

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LIVIA NEROZZI

## **Sulla rappresentazione conforme delle superficie pluriconnesse**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1<sup>re</sup> série, tome 16, n° 3 (1930), p. 1-26*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1930\\_1\\_16\\_3\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1930_1_16_3_1_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DotT. LIVIA NEROZZI

SULLA RAPPRESENTAZIONE CONFORME

DELLE

SUPERFICIE PLURICONNESSE

P I S A

TIPOGRAFIA EDITRICE PACINI MARIOTTI

—  
1930 - VIII



---

---

## PREFAZIONE

PICARD dimostra<sup>(1)</sup> come sia possibile rappresentare conformemente e biunivocamente una superficie chiusa regolarmente analitica  $S$ , a  $p$  fori, sopra una opportuna superficie di RIEMANN di genere  $p$ .

Ho esteso questo teorema (cosa che mi sembra fin qui non ancora considerata nemmeno nei casi particolari sotto notati) al caso in cui la superficie in considerazione risulti formata dalla riunione di più pezzi di superficie regolarmente analitiche. Nella corrispondenza conforme che viene a intercedere fra la  $S$  e la corrispondente riemanniana  $R$ , risultano unici punti eccezionali per la conformità della rappresentazione i vertici di  $S$  e i punti di diramazione di  $R$ .

Come caso particolare di questo teorema, e cioè quando i pezzi di superficie componenti  $S$  siano tutti piani, segue la rappresentabilità conforme di una superficie poliedrica chiusa su una superficie di RIEMANN dello stesso genere; e nel caso anche più particolare che il genere sia 0, risulta dimostrato che la superficie di qualsiasi poliedro ordinario,

---

<sup>(1)</sup> PICARD, *Traité d'Analyse*. Tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1926, pag. 587.

è rappresentabile conformemente e biunivocamente su un piano, essendo unici punti eccezionali per la conformità della rappresentazione i vertici del poliedro. Con questo risultato acquista maggior rilievo la formula data dallo SCHWARZ relativa alla rappresentazione conforme di un poliedro su un piano<sup>(2)</sup>, poichè nello stabilire queste formule era presupposta, come ipotesi, la possibilità della rappresentazione conforme medesima.

Nella trattazione che segue è introdotto, ed adoperato sistematicamente il concetto di *variabile principale di un punto della superficie*; esso è una generalizzazione di quello che si adopera comunemente nella teoria delle superficie di RIEMANN ed è analogo a quello introdotto, in circostanze diverse, dal CECIONI, nello studio delle aree appartenenti ad una riemanniana.<sup>(3)</sup>

Mi sono stati di aiuto per la impostazione di questo lavoro, e in particolare per lo sviluppo della parte che riguarda la formula di GREEN, i consigli del Prof. CECIONI, e gliene esprimo qui i miei ringraziamenti.

---

<sup>(2)</sup> SCHWARZ, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Zweiter Band, p. 81, Berlin, 1890.

<sup>(3)</sup> CECIONI, *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di RIEMANN*; « Annali delle Università Toscane », volume XLVI, Pisa, 1928, pag. 43.

---

---

## La superficie pluriconnessa $A$ .

1. — Sia la superficie  $A$  finita, chiusa, pluriconnessa a  $p$  fori, cioè una ciambella a  $p$  fori la cui superficie sia formata da un numero finito di pezzi di superficie saldate fra loro (*facce* di  $A$ ); e supponiamo che ciascuna di queste facce sia un pezzo di superficie regolarmente analitica (sia cioè tale che nell'intorno di un punto qualunque, anche situato sulle linee che limitano queste facce, le coordinate  $x, y, z$ , siano funzioni analitiche di due parametri  $p$  e  $q$ ).<sup>(4)</sup>

Le linee comuni a due facce adiacenti saranno chiamate *spigoli*; i punti di concorso di questi spigoli saranno chiamati *vertici*. In altre parole, penseremo la superficie  $A$  come un poliedro (chiuso di genere  $p$ ) a facce curve, ciascuna faccia essendo un pezzo di superficie regolarmente analitica.

Supponiamo inoltre che le facce si taglino secondo un angolo che si mantiene sempre diverso da zero e che per ogni vertice sia diversa da zero la somma degli angoli compresi fra gli spigoli concorrenti in esso; in questa ipotesi, per un teorema di KOEBE, per ogni punto  $P$  che sia un vertice o che sia situato su uno spigolo può determi-

---

<sup>(4)</sup> PICARD, cfr. l. c. <sup>(1)</sup>, p. 582.

narsi un conveniente intorno di  $P$  su  $A$ , contenente  $P$  nel suo interno, che risulta rappresentabile conformemente e biunivocamente su un intorno piano.<sup>(5)</sup>

Poichè questa proprietà vale anche per ogni punto  $P$  interno ad una faccia (per essere le facce regolarmente analitiche), può dirsi che: *Considerato un qualunque punto  $P$  di  $A$ , è sempre possibile rappresentare conformemente un intorno di  $P$  su un intorno  $T$  situato nel piano di una variabile complessa  $\tau$ ; per es. su un cerchietto col centro in  $\tau=0$ .*

Si noti anche che quest'ultimo fatto è, in fondo, l'unica ipotesi che ci occorre sulla natura della superficie  $A$  (insieme con quella, naturalmente, che  $A$  sia dotata di una certa area finita, sia chiusa e di un certo genere  $p$ ).

La variabile complessa  $\tau$ , definita a meno di una trasformazione regolare analitica nell'intorno dello zero, si dirà *variabile principale relativa alla superficie  $A$  nel punto  $P$ .*

Si vede subito che è possibile trovare un numero  $\varepsilon$  tale che ogni campo della  $A$ , di diametro  $< \varepsilon$ , sia rappresentabile conformemente e biunivocamente in un intorno piano.

Infatti per ogni punto della superficie si può trovare un intorno che gode della proprietà detta. Se l'estremo inferiore dei diametri di questi intorni fosse uguale allo zero, sarebbe possibile trovare un punto per il quale il corrispondente intorno avrebbe diametro uguale allo zero, il che non può darsi.

Un tale campo di diametro  $< \varepsilon$  si chiamerà, qualche volta, semplicemente un intorno. Ed è chiaro che si può dividere la superficie in un numero finito di tali intorni, eventualmente anche parzialmente ricoprentisi.

---

<sup>(5)</sup> KOEBE, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », 1926, Band 147, S. 95-103.

2. — Il concetto di funzione (nel senso di DIRICHLET) di un punto su  $A$  nasce come l' analogo concetto nel piano, e cioè, considerato su  $A$  un punto mobile  $P$ , diremo che  $f$  è funzione di  $P$  e scriveremo  $f=f(P)$  quando per ogni posizione di  $P$  si abbiano per  $f$  uno o più valori. La  $f$  si dirà a un sol valore nel primo caso, a più valori nel secondo.

Data una funzione, la sua continuità in un punto, la sua derivata e la continuità di essa, le sue irregolarità, gli ordini d'infinito e d'infinitesimo s'intendono riferiti alla variabile principale relativa al punto.

Questi concetti risultano evidentemente invarianti rispetto all'arbitrarietà che vi è nella scelta della variabile principale.

Si dirà che una funzione è continua, che ha derivata continua in un campo di  $A$ , quando funzione e derivata sono tali in ogni punto del campo.

### **Funzioni armoniche e funzioni analitiche in un intorno di un punto della superficie.**

3. — Una funzione  $f$  si dice *armonica* in un intorno  $S$  di un punto  $P$  di  $A$  quando in ogni punto di  $S$  il contorno incluso è finita continua e a un sol valore e, posto  $\tau=\xi+i\eta$ , possiede rispetto alle variabili  $\xi$  e  $\eta$ , nell'intorno  $T$ , derivate prime finite e continue e derivate seconde finite ed atte all'integrazione legate dalla relazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0.$$

Quando le condizioni per le derivate siano soddisfatte anche

al contorno di  $T$ , diremo che la  $f(P)$  ha derivate regolari anche al contorno di  $S$ .

Una funzione  $f(P)$  si dice *analitica regolare* nell'intorno di un punto  $P$  di  $A$  quando nell'intorno di  $P$  essa ha uno sviluppo della forma

$$f = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots$$

Le definizioni ora dette non dipendono dalla variabile principale scelta, una funzione armonica o analitica rimanendo tale per trasformazioni conformi.

Per questa ragione accade pure, ed è importante osservarlo, che:

a) *Se una funzione  $f$  è armonica o analitica regolare in un intorno  $S$  di un punto  $P$ , essa è rispettivamente armonica o analitica regolare anche nell'intorno di qualsiasi altro punto  $P$ , di  $S$ .*

È anche chiaro che:

b) *Se  $S$  è un conveniente intorno di un punto qualsiasi di  $A$ , esiste in  $S$  una ed una sola funzione armonica che prende al contorno valori assegnati ad arbitrio, formanti una catena continua od anche con un numero finito di discontinuità di 1.<sup>a</sup> specie<sup>(6)</sup>.*

Facciamo, anche riguardo a ciò, le considerazioni seguenti. Consideriamo l'intorno piano  $T$  di  $\tau$  corrispondente di  $S$  e sia  $\psi$  la funzione armonica che prende sul contorno  $V$  di  $T$  i valori assegnati nei punti corrispondenti del contorno di  $S$ .

<sup>(6)</sup> S' intende che si suppongono verificate per la linea contorno di  $S$ , quelle proprietà (del resto generalissime) che permettono la risoluzione del problema di DIRICHLET nell'intorno piano  $T$  corrispondente.

Detta  $\varphi$  la coniugata armonica di  $\psi$  in  $T$  determinata a meno di una costante additiva dai valori dati su  $\mathcal{V}$  per  $\psi$ ,<sup>(7)</sup> la  $f = \varphi + i\psi$  è in  $T$ , e quindi in  $\mathcal{S}$ , una funzione  $f(P)$  finita continua e monodroma in ogni punto di  $\mathcal{S}$ .

### **Funzioni armoniche e analitiche in un campo pseudosemplice.**

4. — Una funzione  $f(P)$  si dice armonica in un campo  $C$  di  $A$ <sup>(8)</sup> quando è continua in ogni punto di  $C$  compreso il contorno, ed ha nell'interno del campo, rispetto a una variabile principale relativa ai singoli punti, derivate prime finite ed atte all'integrazione, legate dall'equazione di LAPLACE.

Supporremo in questo § e nel successivo che il campo  $C$  sia *pseudosemplice*<sup>(9)</sup> e considereremo solo funzioni armoniche monodrome. Sia anzi dapprima il campo  $C$  a un sol contorno e quindi (poichè pseudosemplice) semplicemente connesso. Abbiamo allora:

a) *In  $C$  esiste una ed una sola funzione armonica monodroma che prende al contorno valori assegnati ad arbitrio*

---

(7) Si ha per  $\varphi$

$$\varphi(\tau) = \int_{\xi_0\tau_0}^{\xi\tau} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\eta} d\xi - \frac{\partial\psi}{\partial\xi} d\eta \right)$$

(8) Naturalmente il campo  $C$  può contenere nel suo interno vertici di  $A$ , spigoli o parti di spigoli, facce o parti di facce in un modo qualunque.

(9) *Schlichtartig* secondo KOEBE. Cfr. CECIONI, l. c. (3), p. 32.

I campi pseudosemplici risultano equivalenti, dal punto di vista delle connessioni, a campi piani; il loro ordine di connessione è uguale al numero dei loro contorni.

(potendo tali valori formare anche una successione con un numero finito di discontinuità di 1.<sup>a</sup> specie).

Si divida  $C$  in un numero finito di intorni parziali ricoprentisi in parte per ciascuno dei quali valgano le proprietà precedenti, e ciò è possibile come è stato osservato al n.º 1 (in fine).

Per ciascuno di questi intorni è risolubile il problema di DIRICHLET, e quindi è applicabile ad essi il processo alternato di SCHWARZ.

L'unicità della funzione armonica così costruita segue dalla proprietà: b) *Il massimo e il minimo di una funzione armonica monodroma non costante non possono mai aver luogo nell'interno del campo e sono quindi presi dalla funzione sul contorno*; proprietà che si deduce subito dall'analogia proprietà nel piano. Se infatti il massimo (od il minimo) fosse preso in un punto  $P$  interno a  $C$ , chiamando  $\tau = \xi + i\eta$  la variabile principale in  $P$ , la funzione diverrebbe una funzione armonica di  $\xi$  e di  $\eta$  massima (o minima) nel centro del cerchio nel quale risulta definita.

La risoluzione del problema di DIRICHLET per un campo pseudosemplice a più contorni (trattandosi sempre di funzioni monodrome) si ottiene seguendo fedelmente il procedimento tenuto da PICARD per le aree piane a più contorni <sup>(10)</sup>.

5. — *Una funzione  $f(P)$  si dice analitica regolare in un campo  $C$  quando è in  $C$  continua ed ha uno sviluppo regolare in ogni punto rispetto a una variabile principale relativa ai singoli punti.*

Consideriamo in  $C$ , pseudosemplice con un numero qua-

---

<sup>(10)</sup> PICARD, cfr. l. c., n. (1), pag. 80-87.

lunque di contorni, una funzione armonica  $\psi(P)$  e vediamo come possa determinarsi una funzione analitica in  $C$  che abbia  $\psi$ , ad esempio, come coefficiente dell'immaginario.

Sia dapprima  $C$  a un sol contorno. Dividiamo  $C$  in un numero finito di intorni parziali ricoprentisi in parte, come al n.º precedente. In ogni tale intorno  $S_i$  è definita a meno di una costante additiva una funzione analitica monodroma  $f_i$  (n.º 3) che ha come coefficiente dell'immaginario in  $S_i$  la funzione  $\psi(P)$ . Si vede subito, in base alla definizione di funzione analitica nell'intorno di un punto di  $A$  (n.º 3), che, se  $f_1$  è una determinazione della detta funzione analitica in  $S_1$ , e se  $S_2$  ha una parte comune con  $S_1$ , si può scegliere la costante additiva di  $f_2$  in modo che nella parte comune ad  $S_1$  ed  $S_2$  la funzione  $f_1$  coincida con  $f_2$ . Così proseguendo, la funzione analitica  $f$  viene ad essere determinata in tutto il campo  $C$ . Occorre dimostrare che essa è monodroma in  $C$  (che è ora semplicemente connesso), ma ciò segue subito da noti procedimenti: nella ipotesi infatti che la  $f$  risultasse polidroma, dividendo  $C$  in due parti e poi una delle due parti di nuovo in altre due, e così via, troveremmo un punto  $P$  di  $A$  nell'intorno del quale la  $f$  sarebbe polidroma, il che non può darsi.

Sia ora  $C$  (sempre pseudosemplice) pluriconnesso. La funzione analitica  $f$  determinata dalla parte immaginaria  $\psi(P)$  risulta allora polidroma in  $C$ , dotata di periodi reali corrispondenti a giri lungo i contorni. Ciò si vede come pei campi piani, rendendo prima  $C$  semplicemente connesso mediante tagli che ne uniscano opportunamente i contorni.

### La formula di Green.

6. — Sia  $S$  un intorno di un punto qualunque  $P$  di  $A$ , limitato da una linea  $l$  regolare (salvo eventuali punti angolari in numero finito)  $n$  la normale ad  $l$  in ogni suo punto volta internamente all'intorno e siano  $U$  e  $V$  due funzioni reali del punto variabile in  $S$  a un sol valore, finite e continue in  $S$  incluso il contorno. Inoltre la  $U$  abbia derivate parziali del primo ordine finite ed atte all'integrazione in tutto  $S$ , la  $V$  abbia derivate prime finite e continue e derivate seconde finite ed atte all'integrazione.

In queste ipotesi consideriamo, come sempre, un intorno piano  $T$  corrispondente conformemente a  $S$ ; detti  $t$  il suo contorno,  $p$  la normale interna a  $T$ ,  $\tau = \xi + i\eta$  la variabile in  $T$  (variabile principale nel punto  $P$  di  $A$ ), possiamo scrivere per le  $U$  e  $V$  pensate come funzioni di  $\xi$  e  $\eta$  la formula di GREEN

$$(1) \quad \int_T U \Delta_2 V dT + \int_T \nabla(U, V) dT = - \int_t U \frac{\partial V}{\partial p} ds .$$

Facciamo ora su queste formule le considerazioni seguenti:

a) Supponiamo di prendere un'altra variabile principale relativa al punto  $P$ , sia  $\tau_1 = \xi_1 + i\eta_1$  e sia  $T_1$  l'intorno corrispondente ad  $S$  sul piano di  $\tau_1$ .

Poniamo:

$$\Delta_{2(\xi_1, \eta_1)} V = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_1^2} \quad \nabla_{(\xi_1, \eta_1)}(U, V) = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \eta_1} \frac{\partial V}{\partial \eta_1}$$

ed analogamente, per l'intorno precedente  $T$ ,

$$\Delta_{2(\xi, \eta)} V = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}; \quad \nabla_{(\xi, \eta)}(U, V) = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta}.$$

A causa della relazione di monogeneità cui soddisfano le due funzioni  $\xi_1 = \xi_1(\xi, \eta)$ ;  $\eta = \eta(\xi_1, \eta_1)$  si ha, come è ben noto e come si verifica del resto immediatamente,

$$\Delta_{2(\xi, \eta)} V = \Delta_{2(\xi_1, \eta_1)} V \cdot \left| \frac{d\tau_1}{d\tau} \right| = \Delta_{2(\xi_1, \eta_1)} V \cdot \frac{\partial(\xi_1, \eta_1)}{\partial(\xi, \eta)}$$

$$\nabla_{(\xi, \eta)}(U, V) = \nabla_{(\xi_1, \eta_1)}(U, V) \cdot \left| \frac{d\tau_1}{d\tau} \right| = \nabla_{(\xi_1, \eta_1)}(U, V) \cdot \frac{\partial(\xi_1, \eta_1)}{\partial(\xi, \eta)}$$

ed è

$$\frac{\partial(\xi_1, \eta_1)}{\partial(\xi, \eta)} > 0.$$

Se allora trasformiamo i due integrali al primo membro della formula (1) mediante la trasformazione  $\xi = \xi(\xi_1, \eta_1)$ ,  $\eta = \eta(\xi_1, \eta_1)$  troviamo:

$$\begin{aligned} \int_T U \Delta_2 V dT &= \iint_T U \Delta_{2(\xi, \eta)} V \cdot d\xi d\eta = \iint_{T_1} U \Delta_{2(\xi_1, \eta_1)} V \cdot \frac{\partial(\xi_1, \eta_1)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi_1, \eta_1)} d\xi_1 d\eta_1 = \\ &= \int_{T_1} U \Delta_2 V dT_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_T \nabla(U, V) dT &= \iint_T \nabla_{(\xi, \eta)}(U, V) d\xi d\eta = \iint_{T_1} \nabla_{(\xi_1, \eta_1)}(U, V) \frac{\partial(\xi_1, \eta_1)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\xi_1, \eta_1)} d\xi_1 d\eta_1 = \\ &= \int_{T_1} \nabla(U, V) dT_1 \end{aligned}$$

dove, naturalmente, nei primi membri  $U$  e  $V$  sono espresse in funzione di  $\xi$  e di  $\eta$  ed è

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}, \quad \nabla(U, V) = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta}$$

mentre negli altri membri è

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_1^2}, \quad \nabla(U, V) = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \eta_1} \frac{\partial V}{\partial \eta_1}.$$

Da ciò si vede che qualunque sia la variabile principale  $\tau$  rispetto alla quale vengono calcolati gli integrali

$$\int_T U \Delta_2 V dT, \quad \int_T \nabla(U, V) dT,$$

essi mantengono sempre, rispettivamente, il medesimo valore; perciò li indicheremo rispettivamente con

$$(2) \quad \int_S U \Delta_2 V dS; \quad \int_S \nabla(U, V) dS$$

nell'intesa dunque che il calcolo di essi va fatto rispetto ad una variabile principale *qualunque* (relativa ad un punto qualunque dell'intorno  $S$ ). <sup>(11)</sup> E l'intorno  $S$  è l'intorno di un punto qualunque della superficie  $A$ .

---

<sup>(11)</sup> Qui, in sostanza, diamo una definizione dei simboli (2) che basta per noi. La cosa naturalmente potrebbe essere condotta altrimenti, adoperando l'usuale concetto di integrale esteso ad una superficie curva, ma occorrerebbe introdurre il  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$  sulla superficie, per definire il  $\Delta_2$ , e quindi fare particolari considerazioni per gli spigoli. Ciò viene sopra evitato.

b) Considerazioni del tutto analoghe valgono per l'integrale del secondo membro della (1). Se  $p_1, t_1, s_1$ , hanno per l'intorno  $T_1$  della nuova variabile principale  $\tau_1$ , il significato che hanno  $p, t, s$  per  $T$ , e se  $Q'$  è un punto qualunque del contorno di  $T$ ,  $Q'_1$  il corrispondente di  $T_1$  (corrispondenti ambedue ad un punto  $Q$  del contorno di  $S$ ), osservando anche che la direzione  $p$  normale al contorno in  $Q$  si cambia nella direzione  $p_1$  normale in  $Q'_1$ , vediamo dalla definizione di derivata in una direzione che è

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dp}$$

$dp_1$  e  $dp$  essendo i differenziali (corrispondenti) dell'arco rispettivamente di  $p$  e  $p_1$ , nei punti  $Q'$  e  $Q'_1$ . Per la proprietà della rappresentazione conforme, per la quale  $\frac{ds_1}{ds}$  ha in ogni punto un medesimo valore qualunque sia la direzione della linea lungo cui viene calcolato il  $ds$ , chiamando  $\left(\frac{ds_1}{ds}\right)_{Q'}$  <sup>(12)</sup> il valore di questo rapporto in  $Q'$  avremo:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{Q'} = \left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_{Q'_1} \left(\frac{ds_1}{ds}\right)_{Q'}$$

Trasformando allora l'integrale a secondo membro della formula (1) avremo, come in *a*),

$$\int_t U \frac{\partial V}{\partial p} ds = \int_{t_1} U \frac{\partial V}{\partial p_1} \frac{ds}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} ds_1 = \int_{t_1} U \frac{\partial V}{\partial p_1} ds_1$$

---

<sup>(12)</sup> Può osservarsi che prendendo gli intorni  $S$  un poco più piccoli, si può fare che  $Q'$  e  $Q'_1$  siano punti interni al campo di esistenza delle funzioni  $\tau(\tau_1), \tau_1(\tau)$ .

e quindi abbiamo la stessa proprietà di invarianza del valore dell'integrale

$$\int U \frac{\partial V}{\partial p} ds$$

rispetto alla variabile principale, come per quelli del primo membro.

Qui anzi è chiaro che le considerazioni precedenti valgono anche se uno dei due interni  $T$ ,  $T_1$ , è addirittura l'interno  $S$ ; unici punti di eccezione sono quelli nei quali la linea  $l$  contorno di  $S$  incontra qualche spigolo di  $A$ , ma le indeterminazioni che si hanno in questi punti non alterano il valore dell'integrale, come non lo alterano gli eventuali punti angolari di  $l$  in numero finito; non si ha eccezione invece se una parte di  $l$  è coincidente con qualche pezzo di spigolo. Chiamando quindi, come abbiamo detto;  $n$  la normale ad  $l$  volta verso l'interno di  $S$ , ed ancora  $s$  l'arco di  $l$ , avremo

$$(3) \quad \int_t U \frac{\partial V}{\partial p} ds = \int_l U \frac{\partial V}{\partial n} ds$$

Del resto questa uguaglianza potrebbe per noi assumersi come definizione del simbolo  $\int_l U \frac{\partial V}{\partial n} ds$  come abbiamo fatto pei simboli (2).

c) Con ciò la formula (1) può scriversi

$$(4) \quad \int_s U \Delta_2 V dS + \int_s \nabla (U, V) dS = - \int_l U \frac{\partial V}{\partial n} ds$$

d) Osserviamo esplicitamente, chè ci sarà utile fra breve, quanto segue. Sia  $l$  un qualunque tratto di linea su  $A$ , che sia tutto contenuto in uno dei soliti intorni  $S$  (cfr. n.º 1); sia  $n$  la normale ad  $l$  in un suo punto qualunque in un verso determinato, da scegliersi nei singoli punti in base alla legge di continuità, ed  $n'$  la normale opposta a  $n$ . Sia poi  $l'$  la linea  $l$  percorsa in senso inverso a quello nel quale pensiamo percorso  $l$ ,  $s$  l'arco su  $l$ ,  $s'$  l'arco su  $l'$  (il senso che serve per la misura di questi due archi è opposto). Avremo

$$\int_l U \frac{\partial V}{\partial n} ds = - \int_{l'} U \frac{\partial V}{\partial n'} ds'$$

Riferendosi infatti ad una qualunque variabile principale  $\tau$  nell'intorno  $S$ , cui appartiene  $l$ , questa uguaglianza diviene, con notazioni evidenti

$$\int_t U \frac{\partial V}{\partial p} ds = - \int_{t'} U \frac{\partial V}{\partial p'} ds'$$

(indicando qui con  $s$  ed  $s'$  gli archi di  $t$  e  $t'$ );  $p$  e  $p'$ , per essere conforme la rappresentazione, sono ancora direzioni opposte, e quindi l'ultima formola è evidente perchè è

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial p'}$$

E si noti anche qui che  $n$  ed  $n'$  potranno essere indeterminate solo nei punti dove  $l$  incontra gli spigoli, il che non altera gli integrali. Se  $l$  è coincidente con uno spigolo,  $n$  ed  $n'$  sono una in una faccia, una in un'altra, ma sono pienamente determinate (eccetto nei vertici di  $A$ ) e si cam-

biano sempre in  $p$  e  $p'$  normali a  $t$ , perchè la rappresentazione di  $S$  su  $T$  è conforme anche nei punti degli spigoli che non sono vertici.

Le  $U$  e  $V$  soddisfino ora alle condizioni poste in un campo qualunque  $C$  di  $A$ , di cui sia ancora  $l$  il contorno (che può avere un numero finito di punti angolari),  $n$  la normale interna. Si divida  $C$  in intorni  $S_i$  confinanti fra loro (non sovrapposti).

Porremo per definizione:

$$\int_C U \Delta_2 V dC = \sum_{S_i} \int U \Delta_2 V dS_i$$

$$\int_C \Delta(U, V) dC = \sum_{S_i} \int \nabla(U, V) dS_i .$$

Se scomponiamo  $C$  in intorni parziali in altro modo, le somme dei secondi membri vengono ad avere rispettivamente lo stesso valore; basta infatti considerare la divisione di  $C$  ottenuta facendo insieme le due divisioni, ed applicare la proprietà additiva degli integrali di campo piano.

Per la (4) potremo scrivere allora

$$\int_C U \Delta_2 V dC + \int_C \nabla(U, V) dC = - \sum_{S_i} \int \frac{\partial V}{\partial n_i} ds_i .$$

Ma gli integrali del secondo membro, relativi a quei tratti  $s_i$  comuni a due intorni, si distruggono [n.º prec.  $d$ ]; possiamo quindi scrivere la formula

$$\int_C U \Delta_2 V dC + \int_C \nabla(U, V) dC = - \int_l U \frac{\partial V}{\partial n} ds$$

che è la formula di GREEN per la superficie  $A$ .

**Funzioni armoniche e funzioni analitiche  
su tutta la superficie  $A$ .**

8. — Premesso quanto sopra, si estendono senz'altro alla nostra superficie  $A$ , come possiamo accennare rapidamente, i teoremi di esistenza valevoli per le superficie di RIEMANN. Teniamo sott'occhio, per questo, la trattazione datane dal PICARD (l. c. alla nota (1), pag. 558-571).

Ricordiamo anzi tutto che, essendo  $p$  il genere della  $A$ , possono considerarsi le  $p$  retrosezioni  $(C_h, D_h)$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ) nel solito modo che si segue per le ciambelle con  $p$  fori; e  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p-1$ ),  $p-1$  linee semplici che congiungono le  $p$  retrosezioni; tagliando  $A$  lungo le linee  $C_h, D_h, E_k$ , questi tagli vengono a formare, come è ben noto, un unico contorno  $k$ , e la  $A$  si trasforma allora in una superficie semplicemente connessa.

Consideriamo ora una piccola linea semplice e chiusa  $\gamma$ , tracciata su  $A$ , ed asportiamo la piccola parte di  $A$  racchiusa da  $\gamma$ ; dedurremo così la  $A$  una superficie aperta  $\overline{A}$ .

Dalla possibilità di risolvere il problema di DIRICHLET per un qualunque campo di  $A$ , segue, come per la superficie di RIEMANN, e in maniera del tutto analoga, l'esistenza di funzioni armoniche in  $\overline{A}$  finite ovunque, con moduli di periodicità assegnati alle retrosezioni  $C_h, D_h$ ; e che assumono su  $\gamma$  valori dati.

Dalla validità della formula di GREEN, segue poi l'esistenza di funzioni armoniche di 1.<sup>a</sup> specie sulla primitiva superficie  $A$  (chiusa), cioè di funzioni armoniche con mo-

duli di periodicità assegnati alle retrosezioni e finite in ogni punto, su tutta la  $A$ . <sup>(13)</sup>

Considerando le funzioni armoniche coniugate di queste, si ottengono funzioni analitiche di 1.<sup>a</sup> specie, cioè finite ovunque, su tutta la  $A$ , delle quali possono assegnarsi ad arbitrio le parti immaginarie dei periodi ai tagli  $C_h$  e  $D_h$ .

Anche per la costruzione delle funzioni analitiche di 2.<sup>a</sup> specie esistenti su tutta la  $A$ , che hanno in un punto assegnato un polo di un dato ordine e con assegnate parti immaginarie dei periodi, vale il procedimento di PICARD. Occorre avvertire però che, mentre per la superficie di RIEMANN si comincia col costruire una funzione armonica che si comporti in un punto prefissato come  $-\frac{\text{sen } \theta}{\varrho}$  con  $\theta$  e  $\varrho$  coordinate polari relative al punto, considerando noi le singolarità di una funzione rispetto alla variabile principale, le funzioni armoniche da cui queste funzioni analitiche derivano, dovranno comportarsi in quel punto  $P$  assegnato come la funzione  $-\frac{\text{sen } \theta}{r}$  dove  $\theta$  e  $r$  sono le coordinate polari relative alla variabile principale  $\tau$ .

Se la funzione armonica da cui partiamo si comporta in  $P$  come  $-\frac{a \text{ sen } \theta}{r^t}$ , con  $a$  costante complessa o reale, con  $t$  intero e positivo, otterremo una funzione analitica di 2.<sup>a</sup> specie che ha in  $P$  un polo d'ordine  $t$  e con termine d'infinito  $\frac{a}{\tau^t}$ .

---

<sup>(13)</sup> PICARD, cfr. l. c. <sup>(1)</sup>, p. 562-566.

9. — Le funzioni analitiche (di seconda specie) ultimamente considerate hanno in generale dei periodi. Combinandone però linearmente ed omogeneamente un numero, e scegliendo i coefficienti in modo da annullare i periodi, risulta la possibilità di ottenere *funzioni analitiche uniformi su tutta la superficie A e dotate solo di singolarità polari*.

Si possono anzi ottenere di tali funzioni che abbiano un solo polo fissato ad arbitrio. Sia infatti  $P$  un punto arbitrario di  $A$  e  $\tau$  la variabile principale in  $P$ , ed assegnamo un numero  $k$  convenientemente elevato di termini

$$\frac{A_1}{\tau^{t_1}}, \frac{A_2}{\tau^{t_2}}, \dots, \frac{A_k}{\tau^{t_k}},$$

dove i numeri  $t_1, t_2, \dots, t_k$  (interi positivi) sono distinti ma del resto arbitrari. Per l'ultima osservazione del n.° precedente potremo ottenere  $k$  funzioni di 2.<sup>a</sup> specie

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$$

aventi ciascuna un polo nel solo punto  $P$ , e per termini d'infinito rispettivamente i termini sopra segnati. Poichè i numeri  $t_1, t_2, \dots, t_k$  sono diversi, queste funzioni sono linearmente indipendenti, e si potrà formare, essendo  $k$  convenientemente elevato, una combinazione lineare  $\sum \lambda_s f_s$  priva di periodi (e non costante per la indipendenza delle  $f_s$ ); essa avrà un polo nel solo punto  $P$ , e l'ordine di questo polo sarà uno dei numeri  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Quindi:

a) *Assegnati ad arbitrio un punto  $P$  di  $A$ , un numero  $t$  intero positivo sufficientemente grande (del resto arbitrario) ed un coefficiente  $a$ , esistono funzioni uniformi su tutta  $A$ , aventi come unica singolarità un polo in  $P$  di ordine  $t$  col primo ter-*

mine  $\frac{a}{\tau^i}$ . Nel modo consueto (v. ad es. PICARD, l. c. nota <sup>(1)</sup>)

Tome II, pag. 17) si dimostra poi che:

b) *Una funzione analitica uniforme su tutta la  $A$ , e regolare in ogni punto, (cioè finita continua e monodroma su tutta la  $A$ ) è una costante <sup>(14)</sup>.*

Si ha anche:

c) *Due funzioni uniformi su  $A$ , che abbiano gli stessi poli e gli stessi termini d'infinito, differiscono per una costante.* (Segue dalla proprietà b) applicata alla differenza delle due funzioni). Ed è vero che:

— Se una funzione analitica uniforme su tutta  $A$ , (od anche soltanto monodroma in un campo di  $A$ ), *non avente che poli*, non prende un certo valore non prende neppure quelli sufficientemente vicini. Ne segue:

d) *Sulla  $A$  ogni funzione analitica uniforme con soli poli prende ogni valore uno stesso numero di volte (contando le molteplicità).*

Di fatto se la  $f$  prendesse  $n$  volte il valore  $a$ ,  $m$  volte il valore  $b$ , con  $n \neq m$ , basterebbe applicare i noti processi di ripartizione per concludere quanto vogliamo.

Il numero delle volte che una funzione analitica uniforme con soli poli prende uno stesso valore dicesi *valenza della funzione*.

---

<sup>(14)</sup> Il Prof. CECIONI me ne ha comunicata questa dimostrazione valevole in tutti i casi analoghi. La funzione armonica, parte reale o coefficiente dell'immaginario dovrebbe avere, pei soliti teoremi fondamentali, un massimo ed un minimo che raggiungerebbe, il primo, ad es., in un punto  $P$ ; ma tale funzione è regolare e monodroma nell'intorno di  $P$ ; perciò per le note proprietà delle funzioni armoniche essa è costante.

e) *Detta  $f$  una funzione uniforme su  $A$  con soli poli, i punti  $P$  nei quali  $f - f(P)$  diviene infinitesima di ordine  $> 1$  sono in numero finito.*

Si divida la superficie in intorno ricoprentisi in parte; ora per ogni tale intorno, contenente anche un vertice, l'affermazione è vera, come è dimostrato nell'analogha considerazione riguardante le arce appartenenti a superficie di RIEMANN <sup>(15)</sup>.

### **L'equazione $g(u, v) = 0$ fra due funzioni generiche analitiche uniformi con soli poli.**

10. Le considerazioni fin qui svolte, e in modo particolare le *d*) e *e*) del numero precedente, fanno sì che possano qui essere ripetute esattamente le considerazioni svolte nella Memoria citata nella nota <sup>(3)</sup> relativamente alle aree pluriconnesse appartenenti a una superficie di RIEMANN, intorno all'equazione  $g(u, v)$  che lega due funzioni  $u, v$ , uniformi con poli; e cioè:

Considerate due funzioni  $f_1 = u, f_2 = v$ , uniformi su  $A$ , non aventi che poli, di valenza  $v_1$ , e  $v_2$ , delle quali la prima sia comunque particolare, la seconda generica, possiamo dire che assegnato per la  $u$  un valore qualunque  $u_0$ , esistono sulla  $A_{v_1}$  punti generalmente distinti nei quali è  $f_1 = u_0$  e vi è solo un numero finito di valori di  $u_0$  pei quali i detti punti  $P_1, \dots, P_{v_1}$  non sono tutti distinti; in ognuno di questi punti  $P_i$  la funzione  $v = f_2$  ha un certo valore e questi  $v_i$  valori

---

<sup>(15)</sup> CECIONI, Cfr. l. c. <sup>(3)</sup>, pag. 57.

sono poi generalmente distinti. Nasce in tal modo una funzione  $v(u)$  la quale per ogni valore di  $u$  assume un numero di valori distinti che non supera mai  $v_1$  e che in generale è uguale proprio a  $v_1$ . Si ottiene così per ogni valore (finito o infinito) di  $u$  un certo numero ( $\leq v_1$ ) di elementi analitici  $v(u)$ <sup>(16)</sup>.

Relativamente alla natura della funzione  $v(u)$ , possiamo dire:<sup>(17)</sup>

a) *Per ogni valore di  $u$  (senza eccezioni) si hanno tanti elementi analitici distinti della funzione  $v(u)$  quanti sono i punti distinti della superficie  $A$  in cui la  $f_1$  assume il considerato valore. (Ancorchè in alcuni di tali punti la funzione  $f_2$  assuma valori uguali).*

b) *Tali elementi analitici sono regolari, o polari, o corrispondenti a punti critici algebrici; queste ultime due circostanze (che possono anche presentarsi unite) non hanno luogo che per un numero finito di valori di  $u$ .*

c) *Gli elementi analitici della funzione  $v(u)$  sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni coi punti della superficie  $A$ .*<sup>(18)</sup>

---

<sup>(16)</sup> Cfr. CECIONI l. c. (3), pag. 64-65. Ricordiamo anche che con la frase « elemento analitico » intendiamo uno sviluppo in serie di tipo regolare oppure polare oppure relativo a un punto critico algebrico (Cfr. l. c. pag. 30).

<sup>(17)</sup> CECIONI, l. c. (3), pag. 72-73.

<sup>(18)</sup> La dimostrazione di queste proprietà è più semplice per la superficie  $A$  di quello che non sia per le aree pluriconnesse appartenenti a superficie di RIEMANN, perchè la variabile  $\theta$  a cui dobbiamo riferirci in questa dimostrazione, (CECIONI, l. c. n. (3), pag. 64), è per noi sempre la variabile principale relativa ai singoli punti di  $A$ .

E possiamo conseguentemente enunciare il teorema:

*Date sulla  $A$  due funzioni  $u = f_1, v = f_2$  uniformi e non aventi che poli, la prima delle quali sia del tutto arbitraria, la seconda generica, esse sono legate da una equazione algebrica*

$$g(u, v) = 0 \quad (\text{I})$$

*il cui grado in  $v$  è uguale alla valenza  $v_1$  di  $u$  sulla  $A$ . Reciprocamente: l'insieme delle funzioni algebriche definite dalla (I), considerate in tutta la loro estensione, coincide completamente con la funzione  $v(u)$ .*

Consideriamo ora la riemanniana  $R$  relativa all'equazione algebrica (I); i suoi punti corrispondendo biunivocamente senza eccezioni agli elementi analitici regolari o no, della funzione algebrica data dalla (I), corrispondono biunivocamente senza eccezioni agli elementi analitici della  $v(u)$  e quindi (per la  $c$ ) ai punti di  $A$ .

Concludiamo allora:

*I punti della riemanniana  $R$  relativa all'equazione algebrica*

$$g(u, v) = 0$$

*sono in corrispondenza biunivoca continua senza eccezioni con i punti della superficie  $A$ ; tale corrispondenza è conforme, essendo unici eventuali punti eccezionali i punti di diramazione di  $R$  e i vertici di  $A$ .*

La (I) è inoltre irriducibile ed è di genere  $p$ .

Per le proprietà delle funzioni analitiche su  $A$ , e per l'ultimo teorema enunciato, è chiaro che ogni funzione analitica, uniforme su  $R$ , dotata di soli poli, viene a godere di queste stesse proprietà quando si interpreti come funzione su  $R$ , ed è quindi una funzione *razionale* su  $R$ .

Quindi :

Ogni funzione analitica, uniforme su  $A$ , dotata di soli poli, è funzione razionale su  $R$ , e viceversa.

Ne viene che ad ogni superficie  $A$  corrisponde una ben determinata classe di curve algebriche, quelle che corrispondono alla  $R$ . E poichè, come è noto, la condizione necessaria e sufficiente affinchè due riemanniane siano rappresentabili conformemente l'una sull'altra è che diano luogo alla stessa classe di curve algebriche, *questa è anche la condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie del tipo  $A$  siano rappresentabili conformemente l'una sull'altra.*