

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

MANLIO PAGGI

**Funzioni ellittiche di specie  $n$  con particolare riguardo al caso  $n = 3$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1<sup>re</sup> série*, tome 16,  
n° 1 (1930), p. 1-42

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1930\\_1\\_16\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1930_1_16_1_1_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DOTT. MANLIO PAGGI

---

# FUNZIONI ELLITTICHE

DI SPECIE  $n$

CON PARTICOLARE RIGUARDO

AL CASO  $n=3$

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE PACINI MARIOTTI

Via della Faggiola, 9

---

1929



---

---

## INTRODUZIONE

Le funzioni  $sn\ v$   $cn\ v$   $dn\ v$  di Jacobi sono i rapporti (con opportune funzioni modulari come fattori) delle funzioni  $\sigma(u)$ ,  $\sigma_{01}(u)$ ,  $\sigma_{11}(u)$ , per la  $\sigma_{10}(u)$  definite a pag. 160 e seg. nel Bd. I del trattato *Elliptischen Modulfunctionen* del Klein-Fricke (che d'ora in poi indicherò brevemente con Klein-Fricke). Mi sono proposto allora di studiare le funzioni ellittiche:

$$x_k(u) = \frac{\sigma_{k,0}(u)^{(1)}}{\sigma(u)}, \quad k=1, \dots, n-1$$

le trascendenti  $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$  di periodi  $\omega_1, \omega_2$ , come la  $\sigma(u)$ , essendo definite a pag. 23, Bd. II del Klein-Fricke. Esse sono di periodi  $\omega_1, n\omega_2$ , e rispetto ai periodi  $\omega_1, \omega_2$  sono di specie  $n^2$  per  $n$  dispari e  $2n^2$  per  $n$  pari (pag. 23 e seg. Bd. II Klein-Fricke), mentre rispetto ai periodi  $\omega_1, n\omega_2$  sono di specie  $n$  per  $n$  dispari, e di specie  $2n$  per  $n$  pari.

---

(1) Queste funzioni sono le coordinate non omogenee del punto variabile su una curva normale ellittica  $C$  d'ordine  $n$ ; vedi Cap. V, Bd. II Klein-Fricke. Si deve supporre  $n \geq 3$  perchè per  $n = 2$  si ha una sola funzione.

Allora, come ho mostrato nella parte I, dove ho trattato il caso di  $n$  generico, considerando le funzioni:  $X_k(u) = h_k(\omega)x_k(u)$ , con  $h_k(\omega)$  opportuna funzione modulare di specie  $n^2$  o  $2n^2$ , (rispetto al rapporto  $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ) ho ottenuto: *un sistema completo di funzioni ellittiche dell'  $n^{\text{ma}}$  specie rispetto ad  $\omega_1, \omega_2$* (1).

Secondo questo concetto le funzioni  $pu, p'u$  di Weierstrass, quelle  $snv, cnv, dnv$  di Jacobi, vengono ad occupare un posto ben determinato nella teoria delle funzioni ellittiche, le prime essendo di 1.<sup>a</sup> specie, le altre di 2.<sup>a</sup> specie. Ho ottenuto insieme due altri risultati e cioè: 1.<sup>o</sup>) funzioni che ammettono formule di addizione nelle quali comparisce il solo coefficiente numerico uno: 2.<sup>o</sup>) funzioni che ammettono sviluppi in serie con coefficienti che sono funzioni modulari di specie  $n$ .

Nella parte II mi sono diffuso sul caso  $n=3$  che ci dà due funzioni  $X(u), Y(u)$  di 3.<sup>a</sup> specie che hanno sviluppi in serie di una certa variabile  $v$  con coefficienti polinomi nella quantità  $\xi(\omega)$ , irrazionalità tetraedica di  $J(\omega)$ ; questo nel § 3. Nel § 4 ho studiato il teorema di moltiplicazione della funzione:

$$L(u) = \frac{1}{\mathfrak{B}(X(u) - Y(u)) + \xi} = K \cdot (p(u, \omega_1, \mathfrak{B} \omega_2) - p_{10})$$

$K$  essendo un fattore costante rispetto ad  $u$  ed ho visto che  $L(nu)$  si esprime razionalmente per  $L(u)$  con coefficienti polinomi in  $\xi$  o anche precisando: basta sostituire alla  $pu$  la funzione  $K(pu - p_{10})$  per ottenere una formula di multi-

---

(1) Chiamo sistema completo di funzioni ellittiche, un sistema di funzioni ellittiche mediante il quale si rappresenta ogni funzione ellittica cogli stessi periodi.

plicazione della stessa natura, dove compariscono polinomi nella quantità  $\xi$  invece che negli invarianti  $g_2, g_3$ .

Nel § 5 ho trattato il problema della divisione dei periodi, il quale, se per  $n \not\equiv 0 \pmod{3}$  ha profonda analogia con quello delle funzioni di 1.<sup>a</sup> specie, per  $n \equiv 0 \pmod{3}$  se ne differenzia perchè l'equazione da cui dipende si spezza in due o quattro parti, secondochè  $n \equiv \pm 3$  o  $n \equiv 0 \pmod{9}$ .

Nel § 6 ho studiato l'effetto prodotto sulle  $X(u), (Y(u), x(u), y(u)$ , dalle sostituzioni del gruppo modulare sui loro periodi  $\omega_1, 3\omega_2$ , nel § 7 quello del gruppo modulare sui periodi  $\omega_1, \omega_2$ ; queste ultime mi hanno dato occasione di introdurre un sistema completo di otto funzioni ellittiche della 3.<sup>a</sup> specie di cui ho assegnato il teorema di addizione.

Nel § 8 ho trattato un caso del problema della trasformazione d'ordine  $n$ , che mi ha servito a porre formule che cambiano prodotti in sommatorie; il problema generale può risolversi con la scorta dei risultati contenuti nel Klein-Fricke Bd. II e nel trattato: *Funzioni di variabile complessa e funzioni ellittiche* del prof. Bianchi, che io nominerò brevemente nel seguito con la parola « Bianchi ».

Suppongo noto quanto è esposto in questo trattato, le cui indicazioni sono relative all'edizione 1901; nel Klein-Fricke Bd. I fino a pag. 610 (specialmente i capitoli 7, 8, 9 parte II) e nel Bd. II i primi due capitoli e la parte V, cap. 1, 2; le notazioni che adopro sono quelle del Klein-Fricke (Bd. I pag. 146). Premetto inoltre l'avvertenza che le formole di maggior uso sono quelle contenute nei § 8, 9, 11 Bd II parte IV, cap. I.



---

---

## PARTE I.

### Funzioni ellittiche di specie $n$ .

#### § 1.

##### Le funzioni $x_k(u)$ .

Pongo:

$$(1) \quad x_k(u) = \frac{\sigma_{k,0}(u)}{\sigma u}, \quad k=1, 2, \dots, n-1; \quad x_0(u) = 1.$$

È: (vedi Klein-Fricke Bd. II, pag. 23 e seg).

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad x_k(u + \omega_1) = x_k(u) \\ b) \quad x_k(u + \omega_2) = \varepsilon^k x_k(u) \\ c) \quad x_k(-u) = x_k(u) = -x_{n-k}(u) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} \\ d) \quad x_k\left(u - r \frac{\omega_1}{n}\right) = \frac{x_{k+r}(u)}{x_r(u)} \text{ con } r \text{ intero qualunque.} \end{array} \right. .$$

Esse sono di periodi  $\omega_1, n\omega_2$  nel parallelogrammo dei quali la  $x_k(u)$  ha gli  $n$  infinitesimi in:

$$u = k \frac{\omega_1}{n} + v \omega_2, \quad v = 0, 1, \dots, n-1.$$



e tutti gli  $n$  poli:

$$u = \nu \omega_2. \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

con i residui:

$$(3) \quad \varepsilon^{-k\nu} \sigma_{k,0}.$$

Scrivo inoltre:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(u) = p(u, \omega_1, n\omega_2) \quad P'(u) = p'(u, \omega_1, n\omega_2) \\ Z(u) = - \int P'(u) du \end{array} \right.$$

indicando però sempre con  $pu, p'u$  le funzioni di Weierstrass con i periodi  $\omega_1, \omega_2$ . È allora (Bianchi § 5)

$$x_k(u) = c_k + \sigma_{k,0} \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{-k\nu} Z(u - \nu\omega_2).$$

Per il teorema d'addizione della  $Z(u)$  (Bianchi, § 106) e ricavando la costante  $c_k$  col fare:  $u = k \frac{\omega_1}{n}$ , si ha:

$$(5) \quad x_k(u) = \frac{1}{2} \sigma_{k,0} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon^{-k\nu} \frac{P'u + P'_{0\nu}}{Pu - P_{0\nu}} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon^{-k\nu} \frac{P'_{k,0} + P'_{0\nu}}{P_{k,0} - P_{0\nu}} \right\}.$$

Queste, nelle  $n-1$  quantità:

$$\frac{P'u}{Pu - P_{0\nu}}, \quad \frac{P'_{0\nu}}{Pu - P_{0\nu}}, \quad \left( \nu = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \right),$$

sono  $n-1$  equazioni lineari indipendenti che permettono di ricavarle ed esprimere così  $Pu, P'u$  per funzioni lineari fratte delle  $x_k(u)$ ; queste formano dunque un sistema completo di funzioni ellittiche di periodi  $\omega_1, n\omega_2$ . Notiamo pure le relazioni:

$$(6) \quad \frac{1}{\sigma_{k,0}^2} x_k(u) x_{-k}(u) = p_{k,0} - pu \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

esse seguono osservando che nei due membri si hanno due funzioni ellittiche di periodi  $\omega_1, \omega_2$  collo stesso termine d'infinito in  $u=0$ . Facendo in essa  $u - \frac{\lambda \omega_1}{n}, u + \frac{\lambda \omega_1}{n}$  successivamente, sottraendo e tenendo conto della (VI) Bianchi pag. 285, si può esprimere in più modi la  $p'u$  per mezzo delle  $x_k(u)$ . Le (6) sono  $\frac{n-1}{2}$  per  $n$  dispari ed  $\frac{n}{2}$  per  $n$  pari (1); sostituendovi le (5) si hanno diverse forme di una formula di trasformazione d'ordine  $n$ .

---

(1) Per  $n$  *dispari* si ottengono dalle (6), in modo facile le  $\frac{n(n-3)}{2}$  relazioni quadratiche indipendenti che legano le  $x_k(u)$ ; queste relazioni sono poste nel Klein-Fricke Bd. II, pag. 267 sotto altra forma ed ottenute per altra via. Dalla (6) si hanno le  $\frac{n-3}{2}$  relazioni:

$$(A) \quad \frac{1}{\sigma_{\lambda,0}^2} x_{\lambda}(u) x_{-\lambda}(u) + p_{k,0} - p_{\lambda,0} = \frac{1}{\sigma_{k,0}^2} x_k(u) x_{-k}(u)$$

eseguendo le  $n$  operazioni:  $u' = u - r \frac{\omega_1}{n}; \quad r = 0, 1, \dots, n-1; \quad$  si ha:

$$\sigma_{k,0}^2 x_{\lambda+r} \cdot x_{-\lambda+r} - \sigma_{k-\lambda,0} \sigma_{k+\lambda,0} \cdot x_r^2 = \sigma_{\lambda,0}^2 x_{k+r} \cdot x_{k-r}$$

e si vede facilmente tenendo fisso  $\lambda$ , che queste sono appunto  $\frac{n(n-3)}{2}$  relazioni indipendenti che si ottengono dando  $k$  i valori  $1, 2, \dots, \lambda-1, \lambda+1, \frac{n-1}{2}$  e ad  $r: 0, 1, \dots, n-1$ .

## § 2.

**Formule di addizione. Normalizzazione,  
derivate, sviluppi in serie.**

Si consideri le due funzioni:

$$\frac{x_{-2k}(\alpha)}{x_k(u)} x_k(u + \alpha) + \frac{x_{2k}(u)}{x_k(u)} x_{-k}(u + \alpha)$$

$$\frac{x_{-k}(u)}{x_{-k}(u)} x_k(u + \alpha) + \frac{x_{2k}(u)}{x_{-k}(u)} x_{-k}(u + \alpha)$$

di periodi  $\omega_1, \omega_2$  coi due poli del 1.° ordine in:

$$u = -\alpha, \quad u = k \frac{\omega_1}{n} \quad \text{la prima}$$

$$u = -\alpha, \quad u = -k \frac{\omega_1}{n} \quad \text{la seconda.}$$

Siccome hanno i residui nulli sono due costanti, i cui valori  $x_{-k}(\alpha) \cdot \frac{\sigma_{2k,0}}{\sigma_{k,0}}$  della prima,  $x_k(\alpha) \cdot \frac{\sigma_{2k,0}}{\sigma_{k,0}}$  della seconda, si ottengono facendo ad es. rispettivamente:

$$u = \frac{2k\omega_1}{n}, \quad u = -\frac{2k\omega_1}{n};$$

si ha così:

$$(7) \quad x_k(u + \alpha) = \frac{\sigma_{2k,0}}{\sigma_{k,0}} \cdot \frac{x_{-k}(\alpha) x_{2k}(\alpha) x_k(u) - x_k(\alpha) x_{-k}(u) x_{2k}(u)}{x_{2k}(\alpha) x_{-2k}(\alpha) - x_{2k}(u) x_{-2k}(u)}$$

Tenendo conto della (A) (nota § precedente) si può far figurare al denominatore l'indice  $k$  invece che  $2k$ , con che il fattore che compare si cambia nel reciproco.

Moltiplicando le  $x_k(u)$  per una opportuna funzione modulare, mi propongo di ottenere funzioni:

1.° che considerate rispetto a periodi  $\omega_1, \omega_2$ , siano di specie  $n$ ; le  $x_k(u)$  sono di specie  $n^2$  per  $n$  dispari,  $2n^2$  per  $n$  pari; (1)

2.° che abbiano formole di addizione in cui compariscono solo coefficienti numerici;

3.° che facendo  $u = \text{cost.}$  siano funzioni (non forme) modulari, in guisa da possedere sviluppi in serie (di un'opportuna variabile) con coefficienti che sono *funzioni* (non forme) modulari dell' $n^{\text{ma}}$  specie

Si consegue ciò ponendo:

$$(8) \quad X_k(u) = h_k x_k(u) \quad \text{essendo:}$$

$$(9) \quad h_k(\omega) = \frac{f(p_{\lambda,\mu})}{\varphi(p'_{\lambda,\mu})} \cdot \frac{1}{\sigma_{k,0}} = \tau(\omega_1, \omega_2) \frac{1}{\sigma_{k,0}}$$

dove  $f(p_{\lambda,\mu}), \varphi(p_{\lambda,\mu})$ , sono forme delle  $\frac{n^2-1}{2}$  quantità  $p_{\lambda,\mu}$ ,

(1) Ma rispetto ai periodi  $\omega_1, n\omega_2$  sono di specie  $n$  per  $n$  dispari,  $2n$  per  $n$  pari. Intanto nella (5) l'espressione entro  $\{ \}$  è di specie  $n$ ; la  $\sigma_{k,0}$  si ricava così: si faccia  $k \equiv 2\lambda \pmod{n}$  il che è sempre possibile per  $n$  dispari e lo è per  $n$  pari quando  $k$  è pari, in questi casi facendo  $u = \lambda \frac{\omega_1}{n}$  il 1° membro diventa uguale ad uno ed il 2° membro è il prodotto di  $\sigma_{k,0}$  per una funzione di specie  $n$ ; ma se  $n$  è pari e  $k$  è dispari si ricava  $\sigma_{k,0}$  facendo  $u = \frac{k\omega_1}{2n}$  con che risulta funzione di specie  $2n$ .

$p'_{\lambda, \mu}$ , tali che i gradi  $r$  di  $f$ ,  $s$  di  $\varphi$  soddisfano la relazione :

$$3s - 2r = 1.$$

La funzione  $h_k(\omega)$  è della specie  $n^2$  per  $n$  dispari,  $2n^2$  per  $n$  pari, essa è determinata a meno del rapporto di quelle due forme; ragioni speciali possono deciderci a fissarla completamente (come faremo per  $n=3$ ).

Si ha così:

$$(10) \quad X_k(u + \alpha) = \frac{X_{-k}(\alpha) X_{2k}(\alpha) X_k(u) - X_k(\alpha) X_{-k}(u) X_{2k}(u)}{X_{2k}(\alpha) X_{-2k}(\alpha) - X_{-k}(u) X_{-2k}(u)} \quad (1)$$

Veniamo ora al calcolo delle derivate. Da (5), (8), (9), si ha intanto:

$$(11) \quad X_k(u) = \frac{\tau}{u} - \frac{1}{2} \tau \sum_{1, \nu}^{n-1} \varepsilon^{-k\nu} \frac{P'_{k,0} + P'_{0\nu}}{P_{k,0} - P_{0\nu}} + \dots$$

(1) Questa e la (7) non valgono quando per  $n$  pari è  $k = \frac{n}{2}$ , ma, dando ad esse un'altra forma, si ha un teorema d'addizione anche per questo caso. Si ha infatti nel solito modo:

$$\begin{aligned} \sigma_{k+\lambda,0} x_\lambda(\alpha) \frac{x_k(u+\alpha)}{x_k(u)} - \sigma_{k,0} x_{-\lambda}(u) \frac{x_{k+\lambda}(u+\alpha)}{x_k(u)} &= \sigma_{\lambda,0} x_{k+\lambda}(\alpha) \\ \sigma_{k+\lambda,0} x_\lambda(u) \frac{x_k(u+\alpha)}{x_{k+\lambda}(u)} - \sigma_{k,0} x_{-\lambda}(\alpha) \frac{x_{k+\lambda}(u+\alpha)}{x_{k+\lambda}(u)} &= \sigma_{\lambda,0} x_k(\alpha) \end{aligned}$$

o più in generale si può legare con relazioni lineari di questo tipo,  $x_k(u + \alpha)$ , con  $x_{\mu k + \lambda}(u + \alpha)$ . Anche le formule di addizione, che si ricavano da queste, per le  $X_k(u)$ , hanno il solo coefficiente numerico: uno. Nelle considerazioni che faremo, scriveremo sempre le (10), tenendo conto però di questa nota e sottintendendo l'esclusione di  $k = \frac{n}{2}$ .

che sono i termini iniziali dello sviluppo in serie di  $X_k(u)$ .  
Dalla (10) si ha poi:

$$\begin{aligned} & \frac{X_k(u+h) - X_k(u)}{h} = \\ & = \frac{X_k(u) X_{2k}(h) (X_{-k}(h) - X_{2k}(h)) h}{(X_{2k}(h) X_{-2k}(h) - X_{2k}(u) X_{-2k}(u)) h^2} + \\ & + \frac{(X_{2k}(u) X_{-2k}(u) - X_k(h) X_{-k}(u) X_{2k}(u)) h}{(X_{2k}(h) X_{-2k}(h) - X_{2k}(u) X_{-2k}(u)) h^2} \end{aligned}$$

facendo  $h \rightarrow 0$  e tenendo conto della (11) si ha:

$$(12) \quad X'_k(u) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon^{-k\nu} \frac{P'_{k,0} + P'_{0\nu}}{P_{k,0} - P_{0\nu}} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon^{-2k\nu} \frac{P'_{2k,0} + P'_{0\nu}}{P_{2k,0} - P_{0\nu}} \right) X_k(u) - \frac{X_{-k}(u) X_{2k}(u)}{\tau}$$

Eseguendo il cambiamento di variabile:

$$(13) \quad v = \frac{u}{\tau}$$

si ottengono per le  $X_k(u)$ , sviluppi in serie secondo le potenze di  $v$ , con coefficienti che sono funzioni modulari dell' $n^{\text{ma}}$  specie. Si ha intanto dalla (12):

$$(14) \quad X'_k(v) = \frac{1}{2} \tau \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon^{-k\nu} \frac{P'_{k,0} + P'_{0\nu}}{P_{k,0} - P_{0\nu}} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon^{-2k\nu} \frac{P'_{2k,0} + P'_{0\nu}}{P_{2k,0} - P_{0\nu}} \right) X_k(v) + X_{-k}(v) X_{2k}(v).$$

Poniamo ora:

$$X_k(v) = \frac{1}{v} + a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$$

e facciamo vedere anzitutto che:

$$a_0 = -\frac{1}{2} \tau \sum_{1, \nu}^{n-1} \varepsilon^{-k\nu} \frac{P'_{k,0} + P'_{0,\nu}}{P_{k,0} - P_{0,\nu}}$$

è una funzione modulare della specie  $n$ ; poniamo perciò:

$$\xi_k(u) = \frac{1}{X_k(u)};$$

sviluppando in serie i due membri si ha:

$$a_0 = -\frac{1}{2} \tau^2 \xi''_k(0)$$

e basterà dimostrare che  $\xi''_k(0)$  è dell'  $n^{\text{ma}}$  specie; è:

$$\xi''_k(0) = -\frac{2}{\tau} \frac{\sigma'_{k,0}}{\sigma_{k,0}}$$

come si vede derivando direttamente la (1) e poichè  $\frac{\sigma'_{k,0}}{\sigma_{k,0}}$  è della specie  $n$  ( $\sigma'_{\lambda,\mu}(u)$ ,  $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$  assumono lo stesso fattore per le sostituzioni del  $\Gamma_{2\mu(n)}$ ) ne segue l'asserto. Dunque se si pone:

$$X_{2k}(u) = \frac{1}{v} + \alpha_0 + \alpha_1 v + \alpha_2 v^2 + \dots$$

si ha che  $\alpha_0$  è della specie  $n$ ; tale sarà il fattore di  $X_k(v)$ , nella (14), che è uguale a  $-a_0 + \alpha_0$ . Ma è allora:

$$\xi'_k(v) = -\left\{ (\alpha_0 - a_0) \xi_k(v) + \frac{\xi^2_k(v)}{\xi_{-k}(v) \xi_{2k}(v)} \right\}$$

e quindi le successive derivate:  $\xi'(0)$ ,  $\xi''(0)$ ,  $\xi'''(0)$ , ... sono funzioni modulari dell'  $n^{\text{ma}}$  specie; tali saranno dunque anche le quantità  $a_1, a_2, \dots$ . Si conclude (Klein-Fricke Bd. I, pag. 590):

*I coefficienti dello sviluppo in serie di  $X_k(v)$ , secondo le potenze di  $v$ , sono funzioni razionali di  $J$  e di una funzione modulare di specie  $n$ .*

Ma  $J(\omega)$  è funzione razionale, di  $12^\circ$ ,  $24^\circ$ ,  $60^\circ$  grado rispettivamente, delle funzioni modulari  $\xi(\omega)$ ,  $\eta(\omega)$ ,  $\zeta(\omega)$  che sono di  $3^a$ ,  $4^a$ ,  $5^a$  specie e sono rispettivamente le irrazionalità: tetraedrica, ottaedrica, icosaedrica di  $J$  (Klein-Fricke Bd. I, pag. 102 e seg., 611 e seg.) onde: *per  $n = 3, 4, 5$  i detti sviluppi in serie hanno coefficienti che sono funzioni razionali di  $\xi, \eta, \zeta$  rispettivamente.*

Verificheremo ciò subito per il caso  $n=3$  che sarà argomento della rimanente trattazione.



## PARTE II.

### Funzioni ellettiche di terza specie.

#### § 3.

#### **Funzioni $X(u)$ , $Y(u)$ ; formule relative, sviluppi in serie.**

Poniamo:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(u) = h \cdot x(u) = h \cdot x_{10}(u) \\ Y(u) = h \cdot y(u) = h \cdot x_{20}(u) \quad \text{essendo:} \\ h = e^{-\frac{\pi i}{3}} \frac{\sigma_{11} \sigma_1}{\sigma_{01}^2} \quad (1) \end{array} \right.$$

È:

$$(16) \quad h^3 = \frac{\xi^2 + \xi + 1}{3}$$

perciò la funzione  $h$  è legata a  $J$  da una relazione d'ordine 36 in  $h$  e 2 in  $J$  (perchè è  $J = \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)}$  del 12° grado in  $\xi$ ); questa relazione è *irriducibile* perchè come vedremo  $h$  (§ 6)

---

(1) Ho posto in questo caso:  $\tau = \frac{p_{10} - p_{01}}{p'_{10}}$ ; l'espressione di  $h$  sopra scritta risulta in virtù della formula:  $pu - pv = -\frac{\sigma(u-v) \cdot \sigma(u+v)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2 v}$  e perchè  $p'_{10} = \frac{1}{\sigma^3_{10}}$  (Klein-Fricke Bd. II, pag. 276 (9)); ho fatto tale scelta per poter esprimere facilmente  $h$  in funzione di  $\xi$ .

appartiene, rispetto ad  $\omega$ , ad un sottogruppo  $\Gamma_{36}$  della specie nove. Dalla (5) si ha :

$$x(u) = \frac{1}{2} \sigma_{10} \left\{ \frac{P'_{10} + (1 + 2\varrho) P'_{01}}{P_{10} - P_{01}} - \frac{P'u + (1 + 2\varrho) P'_{01}}{Pu - P_{01}} \right\}$$

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

facendo  $u = \frac{2\omega_1}{3}$  ed essendo:  $x\left(\frac{2\omega_1}{3}\right) = 1$  si ha :

$$(16^*) \quad \sigma_{10} = \frac{P_{10} - P_{01}}{P'_{10}} \quad \text{e quindi: (è } x(-u) = -y(u))$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(u) = \frac{1}{2} \frac{P_{10} - P_{01}}{P'_{10}} \left\{ \frac{P'_{10} + (1 + 2\varrho) P'_{01}}{P_{10} - P_{01}} - \frac{P'u + (1 + 2\varrho) P'_{01}}{Pu - P_{01}} \right\} \\ y(u) = -\frac{1}{2} \frac{P_{10} - P_{01}}{P'_{10}} \left\{ \frac{P'_{10} + (1 + 2\varrho) P'_{10}}{P_{10} - P_{01}} + \frac{P'(u) - (1 + 2\varrho) P'_{01}}{Pu - P_{01}} \right\} \end{array} \right.$$

Da cui inversamente:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} Pu - P_{01} = - \frac{(1 + 2\varrho) P'_{01}}{x(u) - y(u) - \frac{P'_{10} + (1 + 2\varrho) P'_{01}}{P'_{10}}} \cdot \frac{P_{10} - P_{01}}{P'_{10}} \\ P'u = \frac{(1 + 2\varrho) P'_{01} (x(u) + y(u))}{x(u) - y(u) - \frac{P'_{10} + (1 + 2\varrho) P'_{01}}{P'_{10}}} \end{array} \right.$$

da cui subito le formule relative a  $X(u)$ ,  $Y(u)$ .

Si ha pure (vedi (6) e quanto è scritto dopo):

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} pu - p_{.0} = \frac{1}{\sigma_{10}^2} x(u) \cdot y(u) \\ p'_{10} = -p'_{10} (x^3(u) + y^3(u)) \end{array} \right.$$

dalle quali segue: ogni funzione ellittica di periodi  $\omega_1, \omega_2$  è funzione razionale del prodotto  $x y$  e lineare di  $x^3 + y^3$ ; se è pari si esprime soltanto per  $x y$ .

Le formule di addizione si ricavano subito dalle (10):

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(u + \alpha) = \frac{X(u) Y^2(\alpha) - X(\alpha) Y^2(u)}{X(\alpha) Y(\alpha) - X(u) Y(u)} \\ Y(u + \alpha) = \frac{X^2(\alpha) Y(u) - Y(\alpha) X^2(u)}{X(\alpha) \cdot Y(\alpha) - X(u) Y(u)} \end{array} \right.$$

Ma è pure; (osservando che il 1° membro essendo una funzione ellittica priva di poli è una costante):

$$(21) \quad Y(\alpha) \cdot Y(u) X(u + \alpha) - X(\alpha) X(u) Y(u + \alpha) - h^3 = 0.$$

Sostituendovi le (20):

$$(22) \quad X^3(u) - Y^3(u) + \xi X(u) Y(u) - \frac{\xi^2 + \xi + 1}{3} = 0$$

che è la relazione cubica fra  $X(u), Y(u)$ .

Dalle (12), (14) si ricava:

$$(23) \quad \left. \begin{array}{l} a) \left\{ \begin{array}{l} X'(u) = - \frac{h \sigma_{10} \frac{P'_{10} + (1+2Q)P'_{01}}{P_{10} - P_{01}} X(u) + Y^2(u)}{h \sigma_{10}} \\ Y'(u) = \frac{h \sigma_{10} \frac{P'_{10} + (1+2Q)P'_{01}}{P_{10} - P_{01}} Y(u) - X^2(u)}{h \sigma_{10}} \end{array} \right. \\ \\ b) \left\{ \begin{array}{l} X'(v) = - \left( h \sigma_{10} \frac{P'_{10} + (1+2Q)P'_{01}}{P_{10} - P_{01}} X(v) + Y^2(v) \right) \\ Y'(v) = h \sigma_{10} \frac{P'_{10} + (1+2Q)P'_{01}}{P_{10} - P_{01}} Y(v) - X^2(v) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

essendo :

$$v = \frac{u}{h \sigma_{10}}$$

Si ponga ora :

$$X(v) = \frac{1}{v} + a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots; \quad Y(v) = \frac{1}{v} - a_0 + a_1 v - a_2 v^2 + \dots$$

Sostituendo in una delle (23) *b*), si hanno equazioni ricorrenti per il calcolo dei coefficienti, equazioni però che non permettono di calcolare  $a_2$  nè di determinare  $a_0$  in funzione di  $\xi$ ; si consegue ciò sostituendo questi sviluppi nella (22) e si vede in definitiva che che il *coefficiente*  $a_k$  è un *polinomio in*  $\xi$  (*a coefficienti razionali*) *d'ordine*  $k+1$ ; i termini iniziali sono :

$$(24) \left\{ \begin{array}{l} X(v) = \frac{1}{v} - \frac{\xi}{6} - \frac{\xi^2}{36} v + \frac{\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)}{162} v^2 + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{13\xi^4 + 144(\xi^2 + \xi + 1)\xi}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5} v^3 + \dots \\ Y(v) = \frac{1}{v} + \frac{\xi}{6} - \frac{\xi^2}{36} v - \frac{\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)}{162} v^2 + \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{13\xi^4 + 144(\xi^2 + \xi + 1)\xi}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5} v^3 + \dots \end{array} \right.$$

Questi sviluppi hanno analogia con quelli delle funzioni di Jacobi, si vede così le  $X(v)$ ,  $Y(v)$  dipendono unicamente da  $v$  e  $\xi$  o da  $v$  e  $\omega$ , tanto che possiamo scriverle:

$$X(v, \xi), Y(v, \xi); \quad X(v, \omega), Y(v, \omega)$$

Ponendo anche:

$$x(u) = \frac{1}{w} + \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots$$

con

$$w = \frac{u}{\sigma_{10}} \quad \alpha_0 = \frac{P'_{10} + (1 + 2\varrho) P'_{01}}{2 P'_{10}} = \frac{1}{2} \left( 2 - \varrho^2 \xi \left( \frac{\omega}{3} \right) \right)$$

si vede nello stesso modo che:  $x(\omega), y(\omega)$  hanno sviluppi in serie secondo le potenze di  $\omega$ , con coefficienti polinomi in  $\xi \left( \frac{\omega}{3} \right)$ ; ciò conformemente alla circostanza che  $X(u), Y(u)$  sono della terza specie rispetto ad  $\omega$  e  $x(u), y(u)$  lo sono rispetto ad  $\frac{\omega}{3}$ .

#### § 4.

#### Moltiplicazione dell'argomento.

Si consideri la funzione *pari*:

$$(25) \quad L(u) = \frac{1}{3(X(u) - Y(u)) + \xi}$$

dimostriamo che:  $L(nu)$  è funzione razionale fratta di  $L(u)$  di grado  $n^2$  al numeratore e  $n^2 - 1$  al denominatore; i coefficienti sono polinomi in  $\xi$  (a coefficienti interi).

È questo un enunciato del tutto analogo a quello della  $P(u)$  (Bianchi, § 111, 112) unica differenza è questa che i polinomi in  $g_2, g_3$  che ivi figurano sono sostituiti da polinomi in  $\xi$ . Dalle (18) e (16\*) si ricava:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} Pu - P_{01} = -3(1+2\varrho) h \sigma_{10} P'_{01} L(u) = KL(u) \\ Pu = -3(1+2\varrho) h \sigma_{10} P'_{01} L(u) = KL'(u) \end{array} \right.$$

dunque  $L(u)$  è proporzionale a  $Pu - P_{01}$  e ciò spiega l' analogo teorema di moltiplicazione. Lo sviluppo in serie di  $L(u)$  incomincia con :

$$L(u) = \frac{27 h^2 \sigma_{10}^2}{\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)} \frac{1}{u^2} \dots$$

e da (26) si ricava :

$$(27) \quad K = \frac{\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)}{27 h^2 \sigma_{10}^2}$$

La dimostrazione del teorema è la medesima di quella riportata nel Bianchi, § 111, 112, e perciò mi limito ad indicarne i cambiamenti; tutto si riduce ad esprimere la funzione  $\psi_n(u)$  ivi definita razionalmente per  $L(u)$ . Si consideri allo scopo la relazione del terzo ordine :

$$(28) \quad L'^2(u) = \frac{1}{3 h^2 \sigma_{10}^2} \left\{ 4(\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)) L^3(u) - 9\xi^2 L^2(u) + 6\xi L(u) - 1 \right\}^{(1)}$$

---

(1) Si noti questa forma interessante dell'integrale ellittico di prima specie :

$$v = \int \frac{3 dL}{\sqrt{4(\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)) L^3 - 9\xi^2 L^2 + 6\xi L - 1}}$$

che la diremo *forma normale* di terza specie (vedi Klein Math. Ann. Bd. 15.

che si ottiene ricavando  $X(u)$ ,  $Y(u)$  da:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(u) - Y(u) = \frac{1 - \xi L(u)}{3 L(u)} \\ X(u) + Y(u) = -h \sigma_{10} \frac{L'(u)}{L(u)} \end{array} \right.$$

e sostituendo nella (22). È inoltre: (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^2(u) X(2u) - X^2(u) Y(2u) = h^3 \\ X(u) X(2u) + Y(u) Y(2u) = X(u) Y(u) \end{array} \right.$$

Con queste, (29) e (28) si ha:

$$(30) \quad L(2u) = \frac{(\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)) L^3(u) - 3\xi L(u) + 2}{3h^2 \sigma_{10}^2 L'^2(u)}$$

Ed allora si ha:

$$\psi_1(u) = 1, \quad \psi_2(u) = -KL'(u),$$

$$(31) \quad \psi_3(u) = \frac{(\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1))^3}{3^9 (h \sigma_{10})^8} \left\{ -(\xi^3 + 9(\xi^2 + \xi + 1)) L^3(u) + 3\xi^2 L^2(u) - 3\xi L(u) + 1 \right\} L(u),$$

$$\psi_4(u) = \frac{L'(u)}{3^{17} (h \sigma_{10})^{14}} P_6(L)$$

---

(1) La prima si ottiene dalla (21), la seconda dalle relazioni che servono al calcolo di  $X(u + \alpha)$ ,  $Y(u + \alpha)$ , § 2.

essendo  $P_6(L)$ , un polinomio di grado 6 in  $L$  con coefficienti polinomi in  $\xi$ . Per le formule ricorrenti contenute in Bianchi l. c. si trova:

$$\psi_n(u) = \psi_{2r+1} = \frac{P_{\frac{n^2-1}{2}}(L(u))}{\mathfrak{B}^\alpha(h\sigma_0)^{n^2-1}}; \psi_n(u) = \psi_{2r} = \frac{L'(u)}{\mathfrak{B}^\beta(h\sigma_0)^{n^2-2}} \cdot P_{\frac{n^2-4}{2}}(L(u))$$

$\alpha, \beta$  essendo convenienti interi e  $P_{\frac{n^2-1}{2}}(L), P_{\frac{n^2-4}{2}}(L)$  polinomi in  $L$  di gradi  $\frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2-4}{2}$ , con coefficienti polinomi in  $\xi$  (a coefficienti interi), sostituendo segue il teorema.

### § 5.

#### Le funzioni $L_{\lambda\mu}$ relative alla divisione dei periodi.

Tralascio la trattazione della divisione sull'argomento perchè del tutto analoga a quella della  $pu$  (Bianchi, § 113) e vengo subito allo studio delle quantità:

$$L_{\lambda\mu} = L\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu \cdot 3\omega_2}{n}\right)$$

proponendomi di studiare l'equazione da cui esse dipendono e di determinarne la specie ed i sottogruppi di appartenenza, considerandole funzioni modulari del rapporto  $\omega$ . Anzitutto poichè la funzione  $L(u)$  è della terza specie ed appartiene al  $\Gamma_{\mu 3} = \Gamma_{12}$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \pmod{3}, \quad (\text{vedi } \S 7)$$



opereremo soltanto con queste sostituzioni ed i sottogruppi di appartenenza saranno contenuti nel  $\Gamma_{\mu(3)}$ . Invece di considerare tutte le  $\frac{1}{2}(n^2-1)$  funzioni  $L_{\lambda\mu}$ , basterà, limitarci a quelle  $\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)$  (1) per le quali il *MCD* fra  $\lambda, \mu, n$  è uno e che corrispondono *alla effettiva divisione per n* (2). Per una sostituzione del  $\Gamma_{\mu(3)}$ ,  $L_{\lambda,\mu}$  va in  $L_{\lambda',\mu'}$ , con:

$$(32) \quad \begin{cases} \lambda' \equiv \alpha\lambda + \beta\gamma\mu \pmod{n} \\ \beta\mu' \equiv \beta\lambda + \beta\delta\mu \pmod{3n} \end{cases}$$

e queste  $\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)$  funzioni sono radici di una equazione:

$$(33) \quad F(y) = 0$$

di grado  $\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)$  con coefficienti razionali in  $\xi$  (perchè le loro funzioni simmetriche restano invariate per le sostituzioni del  $\Gamma_{\mu(3)}$ ).

Convieni ora distinguere i due casi:

$$I) \quad n \equiv 0 \pmod{3}.$$

In quest'ipotesi il  $\Gamma_{\mu(3)}$  si riduce rispetto al  $\Gamma_{\mu(3n)}$  ad un sottogruppo finito  $G_{\mu(n)}$  coincidente con quello a cui si riduce

(1) Si dimostra che il numero delle coppie dell'intervallo  $0, 1, \dots, n-1$  aventi con  $n$  il *MCD* uno è  $\varphi(n)\psi(n)$ .

(2) Se detto *MCD* fosse  $d$  si avrebbero funzioni relative alla divisione per  $\frac{n}{d}$ , dalla invertibilità delle (32) risulta che ogni coppia  $(\lambda, \mu)$  viene trasformata in una  $(\lambda', \mu')$  avente con  $n$  lo stesso *MCD*.

il gruppo modulare  $\Gamma$  rispetto al  $\Gamma_{\mu(n)}$  (1). Il ragionamento si svolge allora in modo del tutto analogo a quello del § 3, pag. 3 Klein-Fricke Bd. II e mi limito ad aggiungere: ciascuna delle  $\frac{1}{2} \varphi(n) \psi(n)$  funzioni in questione appartiene ad un  $\Gamma_{\frac{1}{2} \varphi(n) \psi(n) \mu(s)} = \Gamma_{\varphi(n) \psi(n)}$  di specie  $3n$ , fra gli  $\psi(n)$  equivalenti contenuti in  $\Gamma_{\mu(s)}$ ; il sistema delle  $\frac{1}{2} \psi(n)$  funzioni che appartengono a detto sottogruppo è cosiffatto che con una funzione si esprimono razionalmente le rimanenti  $\frac{1}{2} \varphi(n) - 1$  (nel campo di razionalità di  $\xi$ ).

Quest'ultima proprietà segue dall'osservare che le  $\frac{1}{2} \varphi(n)$  funzioni di un sistema si possono distribuire così:

$$L_{\lambda, \mu}, L_{g\lambda, g\mu}, \dots, L_{g^{\frac{1}{2}\varphi(n)-1}\lambda, g^{\frac{1}{2}\varphi(n)-1}\mu}$$

$g$  essendo una radice primitiva modulo  $n$  ed applicando il teorema di moltiplicazione. Poichè le  $\frac{1}{2} \varphi(n) \psi(n)$  funzioni sono tutte equivalenti rispetto al  $\Gamma_{\mu(s)}$ , la (33) è irriducibile; determiniamone il gruppo di monodromia. Il parametro  $\xi$  riprende il proprio valore allora e allora soltanto che  $\omega$  subisce una sostituzione del  $\Gamma_{\mu(s)}$ , dunque il gruppo di monodromia è quello effettuato dal  $\Gamma_{\mu(s)}$  sulle  $L_{\lambda, \mu}$  e si vede facilmente che è un  $\bar{G}_{\mu(n)}$  oloedricamente isomorfo al su citato  $G_{\mu(n)}$ ; esso è imprimitivo sulle  $\frac{1}{2} \varphi(n) \psi(n)$  radici avendosi  $\psi(n)$  sistemi d'imprimitività. Nota una radice di (33) il gruppo di monodromia si abbassa a quel  $\bar{G}_n$  ciclico (corrispondente a quel  $G_n$  ciclico) che la lascia invariata;

---

(1) Cioè: il sistema rappresentativo di  $\Gamma_{\mu(n)}$  entro  $\Gamma$  si può tutto formare con sostituzioni appartenenti al  $\Gamma_{\mu(s)}$ .

dunque: *nota una radice l'equazione diventa solubile per radicali.*

$$\text{II) } n \equiv 0 \pmod{3}.$$

In questo caso la (33) si spezza in più parti, ciascuna delle quali ha radici che si caratterizzano aritmeticamente mod 9. Infatti dalle (32) si vede che sono *equivalenti alla  $L_{10}$  solo quelle funzioni per cui  $\lambda \equiv \pm 1 \pmod{3}$*  (1).

Si distingua ora:

a)  $\frac{n}{3} \equiv 0 \pmod{3}$ . Sono *equivalenti alla  $L_{01}$  tutte e sole quelle funzioni per cui  $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ ; esauriscono con le precedenti, le  $\frac{1}{2} \varphi(n) \psi(n)$  funzioni;*

b)  $\frac{n}{3} \equiv 0 \pmod{3}$ . Sono *equivalenti alla  $L_{01}$  solamente quelle per cui  $\lambda \equiv 0 \pmod{9}$ .*

Restano da esaminare quelle per cui  $\lambda \equiv \pm 3 \pmod{9}$ .

Si faccia allo scopo in (32)  $\lambda = 3\varepsilon$ , ( $\varepsilon = 1, 2$ ),  $\mu = 1$ ; si ha:

$$\begin{cases} \lambda' \equiv 3\varepsilon\alpha + 3\gamma \\ \mu' \equiv \varepsilon\beta + \delta \end{cases} \pmod{n}$$

dove è, lo ripeto:  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \pmod{3}$ ,  $\tau \equiv \pm 1$ ; da queste risulta:

$$(34) \quad \frac{\lambda'}{3} \equiv \varepsilon\tau, \quad \mu' \equiv \tau \pmod{3}$$

(1) Si tenga presente qui e nel seguito che si opera con sostituzioni del  $\Gamma_{\mu(s)}$  per le quali è:

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{3}$$

lo ripeto, rispetto a questa va intesa l'equivalenza.

che riunite nell'una:  $\frac{\lambda'}{3} \equiv \varepsilon \mu' \pmod{3}$  ci dicono: *sono equivalenti alla  $L_{3,1}$  quelle funzioni per cui:  $\frac{\lambda}{3} \equiv \mu \pmod{3}$  ed alla  $L_{6,1}$  quelle per cui  $\frac{\lambda}{3} \equiv -\mu \pmod{3}$ .*

Dimostriamo viceversa che tutte le funzioni  $L_{\lambda,\mu}$  con  $\lambda \equiv \pm 3 \pmod{9}$  sono equivalenti alla  $L_{3,1}$  o alla  $L_{6,1}$  secondochè:  $\frac{\lambda}{3} \equiv \pm \mu \pmod{3}$ , cioè: date  $\lambda \mu$  soddisfacenti le

$$(34) \text{ determinare } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \pmod{3} \text{ per cui sia:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \alpha - \beta \gamma \equiv 1 \\ 3 \varepsilon \alpha + 3 \gamma \equiv \lambda \\ \varepsilon \beta + \delta \equiv \mu \end{array} \right. \pmod{n}$$

dalle prime due si ha tenendo conto della terza:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \mu \alpha \equiv \lambda \beta + 3 \\ 3 \mu \gamma \equiv \lambda \delta - 3 \varepsilon \end{array} \right. \pmod{n}$$

ma deve essere:  $\alpha = \tau + 3a$ ,  $\beta = 3b$ ,  $\gamma = 3c$ ,  $\delta = \tau + 3d$ ; onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \mu a \equiv \lambda b - \mu \tau + 1 \\ 3 \mu c \equiv \frac{\lambda}{3} \tau + \lambda d - \varepsilon \end{array} \right. \pmod{\frac{n}{3}}$$

Imponendo a queste di ammettere soluzioni in  $a, c$  si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda b - \mu \tau + 1 \equiv 0 \\ \lambda d + \frac{\lambda}{3} \tau - \varepsilon \equiv 0 \end{array} \right. \pmod{3k}$$

$k \not\equiv 0 \pmod{3}$ , essendo il *MCD* fra  $\mu$  e  $\frac{n}{3}$ ; e perchè queste siano solubili in  $b$  e  $d$  deve essere ( $\lambda$  essendo primo con  $k$ ):

$$\mu \tau \equiv 1, \quad \frac{\lambda}{3} \tau \equiv \varepsilon, \pmod{3}$$

che sono le (34) soddisfatte per ipotesi; è possibile allora ricavare  $b, d$  e quindi  $a, c$ , e l'asserto è dimostrato. Riassumendo: per  $n \equiv \pm 3 \pmod{9}$  la (33) si spezza in due parti, per  $n \equiv 0 \pmod{9}$  in quattro.

Determiniamo ora il grado di ciascuna parte e contemporaneamente il sottogruppo di appartenenza di ciascuna funzione (1).

Eseguendo su  $L_{10} = L\left(\frac{\omega_1}{n}\right)$  una sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \pmod{3}$  del  $\Gamma_{\mu(3)}$  si ha:

$$L'_{10} = L_{\alpha\beta} = L\left(\frac{\alpha\omega_1 + \beta \cdot 3\omega_2}{n}\right)$$

e perchè sia:  $L'_{10} = L_{10}$  deve essere:

$$\alpha \equiv \pm 1 \pmod{n}, \quad \beta \equiv 0 \pmod{3n} \text{ e } \gamma \equiv 3t \pmod{n}, \quad \delta \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

che sono sostituzioni di specie  $3n$  e formano il:

$$G_{3n} = \left( \begin{array}{cc} \pm(1+kn) & 0 \\ \pm 3t & \pm(1-kn) \end{array} \right) \pmod{3n} \quad t=0, 1, \dots, n-1; \quad k=0, 1, 2$$

---

(1) Si tenga presente in quel che segue la proposizione: se una funzione modulare appartiene ad un  $\Gamma_\nu$  di  $\Gamma_{\mu(3)}$  essa appartiene ad una classe di  $\frac{\nu}{\mu(3)} = \frac{\nu}{12}$  funzioni equivalenti rispetto al  $\Gamma_{\mu(3)}$ .

contenuto nel  $G_{\mu(3n)}$  ed è rappresentativo di un  $\Gamma_{\frac{9\varphi(n)\psi(n)}{2}}$  di specie  $3n$  che è il sottogruppo di appartenenza di  $L_{10}$ . Ma questo  $\Gamma_{\frac{9\varphi(n)\psi(n)}{2}}$  ha in  $\Gamma_{\mu(3)}$  l'indice  $\nu = \frac{3}{8} \varphi(n)\psi(n)$  onde: la  $L_{10}$  appartiene ad una classe di  $\frac{3}{8} \varphi(n)\psi(n)$  funzioni equivalenti, che sono tutte quelle con  $\lambda \equiv \pm 1 \pmod{3}$ ; queste funzioni si ripartiscono in  $\frac{3}{4} \psi(n)$  sistemi, ogni sistema essendo caratterizzato dal  $\Gamma_{\frac{9}{2}\varphi(n)\psi(n)}$  di specie  $3n$ , che lascia invariate le sue  $\frac{1}{2} \varphi(n)$  funzioni.

Per l'esame delle rimanenti  $\frac{1}{8} \varphi(n)\psi(n)$  funzioni distinguiamo al solito i due casi:

a)  $n \equiv \pm 3 \pmod{9}$ . Nello stesso modo si trova: le  $\frac{1}{8} \varphi(n)\psi(n)$  funzioni  $L_{\lambda,\mu}$  con  $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$  sono equivalenti tra loro e si ripartiscono in  $\frac{1}{4} \psi(n)$  sistemi, ognuno dei quali è caratterizzato dal  $\Gamma_{\frac{3}{2}\varphi(n)\psi(n)}$  di specie  $n$ , che ne lascia invariate le  $\frac{1}{2} \varphi(n)$  funzioni (quello relativo al sistema della  $L_{01}$  è rappresentato dal  $G_{\frac{n}{3}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 3t \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \pmod{n}$ ,  $t=0,1,\dots,\frac{n}{3}-1$ , del  $G_{\mu(n)}$ ); in questo caso il compito è esaurito;

b)  $n \equiv 0 \pmod{9}$ . La  $L_{01}$  appartiene ad una classe di  $\frac{1}{24} \varphi(n)\psi(n)$  funzioni equivalenti aventi  $\lambda \equiv 0 \pmod{9}$ ; esse si ripartiscono in  $\frac{1}{12} \psi(n)$  sistemi, ognuno dei quali è caratterizzato dal  $\Gamma_{\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)}$  di specie  $n$  che lo lascia invariato (quello relativo ad  $L_{01}$  è rappresentato dal  $G_n = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 3t \\ \pm k & \pm 1 \end{pmatrix}$ )

mod  $n$ ,  $k=0,1,2$ ;  $t=0,1,\dots,\frac{n}{3}-1$ ). Una discussione analoga a quella di pag. 27 ci porta a concludere: *La funzione  $L_{31}(L_{61})$  appartiene ad un  $\Gamma_{\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)}$  di specie  $n$  rappresentato*

$$\text{dal } G_n = \left( \begin{array}{cc} \pm(1+3t) & \pm 3t \\ \pm\left(-3t+k\frac{n}{3}\right) & \pm(1-3t) \end{array} \right) \text{ mod } n, t=0,1,\dots,\frac{n}{3}-1$$

$$k=0,1,2 \left[ \text{dal } G_n = \left( \begin{array}{cc} \pm(1+6t) & \pm 3t \\ \pm\left(6t+k\frac{n}{3}\right) & \pm(1-6t) \end{array} \right) \right]; \text{ essa fa parte}$$

di una classe di  $\frac{1}{24}\varphi(n)\psi(n)$  funzioni  $L_{\lambda,\mu}$  equivalenti, caratterizzate da  $\frac{\lambda}{3} \equiv \mu \left( \frac{\lambda}{3} \equiv -\mu \right) \text{ mod } 3$ , che si ripartiscono in  $\frac{1}{12}\psi(n)$  sistemi ad ognuno dei quali è relativo un  $\Gamma_{\frac{1}{2}\varphi(n)\psi(n)}$  che ne lascia invariate le funzioni.

Sofferamoci un momento al caso  $n=3$ ; la (33) è  $\psi_3(y)=0$  che è di quarto grado con le tre radici  $L_{10}, L_{11}, L_{12}$  equivalenti della specie 9, e la radice  $L_{01}$  razionalmente nota (nulla anzi, vedi (31)).

Si verifica ciò direttamente calcolando questi valori e si ha:

$$L_{10} = L\left(\frac{\omega_1}{3}\right) = \frac{1}{3h+\xi}; \quad L_{11} = L\left(\frac{\omega_1}{3} + \omega_2\right) = \frac{1}{3q^2h+\xi};$$

$$L_{12} = L\left(\frac{\omega_1}{3} + 2\omega_2\right) = \frac{1}{3q^2h+\xi}; \quad L_{01} = L(\omega_2) = 0$$

si vede di qui che  $h(\omega)$  ha lo stesso sottogruppo di appartenenza di  $L_{10}, L_{11}, L_{12}$  e cioè il  $\Gamma_{36}$  della nona specie rap-

presentata dal :

$$(34) \ G_9 = \begin{pmatrix} \pm(1+3k) & 0 \\ \pm 3t & \pm(1-3k) \end{pmatrix} \pmod{9} \quad t, k = 0, 1, 2, \text{ del } \Gamma_{\mu(9)}$$

con che resta provato quanto asserimmo al principio del § 3.

## § 6.

### Comportamento per le sostituzioni modulari su $\omega_1, 3\omega_2$ .

Poniamo per comodità :

$$\Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = 3\omega_2;$$

si tratta di esaminare l'effetto prodotto su  $X(u), Y(u), x(u), y(u)$  dalle sostituzioni :

$$(35) \ \Omega_1' = \alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2, \quad \Omega_2' = \gamma\Omega_1 + \delta\Omega_2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

del gruppo modulare  $\bar{\Gamma}$ . Per comodità soprassedere le lettere che indicano elementi relativi al gruppo (35), per distinguerli da quelli omologhi del gruppo  $\Gamma$  su  $\omega_1, \omega_2$ . La sostituzione :

$$\bar{S}) \quad \Omega_1' = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega_2' = \Omega_2$$

effettua su  $\omega_1, \omega_2$  quella :

$$S^3) \quad \omega_1' = \omega_1 + 3\omega_2, \quad \omega_2' = \omega_2$$

del  $\Gamma_{2\mu(3)}$ , dunque è

$$(36) \ \bar{S}) \quad \begin{cases} X'(u) = X(u) \\ Y'(u) = Y(u) \end{cases}$$



Ma d'altra parte per effetto della  $S^3$  si ha (vedi (2)b))

$$(37) \quad \bar{S}) \quad \begin{cases} x'(u) = \varrho^2 x(u) \\ y'(u) = \varrho^2 y(u) \end{cases}$$

e quindi:

$$(38) \quad \bar{S}) \quad h' = \varrho h$$

come si verifica anche direttamente. Consideriamo ora la:

$$\bar{T}) \quad \Omega'_1 = -\Omega_2, \quad \Omega'_2 = \Omega_1$$

Effettuando questa sulle (17) e sostituendo nelle formule ottenute la (18) si ha:

$$(39) \quad \bar{T}) \quad \begin{cases} x'(u) = \frac{-\varrho^2 x(u) + \varrho y(u) + 1}{x(u) - y(u) - 1} \\ y'(u) = \frac{\varrho x(u) - \varrho^2 y(u) - 1}{x(u) - y(u) - 1} \end{cases}$$

E quindi:

$$(40) \quad \bar{T}) \quad \begin{cases} X'(u) = h' \frac{-\varrho^2 X(u) + \varrho Y(u) + h}{X(u) - Y(u) - h} \\ Y'(u) = h' \frac{\varrho X(u) - \varrho^2 Y(u) - h}{X(u) - Y(u) - h} \\ h' = h \left( \bar{T} \left( \frac{\omega}{3} \right) \right). \end{cases}$$

Risulta intanto: *il sistema  $x(u)$ ,  $y(u)$ , subisce per effetto delle (35), un gruppo di 24 sostituzioni lineari, generato dalle (37), (39), oloedricamente isomorfo al  $G_{2\mu_3}$ .*

Determiniamo ora la specie ed il sottogruppo di appar-

tenenza delle  $X(u)$ ,  $Y(u)$ , per il che ricerchiamo anzi tutto quello di  $h$ .

Si osservi allo scopo che, eseguire su  $\omega$  le sostituzioni (34)' del  $\Gamma_{36}$  cui appartiene  $h$ , equivale ad effettuare su  $\frac{\omega}{3}$  quelle del  $\bar{\Gamma}_{36}$  della specie 9 rappresentato dal:

$$(41) \quad \bar{G}_9 = \begin{pmatrix} \pm(1+3a) & \pm 3b \\ 0 & \pm(1-3a) \end{pmatrix} \pmod{9}, \quad a, b = 0, 1, 2$$

del  $\bar{G}_{(\mu,9)}$  e viceversa; dunque intanto il sottogruppo cercato o coincide con questo  $\bar{\Gamma}_{36}$  o lo contiene; dico che coincide. Sia al contrario una sostituzione  $\bar{V}$ :

$$\frac{\omega'}{3} = \frac{\alpha \frac{\omega}{3} + \beta}{\gamma \frac{\omega}{3} + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

fuori del  $\bar{\Gamma}_{36}$  che lasci invariata  $h$ ; essa non può effettuare su  $\omega$  una sostituzione modulare (altrimenti  $\bar{V}$  sarebbe del  $\bar{\Gamma}_{36}$ ), effettuerà allora una trasformazione d'ordine nove o tre.

Ma si vede facilmente che  $h$  non può restare invariata per nessuna trasformazione (1) e quindi resta provato l'asserto e si conclude: *il sottogruppo di appartenenza di  $h$  è il  $\bar{\Gamma}_{36}$  rappresentato da (41).*

(1) Sia  $f(h, J) = 0$  l'equazione irriducibile di grado 36 in  $h$  e 2 in  $J$  che lega queste due funzioni (§ 3); effettuando una trasformazione  $R$  d'ordine  $n$  su  $\omega$ , quella si cambia in  $f(h', J') = 0$  essendo  $h', J'$  le funzioni trasformate. Se fosse  $h = h'$  le due equazioni coinciderebbero, il che accadrebbe solo se i coefficienti fossero trasformati in sè da  $R$ . Ma affinchè per

Ma le sostituzioni che lasciano invariate  $X(u)$ ,  $Y(u)$ , non sono solo quelle che lasciano singolarmente invariate  $h$  e  $x(u)$ ,  $y(u)$  e che formano il  $\bar{\Gamma}_{72}$  della nona specie rappresentato dal:

$$\bar{G}_9 = \begin{pmatrix} 1+3a & 3b \\ 0 & 1-3a \end{pmatrix} \pmod{9}; \quad a, b = 0, 1, 2$$

del  $\bar{G}_{27}$ , ma sono anche quelle per cui  $h$  e  $x(u)$ ,  $y(u)$  prendono due fattori reciproci. Queste (vedi (37), (38)) sono tutte e sole le sostituzioni del:

$$(42) \quad \bar{G}_9 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{9}; \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

generato dalla  $\bar{S}$ ; se ne conclude:  $X(u)$ ,  $Y(u)$  appartengono al  $\bar{\Gamma}_{24}$  rappresentato dal sottogruppo:

$$\bar{G}_{27} = \begin{pmatrix} 1+3a & k \\ 0 & 1-3a \end{pmatrix} \pmod{9}; \quad a = 0, 1, 2; \quad k = 0, 1, \dots, 8$$

del  $\bar{G}_{27}$ , ottenuto moltiplicando (41) e (42).

Esse subiscono dunque insieme ad  $h$  un gruppo ternario di 24 sostituzioni generate da (36), (38) che ci danno la  $\bar{S}$  e (40) che ci da la  $\bar{T}$ .

una funzione razionale  $a(J)$  sia:

$$a(J) - a(J') = 0$$

deve essere:

$$\{ a(J) - a(J') \} \varphi(J) \cdot \varphi(J') = \Phi(J, J') F(J, J') = 0$$

$\varphi(J)$ ,  $F(J, J')$  essendo due opportuni polinomi e  $\Phi(J, J') = 0$  l'equazione modulare irriducibile d'ordine  $\psi(n)$  relativa alla trasformazione d'ordine  $n$ . Ma nel nostro caso ciò è impossibile accada, perchè i coefficienti di  $f(h, J) = 0$ , ordinato secondo  $h$ , sono al più di grado 2 in  $J$ , mentre è  $\psi(3) = 4$   $\psi(9) = 12$ .

§ 7.

**Comportamento rispetto al gruppo modulare  
eseguito su  $\omega_1, \omega_2$ .**

Abbiamo costruito le  $X(u), Y(u)$ , in guisa da restare invariate per le sostituzioni del  $\Gamma_{24} = \Gamma_{24}$ ; effettuando dunque su esse le sostituzioni del gruppo modulare  $\Gamma$  si hanno 24 sistemi completi di funzioni ellittiche della terza specie; ma di essenzialmente distinti ve ne sono solamente quattro, perchè, come ora vedremo, coincidono sei a sei, a meno di fattori, o permutazioni delle due funzioni. Si osservi anzitutto che è per la  $T$ ):  $\omega'_1 = -\omega_2, \omega'_2 = \omega_1$ :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} T): \quad \sigma'_{\lambda, \mu}(u) = (-1)^{\lambda^2} e^{-\frac{\pi i}{5} \lambda \mu} \sigma_{\mu, 2\lambda}(u) \\ \text{e per la } S): \quad \omega_1 = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2 = \omega_2 : \\ S): \quad \sigma'_{\lambda, \mu}(u) = \sigma_{\lambda, \mu + \lambda}(u). \end{array} \right.$$

Di qui si vede facilmente che il  $G_6$  è solo questo (del  $G_{24}$ ) generato dalla:

$$V = STS. T^2 = UT^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = STS$$

lascia invariato il sistema  $X(u), Y(u)$  a meno di fattori e permutazioni e si ha appunto:

$$(44) \quad V) \quad \left\{ \begin{array}{l} X'(u) = \frac{\varrho^2 - 1}{\varrho^2 \xi - 1} Y(u) \\ Y'(u) = \frac{\varrho - 1}{\varrho \xi - 1} X(u). \end{array} \right.$$

Notiamo pure:

$$(45) \quad T^2) \quad \begin{cases} X'(u) = -Y(u) \\ Y'(u) = -X(u). \end{cases}$$

Distribuendo il  $G_{2\mu(8)}$  rispetto al  $G_8$  nel solito quadro, si ha nelle quattro sostituzioni:  $1, T, S, S^2$  un sistema rappresentativo e si vede che:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} T) \quad X'(u) = e^{-\frac{\pi i}{8}} \frac{\sigma_{11} \sigma_{12}}{\sigma_{10}^2} \cdot \frac{\sigma_{02}(u)}{\sigma(u)} = X_{02}(u); \quad Y'(u) = e^{-\frac{\pi i}{8}} \frac{\sigma_{11} \sigma_{12}}{\sigma_{10}^2} \cdot \frac{\sigma_{01}(u)}{\sigma(u)} = X_{10}(u) \\ S) \quad X'(u) = -\frac{\sigma_{10} \sigma_{12}}{\sigma_{01}^2} \cdot \frac{\sigma_{11}(u)}{\sigma(u)} = X_{11}(u); \quad Y'(u) = -\frac{\sigma_{10} \sigma_{12}}{\sigma_{01}^2} \cdot \frac{\sigma_{22}(u)}{\sigma(u)} = X_{22}(u) \\ S^2) \quad X'(u) = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\sigma_{10} \sigma_{11}}{\sigma_{01}^2} \cdot \frac{\sigma_{12}(u)}{\sigma(u)} = X_{12}(u); \quad Y'(u) = \frac{\sigma_{10} \sigma_{11}}{\sigma_{01}^2} \cdot \frac{\sigma_{21}(u)}{\sigma(u)} = -\rho X_{21}(u) \end{array} \right.$$

Le nuove funzioni:

$$X_{01}(u), \quad X_{02}(u) \quad \text{di periodi} \quad -\omega_2, \quad 3\omega_1$$

$$X_{11}(u), \quad X_{22}(u) \quad \text{di periodi} \quad \omega_1 + \omega_2, \quad 3\omega_2$$

$$X_{12}(u), \quad X_{21}(u) \quad \text{di periodi} \quad \omega_1 + \omega_2, \quad 3\omega_2$$

che abbiamo introdotto, sono della terza specie e formano, a due a due, tre sistemi completi di funzioni ellittiche (dei rispettivi periodi); queste sei, insieme alle  $X(u) = X_{10}(u)$ ,  $Y(u) = X_{20}(u)$ , formano un sistema completo di otto funzioni ellittiche di periodi  $3\omega_1, 3\omega_2$ , il che si vede nello stesso modo del § 1; esse soddisfano a 27 relazioni quadratiche indipendenti. Sofferamoci un poco sul loro teorema di addizione e premettiamo le formule (scritte per  $n$  qualunque) di cui si deve far uso:

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} a) \quad x_{\lambda, \mu}(u + k\omega_1 + l\omega_2) = e^{\frac{\pi i}{n}(k\mu - l\lambda)} x_{\lambda, \mu}(u) \\ b) \quad x_{\lambda, \mu}\left(u - \frac{r\omega_1 + s\omega_2}{n}\right) = e^{\frac{\pi i}{n^2}(s\lambda - r\mu)} \frac{x_{\lambda + r, \mu + s}(u)}{x_{r, s}(u)} \end{array} \right.$$

e si tenga conto inoltre delle formole di pag. 23 e seg. Klein-Fricke, Bd. II.

I residui della funzione  $x_{\lambda, \mu}(u)$  nei nove punti:

$$u = k\omega_1 + l\omega_2, \quad k, l = 0, 1, 2 \quad \text{sono: } \varrho^{2\lambda l + k\mu}$$

come risulta dalla (47) a). Si vede al solito che le due funzioni: (supposto  $\lambda \neq 0$ )

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} x_{-\lambda, -(\mu+1)}(\alpha) \frac{x_{-\lambda, -\mu+1}(u)}{x_{01}(u)} \cdot x_{\lambda, \mu}(u + \alpha) + x_{\lambda, \mu-1}(\alpha) \frac{x_{\lambda, \mu+1}(u)}{x_{01}(u)} x_{-\lambda, -\mu}(u + \alpha) \\ x_{-\lambda, -\mu+1}(\alpha) \frac{x_{-\lambda, -(\mu+1)}(u)}{x_{02}(u)} \cdot x_{\lambda, \mu}(u + \alpha) + x_{\lambda, \mu+1}(\alpha) \frac{x_{\lambda, \mu-1}(u)}{x_{02}(u)} x_{-\lambda, -\mu}(u + \alpha) \end{array} \right.$$

ellittiche di periodi  $\omega_1, \omega_2$ , coi poli del primo ordine rispettivamente in:  $u = -\alpha, u = \frac{\omega_2}{3}, u = -\alpha, u = 2\frac{\omega_2}{3}$  hanno residui nulli, esse sono appunto le due costanti:

$$(-1)^{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} x_{02}(\alpha), \quad (-1)^{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2} x_{01}(\alpha)$$

come si vede ponendo ad es.:

$$u = -\frac{\lambda\omega_1 + (\mu-1)\omega_2}{3}, \quad u = -\frac{\lambda\omega_1 + (\mu+1)\omega_2}{3}$$

nella prima e seconda, rispettivamente, e facendo uso opportuno della (47) b) e delle formole su citate del Klein-Fricke.

Risolvendo rispetto a  $x_{-\lambda, -\mu}(u + \alpha)$ ,  $x_{\lambda, \mu}(u + \alpha)$  si esprimono queste per mezzo dei valori che le sei rimanenti funzioni prendono nei punti  $u, \alpha$ , con soli coefficienti numerici, mentre nelle (20) e in quelle che si ottengono per mezzo delle sostituzioni  $S, S^2, T$ , figurano soltanto le due funzioni stesse. Abbiamo posto la limitazione  $\lambda \neq 0$ , perchè facendo  $\lambda = 0$  si ricavano di qui per  $x_{01}(u + \alpha)$ ,  $x_{02}(u + \alpha)$ , formule nei cui secondi membri figurano soltanto le  $x_{01}, x_{02}$ ; per ottenere anche per queste funzioni formule dello stesso tipo, basta risolvere rispetto a  $x_{01}(u + \alpha)$ ,  $x_{02}(u + \alpha)$  le:

$$(40) \quad \begin{cases} x_{22}(\alpha) \frac{x_{12}(u)}{x_{10}(u)} x_{01}(u + \alpha) + \varrho x_{21}(\alpha) \frac{x_{11}(u)}{x_{10}(u)} x_{02}(u + \alpha) = \varrho x_{20}(\alpha) \\ \varrho^2 x_{12}(\alpha) \frac{x_{22}(u)}{x_{20}(u)} x_{01}(u + \alpha) + x_{11}(\alpha) \frac{x_{21}(u)}{x_{20}(u)} x_{02}(u + \alpha) = \varrho x_{10}(\alpha). \end{cases}$$

Si passa subito alle formule per le  $X_{\lambda, \mu}(u)$  tenendo conto dei valori delle  $h_{\lambda, \mu}$  che si leggono nella (46).

## § 8.

### Trasformazione d'ordine $n$ .

Mi limito alla sola trasformazione:

$$W.) \quad \bar{\omega}_1 = \omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{n}, \quad \text{o anche} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

da cui trarrò formule per le  $X(u)$ ,  $Y(u)$ . Si ponga:

$$\bar{X}(u) = X\left(u, \omega_1, \frac{\exists \omega_2}{n}\right), \quad \bar{Y}(u) = Y\left(u, \omega_1, \frac{\exists \omega_2}{n}\right)$$

La funzione  $\bar{X}(u)$ , ha nel parallelogrammo dei periodi  $\omega_1, 3\omega_2$  i  $3n$  poli:

$$u = v \frac{\omega_2}{3} + k\omega_2; \quad v = 0, 1, \dots, n-1; \quad k = 0, 1, 2$$

e i  $3n$  infinitesimi:

$$u = \frac{\omega_1}{3} + v \frac{\omega_2}{3} + k\omega_2.$$

Si ha allora:

$$\bar{X}(u) = C \prod_{v=0}^{n-1} X\left(u - \frac{v\omega_2}{n}\right) \quad C \text{ costante rispetto ad } u.$$

osservando che i due membri sono funzioni ellittiche di periodi  $\omega_1, 3\omega_2$  aventi a comune poli e infinitesimi.

Moltiplicando per  $u$  e facendo  $u \rightarrow 0$  si ricava  $C$  e si ha in definitiva:

$$(50) \quad \bar{X}(u) = (-1)^{n-1} \frac{\bar{h}\bar{\sigma}_{10}}{h\sigma_{10}} X(u) \prod_{v=1}^{n-1} \frac{X\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)}{Y\left(v \frac{\omega_2}{n}\right)}$$

$\bar{h}, \bar{\sigma}_{10}$  essendo i trasformati di  $h, \sigma_{10}$ ; analogamente:

$$(51) \quad \bar{Y}(u) = (-1)^{n-1} \frac{\bar{h}\bar{\sigma}_{10}}{h\sigma_{10}} Y(u) \prod_{v=1}^{n-1} \frac{Y\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)}{X\left(v \frac{\omega_2}{n}\right)}$$

È interessante dare a queste formule un'altra forma, per il che distinguiamo i tre casi  $n \equiv 1, n \equiv 2, n \equiv 0 \pmod{3}$ .

I)  $n \equiv 1 \pmod{3}$



I residui della  $\bar{X}(u)$  nei tre punti:

$$u = v \frac{\omega_2}{n} + k \omega_2, \quad k = 0, 1, 2$$

sono dati da:

$$q^{2v+2kn} \bar{h} \bar{\sigma}_{10} = q^{2v+2k} \bar{h} \bar{\sigma}_{10};$$

quelli di  $X\left(u - \frac{\omega_2}{n}\right)$  da:  $q^{2k} \bar{h} \bar{\sigma}_{10}$

perciò la funzione:

$$\bar{X}(u) = \frac{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}}{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}} \sum_{0, v}^{n-1} q^{2v} X\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)$$

con i  $3n$  poli del primo ordine in:  $u = v \frac{\omega_2}{n} + k \omega_2$  ha tutti i residui nulli; essa è una costante  $C$  il cui valore si ottiene facendo  $u = \frac{\omega_1}{3}$ :

$$C = - \frac{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}}{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}} \sum_{1, v}^{n-1} q^{2v} X\left(\frac{\omega_1}{3} - v \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Facendo invece:  $u = \frac{\omega_1}{3} \pm \omega_2$ :

$$C = - \frac{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}}{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}} \sum_{1, v}^{n-1} q^{2v} X\left(\frac{\omega_1}{3} - v \frac{\omega_2}{n} \pm \omega_2\right) = q^{\mp 1} C$$

onde:

$$C = 0 \quad \text{e:}$$

$$\bar{X}(u) = \frac{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}}{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}} \sum_{0, v}^{n-1} q^{2v} X\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)$$

e per la (50):

$$(52) \quad (-1)^{n-1} X(u) \prod_{1, v}^{n-1} \frac{X\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)}{Y\left(v \frac{\omega_2}{n}\right)} = \sum_{0, v}^{n-1} q^{2v} X\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Con la  $\bar{Y}(u)$  si otterrebbe una forma analoga che si ottiene da questa scambiando  $X$  con  $Y$ .

$$\text{II) } n \equiv 2 \pmod{3}$$

La  $\bar{X}(u)$  ha nei tre punti:  $u = v \frac{\omega_2}{n} + k \omega_2, (k=0, 1, 2)$  i residui:

$q^{2v+k} \bar{h} \bar{\sigma}_{10}$ ; la  $Y\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)$  i residui:  $q^k h \sigma_{10}$  e quindi:

$$(53) \quad \bar{X}(u) = \frac{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}}{h \sigma_{10}} \sum_{0 \leq v < n}^{n-1} q^{2v} Y\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)$$

$$(-1)^{n-1} X(u) \prod_{1 \leq v < n}^{n-1} \frac{X\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)}{Y\left(v \frac{\omega_2}{n}\right)} = \sum_{0 \leq v < n}^{n-1} q^{2v} Y\left(u - v \frac{\omega_2}{n}\right)$$

$$\text{III) } n = 3^p m, \quad m \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

In questo caso si ha un diverso comportamento perchè la  $X(u)$  ha in tutti i punti:

$$u = v \frac{\omega_2}{n} + t \frac{\omega_2}{3^{p-1}}, \quad t = 0, 1, \dots, 3^{p-1} - 1,$$

lo stesso residuo  $q^{2v} \bar{h} \bar{\sigma}_{10}$ , come si vede osservando che  $\frac{\omega_2}{3^{p-1}}$  è un multiplo del periodo  $\frac{3\omega_2}{n}$  di  $X(u)$ . Si hanno formule analoghe a quelle trovate utilizzando la funzione:

$$X^*(u) = X\left(u \mid \omega_1, \frac{3\omega_2}{3^p}\right)$$

relativa alla trasformazione d'ordine  $3^p$  di periodi  $\omega_1, \frac{\omega_2}{3^{p-1}}$ ;  
i poli della  $\bar{X}(u)$  nel parallelogrammo di questi periodi sono:

$$u = v \frac{\omega_2}{n} + k \frac{\omega_2}{3^p}; v = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, 2$$

ed allora si ha:

$$\bar{X}(u) = \frac{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}}{\bar{h}^* \bar{\sigma}_{10}^*} \cdot \sum_{v=0}^{m-1} q^{2v} X^* \left( u - v \frac{\omega_2}{n} \right)$$

ricavando  $X^*(u)$  dalla (50) e sostituendo:

$$(54) \quad \bar{X}(u) = \frac{\bar{h} \bar{\sigma}_{10}}{\bar{h}^* \bar{\sigma}_{10}^*} \cdot \sum_{v=0}^{m-1} q^{2v} X \left( u - v \frac{\omega_2}{n} \right) \frac{3^{2v-1} \prod_{\lambda=1}^{3^{2v-1}} X \left( u - \lambda \frac{\omega_2}{3^p} - v \frac{\omega_2}{m} \right)}{Y \left( \lambda \frac{\omega_2}{3^p} \right)}$$

e per la (50)

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} X(u) \prod_{\mu=1}^{n-1} q^{2\mu} \frac{X \left( u - \mu \frac{\omega_2}{n} \right)}{Y \left( \mu \frac{\omega_2}{n} \right)} &= \\ &= \sum_{v=0}^{m-1} q^{2v} X \left( u - v \frac{\omega_2}{m} \right) \frac{3^{2v-1} \prod_{\lambda=1}^{3^{2v-1}} X \left( u - \lambda \frac{\omega_2}{3^p} - v \frac{\omega_2}{m} \right)}{Y \left( \lambda \frac{\omega_2}{3^p} \right)} \end{aligned}$$

Per la posizione di tutte le altre formule di trasformazione, può servire di traccia quanto è esposto a pag. 37 e seg. del Klein-Fricke Bd. II nel Bianchi, cap. XV; ma mi limito alle formule precedenti.