alpha^2y_1^3-3y_1y_2y_3=0,$$
$$y_3^3+\alpha y_1^3+\alpha^2y_2^3-3y_1y_2y_3=0.$$

Tenendo conto adesso delle collineazioni che vengono ad aggiungersi (n.° 5), si vede che ad ognuno dei triangoli precedenti vengono ad aggiungersi i due seguenti

$$A-3\alpha y_1y_2y_3=0, \qquad A-3\alpha^2y_1y_2y_3=0$$

dove A rappresenta la somma dei primi 3 termini. Così pure a ciascuna delle 9 coniche del n.° 9 se ne aggiungono adesso altre due. Ad esempio, alla conica

$$a^2y_2y_3-bcy_1^2=0$$

si aggiungono ora

$$a^2y_2y_3-bc\alpha y_1^2=0, \qquad a^2y_2y_3-bc\alpha^2y_1^2=0$$

e, per tal guisa, si vede che il triangolo inflessionale $y_1y_2y_3=0$ individua 18 triangoli tangenziali e 27 coniche circoscritte ad altrettante coppie di tali triangoli coniugati. Quanto ai rimanenti 3 triangoli inflessionali, è da osservare che le collineazioni le quali vengono ad aggiungersi (nel caso attuale) non fànno altro che permutarli fra loro (n.° 6) e quindi, relativamente a questi, non vengono ad aggiungersi nè nuovi triangoli inflessionali, nè altre coniche circoscritte a coppie di tali triangoli coniugati. Nè questa condizione privilegiata del triangolo inflessionale $y_1y_2y_3=0$ di fronte ai 3 rimanenti deve meravigliare: dipende dal fatto che il triangolo suddetto compone l'Hessiana della cubica fondamentale (come dianzi abbiamo osservato). In conclusione dunque

« *Nel caso equianarmonico esistono* 36 *triangoli tangenziali distribuiti in* 54 *coppie di triangoli coniugati.*

15. - Rimangono a considerarsi le cubiche dotate di un punto doppio. Riprendiamo perciò la (1)

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1+2tx_1x_2x_3=0. \tag{12}$$

Al variare del parametro t si ha un fascio di cubiche i cui punti-base sono tutti assorbiti dai vertici del triangolo fondamentale che è tangenziale per ogni cubica del fascio. Ne segue dunque che nel fascio non esiste alcuna cubica costituita da una retta e da una conica propria chè, evidentemente, una tal curva così composta non può ammettere triangoli tangenziali. L'unica curva riduttibile del fascio è il triangolo fondamentale ($t=\infty$) giacchè, dal calcolo della Hessiana, risulta (n.° 2) che essa è l'unica curva del fascio capace di coincidere con la propria Hessiana. Ciò premesso, siccome ogni cubica del fascio è invariante rispetto alla collineazione a periodo 3 che produce il ciclo $(x_1x_2x_3)$, così ne segue che se esiste nel fascio una cubica irriduttibile dotata di un punto doppio, questo (dovendo essere unico per tal curva) dovrà coincidere con uno dei tre punti uniti della collineazione suddetta, cioè con uno dei tre punti seguenti

$$(1,\,1,\,1)\,; \qquad (\alpha,\,\alpha^2,\,1)\,; \qquad (\alpha^2,\,\alpha,\,1). \tag{13}$$

Allora, annullando le 3 derivate prime del 1° membro della (12) precedente si trova

$$\begin{aligned} 2x_1x_2+x_3^2+2tx_2x_3&=0\\ 2x_2x_3+x_1^2+2tx_3x_1&=0\\ 2x_3x_1+x_2^2+2tx_1x_2&=0 \end{aligned}$$

e sostituendo in questi i valori dati dalle (13) si trova

$$t=-\frac{3}{2}, \qquad t=-\frac{3}{2}\,\alpha, \qquad t=-\frac{3}{2}\,\alpha^2$$

che individuano così le seguenti tre cubiche del fascio

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1-3x_1x_2x_3=0$$

che ha un punto doppio in $(1, 1, 1)$;

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1-3ax_1x_2x_3=0$$

che ha un punto doppio in $(a, a^2, 1)$;

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1-3a^2x_1x_2x_3=0$$

con un punto doppio in $(a^2, a, 1)$.

Le coniche polari di ciascuno di questi punti doppi sono, rispettivamente

$$\begin{aligned}
&(ax_1+a^2x_2+x_3)(a^2x_1+ax_2+x_3)=0\\
&(x_1+x_2+x_3)(ax_1+a^2x_2+x_3)=0\\
&(x_1+x_2+x_3)(a^2x_1+ax_2+x_3)=0
\end{aligned}$$

cioè sono le congiungenti del punto doppio con i 2 rimanenti punti uniti della collineazione in discorso. Dunque ciascuna di tali coppie di rette, costituenti le tangenti nodali, è formata da due rette distinte. Quindi niuno di tali punti doppi è cuspide, ossia

« *La cubica cuspidale non possiede triangoli tangenziali* ».

16. - Per vedere poi quanti sieno questi triangoli (nel caso della cubica nodale) ripeteremo il procedimento del n.° 2 che consiste nel partire dalla nota e consueta forma canonica

$$y_1^3+y_2^3+6y_1y_2y_3=0$$

e nel cercare di portarla alla forma

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1-3x_1x_2x_3=0$$

mediante una trasformazione del tipo (5). Si è così condotti alle seguenti condizioni

$$(14)\qquad \begin{cases} a^3+b^3+6abc=0\\ a^3a+b^3=0\\ 2(a^3+b^3-3abc)+3a(a^3+b^3a)=0\end{cases}$$

che però si riducono a due sole indipendenti, giacchè dalla prima si ricava

$$3abc=-\frac{a^3+b^3}{2},$$

il qual valore sostituito nella terza, la rende identica alla seconda.

Anche adesso, come nel caso generico, il triangolo tangenziale

$$x_1x_2x_3=0$$

viene trasformato, mediante le (11), nel triangolo Δ_1 del n.° 7 cioè

$$(15)\qquad b^3c^3y_1^3+c^3a^3y_2^3+a^3b^3y_3^3-3a^2b^2c^2y_1y_2y_3=0$$

dove però le a, b, c debbono soddisfare le (14) precedenti e le collineazioni spettanti alla cubica nodale sono quelle descritte alla fine del n°. 5. Si osservi adesso che $a^3 \neq b^3$ in forza della seconda delle (14). Dunque il triangolo

$$b^3c^3y_2^3 + c^3a^3y_1^3 + a^3b^3y_3^3 - 3a^2b^2c^2y_1y_2y_3 = 0 \tag{16}$$

è diverso da (15) e allora è manifesto che le collineazioni spettanti alla cubica nodale, dianzi indicate, o lasciano invariati ciascuno dei triangoli (15) e (16) o li permutano l'uno nell'altro. Si hanno dunque così due triangoli tangenziali e precisamente, con le notazioni del n.° 7, essi sono Δ_1 e Δ_4 circoscritti alla conica

$$c^2y_1y_2 - aby_3^2 = 0$$

e siccome adesso la cubica non possiede altri triangoli come $y_1y_2y_3 = 0$, così si conclude che

« *La cubica nodale possiede due soli triangoli tangenziali* (che sono coniugati nel senso stabilito nel n.° 8) ».

17. - Così la ricerca inerente alla posizione e al numero dei triangoli tangenziali è esaurita in tutti i casi possibili. Ma però non posso chiudere questa breve esposizione, senza prevenire una osservazione che si presenterà spontanea al lettore e che si compendia nella seguente domanda: perchè non servirsi, nella ricerca attuale, della rappresentazione parametrica della cubica? Ecco la risposta. Dalle considerazioni svolte, apparisce quale intimo legame vincoli i triangoli tangenziali ai triangoli inflessionali. Ebbene, nel caso della cubica ellittica, la rappresentazione parametrica, mediante funzioni ellittiche, si ottiene riferendosi ad un triangolo che ha troppo scarsa attinenza a qualsiasi triangolo inflessionale ([5]) ed è quindi naturale il prevedere che la ricerca, tentata per questa via, si presenti meno semplice di quella dianzi esposta. È diverso il caso delle cubiche razionali: in queste sì, la rappresentazione parametrica risolve rapidamente il problema confermando subito i resultati dei n.i 15 e 16.

Infatti la forma canonica consueta della cubica nodale

$$y_1^3 + y_2^3 + y_1y_2y_3 = 0$$

consente di assumere la seguente rappresentazione parametrica

$$y_1 = \lambda^2, \qquad y_2 = \lambda, \qquad y_3 = -(\lambda^3 + 1)$$

di guisa che la tangente nel punto $P_1 \equiv (\lambda_1)$ è

$$y_1(2\lambda_1^3 - 1) + y_2(2\lambda_1 - \lambda_1^4) + y_3\lambda_1^2 = 0.$$

([5]) Veggasi ad esempio BIANCHI: *Funzioni di variabile complessa*, 1ª edizione, p. 371. (Pisa, Spoerri, 1901).

Cercando le intersezioni di questa retta con la cubica si trova

$$(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda\lambda_1^2+1)=0.$$

Dunque il tangenziale P_2 di P_1 è individuato del valore del parametro λ pel quale si ha

$$\lambda\lambda_1^2+1=0$$

cioè da

$$-\frac{1}{\lambda_1^2}.$$

Ciò premesso, ecco i successivi tangenziali a cominciare da P_1

$$P_1\equiv(\lambda_1),\qquad P_2\equiv\left(-\frac{1}{\lambda_1^2}\right),\qquad P_3\equiv(-\lambda_1^4),\qquad P_4\equiv\left(-\frac{1}{\lambda_1^8}\right).$$

Per ottenere un triangolo tangenziale bisogna che P_4 coincida con P_1 ossia bisogna che sia

$$\lambda_1=-\frac{1}{\lambda^8}$$

cioè

$$\lambda_1^9+1=0$$

che equivale a

$$(\lambda_1^3+1)(\lambda_1^6-\lambda_1^3+1)=0,$$

ma per

$$\lambda_1^3+1=0$$

si trovano i 3 flessi della cubica i quali costituiscono tre soluzioni da escludere. Rimane dunque

$$\lambda_1^6-\lambda_1^3+1=0$$

la quale serve a individuare i due triangoli tangenziali del n.° 16.

Per la cubica cuspidale la forma canonica è

$$y_3y_1^2-y_2^3=0$$

con la rappresentazione parametrica

$$y_1=1,\qquad y_2=\lambda,\qquad y_3=\lambda^3.$$

Ebbene, la tangente in $P_1\equiv(\lambda_1)$ è

$$y_1\cdot 2\lambda_1^3-y_2\cdot 3\lambda_1^2+y_3=0$$

e quindi le sue intersezioni con la cubica sono date da

$$(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda+2\lambda_1)=0$$

e per conseguenza il tangenziale P_2 di P_1 è individuato da

$$\lambda+2\lambda_1=0$$

e quindi

$$P_2\equiv-2\lambda_1.$$

Ecco quindi i successivi tangenziali a partire da P_1

$$P \equiv (\lambda_1), \qquad P_2 \equiv (-2\lambda_1), \qquad P_3 \equiv 4\lambda_1, \qquad P_4 \equiv -8\lambda_1.$$

Come dianzi, occorre che si abbia $\lambda_1 = -8\lambda_1$, ossia $\lambda_1 = 0$ che fornisce la sola soluzione possibile che è il flesso della cubica (la quale però è da scartare). Dunque la cubica cuspidale non possiede triangoli tangenziali (n.° 15).

18. - Riunendo varie osservazioni fatte precedentemente quà e là in varii punti della presente nota intorno al fascio

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + 2tx_1x_2x_3 = 0$$

(dove t è il parametro del fascio), si può dire che i 9 punti-base sono tutti assorbiti dai tre punti fondamentali di guisa che ognuno di essi conta per tre e quindi due cubiche qualunque del fascio si osculano nei punti suddetti. Se vale la pena di proporre un nome, si può dunque chiamarlo un fascio di cubiche osculanti: brevemente « *fascio osculante* » (da contrapporre al « *fascio sizigetico* »). Esso possiede un solo triangolo che è il fondamentale (n.° 15) il quale costituisce la sola cubica riduttibile del fascio. Vi sono tre cubiche irriduttibili con un nodo, per ciascuna, nei tre punti uniti della collineazione a periodo tre rispetto alla quale è invariante ogni curva del fascio (n.° 15). Non vi sono cubiche cuspidali. Il triangolo fondamentale costituisce anche il luogo geometrico di tutti i flessi delle cubiche del fascio ecc. ecc.