

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

TOMMASO SALVEMINI

**Sulla rappresentazione conforme delle aree piane
pluriconnesse su una superficie di Riemann di genere zero
in cui siano eseguiti dei tagli paralleli**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 16,
n° 4 (1930), p. 1-34

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1930_1_16_4_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TOMMASO SALVEMINI

**Sulla rappresentazione conforme delle aree piane
pluriconnesse su una superficie di Riemann
di genere zero in cui siano eseguiti
dei tagli paralleli**

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE PACINI-MARIOTTI

—
1930 - VIII

UNIVERSITAIRE

P R E F A Z I O N E .

Il Ch.^{mo} prof. CECIONI in una sua Memoria⁽¹⁾ fa vedere che ogni area piana pluriconnessa si può rappresentare conformemente su un piano in cui siano eseguiti dei tagli paralleli. Questo risultato era stato enunciato dallo SCHOTTKY⁽²⁾ in base ad un computo di parametri, computo che non è poi esauriente⁽³⁾.

Seguendo le traccie del prof. CECIONI, *generalizzerò* questo risultato, mostrando che ogni area piana pluriconnessa si può rappresentare conformemente e biunivocamente su una superficie di RIEMANN di genere zero a fogli piani sovrapposti, resa pluriconnessa (dello stesso ordine di connessione

⁽¹⁾ CECIONI, *Sulla rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse su un piano in cui siano eseguiti dei tagli paralleli* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXV, 1908, pp. 1-19].

⁽²⁾ SCHOTTKY, *Ueber die conforme Abbildung mehrfach Zusammenhängender ebener Flächen* [Journal von Crelle, T. LXXXIII, 1877, pp. 300-351].

⁽³⁾ F. CECIONI, *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di RIEMANN* [Annali delle Università Toscane, vol. XII della nuova serie, fasc. II, 1928, p. 29].

dell'area) mediante tagli rettilinei e paralleli, tutti situati a distanza finita.

Il modello caratteristico di riemanniana, così ottenuto, mi permette poi di determinare, come nel caso di un piano tagliato, il numero dei moduli dai quali dipende un'area piana pluriconnessa considerata a meno di una rappresentazione conforme.

In ultimo mi servo di alcuni risultati dello SCHOTTKY e del CECIONI per dare una interpretazione geometrica alla funzione analitica che mi ha permesso la rappresentazione conforme, e ottenere un *nuovo criterio* di trasformazione birazionale, a coefficienti reali, di due curve algebriche reali aventi il massimo numero $(g + 1)$ di circuiti reali.

Costruzione della funzione $w(z)$ che effettua la rappresentazione.

1. — Sia A l'area piana pluriconnessa, appartenente al piano della variabile complessa $z = x + iy$, e che può supporre, senza alterare la generalità, tutta a distanza finita, limitata da $\rho + 1$ contorni parziali L_0 (esterno), L_1, \dots, L_ρ , ciascuno dei quali lo si supporrà un'unica linea regolare analitica giacchè a questo caso ci si può ridurre [vedasi ad es. l'osservazione (15) del lavoro del prof. CECIONI citato nella nota (3)].

Ammettiamo che l'area A sia effettivamente rappresentabile conformemente su una riemanniana, come è detto nella prefazione, per es. ad n fogli piani, potendo anche ritenere che il taglio corrispondente ad L_0 sia eseguito lungo l'asse reale di uno dei fogli.

Se chiamiamo $w(z)$ la funzione che effettua la rappresentazione, questa deve essere

- a) monodroma in A ;
- b) deve avere dei poli, del 1.° ordine, soltanto in n punti (arbitrari) a_1, a_2, \dots, a_n interni ad A con i rispettivi termini d'infinito

$$\frac{m_1 + i n_1}{z - a_1}, \frac{m_2 + i n_2}{z - a_2}, \dots, \frac{m_n + i n_n}{z - a_n};$$

c) su ciascuna delle linee limiti L_0, L_1, \dots, L_ρ deve essere regolare e con la sua parte immaginaria costante (in particolare tale parte deve essere nulla sul contorno esterno L_0 di A).

Per la dimostrazione della esistenza e unicità della $w(z)$ che gode delle precedenti proprietà valgono dei ragionamenti analoghi a quelli svolti nella cit. Memoria⁽⁴⁾ dal prof. CECIONI (pp. 5-7).

Poniamo

$$\sum_1^n \frac{m_s + i n_s}{z - a_s} = p_1(x, y) + i p_2(x, y)$$

e sottraggiamo dal primo membro quella funzione analitica, finita nell'area e sul contorno il cui coefficiente dell'immaginario è quella funzione armonica (finita) che assume sul contorno dell'area i valori stessi di $p_2(x, y)$. Si ha così una funzione $H(z)$ ⁽⁴⁾ reale e finita sulle linee limiti, che diviene infinita (del 1.° ordine) nell'interno soltanto nei punti a_s ($s = 1, 2, \dots, n$) con residuo $m_s + i n_s$, e che ha periodi reali $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\rho$.

Evidentemente queste condizioni determinano la $H(z)$ a meno di una costante reale additiva.

Osserviamo che la differenza

$$H(z) - w(z)$$

è una funzione analitica che soddisfa alle seguenti tre condizioni:

⁽⁴⁾ SCHOTTKY, l. c. in (*).

- 1.° ha nell'area periodi reali;
- 2.° in ogni punto interno all'area è regolare;
- 3.° ha su ciascuna delle linee limiti L la parte immaginaria costante.

Le funzioni che soddisfano alle precedenti condizioni sono le note funzioni indicate dal CЕСІОНІ con $\Phi(z)$ ⁽⁵⁾ e la cui esistenza è ad es. provata a p. 6 della cit. Memoria ⁽⁴⁾.

In particolare indichiamo con $\Phi_i(z)$ quella funzione Φ che ha il coefficiente dell'immaginario uguale 1 su L_i , e uguale 0 sugli altri contorni: essa avrà nell'area i periodi reali $\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \dots, \omega_i^{(\rho)}$. Variando l'indice i da 0 a ρ avremo $\rho + 1$ funzioni $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_\rho$ inerenti all'area A , i cui periodi sono numeri perfettamente determinati da questa.

Il determinante formato dai periodi di ρ delle funzioni Φ_i , per es.:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \dots & \omega_\rho^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \dots & \omega_\rho^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{(\rho)} & \omega_2^{(\rho)} & \dots & \omega_\rho^{(\rho)} \end{vmatrix}$$

è certamente diverso da zero, perchè altrimenti esisterebbero dei numeri $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{(\rho)}$ non tutti nulli pei quali

$$\sum_k \sigma_k \omega_k^{(i)} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \rho)$$

⁽⁵⁾ Dallo SCHOTTKY, l. c. in ⁽³⁾, sono indicate con $J(z)$.

cioè esisterebbe una funzione $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \sum_1^\rho \sigma_k \Phi_k(z)$$

monodroma in A e priva di poli; ma una tale funzione o non esiste o si riduce a una costante; però costante non può essere, perchè è reale su L_0 e se ad es. è $\sigma_h \neq 0$ non è reale su L_h ; questo assurdo prova, come si voleva, l'indipendenza delle ρ funzioni $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\rho$.

Se allora indichiamo con $i\lambda_1, i\lambda_2, \dots, i\lambda_\rho$ le parti immaginarie costanti di $w(z)$ sulle L_1, L_2, \dots, L_ρ , la funzione

$$H(z) + \sum_1^\rho \lambda_k \Phi_k(z)$$

soddisfa alle condizioni *b)* e *c)* di w . Determinando invece le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\rho$ dal sistema:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \omega_1^{(1)} + \lambda_2 \omega_2^{(1)} + \dots + \lambda_\rho \omega_\rho^{(1)} = -\Omega_1 \\ \lambda_1 \omega_1^{(2)} + \lambda_2 \omega_2^{(2)} + \dots + \lambda_\rho \omega_\rho^{(2)} = -\Omega_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \lambda_1 \omega_1^{(\rho)} + \lambda_2 \omega_2^{(\rho)} + \dots + \lambda_\rho \omega_\rho^{(\rho)} = -\Omega_\rho \end{array} \right.$$

la funzione

$$(2) \quad w(z) = H(z) + \lambda_1 \Phi_1(z) + \dots + \lambda_\rho \Phi_\rho(z)$$

determinata, come risulta dai precedenti ragionamenti, in modo unico, a meno di una costante reale additiva, dal

termine $\sum_1^n \frac{m_s + i n_s}{z - a_s}$ e dalle condizioni poste, è la funzione

uniforme richiesta che assume su L_0, L_1, \dots, L_p valori che hanno il coefficiente dell'immaginario rispettivamente uguale ai numeri $0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tratti dal sistema (1).

Essa permetterà di rappresentare conformemente l'area A su un campo R di cui ora studieremo la forma.

Il campo R in corrispondenza biunivoca e conforme con A .

2. — Per la funzione $w(z)$ sono evidentemente validi i ragionamenti svolti dal prof. CECIONI nella Memoria cit. a nota (3) pp. 55-57) riguardanti le funzioni $K(z)$ (6); possiamo perciò concludere che se k è un valore reale o complesso affatto arbitrario, e se indichiamo con $N_{k,c}$ il numero delle volte che quel valore è assunto da $w(z)$ sul contorno dell'area, $N_{k,i}$ il numero delle volte che il medesimo valore è assunto nell'interno, con N_∞ il numero dei poli della $w(z)$, (intendendo di computare questi numeri tenendo conto delle molteplicità) si ha la formola

$$(3) \quad \frac{1}{2} N_{k,c} + N_{k,i} = N_\infty = n .$$

(6) Chiamasi funzione K , relativa all'area A , una funzione analitica che goda delle seguenti proprietà:

- 1.° sia monodroma nell'area;
- 2.° nell'interno dell'area A abbia solo un numero finito di singolarità polari, e sia poi regolare in tutti gli altri punti interni all'area;
- 3.° Sul contorno soddisfi a queste stesse condizioni, però sia reale (ove, s'intende, non è infinita).

In particolare ogni valore k non assunto da w sul contorno è preso nell'interno n volte in n punti generalmente distinti.

Per i ragionamenti che seguiranno ci è utile calcolare esplicitamente *quanti sono i punti γ di A* (compreso il contorno, giacchè si è supposto che ogni linea L sia un'unica linea regolare analitica) *per i quali $w - w(\gamma)$ diviene infinitesima di ordine maggiore di uno.*

In questi punti, e solo in questi, è (nell'area) $\frac{dw}{dz} = 0$ e noi perciò studieremo il numero degli zeri di $\frac{dw}{dz}$ (7).

Dalle proprietà della funzione $w(z)$ si vede subito che la sua derivata $\frac{dw}{dz}$ è una funzione monodroma in A ma con n poli del 2.° ordine nell'interno, nei punti a_1, a_2, \dots, a_n .

Indichiamo con α_i i suoi infinitesimi sul contorno dell'area, β_j quelli interni, e siano ν_i, μ_j i rispettivi ordini di infinitesimo.

Ora consideriamo in A una funzione $u(z)$ della specie K , finita al contorno, la quale abbia un polo in ciascuno dei punti β_j e siano γ_r gli altri eventuali poli che essa ha nell'interno dell'area. (Per la dimostrazione dell'esistenza di una tale funzione vedasi ad es. CECIONI, l. c. in (3) p. 47 e ss.). Chiamiamo poi k_i (reale) il valore di $u(z)$ in α_i e consideriamo l'altra funzione

$$U(z) = \prod_i (u - k_i)^{\nu_i + 1}.$$

(7) Il procedimento che segue mi è stato suggerito da un analogo procedimento, riferentesi alle funzioni $\Phi(z)$ trovato in un manoscritto ancora inedito (gentilmente favoritomi) dal mio Maestro prof. CECIONI.

Per note proprietà la U è ancora una funzione K finita al contorno, i poli della quale, nell'area, sono solo nei punti β_j, γ_r , e denotiamo con ω_j e σ_r i rispettivi ordini di infinito.

La derivata $\frac{dU}{dz}$ è una funzione monodroma nell'area, finita al contorno, avente nell'interno solo singolarità polari, le quali precisamente si trovano solo nei punti β_j, γ_r ed hanno i rispettivi ordini $\omega_j + 1, \sigma_r + 1$. Inoltre essa diviene infinitesima sul contorno in ciascuno dei punti α_i di un certo ordine $\tau_i \geq v_i$.

Chiamiamo poi δ_n e ε_k tutti gli altri eventuali infinitesimi di $\frac{dU}{dz}$ situati rispettivamente sul contorno ed internamente all'area, e λ_n, π_k i rispettivi ordini di molteplicità.

Applicando allora a $\frac{dU}{dz}$ la formola ⁽⁸⁾

$$(4) \quad \frac{1}{2} N'_{0,c} + N'_{0,i} = N'_\infty + \varrho - 1$$

dove $N'_{0,c}$ ed $N'_{0,i}$ stanno ad indicare il numero degli infinitesimi (ciascuno computato per tanti infinitesimi quant'è

⁽⁸⁾ La dimostrazione, che qui trascrivo, della formola che lega il numero degli zeri col numero di infiniti della derivata di una funzione K , è nei manoscritti del prof. CECIONI citati nella nota (7). Se del resto si tiene presente la interpretazione delle funzioni K , quale risulta dalla teoria dello SCHOTTKY, si riconoscono subito nelle formole (3), (4) (come il CECIONI osserva) ben note proprietà della teoria delle funzioni algebriche.

Osserviamo anzitutto che la formola

$$(x) \quad \Omega_1 - \Omega_0 = 2\pi(N_0 - N_\infty)$$

(vedasi BIANCHI, *Teoria delle funzioni di variabile complessa*, Zani-

il suo ordine) che $\frac{dU}{dz}$ presenta rispettivamente sul contorno dell'area e nell'interno, N_∞ il numero (computato come sopra) dei poli che essa presenta (nell'interno, naturalmente), troviamo intanto che è

chelli, 1923, p. 178) è applicabile anche nel caso nel quale la funzione $f(z)$ abbia radici sul contorno, purchè la catena dei valori degli argomenti di $f(z)$ su ciascun contorno si pensi avere una discontinuità con un salto di $\nu\pi$ in ogni punto che è radice di ordine ν di $f(z)$ (mentre naturalmente sia continua negli altri punti) e le radici al contorno siano computate col loro ordine di molteplicità nel calcolare N_0 . Ciò si vede con facilità includendo i detti punti nell'area mediante aggiunta di loro piccoli intorni superficiali.

Ciò premesso consideriamo un contorno qualunque L dell'area, e prendiamo come parametro per individuare i suoi punti l'arco s di esso, crescente nel verso positivo del contorno; i valori di K su L costituiscono una funzione reale della variabile reale s . Poichè la derivata di una funzione di variabile complessa in un punto è la stessa in qualunque direzione si calcola, per calcolare $\frac{dK}{dz}$ in un punto di L , potremo supporre di far variare z lungo L stesso; abbiamo allora in un punto di L

$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{ds} : \frac{dz}{ds} = \frac{dK}{ds} : \left(\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} \right);$$

ma chiamando θ l'angolo che nel senso positivo delle rotazioni (cioè, al solito, nel senso che lascia il centro di rotazione a sinistra) conduce dall'asse x positivo alla tangente al contorno nel punto individuato dal valore s , diretta secondo il senso positivo del contorno stesso, abbiamo

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad , \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta ;$$

ne segue

$$\frac{dK}{dz} = \frac{dK}{ds} e^{-i\theta} .$$

Ora la funzione $K(s)$ ha per $s=0$ un valore che la funzione stessa riassume quando s è uguale alla lunghezza di L ; quindi ci

$$(5) \frac{1}{2} \sum \tau_i + \frac{1}{2} \sum \lambda_h + \sum \pi_k = \sum (\omega_j + 1) + \sum (\sigma_r + 1) + \varrho - 1.$$

Consideriamo adesso la funzione

$$\frac{dU}{dz} : \frac{dw}{dz} = \varphi(z).$$

sono tratti nei quali è $\frac{dK}{ds} > 0$ e tratti nei quali è $\frac{dK}{ds} < 0$. Par-

tiamo, per fissare le idee, da un punto di L nel quale è $\frac{dK}{ds} > 0$,

e (volendo applicare la (α) alle funzioni $\frac{dK}{ds}$, secondo le osserva-

zioni premesse) calcoliamo l'incremento $\Omega_1 - \Omega_0$ che subisce l'ar-

gomento di $\frac{dK}{dz}$ quando z compie un giro completo su L nel verso

positivo, tenendo conto delle discontinuità specificate nell'osserva-

zione premessa.

Come valore iniziale dell'argomento può scegliersi l'angolo $-\theta$,

sopra definito con precisione.

Essendo P_1, P_2, \dots, P_h i punti distinti di L , nei quali $\frac{dK}{dz}$ si

annulla, nell'ordine nel quale si trovano, quando a partire da P si per-

corre il contorno (nel senso positivo), spezziamo il giro da farsi nei

singoli tratti $P P_1, P_1 P_2, \dots, P_h P$. Se chiamiamo t, t_1, t_2, \dots, t_h

le tangenti ad L nei rispettivi punti P, P_1, P_2, \dots, P_h , volte se-

condo il senso positivo del contorno, vediamo che, mentre z va da

P a P_1 , $+\theta$ aumenta dell'angolo $\widehat{t t_1}$, contato algebricamente e

quindi $-\theta$ dell'angolo $-\widehat{t t_1}$. Giunto z in P_1 occorre far compiere

all'argomento un salto di discontinuità di $\nu_1 \pi$ (ν_1 è l'ordine d'in-

finitesimo di $\frac{dK}{dz}$ in P_1) e perciò, secondo che ν_1 è pari o dispari,

quando si comincia a descrivere il tratto $P_1 P_2$ il senso della tan-

gente è rimasto il medesimo di quello con cui si era giunto in P_1 ,

oppure si è invertito; in un caso e nell'altro egualmente avviene

Sul contorno generico L di A potremo esprimere la variabile z in funzione dell'arco s (descritto da un punto mobile nel verso positivo del contorno, secondo le solite convenzioni). Avremo in ogni punto di L

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dU}{ds} : \frac{dz}{ds}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{ds} : \frac{dz}{ds},$$

e quindi

$$\varphi(z) = \frac{dU}{ds} : \frac{dw}{ds}.$$

La $\varphi(z)$ è quindi reale in ogni punto del contorno, ed

che l'aumento di θ mentre z va da P_1 a P_2 è $\widehat{t_1 t_2}$, e quindi quello di $-\theta$ è $-\widehat{t_1 t_2}$. Così seguitando vediamo che su L è

$$\Omega_1 - \Omega_0 = -\widehat{t_1 t_2} - \dots - t_n t + \sum v_h \pi.$$

Ora essendo L una linea chiusa senza nodi la somma $\widehat{t_1 t_2} + \dots + \widehat{t_n t}$ è, in valore assoluto, eguale a 2π , ed il segno è positivo se L è il contorno esterno (l'area A è tutta a distanza finita), è negativo se L è un contorno interno. Quindi:

$$\begin{aligned} \Omega_1 - \Omega_0 &= -2\pi + \sum v_h \pi \quad (L \text{ contorno esterno}) \\ \Omega_1 - \Omega_0 &= +2\pi + \sum v_h \pi \quad (L \text{ » interno}) \end{aligned}$$

Ne viene manifestamente

$$\sum (\Omega_1 - \Omega_0) = 2\pi(\rho - 1) + \pi N'_{0,e}$$

e quindi per l'osservazione premessa

$$2\pi(N'_{0,e} + N'_{0,i} - N'_{\infty}) = 2\pi(\rho - 1) + \pi N'_{0,e}$$

onde appunto la (4):

$$\frac{1}{2} N'_{0,e} + N'_{0,i} = N'_{\infty} + \rho - 1.$$

Segue in particolare che il numero totale degli zeri di $\frac{dK}{dz}$ sul contorno è pari.

inoltre monodroma nell'area; da quanto sopra si è detto si vede subito che nei punti del contorno e dell'area si comporta come segue:

Sul contorno:

nei punti α_i è infinitesima d'ordine $\tau_i - \nu_i \geq 0$;

nei punti δ_h è infinitesima d'ordine λ_h ;

in tutti gli altri punti è regolare e diversa da zero

perchè tali sono $\frac{dU}{dz}$ e $\frac{dw}{dz}$.

Nell'interno:

nei punti β_j ha poli d'ordine $\mu_j + \omega_j + 1$;

nei punti γ_r ha poli d'ordine $\sigma_r + 1$;

nei punti ε_k ha infinitesimi d'ordine π_k ;

negli n poli a_s di $w(z)$ ha infinitesimi d'ordine 2⁽⁹⁾;

in tutti gli altri punti è regolare e diversa da zero

perchè tali sono $\frac{dU}{dz}$ e $\frac{dw}{dz}$.

Da tutto ciò segue intanto che $\varphi(z)$ è una funzione K finita al contorno. Ad essa è allora applicabile la formola (3) la quale dà subito

$$\frac{1}{2} \sum (\tau_i - \nu_i) + \frac{1}{2} \sum \lambda_h + \sum \pi_k + 2n = \sum (\mu_j + \omega_j + 1) + \sum (\sigma_r + 1).$$

Da questa e dalla (5) si deduce subito

$$(I) \quad \frac{1}{2} \sum \nu_i + \sum \mu_j = \rho - 1 + 2n.$$

(⁹) Si osservi che se qualche ε_k coincide con qualche a_s , in quei punti la $\varphi(z)$ ha infinitesimi con ordini uguali alla somma degli ordini d'infinitesimo dei punti ε_k , a_s pensati come distinti; perciò le conclusioni seguenti non vengono alterate.

In particolare: *la somma degli ordini di molteplicità degli zeri della $\frac{dw}{dz}$ sul contorno è pari.*

Lo stesso ragionamento nel caso che $w(z)$ abbia poli di ordine multiplo e quindi $\frac{dw}{dz}$ abbia gli stessi poli ma con ordine di molteplicità superiore di una unità, porta che nella formola (I) al posto di $2n$ bisogna porre la somma delle molteplicità dei poli di $\frac{dw}{dz}$.

Dalla (I), noti il numero dei punti in cui $\frac{dw}{dz}$ si annulla sul contorno (con i relativi ordini), si ricava subito il numero che dà la somma degli ordini degli infinitesimi di $\frac{dw}{dz}$ nell'interno di A .⁽¹⁰⁾

Nel nostro caso essendo la parte immaginaria di $w(z)$ costante su ciascuna delle linee del contorno di A , ci sarà su ciascuna L_s almeno un massimo e un minimo per le parti reali dei valori di w , cioè sul contorno totale ci saranno almeno $2(p+1)$ punti in cui $\frac{dw}{dz}$ è nulla (del 1.° ordine) quindi è

$$\sum \mu_j \leq p - 1 + 2n - p - 1 = 2(n - 1).$$

⁽¹⁰⁾ Si tenga conto che dalle relazioni valevoli sui contorni

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{ds} : \frac{dz}{ds}$$

segue, poichè $\frac{dz}{ds}$ è sempre finita e diversa da 0, che $\frac{dw}{dz}$ e $\frac{dw}{ds}$ si annullano solo insieme.

3. — Premesso ciò vediamo la forma della superficie R sulla quale, mediante la $w(z)$, si rappresenta conformemente e biunivocamente la nostra area A .

Abbiamo visto che a ogni valore z_0 , di un punto *interno* ad A corrisponde un valore w_0 di w , ma ad un valore di w corrispondono n valori di z *generalmente distinti*. Dico *generalmente distinti* perchè, se w^* è il valore assunto da $w(z)$ in un punto nel quale è $\frac{dw}{dz}$ nulla, a w^* corrispondono evidentemente meno di n punti distinti di A . Questi particolari valori di w li chiameremo e_1, e_2, \dots, e_k , e con eguale lettera indicheremo i corrispondenti punti sul piano della variabile complessa $w = \xi + i\eta$.

Per i punti del contorno di A dobbiamo osservare che a un punto di questo corrisponde un valore \bar{w} di w , ma al valore \bar{w} assunto da w in un punto in cui è $\frac{dw}{dz} \neq 0$ corrisponde un certo numero N_i di punti z interni ad A e un numero pari $2N_c$ di punti z sul contorno totale di A tali da soddisfare la (3), cioè:

$$(3') \quad N_c + N_i = n.$$

Ricordiamo ora che su ciascun contorno L_i la $w(z)$ ha il coefficiente dell'immaginario λ_i costante, per cui nel piano della variabile w questi valori sono distribuiti su segmenti paralleli all'asse reale (segmenti finiti perchè i poli della w sono tutti interni all'area) le cui ordinate sono eguali a λ_i . Ciascun segmento, che chiamo λ_i^* ($i = 1, 2, \dots, r$), potrà corrispondere a un solo contorno L_i di A o a più contorni, secondo che le q costanti λ_i sono diverse tra loro o no; quindi è $r \leq q + 1$.

Su ciascuna di queste linee λ^* gli estremi sono certo

punti corrispondenti di punti di A in cui $\frac{dw}{dz} = 0$, essendo rispettivamente punti di massimo e minimo per la parte reale dei valori di w sul contorno (o sui contorni) corrispondenti in A : ma anche nell'interno di detti segmenti ci possono essere degli altri punti corrispondenti a zeri della $\frac{dw}{dz}$. Al valore di w in questi punti corrisponde un numero di valori z come ci è espresso dalla formola (3') solo che nel calcolo di $2N_c$ i punti in cui $\frac{dw}{dz}$ si annulla per es. di ordine v bisogna contarli v volte.

Indicheremo tutti i detti punti singolari sulle λ^* (compresi quindi gli estremi) con p_1, p_2, \dots, p_q .

Sia w_0 un valore non preso da w sul contorno di A e diverso dai valori e_1, e_2, \dots, e_k ; ad esso corrispondono n valori $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, \dots, z_0^{(n)}$ distinti. Per note proprietà sull'inversione delle serie si può trovare un cerchio C di centro w_0 e raggio sufficientemente piccolo in modo che ogni $z_0^{(i)}$ sia sviluppabile in serie di potenze di w . Gli n sviluppi che così si ottengono sono distinti e rappresentano n elementi della funzione $z(w)$, inversa della funzione analitica $w(z)$, appartenenti all'intorno di $w = w_0$.

Per i punti delle linee λ^* , distinti dai punti p_1, p_2, \dots, p_q , si può egualmente parlare di elemento analitico $\bar{z}(w)$ perchè, avendo supposto i contorni L_0, L_1, \dots, L_ρ linee regolari analitiche si può pensare di aver prolungato analiticamente $w(z)$ oltre i punti del contorno.

Consideriamo ora uno dei punti e_i ($i = 1, 2, \dots, k$) o p_r ($r = 1, 2, \dots, q$). Per fissare le idee prendiamo $w = e_i$ (giacchè, per l'osservazione precedente, analoghe considerazioni valgono per i valori $w = p_r$).

Vi sono nell'interno di A , $m < n$ punti distinti, la cui z

sia $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$, nei quali $w(\gamma_j) = e_i$, e detto r_j l'ordine di infinitesimo di $e_i - w(z)$ per $z \rightarrow \gamma_j$ si ha $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$.

Ammettiamo, per semplicità, che in $z = \gamma_j$ (per qualunque j) si annulli la derivata prima ma non la derivata seconda $\frac{d^2 w}{dz^2}$. Nell'intorno di $z = \gamma_j$ avremo lo sviluppo

$$w - e_i = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w}{dz^2} \right)_{z=\gamma_j} (z - \gamma_j)^2 + \dots$$

che invertito dà nell'intorno di $w = e_i$

$$z - \gamma_j = \beta_1 (w - e_i)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Per ogni valore di w , interno al cerchio di convergenza di questa serie, abbiamo due valori distinti per z , che girando intorno a $z = \gamma_j$ si permutano fra loro e costituiscono due rami di una medesima funzione analitica di w . Il punto e_i è dunque un punto (critico) di diramazione del 1.° ordine per z .

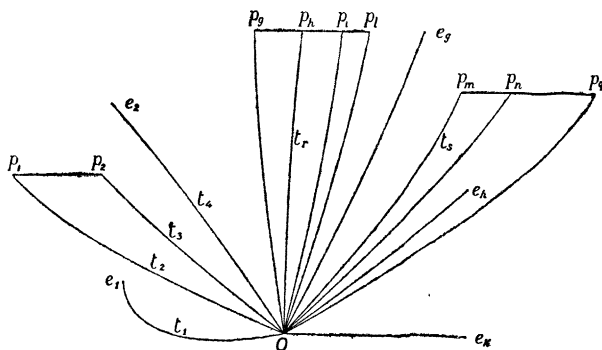
Sul piano (w) della variabile complessa w , segnati i punti e_s ($s = 1, 2, \dots, k$) e i segmenti λ_i^* ($i = 1, 2, \dots, r$), prendiamo un punto w_0 distinto dal complesso di punti già segnati. Nell'intorno di w_0 ci sono n elementi analitici $z^{(i)}(w)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e il raggio del cerchio di convergenza di ciascuno di essi si estende, per un noto teorema ⁽¹¹⁾, fino al più vicino punto critico; se però si incontra prima qualche punto appartenente a una λ^* ci arresteremo a quest'ultimo.

Ciascuno dei detti elementi analitici si potrà prolungare

⁽¹¹⁾ BIANCHI, *Teoria delle funzioni di variabile complessa*, [Zanichelli, 1928, parte I, p. 232].

analiticamente lungo ogni cammino che non attraversi le linee λ_i^* perchè nel campo A i corrispondenti n punti $z^{(i)}$ si mantengono sempre nell'interno di A , dove, esclusi i punti γ_j , non ci sono altri punti di singolarità per la funzione inversa $z(w)$. Così dunque in ogni punto del piano (w) distinto dai punti e_s e da quelli dei segmenti λ_i^* , esistono n elementi analitici.

Nel piano (w) uniamo ora un punto qualunque O , distinto dai punti già segnati su questo piano, con i punti e_s ($s=1, 2, \dots, k$) e p_r ($r=1, 2, \dots, q$) mediante delle linee regolari analitiche t_1, t_2, \dots, t_{k+q} , che non intersechino se stesse, nè si intersechino fra loro, nè incontrino le λ_i^* . Indi tagliamo il piano lungo tutte queste linee t e λ ; la connessione di esso viene evidentemente rotta, risultando diviso in un certo numero di parti $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i$ semplicemente connesse (vedasi figura schematica).



Immaginiamo ora n fogli piani $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, ciascuno dei quali lo pensiamo tagliato nell'identico modo del piano (w) (indicando ora i tagli t_i, λ_s^* e le parti π_i con un apice

eguale all'indice del piano sul quale si pensano) e che sovrapponiamo a (w) in modo che tutti i tagli t_i e le linee λ_s^* risultino sovrapposte.

Potremo allora pensare ciascuno degli n elementi analitici $z(w)$, esistenti in ogni punto di (w) (con le solite eccezioni), assegnato su uno di questi fogli, e, per comodità di distinzione, daremo alla z un apice che indichi il foglio sul quale giace.

In ogni regione $\pi_s^{(i)}$ del foglio generico i^{esimo} l'elemento analitico $z^{(i)}(w)$ in un suo punto è prolungabile fino ai tagli (e potrebbe prolungarsi anche oltre per quanto è stato detto precedentemente in questo n.), e sull'orlo di essi parleremo di valore $\bar{z}^{(i)}$ ottenuto con prolungamento analitico interno a $\pi_s^{(i)}$. In $\pi_s^{(i)}$ la funzione analitica ottenuta dal prolungamento analitico di $z^{(i)}(w)$ è evidentemente una funzione *monodroma*.

Nell'intorno di tutti i punti dei fogli ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (eccezione fatta dei punti $e_n^{(i)}$ e dei punti dei segmenti $\lambda_s^{*(i)}$) possiamo dunque assegnare un elemento analitico, e quindi in ognuno dei detti punti possiamo assegnare un valore di z perfettamente determinato, corrispondente a un punto interno ad A in cui $\frac{dw}{dz} \neq 0$. Così possiamo individuare ogni punto di ciascuno degli n fogli associando al valore w un determinato valore z , e lo chiamiamo quindi punto (w, z) .

È bene notare esplicitamente che su uno stesso foglio in punti affacciati dei tagli, si avranno valori $z^{(i)}$ in generale diversi e tali si mantengono, per la detta monodromia, quando ci si muove sui due orli senza attraversare punti singolari e o p .

In un punto di un orlo di un *taglio* t gli n valori z sono

complessivamente eguali a quelli nel punto affacciato sull'orlo opposto, perchè corrispondono al medesimo valore di w (diverso dai valori e , e non preso sul contorno di A). Distinguiamo perciò i due orli di un taglio t in destro e sinistro e indichiamo con

$$z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}$$

gli n punti sovrapposti sull'orlo destro e con

$$z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_1^{(n)}$$

gli n punti di fronte sull'orlo sinistro, corrispondenti al medesimo valore \bar{w} di w . Prescindendo da l'ordine, queste due serie di valori sono identiche; supponiamo che si abbia

$$z^{(1)} = z_1^{(i_1)}, z^{(2)} = z_1^{(i_2)}, \dots, z^{(n)} = z_1^{(i_n)}$$

ove i_1, i_2, \dots, i_n sono i numeri $1, 2, \dots, n$ in altro ordine. Se spostiamo il punto $z^{(1)}$ lungo l'orlo destro del taglio considerato sopra ω_1 e contemporaneamente $z^{(i_1)}$, nel medesimo modo, lungo l'orlo sinistro del foglio ω_{i_1} , avremo manifestamente sempre $z^{(1)} = z_1^{(i_1)}$, e similmente $z^{(2)} = z_1^{(i_2)}, \dots, z^{(n)} = z_1^{(i_n)}$, talchè dappertutto, lungo quegli n tagli sovrapposti, i valori di z depositi sull'orlo destro in $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ coincideranno ordinatamente con quelli dell'orlo sinistro in $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n}$.

Perciò lungo questi tagli l'orlo destro in $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ si conetterà rispettivamente col sinistro in $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_n}$ in modo da formare delle sezioni di diramazione che colleghino i vari fogli. Evidentemente sui fogli ω_i alcuni tagli potranno non diventare sezioni di diramazione ma sparire,

e precisamente questo capiterà quando i bordi che si connettono appartengono allo stesso piano.

Prendiamo ora in considerazione i punti dei tagli λ^* .

Al valore \bar{w} della variabile complessa in un punto (diverso dai p_i) di un qualunque taglio λ_s^* , corrispondono per i ragionamenti visti al principio di questo n.º, $2N_c + N_i$ valori z , dove N_c ed N_i sono legati dalla (3'). Se pensiamo il punto \bar{w} su ciascuno dei due orli del taglio, per la continuità della funzione analitica $z(w)$ (ed essendo n gli elementi analitici nelle immediate vicinanze di \bar{w}) avremo $N_i + N_c = n$ valori z su un orlo ed altrettanti $N_i + N_c$ sull'orlo opposto; gli N_i valori corrispondenti a punti interni ad A coincidono con quelli dell'altro orlo, mentre gli N_c valori su un orlo del taglio λ_s^* , corrispondenti a punti del contorno di A , sono distinti dagli N_c valori dell'orlo opposto.

Per i primi N_i valori si possono allora ripetere gli stessi ragionamenti precedentemente svolti, per cui i fogli che li contengono si collegheranno fra loro facendo sparire su essi il taglio λ_s^* , od un tratto di esso.

Consideriamo invece un valore $\bar{z}^{(h)}$ (degli N_c) corrispondente al punto $\bar{z}^{(h)}$ del contorno L_s di A (contorno sul quale $w(z)$ ha il coefficiente dell'immaginario eguale a λ_s). Osserviamo che quando $z^{(i)}$ percorre L_s , passando una sola volta per ogni punto, il punto (analitico) corrispondente $(\bar{w}, \bar{z}^{(h)})$ si muove con continuità sull'orlo di λ_s^* , percorrendo (per la continuità della funzione $z(w)$) i due orli di un taglio, che chiamo l_s , tutto corrispondente di L_s . Questi tagli l_s possono non essere tutti su un foglio, potendovi essere su essi dei punti, corrispondenti di punti di A in cui $\frac{dw}{dz} = 0$, che si comportano come punti di diramazione.

È chiaro che di questi tagli l se ne ottengono complessivamente, sugli n fogli ω_i , tanti quanti sono i contorni L di A .

Abbiamo così costruita una superficie R formata da n fogli piani sovrapposti, da ciascuno dei quali si passa agli altri mediante delle sezioni di diramazione, che sono tagliati complessivamente secondo $\rho + 1$ linee rettilinee e parallele, e sui quali sono distribuiti tutti i valori z dei punti del campo dato A e soltanto quelli.

I punti (analitici), (w, z) di R sono dunque in corrispondenza biunivoca e continua con i punti di A , ed inoltre, data la natura della funzione $w(z)$, la corrispondenza è anche conforme, essendo unici eventuali punti eccezionali i punti critici e_i ($i = 1, 2, \dots, k$) e i punti dei tagli l_s ($s = 0, 1, \dots, \rho$).

Ma qui si possono evidentemente ripetere parola per parola i ragionamenti svolti dal CECIONI alle pp. 8 e 9 della Memoria cit. in ⁽¹⁾, con la sola differenza che invece del piano (w) si ha nel nostro caso da considerare quel piano (tra gli n sovrapposti) che contiene i valori di \bar{z} in considerazione ⁽¹²⁾. Si ottengono così i medesimi sviluppi

$$w = \alpha + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$$

(dove t è la variabile complessa su un piano (t) , e $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ numeri reali),

$$t = \beta_1 (z - z_0) + \dots$$

⁽¹²⁾ Per es. se in un punto \bar{z}_0 la w assume il valore α , all'intorno τ di \bar{z}_0 , tutto dell'area A , si deve far corrispondere su R l'intorno piano del punto analitico (α, \bar{z}_0) .

e questi mostrano che la rappresentazione biunivoca fra i punti del contorno di A e i punti dei tagli l è anche *conforme* per tutti i punti dei tagli, esclusi i punti p_r ($r = 1, 2, \dots, q$). Per la detta rappresentabilità conforme fra A e R , quest'ultima deve essere, come A , una superficie connessa (cosa che del resto si può vedere facilmente osservando che per andare da un punto qualunque (w_1, z_1) a un altro (w_2, z_2) di R , basta unire su A il punto z_1 e z_2 con una linea tutta interna ad A , e non passante per punti singolari, e considerare la successione di elementi analitici $z(w)$ su questa linea); e l'ordine di connessione di R è uguale a quello di A .

Se osserviamo ora che saldando i tagli l la superficie R deve risultare di genere zero (perchè il numero dei contorni è uguale all'ordine di connessione), ne segue, per gli stessi ragionamenti che si espongono nella teoria delle superficie di RIEMANN, che essa può pensarsi come una riemanniana formata da n fogli piani con $n - 1$ sezioni di diramazione, e precisamente in modo che da ogni foglio si passi ai contigui attraverso una sola sezione di diramazione.

Abbiamo dunque:

Ogni area piana pluriconnessa di ordine di connessione $q + 1$ si può rappresentare biunivocamente e conformemente anche al contorno, (essendo unici punti eccezionali i punti in cui $\frac{dw}{dz} = 0$), su una riemanniana R , di genere zero, costituita da n fogli connessi ciascuno al precedente da una sola sezione di diramazione, convenientemente tagliata da $q + 1$ tagli paralleli.

Alle sezioni di diramazione corrispondono su A delle linee $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$, non intersecantisi se $\frac{dw}{dz}$ ha solo infinitesimi del 1.º ordine, e queste dividono evidentemente A

(incluso il contorno) *in n parti A_1, A_2, \dots, A_n connesse, e ognuna di esse è rappresentabile biunivocamente e conformemente (con le solite eccezioni) su un foglio della riemanniana R .*

Se invece esistono punti di diramazione multipli il risultato non cambia solo che le linee Γ_i di A corrispondenti a sezioni di diramazioni uscenti da un medesimo punto multiplo di diramazione, passeranno per quel punto di A corrispondente del punto critico multiplo.

Calcolo del numero dei moduli dai quali dipende un'area pluriconnessa piana.

4. — Abbiamo visto che la funzione $w(z)$ è individuata, a meno di una costante reale additiva dalla somma

$$\sum_{s=1}^n \frac{m_s + i n_s}{z - a_s}$$

quindi da $4n$ parametri reali. Siccome però moltiplicando la detta somma per una costante reale anche la $w(z)$ viene moltiplicata per la medesima costante, onde si può supporre che il taglio lungo l'asse reale risulti eseguito da 0 a 1, ne segue che supponendo di fare senz'altro questo, i parametri si riducono a $4n - 1$.

Si può domandare ora se da altrettanti dipenda la totalità delle riemanniane tagliate (del tipo considerato) rappresentabili su un'area A ; è senz'altro evidente che da un numero maggiore di parametri non può dipendere, ma non è evidente a priori che infinite funzioni $w(z)$ non possano dare la stessa R (tagliata).

Ammettiamo dunque che le due funzioni $w(z)$ e $w_1(z)$ rappresentino l'area A su una medesima riemanniana tagliata del tipo indicato facendo naturalmente corrispondere alle L_0, L_1, \dots, L_p i medesimi tagli.

È chiaro geometricamente che il prodotto delle due corrispondenze, fra i punti di A con quelli di R e dei punti di R con quelli di A , determinate rispettivamente dalle funzioni $w(z)$ e $z(w)$, è una corrispondenza che si ha coordinando ad ogni punto z di A quel punto z_1 , pure di A , per il quale si ha $w_1(z_1) = w(z)$, cioè è una trasformazione conforme di A in sè.

Ma da noti risultati⁽¹³⁾ se $q > 1$ esiste solo un numero finito di trasformazioni conformi in sè dell'area A , dunque la $w(z)$ e $w_1(z)$ differiscono solo per una costante reale additiva (salvo il numero finito di casi a cui si è accennato).

Concludiamo:

Le riemanniane tagliate del tipo suddetto, corrispondenti ad un'area di ordine di connessione < 2 , formano effettivamente una infinità $(4n - 1)$ upla.

Nel caso $q = 0$ si riconosce facilmente che:

Tutte le aree semplicemente connesse sono rappresentabili su una medesima riemanniana del tipo indicato avente un unico taglio da 0 a 1.

Nel caso $q = 1$, tenendo conto che⁽¹⁴⁾ ogni area doppiamente connessa ammette una semplice infinità di rappresentazioni conformi in sè, che trasformino in sè ognuna delle linee limiti, abbiamo che:

⁽¹³⁾ V. ad es. CECIONI, l. c. in (1), p. 18.

⁽¹⁴⁾ V. ad es. CECIONI, l. c. in (1), p. 19.

Le riemanniane tagliate del tipo indicato, corrispondenti ad una area doppiamente connessa, costituiscono una infinità $(4n - 2)^{\text{upla}}$ (e non una infinità $(4n - 1)^{\text{upla}}$ come nel caso generale).

Si ritrova anche per questa via il numero dei parametri da cui dipende un'area pluriconnessa, considerata a meno di una trasformazione conforme.

La R , per quanto sopra è detto, ha i fogli uniti da solo $n - 1$ sezioni di diramazioni ed è tagliata secondo $q + 1$ tagli semplici paralleli di cui uno eseguito tra 0 e 1. Questo tipo di area dipende evidentemente da $4(n - 1) + 3q$ parametri reali indipendenti.

Ma se noi vogliamo considerare le aree a meno di una rappresentazione conforme, non dovremmo ritenere distinte due tali superficie quando siano rappresentabili l'una su l'altra. Ora, se $q > 1$, per quanto sopra abbiamo visto, si hanno per ogni riemanniana tagliata ∞^{4n-1} altre rappresentabili su questa; mentre se $q = 1$, se ne hanno ∞^{4n-2} . Vediamo dunque che:

Un'area di ordine di connessione $q + 1$, considerata a meno di una trasformazione conforme, dipende da $3q - 3$ parametri (reali) essenziali se $q > 1$, da un parametro se $q = 1$.

Condizione di rappresentabilità conforme e curve algebriche caratteristiche di A .

5. — Le condizioni precedenti danno un complesso di condizioni necessarie e sufficienti perchè due aree piane pluriconnesse A_1, A_2 siano rappresentabili conformemente l'una su l'altra. È necessario e sufficiente perciò che si possano determinare due funzioni della specie w, w_1 per A_1, w_2

per A , tali che la R_1 relativa a w_1 e la R_2 relativa a w_2 siano identiche.

Esaminiamo ora la cosa dal seguente punto di vista.

Con le stesse denominazioni in uso nella geometria birazionale, ricordiamo che due aree (piane) pluriconnesse si dicono appartenere ad una stessa *classe* quando sono trasformabili conformemente e biunivocamente l'una nell'altra. Come risulta anche dal n. prec., le *classi* di aree piane pluriconnesse con $q + 1$ contorni sono ∞^{3q-3} se $q > 1$, ∞^1 se $q = 1$; cioè, come sopra abbiamo detto, le aree di ordine di connessione $q + 1$, considerate a meno di una trasformazione conforme, dipendono da $3q - 3$ parametri (se $q > 1$), che diconsi i *moduli* dell'area (o della classe); se $q = 1$ si ha un modulo.

Trovare un *sistema di moduli* significa definire per ogni area (con $q > 1$) $3q - 3$ numeri reali tali che ad ogni sistema di valori di questi numeri (compresi eventualmente entro limiti determinati) corrisponda *un numero finito* di classi di aree (come appunto accade per le curve algebriche).

Ora le considerazioni precedenti non danno un sistema di *moduli*, ma un *sistema sovrabbondante di costanti*. Queste costanti reali sono, come abbiamo visto poco fa, in numero di $4(n - 1) + 3q$ e sono:

1.° i $2(n - 1)$ valori (complessi) di w nei punti in cui $\frac{dw}{dz} = 0$;

2.° le parti immaginarie (costanti di w) sulle linee L_1, \dots, L_p (su L_0 la parte immaginaria è supposta uguale zero);

3.° il massimo e il minimo valore della parte reale di w su L_1, \dots, L_p (su L_0 essi sono supposti rispettivamente 0 e 1).

Le chiameremo, per brevità, costanti W ; esse sono legate da $4n - 1$ relazioni (incognite). Analoghe considerazioni valgono per $q = 1$.

Abbiamo dunque (come per i moduli):

Le aree per le quali coincidono i due corrispondenti sistemi di costanti W formano un numero finito di classi.

Ossia:

Ad ogni sistema di valori, arbitrariamente dato delle costanti W , corrisponde un numero finito di classi di aree pluriconnesse di ordine di connessione $\varrho + 1$.

Non sarà privo di interesse interpretare ciò geometricamente.

È noto che secondo i risultati di SCHOTTKY⁽¹⁵⁾ la condizione di rappresentabilità conforme di un'area su un'altra è equivalente alla condizione perchè due certe equazioni algebriche in due variabili (a coefficienti reali), ambedue del genere ϱ , appartengano a una medesima classe dal punto di vista reale.

Il teorema seguente⁽¹⁶⁾ precisa quali siano le curve algebriche che corrispondono, secondo il metodo di SCHOTTKY, alle aree piane pluriconnesse: Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva algebrica corrisponda, secondo il metodo di SCHOTTKY, ad un'area piana pluriconnessa, è che essa sia irriducibile e possessa il massimo numero di circuiti reali (cioè $\varrho + 1$ se ϱ è il genere).

Le curve algebriche corrispondenti, secondo il metodo di SCHOTTKY, ad un'area A si dicono *curve caratteristiche* dell'area A .

Le superficie di RIEMANN R^* corrispondenti alle dette curve algebriche reali sono ortosimmetriche, cioè i circuiti

⁽¹⁵⁾ SCHOTTKY, l. c. a nota (*).

⁽¹⁶⁾ CECIONI, Annali delle Università Toscane, nuova serie, v. IX, fasc. 7, 1924, p. 182.

reali di ciascuna di esse la dividono in due regioni R_1^* ed R_2^* , delle quali una R_1^* è in corrispondenza biunivoca conforme con l'area A , l'altra R_2^* con l'area simmetrica di A ⁽¹⁷⁾; al contorno L_0, L_1, \dots, L_ρ di A corrisponde biunivocamente il sistema dei circuiti reali di ciascuna delle R^* .

Per vedere ora cosa diventa la nostra funzione w interpretata su una qualunque R^* , ricordiamo anzitutto la seguente proprietà: ⁽¹⁸⁾ Fra le funzioni K , relative all'area A , se ne possono (ed in infiniti modi) scegliere due, siano u e v , tali che ogni funzione $K(z)$ è funzione razionale di u e v , con coefficienti reali. Le u e v sono poi legate da un'equazione algebrica $g(u, v) = 0$, ed R^* è appunto la riemanniana relativa a questa equazione.

Tracciamo poi su R^* il particolare sistema di retrosezioni considerate da WEICHOLO. ⁽¹⁹⁾

Indichiamo con a_0, a_1, \dots, a_ρ le $\rho + 1$ linee reali di R^* . Consideriamo ora le linee $a_0, \dots, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_\rho$, e tracciamo una linea b'_h in R_1^* , che vada da un punto di a_h ($h = 0, \dots, l - 1, l + 1, \dots, \rho$) a un punto P_h di a_l , e tracciamo poi

⁽¹⁷⁾ Per bene intendere cosa sia la sopra detta area simmetrica di A , si pensi l'area data A come dotata di due facce, cioè per ogni punto interno ad A , che pensiamo collocato sulla pagina positiva del foglio, si consideri un altro punto collocato sulla pagina negativa, che pensiamo distinto dal precedente; ogni punto dei contorni L_0, L_1, \dots, L_ρ si continui invece a pensarlo come un punto solo, di modo che i contorni L_0, L_1, \dots, L_ρ costituiscano un congiungimento fra la pagina positiva e quella negativa, le quali non hanno poi fra loro alcun altro congiungimento. La regione R_2^* sarebbe allora in corrispondenza biunivoca e conforme con la faccia negativa di A ora considerata.

⁽¹⁸⁾ SCHOTTKY, l. c. in ⁽²⁾.

⁽¹⁹⁾ CECIONI, l. c. in ⁽¹⁶⁾.

la linea simmetrica b''_h di essa in R_2^* ; queste due linee simmetriche danno un'unica linea chiusa che chiamiamo b_h .

Tagliando la R^* lungo le linee a_h e b_h ($h = 0, \dots, l-1, l+1, \dots, q$) si ottiene il sistema voluto di retrosezioni.

Seguendo il procedimento usato dal CECIONI⁽²⁰⁾ per le funzioni Φ relative ad A , consideriamo

$$\frac{dw}{dz} : \frac{du}{dz} = \frac{dw}{du};$$

essa è evidentemente ancora una funzione della specie K e quindi, per la proprietà premessa, essa è una funzione razionale con coefficienti reali di u e di v , cioè

$$\frac{dw}{du} = f(u, v).$$

È allora

$$(II) \quad w = \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} f(u, v) du + w^{(0)}$$

dove intendiamo che u_0 e v_0 siano valori reali.

La funzione w , interpretata su R^* , è dunque un integrale abeliano. Essa ha delle singolarità polari ma si vede subito che non può avere singolarità logaritmiche. Ricordiamo perciò che la R^* si trasforma in sè per la simmetria $u' = \bar{u}$, $v' = \bar{v}$ (dove con le lettere sopra segnate si indicano

⁽²⁰⁾ CECIONI, *Sopra alcune questioni attinenti alla teoria della rappresentazione conforme delle aree piane pluriconnesse, ed applicazioni alla teoria delle curve algebriche di genere p con $p+1$ circuiti reali, e specialmente di quelle iperellittiche.* (Litografie).

i valori complessi coniugati); vediamo allora dalla (II) che il valore assunto dalla funzione $w - w^0$ in un punto (u, v) di R^* , corrispondentemente a un certo cammino di integrazione che ad esso conduce da (u_0, v_0) , è complesso coniugato di quello che essa assume nel punto simmetrico (\bar{u}, \bar{v}) corrispondentemente al cammino simmetrico. Dunque la funzione w interpretata su R^* , è un integrale abeliano di seconda specie, che chiamo E , avente la parte immaginaria costante su ciascun ciclo reale di R^* . Viceversa ogni integrale di 2.^a specie che goda di quest'ultima proprietà, si trasforma evidentemente in una funzione w dell'area A .

È chiaro che se calcoliamo l'integrale E prima esteso al cammino b'_h e poi a b''_h (che partono dal medesimo punto P_h di a_h) si ottengono due valori complessi coniugati; ne segue che l'integrale

$$\int f(u, v) du$$

esteso al ciclo b_h (in un determinato verso positivo ⁽²¹⁾) è un numero puramente immaginario; tale è dunque il modulo di periodicità di E al taglio a_h e questo modulo è il doppio della parte immaginaria costante che E ha sul ciclo reale a_h di R^* . Invece ai tagli b_h , cioè lungo i cicli a_h , i moduli di periodicità sono manifestamente nulli.

I criteri di rappresentabilità conforme di aree piane pluriconnesse si trasformano in altrettanti criteri di trasformabilità birazionale, a coefficienti reali, di curve algebriche reali. Basta sostituire alle parole area piana pluriconnessa, linea

⁽²¹⁾ Vedasi CECIONI, l. c. nella nota precedente, pp. 26-27.

L_i e funzione $w(z)$, rispettivamente le parole curva algebrica reale col massimo numero di circuiti reali, circuiti reali e integrale di 2.^a specie avente la parte immaginaria costante sui circuiti reali.

Si ottiene così per i detti integrali di 2.^a specie E un sistema di $4(n-1) + 3\rho$ costanti reali che chiamo costanti W_E legate da $4n-1$ relazioni (incognite) se $\rho > 1$, da $4n-2$ se $\rho = 1$.

Abbiamo allora :

Condizione necessaria affinché due curve algebriche reali col massimo numero di circuiti reali siano trasformabili birazionalmente, a coefficienti reali, l'una nell'altra, cioè appartengano alla stessa classe dal punto di vista reale, è che coincidano i due corrispondenti sistemi di costanti W_E .

La condizione non è sufficiente; però :

Le curve algebriche reali, col massimo numero di circuiti reali, per le quali coincidono i due corrispondenti sistemi di costanti W_E , formano un numero finito di classi.

Ossia :

Ad ogni sistema di valori, arbitrariamente dato, delle costanti W_E , corrisponde un numero finito di classi di curve algebriche reali di genere ρ aventi il massimo numero di circuiti reali.

Pisa, febbraio 1930.