ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PACIFICO MAZZONI

Ricerche sulla teoria dei gruppi d'ordine finito

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 14 (1922), exp. nº 3, p. 1-86
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1922_1_14__A3_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PACIFICO MAZZONI

RICERCHE

SULLA

TEORIA DEI GRUPPI D'ORDINE FINITO

INTRODUZIONE

Nel presente lavoro ci proponiamo di esporre varie proprietà dei gruppi d'operazioni d'ordine finito. Nella prima parte esponiamo quelle dei gruppi isomorfi, che, oltre a esser importanti di per sè, sono assai utili, come strumento di ricerca, e servono di fondamento alle parti seguenti. Nella seconda parte è svolta una teoria dei gruppi permutabili ; nella terza ci siamo proposti di svolgere una teoria dei cosiddetti *prodotti diretti* di due o più gruppi.

Un teorema, dimostrato nel § 13, riconduce allo studio di essi lo studio del prodotto di quei gruppi, che hanno la proprietà di essere ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro. Questi prodotti diretti non pare che abbiano attirato sinora molta attenzione: poche loro proprietà si trovano nell'Opera del BURNSIDE: *Theory of groups ;* ma, come avviene dei gruppi abeliani, che, per la limitazione di aver le loro operazioni a due a due permutabili, si studiano cor più facilità, e godono di tante importanti proprietà particolari, così avviene dei prodotti diretti di due o più gruppi, il cui studio viene facilitato dalle limitazioni imposte alla natura dei gruppi stessi.

La ricerca più importante sui prodotti diretti è quella relativa alla costruzione di tutti i sottogruppi contenuti nel prodotto diretto di due gruppi, noti che siano tutti i sottogruppi di questi. Una notevole applicazione ne abbiam fatta nei §§ 24 e 25 sul modo di costruire tutti i gruppi intransitivi di sostituzioni, noti che sieno i gruppi transitivi.

Tutte queste proprietà ricevono applicazioni e interpretazioni nella teoria delle equazioni algebriche. In questo lavoro però ci siamo limitati a studi di pura teoria dei gruppi, condotti con criteri generali, senza scendere alla trattazione di casi o di tipi particolari di gruppi.

Perugia, febbraio 1917.

PARTE I.

SUI GRUPPI ISOMORFI

§ 1.

Considerazioni preliminari sui gruppi permutabili.

Premettiamo alcune poche considerazioni sui gruppi permutabili, che ci serviranno subito, e che non potremo perciò rimandare al capitolo speciale dedicato ad essi. Questi gruppi si trovano definiti nell'opera del BURNSIDE: *Theory of Groups of finite order* (*Cambridge*, 1911), dove si trovano pure svolte le loro prime proprietà, che esponiamo brevemente, seguendo un metodo, che ci sarà fecondo di resultati.

Per giungere a questi gruppi permutabili, dobbiamo premettere una proprietà generale dei gruppi d'operazioni, d'ordine finito.

Siano G e Γ due gruppi di operazioni di natura qualunque, di ordine m e n rispettivamente, e sia Σ il loro massimo sottogruppo comune, di ordine r. Dimostriamo che *moltiplicando ogni operazione di* G *per tutte quelle di* Γ, *ossia formando tutti i prodotti della forma* $g\,\gamma$, *si ottiene un sistema di operazioni, di cui quelle distinte sono in numero di* $\dfrac{m\,n}{r}$.

Infatti distribuiamo, come può farsi in generale, le m operazioni di G in un quadro, rispetto a Σ, prendendo le moltiplicatrici di G a sinistra, e lo stesso si faccia pel gruppo Γ, prendendo invece le moltiplicatrici a destra. Indichiamo con $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_r$ le operazioni di Σ, con $g_1, g_2, \dots, g_{\frac{m}{r}}$ le moltiplicatrici di G, e con $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\frac{n}{r}}$ quelle di Γ; avremo così i due quadri seguenti :

$$G = \left| \begin{array}{l} g_1 \sigma_1 \,;\, g_1 \sigma_2 \,;\, \ldots \,;\, g_1 \sigma_r \\ g_2 \sigma_1 \,;\, g_2 \sigma_2 \,;\, \ldots \,;\, g_2 \sigma_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{\frac{m}{r}} \sigma_1 \,;\, g_{\frac{m}{r}} \sigma_2 \,;\, \ldots \,;\, g_{\frac{m}{r}} \sigma_r \end{array} \right. , \quad \Gamma = \left| \begin{array}{l} \sigma_1 \gamma_1 ; \sigma_2 \gamma_1 \,;\, \ldots \,;\, \sigma_r \gamma_1 \\ \sigma_1 \gamma_2 ; \sigma_2 \gamma_2 \,;\, \ldots \,;\, \sigma_r \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_1 \gamma_{\frac{n}{r}} \,;\, \sigma_2 \gamma_{\frac{n}{r}} \,;\, \ldots \,;\, \sigma_r \gamma_{\frac{n}{r}} \end{array} \right. .$$

Scriviamo compendiosamente questi quadri, come useremo di fare anche in seguito, con la scrittura:

$$G_1 = (g_1 \Sigma, g_2 \Sigma, \ldots, g_{\frac{m}{r}} \Sigma) \,, \quad \text{e} \quad \Gamma = (\Sigma \gamma_1, \Sigma \gamma_2, \ldots, \Sigma \gamma_{\frac{n}{r}}) \,.$$

Sarà $g_1, g_2, \ldots, g_{\frac{m}{r}}$ un sistema *completo* di operazioni di G, non equivalenti a destra rispetto a Σ, e $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\frac{n}{r}}$ un sistema completo di operazioni di Γ non equivalenti a sinistra rispetto a Σ *).

Sia g una qualunque operazione di G: essa è uguale a un certo prodotto $g_i \sigma_k$. Sia γ una qualunque operazione di Γ: essa è uguale a un certo prodotto $\sigma_j \gamma_l$. Il prodotto $g\gamma$ si potrà scrivere

$$g \gamma = g_i \sigma_k \sigma_j \gamma_l = g_i \sigma_t \gamma_l \,,$$

essendo σ_t una certa operazione di Σ; dimodochè, percorrendo l' indice i tutt' i valori $1, 2, \ldots, \frac{m}{r}$, l' indice l tutti i valori $1, 2, \ldots, \frac{n}{r}$, e l'indice t tutti i valori $1, 2, \ldots, r$, si ottengono

*) In generale due operazioni g e g' di G si dicono equivalenti a destra rispetto a Σ, quando sussista una relazione della forma $g = g'\sigma$, con σ operazione di Σ; equivalenti invece a sinistra, quando sia $g = \sigma g'$. V. Bianchi. *Teoria dei gruppi e delle equaz. algebriche secondo Galois*, § 17. Nel nostro caso $g_1, g_2, \ldots, g_{\frac{m}{r}}$ è un sistema completo di operazioni non equivalenti a destra, rispetto a Σ, poichè due operazioni distinte qualsiasi del sistema non sono mai equivalenti a destra, rispetto a Σ, mentre un' altra qualunque operazione di G è sempre equivalente a una, e a una sola operazione del sistema.

tutte (e naturalmente anche sole), le operazioni della forma $g\,\gamma$.

Non può mai esser un'operazione $g_i\,\sigma_t\,\gamma_l$ eguale ad un'altra $g_k\sigma_s\gamma_j$, se non è separatamente $g_i = g_k$, $\sigma_t = \sigma_s$ e $\gamma_l = \gamma_j$. Infatti dall'uguaglianza $g_i\sigma_t\gamma_l = g_k\,\sigma_s\,\gamma_j$ segue l' altra $\sigma_s^{-1}g_k^{-1}g_i\sigma_t = \gamma_j\gamma_l^{-1}$, onde $\gamma_i\,\gamma_l^{-1}$ è un'operazione comune a G e a Γ, è cioè un' operazione σ di Σ; quindi si ha $\gamma_j\,\gamma_l^{-1} = \sigma\,\gamma_l$, da cui, per la non equivalenza rispetto a Σ delle operazioni γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_{\frac{n}{r}}$, segue $\gamma_j = \gamma_l$; analogamente si deduce che $g_i = g_k$, e quindi che $\sigma_t = \sigma_s$.

Dunque le operazioni della forma $g_i\,\sigma_t\,\gamma_l$ sono tutte distinte, epperò in numero di $\frac{m\,n}{r}$. Questo è dunque il numero delle operazioni distinte del tipo $g\,\gamma$, e il teorema enunciato è così dimostrato.

In modo analogo si dimostra che ogni prodotto della forma $\gamma\,g$ si può ridurre al tipo $\gamma'_i\,\sigma_j\,g'_k$, ove $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{\frac{n}{r}}$ è un sistema completo di operazioni di γ non equivalenti a destra, e $g'_1\,g'_2, \ldots, g'_{\frac{m}{r}}$ è un sistema completo di operazioni di G non equivalenti a sinistra, rispetto a Σ: questi prodotti $\gamma'_i\,\sigma_j\,g'_k$ sono pure tutti distinti, e quindi dei prodotti del tipo $\gamma\,g$, quelli distinti sono pure in numero di $\frac{m\,n}{r}$.

§ 2.

Gruppi permutabili.

Si osservi che in tutto ciò non si è fatta alcuna ipotesi sulla natura delle operazioni g e γ, nè su quella dei gruppi G e Γ. Ora si faccia l'ipotesi che *ogni* operazione del tipo $\gamma\,g$ si possa porre anche sotto la forma $g'\,\gamma'$. Si consideri il gruppo che risulta, componendo, in tutti i modi possibili, le operazioni di G con quelle di Γ; questo gruppo lo indichiamo con (G, Γ), e lo chiamiamo, come faremo sempre in seguito, *prodotto dei due gruppi* G e Γ. Si vede subito che ogni operazione del gruppo (G, Γ), per l'ipotesi fatta che ogni operazione del tipo $\gamma\, g$ si possa porre anche sotto la forma $g'\,\gamma'$, si può sempre ridurre alla forma $g\,\gamma$, *) o se si vuole, alla forma $g_i\, \sigma_t\, \gamma_l$. L'ordine N del gruppo (G, Γ) è dunque finito, e al massimo uguale a $\frac{m\,n}{r}$; e siccome inversamente tutte le operazioni di questa forma sono nel gruppo (G, Γ), e sono tutte distinte, segue che N è proprio uguale a $\frac{m\,n}{r}$.

Ma d'altra parte le operazioni distinte della forma $\gamma\, g$ sono già in numero di $\frac{m\,n}{r}$, e quindi esse pure esauriscono tutto il gruppo (G, Γ), e si conclude che ogni operazione del gruppo (G, Γ) si può porre pure sotto la forma $\gamma\, g$, e che in particolare ogni operazione $g\,\gamma$ è pure uguale a una certa $\gamma'\, g'$. Abbiamo così il seguente risultato:

Se i due gruppi G *e* Γ, *di ordine m e n rispettivamente, hanno la proprietà che ogni operazione del tipo* $\gamma.\, g$ *è pure uguale a qualcuna del tipo* $g.\,\gamma$, *allora inversamente ogni operazione* $g\,\gamma$ *è pure uguale a qualcuna* $\gamma\, g$, *e l'ordine del gruppo* (G, Γ) *è* $=\frac{m\,n}{r}$, *dove r è l'ordine del massimo sottogruppo comune a* G *e a* Γ; *infine le operazioni del tipo* $g.\,\gamma$ *(o* $\gamma.\, g$*) esauriscono allora tutto il gruppo* (G, Γ).

Ora dati due gruppi G e Γ d'operazioni, di ordine m e n rispettivamente, essi si dicono *permutabili*, quando, detta g_i un'operazione di G (dove $i = 1, 2, \ldots, m$), e γ_k una di Γ (dove $k = 1, 2, \ldots n$),

---

*) Infatti ogni operazione del gruppo (G, Γ) si ottiene, combinando in un certo modo delle operazioni di G con altre di Γ; essa sarà, poniamo, della forma $g.\gamma.\,g'.\,\gamma'.\,g'', \ldots$; ma ad ogni combinazione del tipo γg in questo prodotto, si può sostituire un'operazione del tipo $g_1\,\gamma_1$, sicchè associando tra loro le operazioni di G che si trovano riunite, e quelle di Γ, che si trovano pure riunite, si avrà infine l'operazione considerata, ridotta alla forma voluta $g\,\gamma$.

le operazioni del sistema $g_i \gamma_k$ non differiscono che per il loro ordine da quelle del sistema $\gamma_k g_i$. Se dunque le operazioni del tipo $g . \gamma$ esauriscono tutto il gruppo (G, Γ), allora G e Γ saranno permutabili, secondo la definizione poichè allora ogni prodotto $\gamma . g$ sarà pure uguale a un prodotto $g_1 \gamma_1$.

Dalle considerazioni precedenti risulta che se due gruppi G e Γ sono permutabili, l'ordine del loro prodotto (G, Γ) è uguale al prodotto dei loro ordini, diviso per quello del loro massimo sottogruppo comune; e per vedere se G e Γ sono permutabili, basta assicurarsi che ogni operazione del tipo $g\,\gamma$ sia uguale a qualcuna del tipo $\gamma\, g$ (o viceversa), perchè allora ne risulterà anche la proprietà inversa, e per definizione, i due gruppi saranno permutabili; oppure basta assicurarsi che $N = \frac{m\,n}{r}$, perchè allora le sole operazioni $g\,\gamma$ esauriranno tutto il gruppo (G, Γ), e quindi G e Γ saranno permutabili. Possiamo così enunciare il seguente teorema:

Teorema I. — *Dati due gruppi* G *e* Γ *di operazioni di ordine* m *e* n *rispettivamente, se* r *è l'ordine del loro massimo sottogruppo comune, il prodotto* (G, Γ) *ha sempre l'ordine* $N \geqq \frac{m\,n}{r}$ *; e quest'ordine* N *è uguale a* $\frac{m\,n}{r}$, *allora e allora soltanto che i due gruppi* G *e* Γ *siano permutabili.*

Poniamo subito in rilievo alcune proprietà dei gruppi permutabili. Dimostriamo intanto, stando alle notazioni precedenti, che *se le operazioni del tipo $g . \gamma$ formano un gruppo, allora ogni operazione del tipo $\gamma . g$ è pure uguale a qualcuna del tipo $g . \gamma$, e quindi i due gruppi* G *e* Γ *sono permutabili.*

Infatti il prodotto $(g\,\gamma) . (g'\,\gamma')$, qualsiansi le operazioni g, γ, g', γ', è uguale a una certa operazione $g''\,\gamma''$, e in particolare, se $g = 1$, e $\gamma' = 1$, si avrà, qualsiansi γ e g', che l'operazione $\gamma\, g' = g''\,\gamma''$. C. d. d.

Dimostriamo che *se* G *e* Γ *sono permutabili, detto* $g_1, g_2, \dots g_{\frac{m}{r}}$

un qualunque sistema completo di operazioni di G, *non equivalenti rispetto a* Σ (*a destra o a sinistra*), *esso è pure nello stesso tempo un sistema completo di operazioni di* (G, Γ), *non equivalenti rispetto a* Γ : *e similmente, se* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\frac{n}{r}}$ *è un sistema completo di operazioni di* Γ, *non equivalenti rispetto a* Σ, *esso è pure un sistema completo di operazioni di* (G, Γ), *non equivalenti rispetto a* G.

Infatti due operazioni qualsiansi g_i e g_k non possono essere equivalenti rispetto a Γ, se non lo sono rispetto a Σ ; perchè, supposto per esempio che si tratti di equivalenza a sinistra, ove fosse $g_i = \gamma g_k$, si avrebbe $g_i\, g_k^{-1} = \gamma$, la quale operazione, essendo comune a G e a Γ, sarebbe di Σ, e quindi g_i sarebbe equivalente a g_k, rispetto a Σ, il che è assurdo (e questa considerazione vale anche se G e Γ non sono permutabili tra loro). Ma ora, siccome le operazioni $g_1, g_2, \ldots, g_{\frac{m}{r}}$ sono in numero uguale all'indice di Σ in G, esse sono pure in numero uguale all'indice di Γ in (G, Γ) (poichè G e Γ sono permutabili) e quindi formano un sistema *completo* di operazioni di (G, Γ), non equivalenti rispetto a Γ. C. d. d.

In generale, se G e Γ *non sono permutabili*, avviene sempre che due operazioni qualsiansi g_i e g_k non sono equivalenti rispetto a Γ ; ma non avviene però che *una qualunque* operazione di G sia equivalente a qualcuna delle operazioni $g_1, g_2, \ldots, g_{\frac{m}{r}}$ rispetto a Γ, perchè in questo caso l'indice di Γ in (G, Γ) è invece maggiore di quello di Σ in G. Dunque in questo caso $g_1, g_2 \ldots, g_{\frac{m}{r}}$ formano pure un sistema di operazioni di (G, Γ), non equivalenti rispetto a Γ, ma *non completo.*

Osserviamo infine la seguente proprietà: *Se un gruppo* H *contiene due sottogruppi* G *e* Γ, *dei quali uno sia invariante in* H, *i due gruppi* G *e* Γ *sono permutabili.* Supposto infatti, ad esempio, che G sia invariante in H, si ha che G è trasformato in sè stesso da tutte le operazioni di Γ, poichè lo è da tutte quelle di H, onde ogni operazione $\gamma^{-1}\, g\, \gamma$ è uguale a una certa operazione g' di G; vale a dire che ogni prodotto $g\gamma$ è uguale a un altro prodotto $\gamma . g'$, epperò i due gruppi G e Γ sono permutabili. C. d. d.

§ 3.

Prime proprietà dei gruppi isomorfi.

Se G e G′ sono due gruppi isomorfi tra loro, oloedricamente o meriedricamente, e se per fissar le idee, il gruppo G ha l'ordine maggiore o uguale a quello di G′, è noto che ad ogni operazione di G ne corrisponde una e una sola di G′, e ad ogni operazione di G′ corrisponde un numero fisso q di operazioni di G, e questo numero fisso è precisamente l'ordine di quel sottogruppo Σ, invariante in G, formato da tutte e sole quelle operazioni di G, che corrispondono all'identità in G′ : vuol dire che se l'isomorfismo considerato tra G e G′ è oloedrico, allora Σ si riduce all'identità. D'altra parte anche il gruppo complementare $\frac{G}{\Sigma} = \Gamma$ è isomorfo al gruppo G, e all'identità in Γ corrispondono in G tutte e sole le operazioni di Σ; sicchè i due gruppi G′ e $\Gamma = \frac{G}{\Sigma}$ sono oloedricamente isomorfi tra loro. *) Insomma si ottengono già tutti i tipi possibili di gruppi isomorfi a G, considerando i gruppi complementari di G rispetto a' suoi vari sottogruppi.

*) Ricordiamo che in generale, se G è un gruppo, e Σ un suo sottogruppo, il gruppo complementare o quoziente (che prenderemo sempre a destra) $\frac{G}{\Sigma}$ è meriedricamente isomorfo a G, all'identità in $\frac{G}{\Sigma}$ corrispondendo in G il massimo sottogruppo comune Σ_1 a Σ e ai suoi affini in G. Aggiungiamo che a due operazioni di G corrisponde in $\frac{G}{\Sigma}$ una stessa operazione, allora e allora soltanto che esse siano equivalenti rispetto Σ_1 (equivalenza che qui e in seguito, intendiamo a sinistra). Ora nel nostro caso che Σ è invariante in G, il massimo sottogruppo comune a Σ e ai suoi affini in G è Σ stesso, e quindi a due operazioni di G corrispondono in $\frac{G}{\Sigma}$ una stessa operazione, allora e allora soltanto che esse sieno equivalenti rispetto a Σ.

Ora se H è un qualunque sottogruppo di G, alle sue operazioni corrispondono in G′, nel considerato isomorfismo tra G e G′, un sistema di operazioni, costituenti un sottogruppo H′ di G′, che diremo *corrispondente* a H. Se H è invariante in G, allora anche H′ lo è in G′.

Consideriamo le operazioni di H: ognuna di esse corrisponde a q operazioni di G, e *tutte le operazioni possibili* di G cui corrispondano quelle di H′, costituiscono un altro sottogruppo K di G. Questo gruppo K potrà coincidere con H, ma potrà anche essere più ampio di questo, e contenerlo come sottogruppo.

Cerchiamo quando avverrà che il gruppo K coincida con H, vale a dire che le *operazioni di* H *siano tutte le possibili operazioni di* G, *cui corrispondano quelle di* H′: dimostriamo che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè questo avvenga, è che il gruppo* H *contenga* Σ *come sottogruppo.*

La condizione è necessaria, perchè ove esistesse qualche operazione σ di Σ, non contenuta in H, siccome a σ corrisponde l'identità in G′, il gruppo H non sarebbe costituito da *tutte* le operazioni di G, cui corrispondano quelle di H′.

Ma la condizione è anche sufficiente : infatti se h' indica una qualunque operazione di H′, vi è certamente qualche operazione h di H, la quale corrisponda a h', perchè per ipotesi H′ è il sottogruppo delle operazioni di G′, che corrispondono a quelle di H. Sia g una qualunque altra operazione di G, cui corrisponda quella operazione h' : si tratta di dimostrare che g si trova necessariamente in H. Infatti a ciascuna delle due operazioni h e g

Allora se si scrive il quadro di G rispetto e Σ, tutte le operazioni di una riga di questo quadro corrispondono a una stessa operazione di $\Gamma = \frac{G}{\Sigma}$ e pure a una stessa operazione di G′, sicchè fatte corrispondere tra loro due tali operazioni di Γ e di G′, si avrà tra le operazioni di Γ e quelle di G′ una corrispondenza biunivoca, e tale che al prodotto di due qualunque operazioni di Γ corrisponde il prodotto delle due rispettivamente corrispondenti di G′: essa è dunque una relazione d'isomorfismo oloedrico tra Γ e G′.

di G corrisponde h', e perciò al prodotto $h.g^{-1}$ di G corrisponde l'identità in G', onde $h.\,g^{-1}$ è una certa operazione σ di Σ.

Si ha così $h.\,g^{-1} = \sigma$, da cui $g = h\sigma$; e siccome σ si trova per ipotesi in H, segue che anche g si trova in H. C. d. d.

Osserviamo poi che *se* H *contiene* Σ, *allora se* H' *è invariante in* G', *anche* H *lo è in* G ; perchè se g è una qualunque operazione di G, h una di H, e $g \sim g'$, $h \sim h'$, *) allora si ha $g.^{-1}\,h.\,g \sim g'^{-1}\,h'.\,g'$, la quale è ancora di H' ; sicchè l'operazione $g^{-1}\,h\,g$, corrispondendo a una di H', si trova in H, il quale è dunque invariante in G.

Osserviamo ancora che se H contiene Σ, esso corrisponde a H' in quella stessa corrispondenza che esiste tra G e G', e in modo che all'identità in H' corrisponde in H lo stesso sottogruppo Σ. Si può dire quindi che *se* H *contiene* Σ, *allora il gruppo* H' *è oloedricamente isomorfo a* $\frac{\mathrm{H}}{\Sigma}$, nello stesso modo come il gruppo G' lo è al gruppo $\frac{\mathrm{G}}{\Sigma}$. *Se invece* H *non contiene* Σ, *e* Σ' *è il massimo sottogruppo comune a* H *e a* Σ, allora H' corrisponde ancora a H, in quella stessa corrispondenza che è data tra G e G', ma all'identità in H' corrisponde in questo caso in H soltanto il sottogruppo Σ'; sicchè in questo caso *il gruppo* H' *è oloedricamente isomorfo al quoziente* $\frac{\mathrm{H}}{\Sigma'}$. Se in particolare Σ' è l'identità, cioè se i due gruppi H e Σ non hanno operazioni comuni, oltre l'identità, allora l'isomorfismo tra H e H' è oloedrico.

§ 4.

Confronti tra i sottogruppi di G e i corrispondenti di G'.

Supponiamo ancora che il gruppo G' sia isomorfo a G, e che all'identità in G' corrisponda in G il sottogruppo Σ. Abbiamo la seguente proprietà :

*) Col segno ($\sim$) intendiamo di rappresentare la corrispondenza tra due operazioni di G e di G'.

Se H, H$'$, H$''$, . . . *sono più sottogruppi qualunque di* G, *e* K, K$'$, K$''$, . . . *sono i sottogruppi rispettivamente corrispondenti di* G$'$, *al prodotto* (H, H$'$, H$''$,...) *corrisponde il prodotto* (K, K$'$, K$''$, . . .). Limitiamoci, per semplicità, al caso di due gruppi soli H e H$'$. Ogni operazione di (H, H$'$) avrà, poniamo, la forma $h. h'. h_1. h'_1 \ldots$, essendo $h, h_1, \ldots$ operazioni di H, e $h', h'_1, \ldots$ operazioni di H$'$. Ora se $h \sim k, h_1 \sim k_1, \ldots, h' \sim k'. h'_1 \sim k'_1$, ecc., il prodotto $hh'h_1h'_1 \ldots \sim k\, k'\, k_1\, k'_1 \ldots$; dunque una qualunque operazione di (H, H$'$) ha per corrispondente un'operazione di (K, K$'$). Inversamente, considerata una qualunque operazione di (K, K$'$), poniamo della forma $k\, k' k_1\, k'_1 \ldots$, vi è sempre qualche operazione h di H, cui corrisponda k e qualche operazione h' di H$'$, cui corrisponda k', ecc.: allora all'operazione $h\, h'\, h_1 h'_1 \ldots$ di (H H$'$) corrisponde appunto $k\, k'\, k_1\, k'_1 \ldots$. Dunque il gruppo (K,K$'$) è costituito da *tutte e sole* quelle operazioni di G$'$, che corrispondono a quelle di (H, H$'$). C. d. d. Il teorema si estende subito al caso di più sottogruppi di G.

Se il gruppo G *contiene due sottogruppi permutabili*, H e H$'$, *anche i loro corrispondenti* K *e* K$'$ *sono permutabili.* Infatti se k è un'operazione qualunque di K, e k' una di K$'$, detta h un'operazione di H, cui corrisponda k, e h' una di H$'$, cui corrisponda k', si ha $h\, h' = h'_1\, h_1$, essendo h'_1 una certa operazione di H$'$, e h_1 una di H. E allora, se $h_1 \sim k_1$ e $h'_1 \sim k'_1$, si ha $k'\, k' = k'_1\, k_1$, dove k'_1 è un'operazione di K$'$ e k' una di K; e siccome questo ha luogo, qualsiansi k e k', i due gruppi K e K$'$ sono pure permutabili.

Ora aggiungiamo che se H *e* H$'$ *sono due sottogruppi di* G, *dei quali uno almeno contenga* Σ, *se ad essi corrispondono in* G$'$ *rispettivamente i sottogruppi* K *e* K$'$, *al massimo sottogruppo comune a* H *e a* H$'$ *corrisponde in* G$'$ *il massimo sottogruppo comune a* K *e a* K$'$, *e i due prodotti* (H, H$'$) *e* (K, K$'$) *hanno la proprietà reciproca che le operazioni dell'uno corrispondono a tutte e sole quelle dell'altro.*

L'ultima parte dell'enunciato è evidente, poichè (H, H$'$) ha per corrispondente (K, K$'$) e contiene Σ. Diciamo ora Λ il massimo sottogruppo comune a H e a H', e Δ il massimo sottogruppo comune a K e a K', e facciamo vedere che le operazioni di Δ sono tutte e sole quelle di G' che corrispondono alle operazioni di Λ, nel considerato isomorfismo tra G e G'.

Infatti se λ è un'operazione di Λ, essa è comune a H e a H', e le deve corrispondere in G' un'operazione, che deve trovarsi sia in K, che in K', e quindi in Δ. Inversamente, supposto che ad esempio H contenga Σ, considerata un' operazione qualunque δ di Δ, essendo questa comune a K e a K', vi sarà qualche operazione h' di H', cui corrisponda δ: quest'operazione h', corrispondendo pure a una di K, deve trovarsi in H (che contiene *tutte* le operazioni di G cui corrispondono quelle di K). Dunque h' è comune a H e a H', epperò è di Λ. Il gruppo Δ è dunque costituito da *tutte e sole* le operazioni di G', che corrispondono a quelle di Λ. C. d. d.

Se poi i due gruppi H e H' contengono entrambi Σ, allora pure il loro massimo sottogruppo comune Λ contiene Σ, e allora Λ è costituito da tutte e sole le operazioni di G che hanno per corrispondenti quelle di Δ.

Aggiungiamo ancora che *se uno almeno dei due gruppi* H *e* H', *contiene* Σ, *allora se i gruppi corrispondenti* K *e* K' *sono permutabili, tali sono anche* H *e* H'.

Infatti sia h un' operazione qualunque di H, e h' una di H', e sia $h \sim k$ e $h' \sim k'$; si ha $k\,k' = k'_1\,k_1$, dove k'_1 è una certa operazione di K', e k_1 una di K. Supposto che, ad esempio, H contenga Σ, detta k_1 un' operazione di H' cui corrisponda k'_1, si ha che all' operazione $h'^{-1}_1 h\,h'$ corrisponde $k'^{-1}_1\,k\,k' = k_1$, epperò $h'^{-1}\,h\,h'$ è un'operazione h_1 di H (il quale contiene tutte le possibili operazioni di G cui corrisponda k_1) ; ne segue che $h\,h' = h'_1\,h_1$, e questo assicura che H e H' sono pure permutabili. C. d. d.

Rileviamo alcune altre utili proprietà. Vediamo che *se* H *è un sottogruppo qualunque di* G *e* K *è il suo sottogruppo corrispondente di* G', *al sottogruppo* (H, Σ) *di* G *corrisponde in* G' *lo stesso sottogruppo* K *che corrisponde a* H. E infatti siccome a H corrisponde K, e a Σ corrisponde l'identità, al prodotto (H, Σ) corrisponde il prodotto $(K, 1) = K$.

Ora manifestamente se H e H' sono due sottogruppi di G, tali che i prodotti (H, Σ) e (H', Σ) coincidano, a H e a H' corrisponderà in K un medesimo sottogruppo. Inversamente, se a due gruppi H e H' corrisponde in G' un medesimo sottogruppo K, necessariamente i due gruppi (H, Σ) e (H', Σ) coincidono: perchè a questi ultimi due gruppi corrisponderà in G' lo stesso sottogruppo K, e siccome entrambi contengono Σ, essi coincidono, essendo essi costituiti da tutte le possibili operazioni di G, cui corrispondano quelle di K. Abbiamo dunque:

Se due gruppi G *e* G' *sono isomorfi, e all'identità in* G *corrisponde in* G *il sottogruppo* Σ, *se* H *è un sottogruppo di* G *al quale corrisponda in* G' *il sottogruppo* K, *si ha che tutte le possibili operazioni di* G *cui corrispondano quelle di* K, *formano il sottogruppo* (H, Σ) *di* G. *E se* H *e* H' *sono due sottogruppi di* G, *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè ad essi corrisponda uno stesso sottogruppo in* G' *è che i due prodotti* (H, Σ) *e* (H', Σ) *coincidano.*

§ 5.

Ulteriori confronti tra i sottogruppi di G e quelli di G'. Teorema fondamentale.

Continuiamo lo studio dei gruppi isomorfi, che abbiamo incominciato nei §§ precedenti. Torniamo a supporre di avere un gruppo G', isomorfo a G, e tale che all'identità in esso corrisponda in G il sottogruppo Σ (eventualmente $\Sigma = 1$). Supponiamo che G ammetta un sottogruppo H, *contenente* Σ, e diciamo H' il sottogruppo di G', che corrisponde a H. Diciamo $g_1, g_2, \ldots, g_q$ un sistema completo di operazioni di G, non equivalenti rispetto a H, e chiamiamo $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$ le operazioni di G', che corrispondono rispettivamente alle operazioni $g_1, g_2, \ldots, g_q$. Dimostriamo che *dall'ipotesi* che H *contenga* Σ, *segue che queste operazioni* $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$

costituiscono pure un sistema completo di operazioni di G′, *non equivalenti rispetto a* H′.

E infatti due operazioni qualunque g'_i e g'_k non possono essere equivalenti rispetto a H′ : perchè ove ciò fosse, allora all'operazione $g_i\, g_k^{-1}$ di G corrisponderebbe l'operazione $g'_i\, g'^{-1}_k$ di H′, e quindi $g_i\, g_k^{-1}$ sarebbe una certa operazione h di H, e si avrebbe $g_i = h\, g_k$, il che è assurdo, non essendo g_i e g_k equivalenti rispetto a H. C. d. d.

Ogni operazione g' di G′ è, inversamente, sempre equivalente a una (e da quanto si è visto, a una sola) operazione del sistema $g'_1, g'_2, \dots, g'_q$; perchè se g è una delle operazioni di G, cui corrisponda g', si ha che g è equivalente a qualcuna delle operazioni $g_1, g_2, \dots, g_q$, e posto che sia $g = h g_i$, con h operazione di H, posto che $h \sim h'$, segue che $g' = h'\, g_i$; e questo mostra appunto che g' è equivalente a g'_i, rispetto a H′. Dunque effettivamente le operazioni $g'_1, g'_2, \dots, g'_q$ costituiscono un sistema completo di operazioni di G′, non equivalenti rispetto a H′.

Possiamo prendere allora le operazioni $g'_1, g'_2, \dots, g'_q$ come moltiplicatrici del quadro di G′ rispetto a H′, nello stesso modo come si possono prendere le operazioni $g_1, g_2, \dots, g_q$ come moltiplicatrici del quadro di G rispetto a H : abbiamo così i due quadri seguenti :

$$G = (H\, g_1, H\, g_2, \dots, H\, g_q), \qquad G' = (H'\, g'_1, H'\, g'_2, \dots, H' g'_q).$$

Questi due quadri, dimostriamo, hanno la proprietà che le operazioni della riga *i.esima* del primo hanno per corrispondenti tutte e sole quelle pure della riga *i.esima* del secondo, e inversamente, *tutte le possibili* operazioni di G, cui corrispondano quelle della riga *i.esima* del secondo quadro, si trovano nella riga *i.ma* del primo.

Infatti, se $g = h\, g_i$ è una qualunque operazione di G, se $g \sim g'$, $h \sim h'$, siccome $g_i \sim g'_i$, si ha che $g' = h\, g'_i$, vale a dire che g' si trova nella riga *i.ma* del secondo quadro. Inversamente, se $g' = h'\, g'_i$ è un'operazione qualunque di G′, si ha che $g'\, g'^{-1}_i = h'$

è un'operazione di H'; talchè se g è *una qualunque* delle operazioni di G che corrispondono a g', l'operazione $g\, g_i^{-1}$, corrispondendo a una di H', si deve trovare in H, ossia dev'essere $g\, g_i^{-1} = h$, e $g = h\, g_i$; quindi g si trova pure nella riga *i.ma* del primo quadro. C. d. d.

Da questa corrispondenza biunivoca che esiste tra le righe di questi due quadri, trarremo ora profitto, per dimostrare un'ulteriore proprietà importante dei gruppi isomorfi: facciamo vedere, sempre se il sottogruppo H contiene Σ, che i due gruppi complementari $\frac{G}{H}$ e $\frac{G'}{H'}$ sono oloedricamente isomorfi tra loro, anzi che essi coincidono, salvo il nome delle lettere su cui essi agiscono.

Consideriamo infatti i due quadri.

(1) $G = (H\, g_1, H\, g_2, \ldots, H\, g_q), \quad G' = (H'\, g'_1, H'\, g'_2, \ldots, H' g'_q)$.

Se Γ rappresenta il gruppo complementare (a destra) $\frac{G}{H}$, esso è un gruppo di sostituzioni sopra le righe del primo quadro, o se si vuole, sulle lettere $g_1, g_2, \ldots, g_q$: precisamente, se g è una qualunque operazione di G, e si moltiplicano $g_1, g_2, \ldots, g_q$ a destra per g, se $g_i \,.\, g$ è equivalente a g_{i_1}, rispetto a H, la sostituzione sulle lettere $g_1, g_2, \ldots, g_q$ che porta g_i in g_{i_1} $(i = 1, 2, \ldots, q)$ è appunto quella del gruppo Γ, che corrisponde a g *). E se si chiama Γ' il gruppo $\frac{G'}{\Gamma'}$, altrettanto vale per Γ'. Vediamo ora che le sostituzioni del gruppo Γ' si ottengono da quelle di Γ con un semplice cambiamento delle lettere, precisamente cambiando le lettere $g_1, g_2, \ldots, g_q$ ordinatamente nelle altre $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$.

Infatti se g è *una operazione qualunque* di G, e si ha $g_i\, g = h\, g_k$, se $g \sim g'$ e $h \sim h'$, si ha $g'_i\, g' = h' g'_k$, vale a dire che moltiplicando le operazioni $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$ per g', queste lettere vengono a scambiarsi tra loro nello stesso modo come si scambiano le lettere $g_1, \ldots, g_q$, moltiplicando tutte queste a destra per g. Inversamente

*) V.[1] BIANCHI, *Teoria dei gruppi*, § 17.

se g' è una qualunque operazione di G', e g è una delle operazioni di G, cui corrisponda g', moltiplicando le operazioni $g'_1, g'_2, \ldots, g'$, tutte a destra per g', esse verranno a scambiarsi tra loro, nello stesso modo come si scambiano le operazioni $g_1, g_2, \ldots, g_q$, moltiplicandole tutte a destra per g.

Ma $g_1, g_2, \ldots, g_q$ vengono a scambiarsi secondo quella sostituzione γ di Γ che corrisponde a g, e $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$ vengono a scambiarsi secondo quella sostituzione γ' di Γ' che corrisponde a g'; e dunque γ' si ottiene da γ, cambiandovi le lettere $g_1, g_2, \ldots, g_q$ ordinatamente nelle altre $g'_1, g'_2, \ldots g'_q$. È così dimostrato il seguente teorema fondamentale:

Teorema II. — *Se un gruppo* G' *è isomorfo a un altro gruppo* G, *e all'identità in* G' *corrisponde in* G *il sottogruppo* Σ (*eventualmente* $\Sigma = 1$), *se* H *è un sottogruppo qualunque di* G *che contenga* Σ, *e* H' *è il sottogruppo corrispondente di* G', *allora i due gruppi complementari* $\frac{G}{H}$ *e* $\frac{G'}{H'}$ *sono oloedricamente isomorfi tra loro, anzi essi coincidono, salvo il nome delle lettere: precisamente, se* $g_1, g_2, \ldots, g_q$ *è un sistema completo di operazioni di* G, *non equivalenti rispetto a* H, *e* g'_i *è l'operazione di* G' *che corrisponde a* g_i ($i = 1, 2, \ldots, q$), *le* q *operazioni* $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$ *costituiscono un sistema completo di operazioni di* G', *non equivalenti rispetto a* H', *e le sostituzioni di* $\frac{G'}{H'}$ *si ottengono da quelle di* $\frac{G}{H}$, *semplicemente cambiando le lettere* $g_1, g_2, \ldots, g_q$ *ordinatamente nelle altre* $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$.

Insomma si può dire che il gruppo $\frac{G}{H}$ agisce sulle righe del primo dei due quadri (1), nello stesso modo come il gruppo $\frac{G'}{H'}$ agisce sulle righe del secondo di quei due quadri.

§ 6.

Applicazioni. Gruppi fattoriali di gruppi isomorfi.

Nel caso che l'isomorfismo tra i due gruppi G e G' sia oloedrico, se H è un sottogruppo qualunque di G, e H' il corrispondente di G', i due gruppi $\frac{G}{H}$ e $\frac{G'}{H'}$ coincideranno in ogni caso, salvo il nome delle loro lettere.

Supponiamo ora, in generale, che all'identità in G' corrisponda in G il sottogruppo Σ (riducentesi all'identità, quando l'isomorfismo tra G' e G sia oloedrico); supponiamo che G contenga un sottogruppo H_1, al quale corrisponda in G' il gruppo H'_1; che H_1 contenga un sottogruppo H_2, al quale corrisponda in G' il gruppo H'_2, ecc.; che infine un sottogruppo $H_{\mu-1}$ contenga un sottogruppo H_μ, al quale corrisponda in G' il gruppo H'_μ, *e che* H_μ *contenga* Σ. Segue dal teorema dimostrato che il gruppo $\frac{G}{H_1}$ è oloedricamente isomorfo a $\frac{G'_1}{H'_1}$; poi siccome i due gruppi H_1 e H'_1 si corrispondono tra loro nella stessa relazione d'isomorfismo che è data tra G e G', in modo che all'identità in H'_1 corrisponda in H_1 il sottogruppo Σ, i due gruppi H_1 e H'_1 vengono a trovarsi nelle stesse condizioni di G e G', e quindi il gruppo $\frac{H_1}{H_2}$ è oloedricamente isomorfo a $\frac{H'_1}{H'_2}$. Nello stesso modo, proseguendo, si ha che il gruppo $\frac{H_2}{H_3}$ è oloedricamente isomorfo a $\frac{H'_2}{H'_3}$, ecc.; infine che $\frac{H_{\mu-1}}{H_\mu}$ lo è a $\frac{H'_{\mu-1}}{H'_\mu}$, e che $\frac{H_\mu}{\Sigma}$ lo è al gruppo H'_μ.

In generale si può dire che se $i > k$, *il gruppo* $\frac{H_i}{H_k}$ *è oloedricamente isomorfo a* $\frac{H'_i}{H'_k}$, *e che questi due gruppi coincidono, salvo il nome delle lettere su cui essi agiscono* (per $i = 1, 2, \ldots, \mu - 1$, e $k = i+1, \ldots, \mu$).

Aggiungiamo che siccome H_1 e H'_1 si trovano nelle stesse condizioni di G e G', se $h_1, h_2, \ldots, h_p$ è un sistema completo di moltipicatrici di H_1 rispetto a H_2, e h'_i è l'operazione di H'_1 (o di G'), che corrisponde a h_i ($i = 1, 2, \ldots p$), le operazioni $h'_1, h'_2, \ldots, h_p$

costituiscono un sistema completo di moltiplicatrici di H'_1 rispetto a H'_2, e così via. *)

Tutto questo vale in generale, siano o no i gruppi $H_1, H_2, \ldots, H_\mu$ ognuno invariante nel precedente. In particolare, se $G, H_1, H_2, \ldots, H_\mu$ sono i primi termini, fino a Σ, di una serie di composizione di G, allora $G', H'_1, H_2, \ldots, H_\mu, 1$ è una serie di composizione di G', e dal teorema dimostrato segue che *i gruppi fattoriali* $\frac{G_1}{H_1}, \frac{H_1}{H_2}, \ldots, \frac{H_\mu}{\Sigma}$ sono oloedricamente isomorfi rispettivamente ai gruppi fattoriali $\frac{G'_1}{H'_1}, \frac{H'_1}{H'_2}, \ldots, H'_\mu$, e anzi si può dire che essi coincidano rispettivamente, salvo il nome delle lettere su cui essi agiscono.

Dunque, facendo astrazione dal nome delle lettere, abbiamo che *se il gruppo* G' *è isomorfo oloedricamente al gruppo* G', *i loro gruppi fattoriali coincidono; e se invece* G' *è meriedricamente isomorfo a* G, *e all'identità in* G' *corrisponde in* G *il sottogruppo* Σ, *allora i gruppi fattoriali di* G *si ottengono da quelli di* G', *aggiungendovi i gruppi fattoriali di* Σ.

Questo risultato generalizza quello noto sui *fattori di composizione* dei gruppi isomorfi, **) che dice che due gruppi G e G', oloedricamente isomorfi, hanno gli stessi fattori di composizione, mentre invece se G' è meriedricamente isomorfo a G, e all' idendità in G' corrisponde in G il sottogruppo Σ, i fattori di composizione di G si ottengono da quelli di G', aggiungendovi tutti quelli Σ. Qui vediamo che questa proprietà vale anche per i gruppi fattoriali ; ma la cosa va anzi più in là : la proprietà dei gruppi $\frac{H_i}{H_{i+1}}$ sussiste sempre, qualsiasi la serie dei sottogruppi $H_1, H_2, \ldots,$

---

*) Ricordiamo che se G è un gruppo e Σ un suo sottogruppo, ogni sistema completo di operazioni di G, non equivalenti (a sinistra) rispetto a Σ, dà pure un sistema completo di moltiplicatrici (a destra) del quadro di G rispetto a Σ, o come diremo brevemente, di *moltiplicatrici di* G *rispetto a* Σ; e inversamente.

**) V.[i] BIANCHI. *Teoria dei gruppi* § 20.

anche se non accade che ognuno di essi sia invariante nel precedente.

In particolare se Γ è un sottogruppo invariante qualunque di G, si ha che i gruppi fattoriali del gruppo G si ottengono, aggiungendo a quelli di $\frac{G}{\Gamma}$ quelli di Γ.

§ 7.

Applicazioni varie. Speciali gruppi permutabili.

Facciamo alcune applicazioni dei risultati generali precedenti sui gruppi isomorfi.

Dimostriamo intanto il seguente

TEOREMA III. — *Se un gruppo* G *contiene un sottogruppo* H, *e questo un sottogruppo* Σ, *invariante in* G, *il gruppo complementare* $\frac{H}{\Sigma}$ *è oloedricamente isomorfo a un sottogruppo* K *di* $\frac{G}{\Sigma}$, *e il gruppo* $\frac{G}{H}$ *è meriedricamente isomofo al gruppo* $\frac{G}{\Sigma}$, all'identità in $\frac{G}{H}$ corrispondendo in $\frac{G}{\Sigma}$ precisamente il sottogruppo K. *)

Consideriamo il gruppo $\frac{G}{\Sigma}$, che per brevità indichiamo con Γ; esso è meriedricamente isomorfo a G, e all'identità in Γ corrisponde in G il sottogruppo Σ. Al sottogruppo H di G corrisponde in Γ un sottogruppo K, e siccome H contiene Σ, si ha $K \equiv \frac{H}{\Sigma}$, e $\frac{G}{H} \equiv \frac{\Gamma}{K}$. **) Dunque $\frac{G}{H}$ è meriedricamente isomorfo a $\Gamma \left(= \frac{G}{\Sigma}\right)$,

*) Un teorema in certo modo analogo, ma non così generale, è proposto dal BURNSIDE alla fine del § 31 a pag. 41 dell'opera citata: *Theory of Groups*.

**) Col segno ($\equiv$) rappresentiamo, per brevità, qui e in seguito, la relazione d'isomorfismo *oloedrico* tra due gruppi.

e all'identità in $\frac{G}{H}$ corrisponde in $\frac{G}{\Sigma}$ il sottogruppo K. C. d. d.

Aggiungiamo che il sottogruppo K è invariante in Γ, allora e allora soltanto che H sia invariante in G.

Facciamo un'altra applicazione dei risultati precedenti, dimostrando il

Teorema IV. — *Se un gruppo qualunque* H *contiene due sottogruppi* G *e* Γ, *dei quali* Σ *è il massimo sottogruppo comune, e se* G *è invariante in* H, *allora il gruppo complementare* $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ *è oloedricamente isomorfo a un sottogruppo di* $\frac{H}{G}$.

Il gruppo $\frac{H}{G}$ è meriedricamente isomorfo a H, all' identità in $\frac{H}{G}$ corrispondendo in H il sottogruppo G. Al sottogruppo Γ di H corrisponderà nel gruppo $\frac{H}{G}$ un certo sottogruppo Δ, formato da tutte e sole le operazioni di $\frac{H}{G}$ che corrispondono a quelle di Γ. Essendo Σ il massimo sottogruppo comune a G e a Γ, si avrà che il gruppo Δ è meriedricamente isomorfo a Γ, all'identità in Δ corrispondendo in Γ il sottogruppo Σ; e dunque il gruppo $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ è oleodricamente isomorfo a Δ, che è un sottogruppo di $\frac{H}{G}$. C. d. d.

Dimostriamo un altro teorema, che dovremo subito applicare, e che del resto ritroveremo in seguito (al § 12).

Teorema V. — *Se due gruppi* G *e* G' *sono permutabili e hanno per massimo sottogruppo comune* Σ, *il gruppo complementare* $\frac{G'}{\Sigma}$ *è un sottogruppo di* $\frac{(G, G')}{G}$ (*eventualmente coincide con* $\frac{(G, G')}{G}$ *stesso*).

Poichè G e G' sono permutabili, se $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$ rappresenta un sistema completo di moltiplicatrici di G' rispetto a Σ, esso è pure un sistema completo di moltiplicatrici di (G, G') rispetto a G. Se g' è una qualunque operazione di G', la sostituzione di $\frac{G'}{\Sigma}$ che corrisponde a g' è la sostituzione che si produce sulle lettere $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$, moltiplicando tutte queste a destra per g', e cercando le operazioni equivalenti ad esse, rispetto a Σ, tra i singoli prodotti ottenuti. Ma così facendo, si ottiene manifestamente anche la sostituzione di $\frac{(G, G')}{G}$ che corrisponde a g', e dunque, posto che i due gruppi $\frac{G'}{\Sigma}$ e $\frac{(G, G')}{G}$ agiscano sopra le lettere $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$, si ha che le sostituzioni di $\frac{G'}{\Sigma}$ si trovano tutte nel gruppo $\frac{(G, G')}{G}$, il quale contiene dunque $\frac{G'}{\Sigma}$ come sottogruppo (ovvero contiene un sottogruppo oloedricamente isomorfo a $\left.\frac{G'}{\Sigma}\right)$. C. d. d.

Rivolgiamoci ora ad alcuni speciali gruppi permutabili, che hanno particolare importanza. Supponiamo che un gruppo G sia permutabile con tutte le operazioni di un altro gruppo Γ: allora i due gruppi G e Γ sono certamente permutabili tra loro. *) Com'è noto, e come del resto subito si verifica, avviene che il gruppo G è invariante (G, Γ), come pure il gruppo Σ, massimo sottogruppo comune a G e a Γ, è invariante in Γ. Orbene, dimostriamo che i due gruppi complementari $\frac{(G, \Gamma)}{G}$ e $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ [illegible] oloedricamente isomorfi tra loro.

Siccome G è invariante in (G, Γ), è il caso di applicare il teorema IV, dianzi dimostrato: il gruppo $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ sarà oloedricamente

---

*) Un gruppo G si dice *permutabile con un' operazione* γ, quando il gruppo trasformato $\gamma^{-1} G \gamma$ coincide con G stesso, cioè quando ogni operazione $\gamma^{-1} g \gamma$ è uguale a qualche altra operazione g' di G. Se ciò avviene, allora si ha $g \gamma = \gamma g'$, e siccome g e γ sono operazioni qualsiasi di G e di Γ, si ha che questi due gruppi sono permutabili.

isomorfo a un sottogruppo di $\frac{(G, \Gamma)}{G}$; ma questi due gruppi hanno lo stesso ordine (che è uguale all'indice di G in (G, Γ), ovvero a quello di Σ in Γ, i quali due indici sono appunto uguali, perchè i due gruppi G e Γ sono permutabili); dunque $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ è oloedricamente isomorfo a $\frac{(G, \Gamma)}{G}$. Abbiamo così il

TEOREMA VI. — *Se un gruppo G è permutabile con tutte le operazioni di un altro gruppo Γ, e Σ è il loro massimo sottogruppo comune, i due gruppi complementari* $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ *e* $\frac{(G, \Gamma)}{G}$ *sono oloedricamente isomorfi tra loro.*

Questo teorema si poteva anche dimostrare, deducendolo invece come corollario dal teorema V, anzichè dal teorema IV. Si vede allora che $\frac{(G, \Gamma)}{G}$ e $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ coincidono, salvo il nome delle loro lettere.

Parte II.

GRUPPI PERMUTABILI

§ 8.

Relazione tra gruppi permutabili e i loro prodotti.

Nel presente capitolo ci occupiamo dei gruppi permutabili, di cui le prime proprietà sono svolte nei §§ 1 e 2 ; di tali proprietà faremo continuamente uso. Proponiamoci intanto di dimostrare il seguente :

Teorema I. — *Se un gruppo* G *è permutabile con due altri,* H *e* Γ, *esso è anche permutabile col loro prodotto* (H,Γ), *quando questo abbia l'ordine finito.*

Infatti, siccome G è permutabile con H, detta g una operazione qualunque di G, e h una qualunque di H, il prodotto $g\,h$ sarà uguale a ur prodotto della forma $h_1\,g_1$, essendo h_1 una conveniente operazione di H, e g_1 una di G ; la stessa cosa dicasi pei due gruppi G e Γ. Un'operazione del gruppo (H, Γ) sarà, poniamo, della forma $h\,\gamma\,h'\,\gamma' \dots$, e il prodotto $g.\ (h\,\gamma\,h'\,\gamma' \dots) = (g\,h).\ \gamma\,h'\gamma' \dots$; ma se $g\,h = h_1\,g_1$ si ha

$$g.\ (h\,\gamma\,g'\,\gamma' \dots) = (h_1\,g_1)\,\gamma\,h'\,\gamma' \dots = h_1\,(g_1\,\gamma).\ h'\,\gamma' \dots :$$

e quest'operazione, se $g_1\,\gamma = \gamma_1\,g_2$, è uguale a

$$h_1(\gamma_1\,g_2)\,h'\,\gamma' \dots = h_1\,\gamma_1\,(g_2\,h')\gamma' \dots = h_1\,\gamma_1\,(h'_1\,g_3).\ \gamma' \dots =$$
$$h_1\,\gamma_1\,h'_1\,(g_3\,\gamma') \dots = h_1\,\gamma_1\,h'_1\,(\gamma'_1\,g_4) \dots,$$

essendo h_1, h'_1 convenienti operazioni di H, γ_1, γ'_1 convenienti operazioni di Γ, e g_1, g_2, g_3, g_4, operazioni di G. Così si può continuare a operare sul prodotto considerato $g.\,(h\,\gamma\,h'\,\gamma'\ldots)$. Siccome si è supposto che il gruppo (H, Γ) sia d'ordine finito (come sempre supponiamo, nelle nostre considerazioni), questo processo avrà un termine, e si troverà infine

$$g.\,(h\,\gamma\,h'\,\gamma'\ldots) = (h_1\,\gamma_1\,h'_1\,\gamma'_1\ldots).\,g_\iota,$$

essendo g_ι una certa operazione di G. Siccome $(h_1\,\gamma_1\,h'_1\,\gamma'_1\ldots)$ è di nuovo un'operazione di (H, Γ), si può affermare che il prodotto di un'operazione qualunque di G per una qualunque di (H, Γ) è sempre uguale al prodotto di un'operazione di (H, Γ) per una di G, e quindi che i due gruppi G e (H, Γ) sono permutabili. C. d. d. *)

Ne possiamo dedurre come corollario che *se un gruppo* G *è permutabile con* H *e con* Γ, *il gruppo* (H, Γ), *è pure permutabile coi due prodotti* (G, H) *e* (G, Γ).

Infatti (H, Γ) sarà permutabile con G ; ma esso è pure permutabile col proprio sottogruppo H, **) e lo sarà pure col loro prodotto (G, Γ). Così pure (H, Γ) sarà permutabile con (G, Γ). C. d. d.

Applicando ripetutamente questo corollario, ne consegue immediatamente il

Teorema. *Se tre gruppi* G, H, Γ *sono permutabili tra loro a due a due*, *anche i tre prodotti* (G, H), (H, Γ) *e* (G, Γ) *sono permutabili tra loro a due a due.*

Questi teoremi si estendono subito per induzione al caso di più gruppi, e si trovano i seguenti:

Se un gruppo G *è permutabile con più altri*, $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$, *esso*

---

*) Notasi l'analogia che vi è tra questo teorema e l'altro che dice che se un' operazione è permutabile con due altre, essa è pure permutabile col loro prodotto.

**) Un gruppo G può sempre dirsi permutabile con ogni suo sottogruppo Σ, poichè i prodotti $g.\,\varsigma$ esauriscono certamente il gruppo $(G, \Sigma) = G$.

è pure permutabile col loro prodotto. Inoltre il prodotto $(G_1, G_2, \ldots, G_\mu)$ *è permutabile con ognuno dei gruppi* (G, G_i) (G, G_i, G_k), $(G, G_i, G_k, G_r, \ldots)$, *qualsiansi gl'indici* $i, k, r, \ldots$, *compresi tra* 1 *e* μ *).

Se più gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ *sono permutabili tra loro a due a due, in generale il prodotto* $(G_i, G_k, G_r \ldots)$ *di un sistema qualunque* $G_i, G_k, G_r, \ldots$ *di questi gruppi, è permutabile con un altro prodotto qualunque* $(G_j, G_l, G_m, \ldots)$ **)

Supponiamo ora che il gruppo G sia permutabile singolarmente con tutte le operazioni di H e con tutte quelle di Γ: allora esso è permutabile pure con tutte quelle di (H, Γ).

Infatti se G è permutabile con tutte le operazioni di Γ, ogni prodotto $g.\gamma$ è uguale a un prodotto γg_1, in cui l'operazione γ resta la stessa, e g_1 è un' operazione di G'; e inversamente, se questo avviene qualsiansi g e γ, allora G è permutabile con tutte le operazioni di Γ. Lo stesso dicasi per G e H. Allora si consideri il prodotto

$$g.(h\,\gamma\, h'\,\gamma' \ldots) = (g\,h).\gamma\, h'\,\gamma' \ldots = h\, g_1\,\gamma\, h'\,\gamma' \ldots = h\,\gamma\, g_2\, h'\,\gamma' \ldots =$$
$$= h\,\gamma\, h'\, g_3\,\gamma' \ldots = h\,\gamma\, h'\,\gamma'\, g_4 \ldots = (h\,\gamma\, h'\,\gamma' \ldots)\, g_i,$$

qualunque sia g, onde il gruppo G è permutabile con tutte le operazioni del prodotto (H, Γ). C. d. d. Per induzione si ha subito il

TEOREMA II. — *Se un gruppo* G *è permutabile singolarmente con tutte le operazioni di ciascuno dei gruppi* $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$, *allora esso è permutabile pure con tutte le operazioni del loro prodotto* $(G_1, G_2, \ldots, G_\mu)$. *E data una serie di gruppi* $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$, *tali che, considerati due qualunque di essi* G_i *e* H_k, *questi siano ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, allora i due prodotti* $(G_i, G_k, G_r \ldots)$ *e* $(G_j, G_l, G_m, \ldots)$ *godono pure della proprietà di*

*) Infatti ammesso, ad esempio, che $(G_1, G_2, \ldots, G_\mu)$ sia permutabile con (G, G_i, G_k), siccome esso è pure permutabile col proprio sottogruppo G_r, lo sarà pure col prodotto $(G, G_i, G_k\, G_r)$; ecc.

**) Si è visto che i gruppi $G_i, G_k, G_r, \ldots$ sono singolarmente permutabili col prodotto $(G_j, G_l, G_m, \ldots)$; questo sarà dunque permutabile col prodotto $(G_i, G_k, G_r, \ldots)$ di quei gruppi.

essere ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro (qualsiasi gl'indici i. k. r, . . . , j, l, m, . . . , compresi tra 1 e μ).

§ 9.

Alcune proprietà dei sottogruppi del prodotto di due gruppi permutabili.

Siano dati due gruppi permutabili G e Γ, aventi per massimo sottogruppo comune Σ, e sia H un sottogruppo qualunque di (G, Γ), che contenga G ; detto Δ il massimo sottogruppo comune a H e a Γ, ci proproniamo di dimostrare che H è uguale al prodotto dei due gruppi G e Δ.

Intanto il prodotto (G, Δ) è certamente contenuto in H, sicchè basterà dimostrare che ogni operazione di H è il prodotto di una di G, per una di Δ. Infatti, siccome G e Γ sono per ipotesi permutabili, ogni operazione di (G, Γ) si può ridurre alla forma $g\,\gamma$. Consideriamo un'operazione qualunque di H, poniamo $g.\gamma$; siccome H contiene anche g^{-1}, esso conterrà anche il prodotto $g^{-1}\, g.\, \gamma = \gamma$, e dunque γ sarà un'operazione comune a H e a Γ, cioè un'operazione δ di Δ, e quindi l'operazione considerata g_{δ} si trova in (G, Δ). C. d. d.

Ora, siccome i prodotti della forma $g.\,\delta$ esauriscono tutto il prodotto (G, Δ) = H, segue che G e Δ sono permutabili. Inoltre, siccome Γ è permutabile sia con G, che col proprio sottogruppo Δ, esso sarà pure permutabile col prodotto (G, Δ) = H. È poi evidente che Δ, massimo sottogruppo comune a H e a Γ, contiene Σ. Abbiamo dunque il

Teorema III. — *Se due gruppi* G *e* Γ *sono permutabili, e hanno per massimo sottogruppo comune* Σ, *se* H *è un sottogruppo qualunque del prodotto* (G, Γ), *che contenga* G, *esso è pure permutabile con* Γ, *ed è sempre il prodotto di* G *per un sottogruppo* Δ *di* Γ ; *questo sottogruppo* Δ *è precisamente il massimo sottogruppo comune a* H *e a* Γ ; *esso è inoltre permutabile con* G, *e contiene pure* Σ.

Ne segue che ogni sistema completo di moltiplicatrici di G rispetto a Σ, costituisce pure, nello stesso tempo, un sistema completo di moltiplicatrici di H rispetto a Δ, e di (G, Γ), rispetto a Γ. Così pure ogni sistema completo di moltiplicatrici di Δ rispetto a Σ dà pure un sistema completo di moltiplicatrici di H rispetto a G; e ogni sistema completo di moltiplicatrici di Γ rispetto a Δ nè dà pure uno di (G, Γ) rispetto a H.

Ora dimostriamo, inversamente, che, *considerato un sottogruppo qualunque* Δ *di* Γ, *che sia permutabile con* G *e contenga* Σ, *esiste sempre uno e un solo sottogruppo* H *di* (G, Γ), *contenente* G, *e tale che* Δ *sia il mass. sottogruppo comune a* H *e a* Γ; *e questo sottogruppo* H *é precisamente il prodotto dei due gruppi* G *e* Δ.

Intanto, se esiste un tale sottogruppo H, dal teorema diretto segue che esso deve coincidere col prodotto (G, Δ). Ora, Δ è contenuto sì in Γ, che in (G, Δ); onde se proviamo che, inversamente, ogni operazione comune a Γ e a (G, Δ) trovasi in Δ, seguirà l'asserto. Se γ è una tale operazione, siccome per ipotesi Δ e G sono permutabili, essa si potrà ridurre alla forma $\delta\, g$, essendo δ un'operazione di Δ e g una di G: sarà dunque $\gamma = \delta\, g$. e $g = \delta^{-1}\gamma$, che è un'operazione comune a G e a Γ, cioè un'operazione di Σ; e siccome per ipotesi Σ è contenuto in Δ, sarà g uguale a un'operazione δ_1 di Δ, sicchè l'operazione considerata γ sarà $= \delta\, \delta_1$, che si trova in Δ. C. d. d.

Dunque *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sottogruppo* Δ *di* Γ, *che contenga* Σ *sia permutabile con* G, *è che esso sia il mass. sottogruppo comune ai due gruppi* Γ *e* (Δ, G). Esiste dunque una perfetta corrispondenza biunivoca tra i vari sottogruppi H di (G, Γ) che contengono G, e quei sottogruppi Δ di Γ che sono permutabili con G e contengono Σ: tutti i possibili sottogruppi H di (G, Γ) sono dati dai prodotti di G per i vari sottogruppi Δ di Γ. Analogamente per quei sottogruppi di (G, Γ) che contengono Γ.

Nel caso particolare che G sia permutabile con tutte le operazioni di Γ, allora, se Δ è un qualunque sottogruppo di Γ che contenga Σ, esso è certamente permutabile con G (chè anzi G è permutabile con tutte le operazioni di Δ), e quindi Δ è il mass. sott. comune ai due gruppi (G, Δ) e Γ. Vi è allora insomma una corrispondenza completa fra tutti i possibili sottogruppi di Γ che contengono Σ, e i sottogruppi di (G, Γ) che contengono G.

Se il gruppo G è permutabile con tutte le operazioni di Γ, allora G è invariante in (G, Γ), come Σ in Γ, e i due gruppi complementari $\frac{(G, \Gamma)}{G}$ e $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ sono oloedricamente isomorfi; siccome inoltre G è pure invariante in H, e Σ è invariante in Δ, anche i due gruppi $\frac{H}{G}$ e $\frac{\Delta}{\Sigma}$ sono oloedricamente isomorfi. Aggiungiamo (ciò che dimostreremo tra breve, ma che per ora ci limitiamo ad affermare) che pure i due gruppi $\frac{(G, \Gamma)}{H}$ e $\frac{\Gamma}{\Delta}$ sono oloedricamente isomorfi tra loro.

Se invece Γ è permutabile con tutte le operazioni di (G, Γ), allora Γ è invariante in (G, Γ), e quindi è permutabile pure con tutte le operazioni di H; come pure Δ è invariante in H, e Σ lo è in G; e i tre gruppi $\frac{(G, \Gamma)}{\Gamma}$, $\frac{H}{\Delta}$ e $\frac{G}{\Sigma}$ sono oloedricamente isomorfi tra loro (sempre pel teor. VI del § 7, avendo i due gruppi Γ e H per prodotto (G, Γ) e per massimo sottogruppo comune Δ, mentre Γ è permutabile con ogni operazione di H).

Supponiamo di nuovo che G sia permutabile con tutte le operazioni di Γ; allora i due gruppi $\frac{(G, \Gamma)}{G}$ e $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ coincidono. *) Quest'unico gruppo indichiamolo per brevità con K; esso è meriedricamente isomorfo a (G, Γ), e all'identità in K corrisponde in

---

*) Se si pensa, com' è lecito, che questi due gruppi agiscano sulle stesse lettere $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$, allora $\frac{(G, \Gamma)}{G}$ e $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ coincidono senz'altro; ma se si pensa che essi agiscano su lettere diverse, allora le sostituzioni dell'uno si ottengono da quelle dell'altro, con un semplice cambiamento delle lettere; in ogni caso questi due gruppi si possono riguardare come coincidenti.

(G, Γ) il sottogruppo G. Al sottogruppo H di (G, Γ) corrisponderà in K un certo sottogruppo Λ, e siccome $H = (\Delta, G)$, anche al sottogruppo Δ di (G, Γ) corrisponderà in K il sottogruppo Λ (§ 4). Ora siccome H contiene G, i due gruppi $\frac{(G, \Gamma)}{H}$ e $\frac{K}{\Lambda}$ sono oloedricamente isomorfi (teor. II del § 5). Ma siccome K è pure uguale a $\frac{\Gamma}{\Sigma}$, e siccome Δ contiene Σ, si ha pure che $\frac{\Gamma}{\Delta} \equiv \frac{K}{\Lambda}$. *)

Dunque $\frac{(G, \Gamma)}{H} \equiv \frac{\Gamma}{\Delta}$, e abbiamo così il teorema :

Se un gruppo G *è permutabile con tutte le operazioni di un altro gruppo* Γ, *e* Σ *è il loro mass. sott. comune, detto* H *un qualunque sottogruppo di* (G, Γ) *che contenga* G, *e* Δ *il mass. sott. comune a* H *e a* Γ, *si ha che i due gruppi complementari* $\frac{(G, \Gamma)}{H} = \frac{(G, \Gamma)}{(G, \Delta)}$ *e* $\frac{\Gamma}{\Delta}$ *sono oloedricamente isomorfi* (*anzi coincidono, salvo il nome delle lettere su cui essi agiscono*).

Il carattere della completa corrispondenza che vi è tra i vari sottogruppi H di (G, Γ) che contengono G, e i sottogruppi Δ di Γ che contengono Σ, *in questo caso che* G *è permutabile con tutte le operazioni di* Γ, è dunque il seguente : i primi sottogruppi, (H), e i secondi, (Δ), corrispondono rispettivamente agli stessi sottogruppi del gruppo complementare $\frac{(G, \Gamma)}{G}$, concidente con $\frac{\Gamma}{\Sigma}$.

Seguono senz'altro, applicando i risultati del § 4, ad esempio le seguenti proprietà :

Se H e H' sono due sottogruppi di (G, Γ), contenenti G, se Δ è il mass. sott. comune a H e a Γ, e Δ' è il mass. sott. comune a H' e a Γ, il prodotto (Δ, Δ') è il massimo sott. comune al prodotto

*) Al gruppo Δ, considerato come sottogruppo di (G, Γ), corrisponde in $\frac{(G, \Gamma)}{G} = K$ il sottogruppo Λ; considerato invece come sottogruppo di Γ, gli corrisponderà in $\frac{\Gamma}{\Sigma} = K$ naturalmente lo stesso sottogruppo Λ.

(H, H′) e a Γ, e i due gruppi Δ e Δ' sono permutabili, allora e allora soltanto che lo sieno H e H′ ; inoltre il gruppo Δ è invariante in Γ, allora e allora soltanto che H lo sia in (G, Γ), ecc. : proprietà che del resto (sempre nell'ipotesi che G sia permutabile con tutte le operazioni di Γ) possono stabilirsi anche direttamente.

§ 10.

Continuazione dell' argomento precedente.

Sviluppiamo maggiormente le proprietà dei sottogruppi del prodotto di due gruppi permutabili, stabilite nel § precedente. Siano G e Γ due gruppi permutabili, aventi per mass. sott. comune Σ; sia H un sottogruppo di (G, Γ), contenente G, e Δ sia il mass. sott. comune a H e Γ ; indichi K un sottogruppo qualunque di (G, Γ), contenente Γ, e M indichi il mass. sott. comune a H e a K ; infine Λ indichi il mass. sott. comune a G e a K. Tutti questi gruppi conviene rappresentarli, per comodità, disponendoli come nel quadro seguente :

$$\begin{array}{ccccc} & & (G, \Gamma) & & \\ & H & & K & \\ G & & M & & \Gamma \\ & \Lambda & & \Delta & \\ & & \Sigma & & \end{array}$$

Siccome H e Γ sono permutabili, essi si trovano nelle stesse condizioni di G e Γ, e pel teor. III del § precedente si ha che K è permutabile con H, che M è pure permutabile con Γ, e K è uguale al prodotto di M per Γ; infine che Δ è il mass. sott. comune a M e a Γ.

Ma in queste deduzioni possiamo scambiare G con Γ e H con K. Troviamo allora che K e M sono pure permutabili con G, e che H è il prodotto di G per M; inoltre che Λ è permutabile con Γ, ed è il mass. sott. comune a G e a M; mentre il mass. sott. comune a Λ e a Γ è Σ. Aggiungiamo ora che M è uguale al prodotto di Λ

per Δ, che Λ e Δ sono permutabili tra loro e hanno evidentemente per mass. sott. comune Σ.

Infatti, essendo M contenuto in H, ed essendo H il prodotto dei due gruppi permutabili G e Δ, ogni operazione di M si può ridurre alla forma $g\ \delta$. Ma poichè M è pure contenuto in K, si ha che $g.\ \delta$ è uguale a un'operazione k di K, ossia $g\delta = k$. e $g = k\delta^{-1}$. Ora δ si trova in Γ, e quindi anche in K, epperò $g = k.\ \delta^{-1}$ è un'operazione comune a G e a K, cioè un'operazione λ di Λ. Dunque $g = \lambda$, e l'operazione considerata $g\delta = \lambda\delta$, è cioè il prodotto di un'operazione di Λ per una di Δ. E siccome inversamente Λ e Δ sono contenuti in M, segue che M è uguale al prodotto (Λ, Δ). Ma poichè inoltre tutti i prodotti $\lambda.\ \delta$ esauriscono il gruppo M, i due gruppi Λ e Δ sono permutabili. Così le asserzioni superiori sono tutte dimostrate. Abbiamo così il seguente teorema, che comprende il teor. III del § precedente :

Teorema IV. — *Se* G *e* Γ *sono due gruppi permutabili, aventi per mass. sott. comune* Σ, *se* H *è un sottogruppo qualunque di* (G, Γ), *contenente* G, *e* K *un sottogruppo di* (G, Γ), *contenente* Γ, *i due gruppi* H *e* K *sono permutabili ; e se* M *è il loro mass. sott. comune, se* Δ *è il massimo sott. comune a* H *e a* Γ, *e* Λ *quello comune a* G *e a* K, *il gruppo* M *è permutabile con* G *e con* Γ, *ed uguale al prodotto di* Λ *per* Δ; *il prodotto* (G, M) *coincide con* H, *e il prodotto* (M, Γ) *coincide con* K ; *poi* Λ *è il mass. sott. comune a* G *e a* M, *ed è permutabile con* Γ, *come pure* Δ *è permutabile con* G *ed è il mass. sott. comune a* M *e a* Γ; *i due gruppi* Λ *e* Δ *sono pure permutabili tra loro; infine si ha* H $=$ (G, Δ), *e* K $=$ (Γ, Λ).

Nel quadro precedente tutti i gruppi scritti sono dunque a due a due permutabili, e questi gruppi sono disposti in modo che H, (G, Γ), K e M sono i prodotti dei gruppi che sono scritti sotto ad essi e li comprendono, e M, Λ, Δ e Σ sono i mass. sott. comuni ai gruppi che sono scritti sopra ad essi, e li comprendono.

Ora siccome H e Γ sono permutabili, essi si trovano nelle stesse condizioni di G e Γ, e perciò su di essi possono ripetere le stesse considerazioni, e si possono dedurne delle proprietà del tutto analoghe a quelle trovate per G e Γ.

Abbiamo visto, nel § precedente, qual'è la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sottogruppo Δ di Γ, contenente Σ, sia permutabile con G, e un sottogruppo Λ di G, contenente Σ, sia permutabile con Γ. Possiamo dire che *se* Λ *è un sottogruppo qualunque di* G, *contenente* Σ, *e permutabile con* Γ, *e* Δ *un sottogruppo di* Γ, *contenente* Σ. *e permutabile con G*, indicato con H il prodotto (G, Δ) e con K il prodotto (Γ, Λ), sarà Δ il mass. sott. comune a H e a Γ, e Λ quello comune a K e a G ; pel teorema diretto ora dimostrato, *i due gruppi* Λ *e* Δ *saranno permutabili tra loro, e il loro prodotto sarà precisamente il mass. sott. comune a* H *e a* K : questo è l'inverso del teor. IV.

Ora supponiamo in generale che i due sottogruppi Λ e Δ *siano permutabili tra loro*, e dimostriamo che ha luogo la seguente proprietà: *il mass. sott. comune a* (Λ, Δ) *e a* G *è* Λ, *e il mass. sott. comune a* (K, Δ) *e a* Γ *è* Δ.

Il gruppo Λ è contenuto intanto in G e in (Λ, Δ). Inversamente se un'operazione di (Λ, Δ) (che può ridursi alla forma $\lambda\,\delta$), si trova anche in G, si ha $\lambda\,\delta = g$, da cui $\delta = \lambda^{-1} g$, che è un'operazione comune a Δ e a G, cioè un'operazione di Σ ; e siccome Σ è contenuto in Λ, si ha che l'operazione considerata $\lambda\,\delta$ si trova in Λ. Dunque Λ è il mass. sott. comune a G e a (Λ, Δ). E analogamente per Δ. C. d. d.

Se infine il gruppo G è permutabile con tutte le operazioni di Γ, allora G è invariante in (G, Γ), e quindi anche in H ; come pure Σ è invariante in Γ, e quindi anche in Δ, e come Λ è invariante in K e in M; i tre gruppi complementari $\frac{(G, \Gamma)}{G}$, $\frac{K}{\Lambda}$ e $\frac{\Gamma}{\Sigma}$ sono oloedricamente isomorfi tra loro, i tre gruppi $\frac{H}{G}$, $\frac{M}{\Lambda}$ e $\frac{\Delta}{\Sigma}$ pure, e i tre gruppi $\frac{(G, \Gamma)}{H}$, $\frac{K}{M}$ e $\frac{\Gamma}{\Delta}$ pure sono oloedricamente isomorfi tra loro. Analoghe proprietà si hanno, quando Γ sia permutabile con tutte le operazioni di G.

§ 11.

Serie di gruppi permutabili che sorgono da due tali gruppi assegnati.

Supponiamo che G_1 e Γ siano due gruppi permutabili, aventi per mass. sott. comune Σ_1. Trasformiamo G_1 con *tutte le* operazioni di Γ, e diciàmo $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ i gruppi che otteniamo, naturalmente tutti contenuti in (G_1, Γ). Dimostriamo che hanno luogo le seguenti proprietà:

I gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ *sono tutti permutabili con* Γ, *e costituiscono un sistema completo di sottogruppi affini in* (G, Γ); *inoltre i prodotti* $(G_1, \Gamma), (G_2, \Gamma) \ldots, (G_\mu, \Gamma)$ *coincidono tutti tra loro, e se si considerano i mass. sott. comuni dei gruppi* $G_1, G_2, \ldots G_\mu$ *con* Γ, *essi formano un sistema completo di sottogruppi affini in* Γ.

Infatti ogni operazione di (G, Γ) si può ridurre alla forma $g.\gamma$, e si ha

$$(g\,\gamma)^{-1}\,G\,(g\,\gamma) = \gamma^{-1}\,(g^{-1}\,Gg) = \gamma^{-1}\,G\,\gamma,$$

sicchè trasformando G con tutte le operazioni di (G, Γ) si ottengono appunto i gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$, come si è asserito.

Si vede poi subito che i prodotti (G_1, Γ) e (G_i, Γ) coincidono, qualunque sia $i = 1, 2, \ldots, \mu$; giacchè se $G_i = \gamma_i^{-1}\,G_1\,\gamma'_i$, considerata la totalità delle operazioni $(\gamma_i^{-1}\,g.\gamma_i).\gamma$, in cui per g si pongano successivamente le varie operazioni di G_1, e per γ quelle di Γ, questa totalità coincide con quella delle operazioni $g\,\gamma$, *) cioè coincide col prodotto (G_1, Γ): sicchè il gruppo (G_1, Γ) è certamente contenuto in (G_i, Γ); e siccome G_i è già contenuto in (G_1, Γ), segue che i due gruppi (G_1, Γ) e (G_i, Γ) coincidono. Allora siccome la totalità delle operazioni $(\gamma_i^{-1}\,g\,\gamma_i).\gamma$ esaurisce il prodotto (G_i, Γ), e siccome la totalità $\gamma_i^{-1}\,g\,\gamma_i$ costituisce G_i, segue che i due gruppi G_i e Γ sono permutabili.

---

*) La totalità delle operazioni $\gamma_i\,\gamma$ costituisce Γ, quella delle operazioni $g\,(\gamma_i\,\gamma)$ costituisce (G_1, Γ), giacchè G_1 e Γ sono permutabili, e pure la totalità delle operazioni $\gamma_i^{-1}(g\,\gamma_i\,\gamma)$ costituirà (G_1, Γ).

D' altra parte, se si pone $\gamma_i^{-1} \Sigma_1 \gamma_i = \Sigma_i$, questo gruppo Σ_i è precisamente il mass. sott. comune a $\gamma_i^{-1} G_1 \gamma_i = G_i$ e a Γ (poichè Σ_i è certamente contenuto in G_i in Γ, mentre la relazione tra Σ_i e Σ_1 è reciproca); e ciò vale per $i = 1, 2, \ldots, \mu$. Questi sottogruppi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$ costituiscono poi un sistema completo di sottogruppi affini in Γ, essendo tutti ottenuti, trasformando Σ_1 con tutte le possibili operazioni di Γ. È così dimostrato tutto quanto avevamo dianzi asserito.

I gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ si trovano dunque tutti nelle stesse condizioni rispetto a Γ, come pure rispetto al prodotto $(G_1, \Gamma) = (G_i, \Gamma)$.

Poniamo ora $\Gamma = \Gamma_1$, e scambiamo, nelle considerazioni che abbiam fatte sopra, il gruppo G_1 con Γ_1. Se $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ sono i gruppi affini a Γ_1 rispetto a (G_1, Γ_1), essi saranno pure affini a Γ_1 rispetto a G_1, cioè si otterranno tutti da Γ_1, trasformandolo con le varie operazioni di G_1. I prodotti $(G_1, \Gamma_1), (G_1, \Gamma_2), \ldots, (G_1, \Gamma_\nu)$ coincideranno tra loro, i gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ saranno tutti permutabili con G_1, e si troveranno tutti nelle stesse condizioni rispetto a G_2. Ora siccome i due gruppi G_1 e G_i si trovano nelle stesse condizioni rispetto a Γ_1, e siccome i prodotti (G_1, Γ_1) e (G_i, Γ_1) coincidono, per $i = 1, 2, \ldots, \mu$, segue che i gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ si ottengono tutti trasformando Γ_1 con le varie operazioni di G_i, e quindi questi gruppi si trovano tutti nelle stesse condizioni rispetto a G_i, col quale sono tutti permutabili. I prodotti (G_i, Γ_k) coincidono dunque tutti ($i = 1, 2, \ldots, \mu$, e $k = 1, 2, \ldots, \nu$), e i gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ si ottengono tutti, trasformando Γ_k con tutte le operazioni di G_i (qualsiasi $k=1,2,\ldots\nu$, e $i = 1, 2, \ldots, \mu$). Abbiamo dunque il teorema:

Dati due gruppi permutabili G_1 e Γ_1, *se* $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ *sono tutti i gruppi che si ottengono, trasformando* G_1 *con le varie operazioni di* Γ_1, *e* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ *sono tutti quelli che si ottengono, trasformando* Γ_1 *con le varie operazioni di* G_1, *queste due serie di gruppi* $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$, *e* $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots, \Gamma_\nu$ *hanno la proprietà che i gruppi di una serie stanno tutti nelle stesse condizioni rispetto ai gruppi dell'altra serie: i prodotti* (G_i, Γ_k) *coincidono tutti tra loro, un qualun-*

que gruppo G_i *è permutabile con un qualunque gruppo* Γ_k, *i gruppi* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$ *si ottengono tutti trasformando* Γ_k *con le varie operazioni di* G_i, *e così pure i gruppi* $G_1, G_2 \ldots, G_\mu$ *si ottengono tutti trasformando* G_i *con le varie operazioni di* Γ_k (*qualunque sia* $i = 1, 2, \ldots, \mu$ *e* $k = 1, 2, \ldots, \nu$). *Inoltre se* Σ_{ik} *indica il mass. sott. comune a* G_i *e a* Γ_k, *i gruppi* Σ_{1k} $\Sigma_{2k}, \ldots, \Sigma_{\mu k}$, *formano un sistema completo di sottogruppi affini in* Γ_k, *e così pure i gruppi* $\Sigma_{i1}, \Sigma_{i2}, \ldots, \Sigma_{i\nu}$ *formano un sistema completo di sottogruppi affini in* G_i.

Dati due gruppi permutabili G_1 e Γ_1, sorgono dunque due serie di nuovi gruppi permutabili, nel modo che abbiam visto ; la prima serie si riduce all'unico gruppo G_1, quando G_1 sia trasformato in sè medesimo da tutte le operazioni di Γ_1, e così pure la seconda serie si riduce a Γ_1, quando Γ_1 sia permutabile con tutte le operazioni di Γ_1.

Nel caso generale, se invece di partire dai due gruppi G_1 e Γ_1, si partisse dai due altri G_i e Γ_k, si troverebbero le stesse due serie di gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$, e Γ_1 $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu$, dianzi trovate.

§ 12.

Continuazione dell'argomento precedente.

Continuiamo nell' argomento precedente. Sappiamo che il gruppo $\frac{\Gamma_1}{\Sigma_1}$ è un sottogruppo di $\frac{(G_1, \Gamma_1)}{G_1}$; ora cerchiamo di conoscere meglio la relazione che vi è tra questi due gruppi.

Consideriamo il mass. sott. comune H ai gruppi affini $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$, e il mass. sott. comune Λ ai sottogruppi affini $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$ (essendo Σ_i, ricordiamo, il mass. sott. comune a G_i e a Γ_1). Com'è noto, H è invariante in (G_1, Γ_1), come Λ lo è in Γ_1 ; dimostriamo che Λ *è il mass. sott. comune a* H *e a* Γ_1, *o anche il mass. sott. comune a* H *e a* Σ_1.

Infatti Λ è certamente contenuto in H, essendo esso contenuto in $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$; e inversamente, se un'operazione è comune a H e a Γ_1, essa è comune ai gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ e a Γ_1, ossia è comune ai gruppi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\mu$ e a Γ_1, ossia è un'operazione di Λ. C. d. d.

Ora facciamo vedere che *il mass. sott. comune a* G_1 *e a* (H, Γ_1) è (H, Σ_1). Intanto (H, Σ_1) è contenuto sì in G_1, che in (H, Γ_1). Inversamente, se $g = h\,g'$, *) si ha $h^{-1}\,g = g'$, che è comune a G_1 e a Γ_1, ossia è un'operazione δ di Σ_1 : ne segue che $g = g\,\delta$. C. d. d.

Siccome poi (H, Σ_1) è contenuto in G_1. il massimo sottogruppo comune a (H, Σ_1) e a Γ_1 è manifestamente Σ_1.

Possiamo rappresentare questi gruppi nel quadro seguente, in cui due qualunque dei gruppi scritti sono permutabili, e la loro disposizione è fatta col solito criterio di porre sotto a un gruppo due altri, di cui esso sia il prodotto, e di porre sopra ad esso due altri, di cui esso sia il mass. sott. comune.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & (G_1, \Gamma_1) & & & \\
G_1 & & (H, \Gamma_1) & & \\
 & (H, \Sigma_1) & & \Gamma_1 \\
H & & \Sigma_1 & & \\
 & \Lambda & & &
\end{array}$$

Ora H è trasformato in sè medesimo da tutte le operazioni di Γ_1, e perciò, considerato il prodotto (H, Γ_1), si ha che $\dfrac{(H, \Gamma_1)}{H} = \dfrac{\Gamma_1}{\Lambda}$. Ma (H, Γ_1) è contenuto in (G_1, Γ_1), onde il gruppo $\dfrac{(H, \Gamma_1)}{H}$ è un sottogruppo di $\dfrac{(G_1, \Gamma_1)}{H}$ (teor. III del § 7); ma $\dfrac{(G_1, \Gamma_1)}{H} = \dfrac{(G_1, \Gamma_1)}{G}$, e $\dfrac{\Gamma_1}{\Lambda} = \dfrac{\Gamma_1}{\Sigma}$, e troviamo così nuovamente che $\dfrac{\Gamma_1}{\Sigma_1}$ è oloedricamente isomorfo a un sottogruppo di $\dfrac{(G_1, F_1)}{G_1}$. Qui però vediamo di più: siccome la condizione necessaria e sufficiente, affinchè i due gruppi $\dfrac{(G_1, \Gamma_1)}{H}$ e $\dfrac{(H, \Gamma_1)}{H}$ coincidano,

---

*) Essendo H permutabile con Γ_1, ogni operazione di (H, Γ_1) si può certamente ridurre alla forma $h\,q'$.

è che coincidano i due gruppi (G_1, Γ_1) e (H, Γ_1), così troviamo che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè i due gruppi complementari* $\dfrac{(G_1, \Gamma_1)}{G_1}$ *e* $\dfrac{\Gamma_1}{\Sigma_1}$ *siano oloedricamente isomorfi, è che il prodotto* (H, Γ_1) *coincida con* (G_1, Γ_1).

Siccome (H, Σ_1) è il mass. sott. comune a G_1 e a (H, Σ_1), segue subito che la condizione necessaria e sufficiente affinchè i due prodotti (G_1, Γ_1) e (H, Γ_1) coincidano, è che il gruppo G_1 coincida con (H, Σ_1), poichè questa è anche la condizione necessaria e sufficiente, affinchè G_1 sia contenuto in (H, Γ_1). Dunque *affinchè i due gruppi* $\dfrac{\Gamma_1}{\Sigma_1}$ *e* $\dfrac{(G_1, \Gamma_1)}{G_1}$ *siano oloedricamente isomorfi, bisogna e basta che* G_1 *coincida con* (H, Σ_1).

Ora, a causa del teor. III del § 9, il gruppo (H, Γ_1) è permutabile con G_1, e il gruppo (H, Σ_1), mass. sott. comune a (H, Γ_1) e a G_1, è permutabile con Γ_1. Possiamo applicare alla coppia di gruppi permutabili G_1 e (H, Γ_1) i risultati del § precedente: trasformando G_1 con tutte le operazioni di (H, Γ_1), si ottengono i gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$. i quali stanno tutti nelle stesse condizioni con (H, Γ_1), e quindi il mass. sott. comune a G_i e a (H, Γ_1) è (H, Σ_i), e *questi gruppi* (H, Σ_1), $(H, \Sigma_2), \ldots, (H, \Sigma_\mu)$, pel teor. dimostrato al § precedente, *formano un sistema completo di sottogruppi affini rispetto a* (H, Γ_1). Analogamente a quel che si è visto in questo § pel gruppo Λ, qui abbiamo che il massimo sott. comune a (H, Σ_1) e ai suoi affini in (H, Γ_1) coincide col mass. sott. comune a H e a (H, Σ_1), che è H. *Dunque H è il mass. sott. comune ai gruppi affini* (H, Σ_1), (H, Σ_2) .., (H, Σ_μ), *e quindi il gruppo*

$$\frac{(H, \Gamma_1)}{(H, \Sigma_1)} \equiv \frac{(H, \Gamma_1)}{(H, \Sigma_i)} \equiv \frac{(H, \Gamma_1)}{H} \equiv \frac{\Gamma_1}{\Sigma_i} \equiv \frac{\Gamma_1}{\Sigma_1} \equiv \frac{\Gamma_1}{\Lambda} \text{ per } i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

In queste considerazioni possiamo scambiare i due gruppi G_1 e Γ_1, e abbiamo :

Se K *è il mass. sott. comune a* Γ_1 *e ai suoi affini in* (G_1, Γ_1), *la condizione necessaria e sufficiente affinchè il gruppo* $\dfrac{(G_1, \Gamma_1)}{\Gamma_1}$ *sia oloedricamente isomorfo a* $\dfrac{G_1}{\Sigma_1}$ *è che il gruppo* (G_1, Γ_1) *coincida con* (K, G_1), *ovvero che* Γ_1 *coincida con* (K, Σ_1). *In generale* (K, Σ_1) *è il mass. sott. comune ai due gruppi* Γ_1 *e* (K, G_1), *e* K *è il mass. sott. comune a* (K, Σ_1) *e ai suoi affini in* (K, G_1).

Applicando il teor. IV del § 10, *abbiamo infine che il mass. sott. comune a* (H, Σ_1) *e a* (K, Σ_1) *è* Σ_1, *e che il mass. sott. comune ai due gruppi* (H, Γ_1) *e* (K, G_1) *è il prodotto* (H, K, Σ_1).

Parte III.

PRODOTTI DIRETTI DI GRUPPI DI OPERAZIONI

§ 13.

Prodotti di gruppi di operazioni, ognuno permutabile con tutte quelle dell'altro.

Se due gruppi G_1 e G_2 non hanno operazioni comuni, oltre l'identità, e le operazioni dell'uno sono ognuna permutabile con tutte quelle dell'altro, allora il prodotto dei due gruppi prende il nome di loro *prodotto diretto;* sicchè quando diciamo che (G_1,G_2) è il prodotto diretto di G_1 per G_2, intendiamo che per questi due gruppi G_1 e G_2 le due suddette condizioni siano senz'altro soddisfatte. Ad esempio, se G_1 e G_2 sono due gruppi di sostituzioni, e le lettere su cui agisce il primo sono tutte diverse da quelle su cui agisce il secondo, allora è il caso di chiamare (G_1, G_2) prodotto diretto di G_1 per G_2.

Osserviamo che se un gruppo G è il prodotto diretto di due altri, e G_1 e G_2, essendo G_1 invariante in G, si ha che $\frac{(G_1, G_2)}{G_1} \equiv G_2$, e $\frac{(G_1, G_2)}{G_2} \equiv G_1$, e che i gruppi fattoriali di G si ottengono, aggiungendo a quelli di $\frac{G}{G_1}$, quelli di G_1; ma siccome $\frac{G}{G_1}$ e G_2 hanno gli stessi gruppi fattoriali, perchè oloedricamente isomorfi tra loro, segue che *i gruppi fattoriali di* G *si ottengono, aggiungendo a quelli di* G_1, *quelli di* G_2.

Ricordiamo il seguente teorema : Se due gruppi sono ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e non hanno operazioni comuni oltre l' identità, allora *ciascuna operazione del primo gruppo è permutabile con tutte quelle del secondo* (*V.* BURNSIDE, *Op. cit.*, *teor.* IX *del* § 34).

Prima d'incominciare lo studio generale dei prodotti diretti, facciamo vedere come ad esso si riconduca quello di una classe più generale di gruppi di operazioni. Dimostriamo il seguente:

TEOREMA I. *Se due gruppi* G_1 *e* G_2 *sono ciascuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e* Σ *è il loro mass. sott. comune, il gruppo complementare* $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$ *è il prodotto diretto dei due gruppi* $\frac{G_1}{\Sigma}$ *e* $\frac{G_2}{\Sigma}$ (*ovvero di due gruppi oloedricamente isomorfi a questi*).

Si consideri il gruppo $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$ e lo si indichi per brevità con Γ : esso è meriedricamente isomorfo a (G_1, G_2), e all'identità in Γ corrisponde in (G_1, G_2) il sottogruppo Σ, poichè questo è invariante in (G_1, G_2). Al sottogruppo G_1 di (G_1, G_2) corrisponderà in Γ un certo sottogruppo Γ_1, e a G_2 un altro sottogruppo Γ_2; e siccome G_1 e G_2 contengono Σ, si avrà che $\Gamma_1 \equiv \frac{G_1}{\Sigma}$ e $\Gamma_2 \equiv \frac{G_2}{\Sigma}$ (§ 3). Proveremo che il gruppo Γ è il prodotto diretto di Γ_1 per Γ_2, e da questo seguirà l'asserto. Intanto, siccome il prodotto dei due gruppi G_1 e G_2 deve corrispondere al prodotto di Γ_1 per Γ_2, segue che $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$; inoltre, essendo G_1 e G_2 invarianti in (G_1, G_2), anche Γ_1 e Γ_2 sono invarianti in Γ, ossia Γ_1 e Γ_2 sono ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e questo basta ad assicurare che *ciascuna operazione* di Γ_1 è permutabile con *tutte quelle* di Γ_2, ossia che Γ è il prodotto *diretto* di Γ_1 per Γ_2. C. d. d.

Nel caso particolare che Σ si riduca all'identità, allora il gruppo (G_1, G_2) diventa il prodotto diretto di G_1 per G_2.

Le proprietà del gruppo complementare $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$, e anche quelle del gruppo (G_1, G_2), si deducono quindi senz'altro, come noi faremo, da quelle dei prodotti diretti (corrispondenti al caso particolare che Σ si riduca all'identità) ; sicchè lo studio che faremo sui prodotti diretti è anche, più in generale, lo studio dei gruppi che hanno la proprietà di essere ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro.

Osserviamo che, per essere $\frac{(G_1, G_2)}{G_1} \equiv \frac{G_2}{\Sigma}$, e $\frac{(G_1, G_2)}{G_2} \equiv \frac{G_1}{\Sigma}$ nel teor. precedente si può anche dire che il gruppo $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$ è il prodotto diretto di due gruppi oloedricamente isomorfi a $\frac{(G_1, G_2)}{G_1}$ e a $\frac{G_1}{\Sigma}$, ovvero oloedricamente isomorfi a $\frac{(G_1, G_2)}{G_1}$ e a $\frac{(G_1, G_2)}{G_2}$ ovvero a $\frac{(G_1, G_2)}{G_2}$ e a $\frac{G_2}{\Sigma}$.

§ 14.

Prime proprietà dei prodotti diretti.

Siano G_1 e G_2 due gruppi che non abbiano operazioni comuni, oltre l'identità, e abbiano tutte le operazioni del primo permutabili con quelle del secondo ; sia H_1 un qualunque sottogruppo di G_1, e H_2 un sottogruppo di G_2 ; i due sottogruppi H_1 e H_2 sono permutabili, e anzi essi soddisfano alle condizioni che assicurano che (H_1, H_2) è loro *prodotto diretto*. Poniamo $\Delta_1 = (G_1, H_2)$, e $\Delta_2 = (G_2, H_1)$, e disponiamo questi gruppi, per maggior chiarezza di esposizione, nel quadro seguente :

$$\begin{array}{ccccc} & & (G_1, G_2) = G & & \\ & \Delta_1 & & \Delta_2 & \\ G_1 & & (H_1, H_2) = H & & G_2 \\ & H_1 & & H_2 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Siccome H_1 e H_2 sono permutabili tra loro, segue dal § 10 che *se si considera il prodotto* $(H_1, H_2) = H$, *il mass. sott. comune a* H *e* *a* G_1 *è* H_1, *e il mass. sott. comune a* H *e a* G_2 *è* H_2. Siccome G_1 è permutabile con H_2 (anzi con tutte le operazioni di H_2), risulta dal § 9 che, posto $\Delta_1 = (G_1, H_2)$, *il mass. sott. comune a* Δ_1 *e a* G_2 *è* H_2; *e così pure che il mass. sott. comune a* Δ_2 *e a* G_1 *è* H_1. Dal § 10 si ha poi che *il mass. sott. comune a* Δ_1 *e a* Δ_2 *è proprio* $H = (H_1, H_2)$, *il quale è poi permutabile con* G_1 *e con* G_2 ; *inoltre che* Δ_1 *è il prodotto di* G_1 *per* H, *e* Δ_2 *è il prodotto di* G_2 *per* H.

Inversamente, se Δ_1 è un qualunque sottogruppo di (G_1, G_2) che contenga G_1, e Δ_2 un sottogruppo di (G_1, G_2) che contenga G_2, Δ_1 è il prodotto *diretto* di G_1 per un certo sottogruppo H_2 di G_2, il quale sottogruppo H_2 è precisamente il mass. sott. comune a Δ_1 e a G_2 ; *) e similmente Δ_2 è il prodotto diretto di G_2 per un sottogruppo H_1 di G_1, il quale sottogruppo H_1 è il mass. sott. comune a Δ_2 e a G_1; inoltre il mass. sott. comune a Δ_1 e a Δ_2 è il prodotto diretto $H = (H_1, H_2)$.

Siccome (G_1, G_2) è il prodotto dei due gruppi G_1 e Δ_2, i quali hanno per mass. sott. comune H_1, e siccome G_1 è invariante in (G_1, G_2), anche il gruppo H_1 sarà invariante in Δ_2 ; così pure H_2 è sempre invariante in Δ_1, epperò H_1 e H_2 sono pure invarianti in H. Ne segue (teor. VI del § 7) che :

$$\frac{(G_1, G_2)}{G_1} \equiv \frac{\Delta_2}{H_1} \equiv G_2; \ \frac{(G_1, G_2)}{G_2} \equiv \frac{\Delta_1}{H_2} \equiv G_1; \ \frac{\Delta_1}{G_1} \equiv \frac{(H_1, H_2)}{H_1}$$

$$\equiv H_2, \text{ e } \frac{\Delta_2}{G_2} \equiv \frac{(H_1, H_2)}{H_2} \equiv H_1.$$

e dal teor. alla fine del § 9 segue inoltre che

$$\frac{(G_1, G_2)}{\Delta_1} \equiv \frac{\Delta_2}{(H_1, H_2)} \equiv \frac{G_2}{H_2}, \text{ e } \frac{(G_1, G_2)}{\Delta_2} \equiv \frac{\Delta_1}{(H_1 H_2)} \equiv \frac{G_1}{H_2}.$$

Applicando il teor. I del § precedente si deduce che se G_1 e G_2

---

*) Δ_1 è prodotto *diretto* di G_1 per H_2, poichè G_1 e H_2 non hanno operazioni comuni, oltre l' identità, e le operazioni di G_1 sono tutte permutabili con quelle di H_2.

sono due gruppi tali che ognuno di essi sia permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e hanno per mass. sott. comune Σ, se H_1 è un *qualunque* sottogruppo di G_1 che contenga Σ, e H_2 è un qualunque sottogruppo di G_2 che contenga pure Σ, i due gruppi H_1 e H_2 sono permutabili tra loro, e il loro prodotto $H = (H_1, H_2)$ è permutabile con G_1 e con G_1 ; posto inoltre $\Delta_1 = (G_1, H_2)$, e $\Delta_2 = (G_2, H_1)$, si ha che il mass. sott. comune a Δ_1 e a Δ_2 è precisamente il prodotto (H_1, H_2), il quale ha poi la proprietà che il mass. sott. comune ad esso e a G_1 è H_1, e il mass. sott. comune ad esso e a G_2 è H_2. Infine si ha che H_1 e H_2 sono invariante in H, H_1 lo è in Δ_2 e H_2 lo è in Δ_1 ; e inoltre si ha

$$\frac{(G_1, G_2)}{G_1} = \frac{\Delta_2}{H_1} = \frac{G_2}{\Sigma} ; \frac{\Delta_1}{G_1} = \frac{(H_1, H_2)}{H_1} = \frac{H_2}{\Sigma}, \text{ e}$$

$$\frac{(G_1, G_2)}{\Delta_1} = \frac{\Delta_2}{(H_1, H_2)} = \frac{G_2}{H_2}, \text{ ecc.}$$

Inversamente, se Δ_1 è un qualunque sottogruppo di $(G_1\ G_2)$ che contenga G_1, e Δ_2 è un sottogruppo di (G_1, G_2) che contenga G_2, il gruppo Δ_1 è il prodotto di G_1 per un sottogruppo H_2 di G_2, contenente Σ (e questo sottogruppo H_2 è il mass. sott. comune a Δ_1 e a G_2) ; come pure Δ_2 è il prodotto di G_2 per un sottogruppo H_1 di G_1, contenente Σ (e H_1 è il mass. sott. comune a Δ_2 e a G_1) ; ecc.

Considerato infatti il gruppo $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$, se G'_1, G'_2, Δ'_1, Δ'_2, H'_1, H'_2 e H' sono i sottogruppi di $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$ che corrispondono rispettivamente a G_1, G_2 , Δ_1, Δ_2, H_1, H_2 e H in (G_1, G_2), per i primi sottogruppi varranno le proprietà su esposte, perchè $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$ è il prodotto diretto di G'_1 per G'_2 ; e siccome i secondi sottogruppi contengono tutti Σ, anche per essi varranno tutte quelle proprietà, a causa della completa corrispondenza che vi è tra i sottogruppi di (G_1, G_2) che contengono Σ, e i sottogruppi di $\frac{(G_1, G_2)}{\Sigma}$ (§§ 4 e 5).

§ 15.

Estensione dei risultati precedenti al caso del prodotto diretto di più gruppi.

Un gruppo G si chiama *prodotto diretto* di più altri: $G_1, G_2, \ldots G_n$, quando, considerati due qualunque di questi gruppi, G_i e G_k, con $i \neq k$, ciascuna operazione dell'uno è permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e detta inoltre g_i una qualunque operazione di G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, non è mai $g_1 . g_2 . \ldots g_n = 1$, se non è separatamente $g_1 = 1, g_2 = 1, \ldots, g_n = 1$.

Segue che ogni operazione di G si può allora ridurre sempre alla forma $g_1 g_2 \ldots g_n$, essendo g_i un'operazione di G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; e che non è mai $g_1 g_2 \ldots g_n = g'_1 g'_2 \ldots g'_n$ (dove g_i e g'_i sono operazioni di G_i), se non è separatamente $g_1 = g'_1$, $g_2 = g'_2, \ldots, g_n = g'_n$: perchè, essendo g'_i permutabile con $g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n$ si deduce che $(g_1 g'^{-1}_1) . (g_2 g'^{-1}_2) \ldots (g_n g'^{-1}_n) = 1$, e quindi che $g_i g'^{-1}_i = 1$, e che $g_i = g'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Insomma *la decomposizione di un' operazione di* G *in un prodotto della forma* $g_1 g_2 \ldots g_n$ *è unica.*

Ad esempio, se $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sono gruppi di sostituzioni agenti su lettere tutte quante diverse, allora $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ è loro prodotto *diretto.*

Osserviamo che se G è il prodotto diretto di più gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_n$, se $r < n$ considerati i due prodotti diretti $(G_1, G_2, \ldots, G_r)$ e $(G_{r+1}, G_{r+2}, \ldots, G_n)$, si ha evidentemente che G è a sua volta il prodotto *diretto* di questi due gruppi. Così pure se $r < s < n$, si ha che G è il prodotto *diretto* dei tre gruppi $(G_1, G_2, \ldots, G_r)$, $(G_{r+1}, \ldots G_s)$, $(G_{s+1}, \ldots, G_n)$; e così via. Si può dire insomma che il prodotto diretto di più gruppi gode della proprietà *associativa.*

Si vede poi subito, procedendo per induzione, che i gruppi fattoriali di G si ottengono, associando insieme quelli di G_1, quelli di G_2, ecc., quelli di G_n.

Dato un gruppo G, prodotto diretto dei gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_n$, indichiamo in generale con H_i un qualunque sottogruppo di G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$: i gruppi $H_1, H_2, \ldots H_n$ si trovano nelle stesse condizioni di $G_1, G_2, \ldots, G_n$, cioè il loro prodotto $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, è da dirsi loro prodotto diretto. Indichiamolo con H, e dimostriamo che il mass. sott. comune a H e a G_i è precisamente H_i (qualunque sia $i = 1, 2, \ldots, n$).

Infatti se un'operazione è comune a H e a G_i, si ha $h_1 h_2 \ldots h_n = g_i$, essendo h_r una certa operazione di H_r (poichè ogni operazione di $(H_1, H_2, \ldots H_n)$ può sempre ridursi alla forma $h_1 h_2 \ldots h_n$). Ne segue che $h_1 = h_2 = \ldots = h_{i-1} = h_{i+1} = \ldots = h_n = 1$. e che $h_i = g_i$, ossia che l'operazione considerata deve trovarsi in H_i. Viceversa, ogni operazione di H_i è comune a G_i e a H, e dunque H_i è effettivamente il mass. sott. comune a G_i e a H. C. d. d.

Ora poniamo in generale $\Delta_i = (G_i, H)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, e dimostriamo che il mass. sott. comune agli n gruppi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ è precisamente H, e anzi H è il mass. sott. comune a due qualunque di questi gruppi, Δ_i e Δ_k. Infatti se un'operazione è comune a Δ_i e a Δ_k, si ha $g_i\, h = g_k\, h'$, dove h e h' sono operazioni di H *). Posto che sia $h = h_1 h_2 \ldots h_n$, e $h' = h'_1 h'_2 \ldots h'_n$ (dove h_i e h'_i sono operazioni di H_i), si ha $g_i\, h_1 h_2 \ldots h_n = g_k\, h'_1 h'_2 \ldots h'_n$, da cui segue, come al solito, che $g_i\, h_i = h'_i$; $g_k\, h'_k = h_k$, e $h_s = h'_s$, se l'indice s è diverso da i e da k. Segue che $g_i = h'_i\, h_i^{-1}$, che è un'operazione di H_i : l'operazione considerata $g_i\, h_1 h_2 \ldots h_n$ si trova dunque in H. Viceversa, ogni operazione di H è comune ai due gruppi Δ_i e Δ_k, e dunque H è il mass. sott. comune a Δ_i e a Δ_k, ed è pure il mass. sott. comune ai gruppi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. C. d. d.

Aggiungiamo che H_k è il mass. sott. comune a Δ_i e G_k (naturalmente se $i \neq k$, chè altrimenti esso è G_i); il prodotto (H_k, H_r) è il massimo sottogruppo comune a Δ_i e a (G_k, G_r), il prodotto

---

*) Siccome G_i è trasformato in sè stesso da tutte le operazioni di $G_1, G_2, \ldots, G_n$, esso è certamente invariante in G, ed è quindi trasformato in sè stesso da tutte le operazioni di H, epperò G_i *e* H *sono permutabili*, e ogni operazione di $\Delta_i = (G_i, H)$ può sempre ridursi quindi alla forma $g_i\, h$ (qualunque sia $i = 1, 2, \ldots, n$).

diretto (H_k, H_r, H_s) è il mass. sott. comune a Δ_i e a (G_k, G_r, G_s), e così via (sempre se $i \neq k, r, s$). Infatti se ad esempio $g_i\, h_1\, h_2 \ldots h_n = g_k\, g_r\, g_s$ è un'operazione comune a Δ_i e a (G_k, G_r, G_s), si ha $h_k = g_k$, $h_r = g_r$ e $h_s = g_s$, ossia l'operazione considerata è uguale a $h_k\, h_r\, h_s$ e si trova in (H_k, H_r, H_s); viceversa, ogni operazione di (H_k, H_r, H_s) si trova in Δ_i e in (G_k, G_r, G_s), e quindi (H_k, H_r, H_s) è il mass. sott. comune a Δ_i e (G_k, G_r, G_s). C. d. d.

Nello stesso modo si dimostra inoltre che H_i è il mass. sott. comune a G_i e a (Δ_l, Δ_r), a G_i e a $(\Delta_k, \Delta_r, \Delta_s)$, ecc.; che (H_i, H_j) è il mass. sott. comune a (G_i, G_j) e a Δ_k, a (G_i, G_j) e a (Δ_k, Δ_r), ecc.; in generale che $(H_i, H_j, H_l \ldots)$ è il mass. sott. comune a $(G_i, G_j G_l, \ldots)$ e a $(\Delta_k, \Delta_r, \Delta_s, \ldots)$, sempre se gli indici $i, j, l, \ldots$ sono tutti diversi dagli indici $k, r, s, \ldots$ E si dimostra ancora che se si considerano due prodotti qualsiasi della forma $(\Delta_i, \Delta_j, \Delta_l, \ldots)$, e $(\Delta_k, \Delta_r, \Delta_s, \ldots)$, questi hanno per mass. sott. comune H, quando gli indici $i, j, l \ldots$ siano tutti diversi dagli altri $k, r, s. \ldots$ Concludendo, abbiamo il

Teorema II. — *Se un gruppo* G *è il prodotto diretto di più altri*: $G_1, G_2, \ldots, G_n$, *se in generale* H_i *è un sottogruppo qualunque di* G_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, *detto* H *il prodotto diretto* $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, *si ha che* H_i *è il mass. sott. comune a* G_i *e a* H; *e posto* $\Delta_i = (G_i, H)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *si ha che il mass. sott. comune a* Δ_i *e a* G_k *è* H_k (*qualsiasi* i *e* k, *purchè* $i \neq k$), *e il mass. sott. comune a due o a più dei gruppi* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *è precisamente* H; *in generale il mass. sott. comune ai due prodotti* $(G_i, G_j, G_l \ldots)$ *e* $(\Delta_k, \Delta_r, \Delta_s, \ldots)$ *è il prodotto* $(H_i, H_j, H_l, \ldots)$, *e infine il mass. sott. comune ai due gruppi* $(\Delta_i, \Delta_j, \Delta_l, \ldots)$ *e* $(\Delta_k, \Delta_r, \Delta_s, \ldots)$ *è* H, *sempre se gl'indici* $i, j, l, \ldots$ *siano tutti diversi dagl'indici* $k, r, s, \ldots$ *Infine il mass. sott. comune a* (G_i, G_j, G_l) *e a* H *è* $(H_i, H_j, H_l \ldots)$.

Siccome poi i gruppi G_i, G_k e H sono permutabili tra loro a due a due, si ha dal § 8 che i prodotti $\Delta_i = (G_i, H)$ e $\Delta_k = (G_k, H)$ sono pure permutabili tra loro e con G_i e G_k. Dunque: *i gruppi* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *sono permutabili tra loro a due a due, e coi gruppi* $G_1, G_2, \ldots, G_n$; *due prodotti qualsiansi* $(\Delta_i, \Delta_j, \Delta_e, \ldots)$ *e* $(\Delta_k, \Delta_r, \ldots)$ *sono pure permutabili* (§ 8), *due prodotti* $(\Delta_i, \Delta_j, \Delta_e, \ldots)$ *e* $(G_k, G_r, G_s, \ldots)$ *pure, ecc.*

Dimostriamo che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il gruppo* H *sia invariante in* G, *è che* H_1 *sia invariante in* G_1, H_2 *lo sia in* G_2, *ecc.*, H_n *lo sia in* G_n; *oppure che i gruppi* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *siano tutti invarianti in* G.

La condizione è infatti necessaria, perchè se H è invariante in G, siccome anche G_i è invariante in G, pure il loro mass. sott. comune H_i sarà invariante in G, e lo sarà pure il loro prodotto Δ_i. La condizione è poi sufficiente, perchè se H_i è invariante in G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, siccome H è permutabile con tutte le operazioni di $G_1, \ldots, G_{i-1}, G_{i+1}, \ldots G_n$, esso sarà pure invariante in $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ (teor. II del § 8); allora, essendo i gruppi $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tutti invarianti in G, anche il loro prodotto H sarà invariante in G, e anche i prodotti Δ_i saranno allora invarianti in G. Così pure, se Δ_i e Δ_k sono invarianti in G, lo sarà anche il loro mass. sott. comune H (e allora lo saranno pure tutti i gruppi rimanenti della serie $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$). C. d. d. Le due condizioni suddette naturalmente si equivalgono.

§ 16.

Altre proprietà dei prodotti diretti.

In questo §, proseguendo lo studio dei prodotti diretti, ci proponiamo di porne in rilievo alcune altre semplici proprietà, che ci torneranno utili, per poter enunciare in modo generale alcuni teoremi, che incontreremo tra breve. Dimostriamo il teorema:

Se un gruppo G *è il prodotto diretto di* G_1 *per* G_2, se $H_1, H_2, \ldots, H_r$ *sono r sottogruppi qualsiansi di* G_1, *e* $K_1, K_2, \ldots, K_r$ *sono r sottogruppi di* G_2, *detto* Σ *il mass. sott. comune a* $H_1, H_2, \ldots, H_r$ *e* Δ *il mass. sott. comune a* $K_1, K_2, \ldots, K_r$, *si ha che il mass. sott. comune agli r prodotti diretti* $(H_1, K_1), (H_2, K_2), \ldots, (H_r, K_r)$ *è il prodotto* di Σ per Δ.

Infatti se $h_1 k_1 = h_2 k_2 = \ldots$ è un'operazione comune agli r gruppi $(H_1, K_1), (H_2, K_2), \ldots, (H_r, H_r)$, si ha $h_s^{-1} h_i = k_s k_i^{-1}$ (qualsiansi i e s), e quest'ultima, essendo un'operazione comune a

G_1 e a G_2, è l'identità. Si ha dunque $h_1 = h_2 = .. = h_r$, e $k_1 = k_2 = ... = k_r$, ossia h è un' operazione comune ai gruppi $H_1, H_2, .., H_r$, e quindi è un' operazione di Σ: mentre k_1 è un'operazione comune ai gruppi $K_1, K_2, ..., K_r$, e quindi un'operazione di Δ: l'operazione considerata $h_1 k_1$ si trova dunque nel prodotto (Σ, Δ). Inversamente siccome Σ e Δ sono contenuti entrambi in (H_1, K_1), in (H_2, K_2), ecc., in (H_r, K_r), anche (Σ, Δ) è contenuto in questi r gruppi: dunque il prodotto diretto (Σ, Δ) è il mass. sott. comune ad essi. C. d. d. *)

Dalla dimostrazione fatta segue che se $K'_1, K'_2, .., K'_r$, indicano i gruppi $K_1, K_2, .., K_r$, presi in altro ordine, il mass. sott. comune agli r prodotti diretti $(H_1, K'_1), (H_2, K'_2), ..., (H_2\, K'_2)$ è ancora (Σ, Δ), e che il teorema stesso vale anche se alcuni dei gruppi H_i, o K_i, coincidono tra loro. Il teorema si generalizza facilmente così:

Se un gruppo G *è il prodotto diretto di più altri:* $G_1, G_2, ... G_\mu$, *detti* $H_{i1}, H_{i2}, ..., H_{is}$, *s sottogruppi qualsiansi di* G_i $(i = 1, 2, ..., \mu)$, *e detto* Σ_i *il loro mass. sott. comune, si ha che il mass. sott. comune agli s prodotti diretti*

$$(H_{11}, H_{21}, ..., H_{\mu 1}), (H_{12}, H_{22}, ..., H_{\mu 2}), ..., (H_{1s}, H_{2s}, ..., H_{\mu s})$$

è precisamente il prodotto diretto $(\Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_\mu)$.

Supponiamo ora che un gruppo G sia il prodotto diretto di due gruppi G_1 e G_2; diciamo H_1 un sottogruppo qualunque di G_1, e K_1 uno di G_2. Trasformiamoli con tutte le operazioni di G: dette $g_1, g_2, ..., g_n$ le operazioni di G, poniamo $g_i^{-1} H_1 g_i = H_i$, e $g_i^{-1} K_1 g_i = K_i$ (per $i = 1, 2, ..., n$), potendo anche H_1 e H_i coincidere, e K_1 e K_i pure. Siccome

---

*) La dimostrazione fatta è generale, e conduce ad affermare il teorema:

Se H_1 e H_2 sono due gruppi permutabili, e K_1 e K_2 pure, se i due prodotti (H_1, K_1) e (H_2, K_2) non hanno operazioni comuni, oltre l'identità, detto Σ_1 il mass. sott. comune a H_1 e a K_1, e Σ_2 il mass. sott. comune a H_2 e a K_2, si ha che il mass. sott. comune ai due prodotti (H_1, H_2) e (K_1, K_2) è il prodotto (Σ_1, Σ_2).

$g_i^{-1} G_1 g_i = G_1$, e $g_i^{-1} G_2 g_i = G_2$, qualunque sia $i = 1, 2, \ldots n$, il gruppo trasformato $g_i^{-1} H_1 g_i$ è ancora un sottogruppo di G_1, come lo è H_1, e $g_i^{-1} K_1 g_i$ è un sottogruppo di G_2, come lo è K_1, e si ha

$$g_i^{-1} (H_1, K_1) g_i = (H_i, K_i). \text{ *)}$$

I prodotti (H_1, K_1), $(H_2, K_2) \ldots, (H_r, K_r)$ sono dunque affini in G, essendo essi ottenuti da (H_1, K_1), trasformando questo con tutte le operazioni di G ; e osserviamo che questi gruppi $(H_1, K_1), (H_2, K_2), \ldots, (H_r, K_r)$ possono coincidere tutti, o in parte, tra loro. 46

I gruppi $H_1, H_2, \ldots, H_r$ sono dunque tutti contenuti in G_1 (anzi essi danno evidentemente un sistema completo di sottogruppi affini in G_1, oltre che in G) ; e così pure i gruppi $K_1, K_2, \ldots, K_r$ sono contenuti in G_2, e affini in G_2. Possiamo allora applicare il teorema dianzi dimostrato, ed affermare che se Σ è il mass. sott. comune ai gruppi $H_1, H_2, \ldots, H_r$, e Δ il mass. sott. comune ai gruppi $K_1, K_2, \ldots, K_r$, il prodotto diretto (Σ, Δ) è il mass. sott. comune ai prodotti $(H_1, K_1), (H_2, K_2), \ldots (H_r, K_r)$.

Applicando questo stesso ragionamento al caso del prodotto di più gruppi, si ottiene il seguente

TEOREMA III. — *Se un gruppo* G *è il prodotto diretto di più gruppi* $G_1, G_2, \ldots G_n$, *se* H_i *è un qualunque sottogruppo di* G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *detto* Σ_i *il mass. sott. comune a* H_i *e ai suoi sottogruppi affini in* G *(o in* G_i*), il mass. sott. comune al prodotto diretto*

$$(H_1, H_2, \ldots, H_n)$$

e ai suoi affini in G *è precisamente il prodotto diretto* $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_n)$.

---

*) Perchè ogni operazione di $(H_1 K_1)$ è della forma $h_1 k_1$, e si ha $g_i^{-1} (h_1 k_1) g_i = (g_i^{-1} h_1 g_i) \cdot (g_i^{-1} k_1 g_i)$, e quindi il gruppo $g_i^{-1} (H_1 K_1) g_i$ è certamente contenuto nel prodotto (H_i, K_i); e siccome questi due gruppi hanno lo stesso ordine (uguale al prodotto dell'ordine di H_1 per quello di K_1), essi coincidono.

A causa del teor. I del § 13, possiamo dire che la stessa proprietà vale anche se i due gruppi G_1 e G_2 sono ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e hanno per mass. sott. comune Λ, e H_1 sia un sottogruppo di G_1 che contenga Λ, e K_1 un sottogruppo di G_2 che contenga pure Λ : detto allora Σ_1 il mass. sott. comune a H_1 e ai suoi affini in (G_1, G_2), e Σ_2 il mass. sott. comune a K_1 e ai suoi affini in (G_1, G_2), si ha che il mass. sott. comune a (H_1, K_1) e ai suoi affini in (G_1, G_2) è il prodotto (Σ_1, Σ_2). *)

§ 17.

Altro teorema relativo ai prodotti diretti.

Ci varremo subito del teor. III del § precedente, per poter trattare in tutta generalità la questione seguente :

Sia G il prodotto diretto di due gruppi G_1 e G_2, sia H_1 un sottogruppo di G_1, e H_2 un sottogruppo di G_2: si è dimostrato al § 14 che se si pone $H = (H_1, H_2)$, il mass. sott. comune a H e a G_1 è H_1, e il mass. sott. comune a H e a G_2 è H_2. È naturale che il tipo del gruppo H dipenda unicamente dal tipo dei due gruppi H_1 e H_2 ; **) ma qui ci domandiamo da che cosa dipenda il tipo

*) Osserviamo che siccome nel nostro caso Λ è invariante in $(G_1\ G_2)$, esso è certamente contenuto ancora nel mass. sott comune Σ_1, come pure in Σ_2.

**) Due gruppi si dicono *dello stesso tipo*, quando sia possibile stabilire tra essi una relazione d'isomorfismo oleodrico. Ora *se un gruppo* G *è il prodotto diretto di due gruppi* G_1 *e* G_2 *e un altro gruppo* G' *è il prodotto diretto di* G'_1 *per* G'_2, *se* G_1 *è oloedricamente isomorfo a* G'_1, *e* G_2 *lo è a* G'_2, *allora anche* G *è oloedricamente isomorfo a* G'. Infatti se all'operazione g_1 di G_1 corrisponde g'_1, in G'_1, e a g_2 corrisponde g'_2 in G'_2 facendo corrispondere al prodotto $g_1\, g_2$ di G il prodotto $g'_1 \cdot g'_2$ di G', verrà stabilita, si vede subito, una relazione d'isomorfismo oleodrico tra G e G'. Dunque il tipo del gruppo G' dipende in realtà unicamente da quello dei due gruppi G_1 e G_2: cosa che però non ha luogo in generale, quando G non sia il prodotto *diretto* di G_1 per G_2. La stessa cosa può osservarsi se G è il prodotto diretto di più gruppi.

del gruppo complementare $\frac{G}{H}$. Vediamo che esso dipende unicamente dal tipo dei due gruppi $\frac{G_1}{H_1}$ e $\frac{G_2}{H_2}$, e precisamente, considerando la questione nel caso generale del prodotto diretto di più gruppi, che ha luogo il seguente

TEOREMA IV. — *Se un gruppo* G *è il prodotto diretto dei gruppi* $G_1, G_2, \ldots, G_r$, *e* H_1 *è un sottogruppo qualunque di* G_1, H_2 *uno di* G_2, *ecc.*, H_r *uno di* G_r, *il gruppo complementare*

$$\frac{G}{(H_1, H_2, \ldots, H_r)} = \frac{(G_1, G_2, \ldots, G_r)}{(H_1, H_2, \ldots, H_r)}$$

è il prodotto diretto di r sottogruppi, oloedricamente isomorfi rispettivamente ai gruppi $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \ldots, \frac{G_r}{H_r}$.

Diciamo H il prodotto diretto $(H_1, H_2, \ldots, H_r)$, e supponiamo dapprima che H sia invariante in G. Consideriamo il gruppo $\frac{G}{H}$, che chiamiamo Γ; esso è meriedricamente isomorfo a G, all'identità in Γ corrispondendo in G il sottogruppo H. Al sottogruppo G_i di G corrisponderà in Γ un sottogruppo Γ_i (per $i = 1, 2, \ldots, r$). Siccome H_i è il mass. sott. comune H e a G_i (§15), si ha che il gruppo Γ_i è oloedricamente isomorfo a $\frac{G_i}{H_i}$ (§ 3). Dimostriamo che Γ è il prodotto diretto dei gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$.

Infatti, siccome G è il prodotto dei gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_r$, il gruppo Γ sarà il prodotto dei gruppi corrispondenti $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$; e siccome due sottogruppi qualsiansi G_i e G_k hanno la proprietà che ciascuna operazione dell'uno è permutabile con tutte quelle dell'altro, anche i gruppi corrispondenti Γ_i e Γ_k godranno della stessa proprietà (§ 4). Resta così da far vedere che non è mai $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r = 1$, se non è separatamente $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \ldots, \gamma_r = 1$ (essendo γ_i un'operazione di Γ_i). E per questo, se g_i è un'operazione di G_i, cui corrisponda γ_i ($i = 1, 2, \ldots, r$), il prodotto $g_1 g_2 \ldots g_r$ ha per corrispondente $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_r = 1$, onde $g_1 g_2 \ldots g_r$ è uguale a un'operazione h di H; e posto $h = h_1 h_2 \ldots h_r$, si ha

$$g_1 g_2 \ldots g_r = h_1 h_2 \ldots h_r,$$

da cui segue che $g_1 = h_1$, $g_2 = h_2$, ..., $g_r = h_r$: dunque $g_1, g_2, \ldots, g_r$ sono operazioni di H, onde le loro corrispondenti $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ sono tutte uguali all'identità.

Il gruppo Γ è dunque il prodotto diretto dei gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_r$, che sono oloedricamente isomorfi rispettivamente ai gruppi $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \ldots, \frac{G_r}{H_r}$: nel caso che H sia invariante in G il teorema è così dimostrato.

Supponiamo ora che il gruppo $H = (H_1, H_2, \ldots, H_r)$ non sia invariante in G, e che sia Σ il mass. sott. comune a H e ai suoi affini in G, e sia Σ_i il mass. sott. comune a H e ai suoi affini in G_i $(i = 1. 2, \ldots, r)$. Dal teor. III del § precedente segue che il gruppo Σ è il prodotto diretto dei gruppi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$. Ma siccome Σ è invariante in G, ad esso si può applicare il teorema, e si può dire che il gruppo $\frac{G}{\Sigma} = \frac{(G_1, G_2, \ldots, G_r)}{(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r)}$ è il prodotto diretto di r gruppi, oloedricamente isomorfi rispettivamente a $\frac{G_1}{\Sigma_1}, \frac{G_2}{\Sigma_2}, \ldots, \frac{G_r}{\Sigma_r}$. Ma si ha

$$\frac{G}{H} = \frac{G}{\Sigma}, \text{ e } \frac{G_i}{H_i} = \frac{G_i}{\Sigma_i} \text{ (per } i = 1, 2, \ldots, r),$$

e quindi $\frac{G}{H}$ è pure il prodotto diretto di r gruppi, oloedricamente isomorfi rispettivamente a $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \ldots, \frac{G_r}{H_r}$. Il teor. è così dimostrato in ogni caso.

Esso poteva anche enunciarsi, dicendo che $\frac{G}{H}$ è *oloedricamente isomorfo al prodotto diretto dei gruppi* $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \ldots, \frac{G_r}{H_r}$: infatti questi gruppi si può sempre supporre che agiscono su lettere diverse, in modo che il loro prodotto possa dirsi loro *prodotto* *diretto* : e allora, essendo $\Gamma_i = \frac{G_i}{H_i}$, si può dire che i due prodotti diretti

$$\frac{G}{H} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r) \text{ e } \left(\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \dots, \frac{G_r}{H_r}\right)$$

sono oloedricamente isomorfi tra loro (V. nota a questo §).

Applicando il teor. I del § 13, e limitandosi al caso di $r = 2$ si ottiene il teor. seguente :

Se due gruppi G_1 *e* G_2 *sono ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e hanno per mass. sott. comune* Σ, *se* H_1 *è un sottogruppo di* G_1 *che contenga* Σ, *e* H_2 *un sottogruppo di* G_2 *che contenga pure* Σ, *il gruppo* $\frac{(G_1, G_2)}{(H_1, H_2)}$ *è oloedricamente isomorfo al prodotto diretto di* $\frac{G_1}{H_1}$ *per* $\frac{G_2}{H_2}$.

Come conseguenza del teorema sopra dimostrato si trae quest'altro :

Se un gruppo G *è il prodotto diretto di più gruppi* $G_1, G_2, \dots, G_r$, *se in generale il gruppo* G_i *contiene due sottogruppi* H_i *e* K_i, *tali che* $\frac{G_i}{H_i}$ *sia oloedricamente isomorfo a* K_i, *e* $\frac{G_i}{K_i}$ *lo sia a* H_i ($i = 1, 2, \dots, r$), *allora i due prodotti diretti*

$$H = (H_1, H_2, \dots, H_r), \textit{ e } K = (K_1, K_2, \dots, K_r)$$

godono della proprietà che $\frac{G}{H} \equiv K$, *e* $\frac{G}{K} \equiv H$.

Infatti il gruppo $\frac{G}{H} = \frac{(G_1, G_2, \dots, G_r)}{(H_1, H_2, \dots, H_r)}$ è oloedricamente isomorfo al prodotto diretto $\left(\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \dots, \frac{G_r}{H_r}\right)$; ma $\frac{G_1}{H_1} \equiv K_1$, $\frac{G_2}{H_2} \equiv K_2, \dots, \frac{G_r}{H_r} \equiv K_2$, e quindi $\frac{G}{H}$ è anche oloedricamente al prodotto $(K_1, K_2, \dots, K\ ) = K$. Analogamente si ha $\frac{G}{K} \equiv H$. C. d. d.

Naturalmente, se si ammette soltanto che sia $\frac{G_i}{H_i} \equiv K_i$ (per $i = 1, 2, \ldots, r$), se ne deduce soltanto che $\frac{G}{H} \equiv K$.

§ 18.

Sottogruppi contenuti in un prodotto diretto di due gruppi.

Ora veniamo alla questione principale relativa ai prodotti diretti di due gruppi G_1 e G_2, quella cioè di cercare tutti i possibili sottogruppi contenuti nel prodotto (G_1, G_2), e di costruirli effettivamente, quando siano noti tutti i sottogruppi di G_1, e tutti quelli di G_2.

Sia H un qualunque sottogruppo di $G = (G_1, G_2)$, e h una sua qualunque operazione. Essa si può sempre ridurre alla forma $g_1 . g_2$, dove g_1 è un'operazione di G_1, e g_2 una di G_2, e anzi una tale decomposizione è unica. Cominciamo col dimostrare che la totalità delle operazioni g_1 che si ottengono decomponendo nel modo ora detto tutte le operazioni di H, costituisce un gruppo, e così pure che la totalità delle operazioni g_2 costituisce un gruppo.

Infatti se g_1 e g'_1 sono due operazioni della prima totalità, vuol dire che esistono due operazioni h e h' di H, che si decompongono nel modo seguente: $h = g_1 g_2$ e $h' = g'_1 g'_2$, essendo g_2 e g'_2 convenienti operazioni della seconda totalità. Allora si ha:

$$h\ h = (g_1 . g_2) . (g'_1 . g'_2) = (g_1 . g'_1)\ (g_2 . g'_2)$$

cioè anche l'operazione $g'_1 . g'_1$ appartiene alla prima totalità suddetta, la quale perciò costituisce un gruppo. Analogamente per l'altra totalità. C. d. d.

Chiamiamo G'_1 il primo gruppo, e G'_2 il secondo: G'_1 è un sottogruppo di G_1, e G'_2 un sottogruppo di G_2. Diciamo poi H_1 il massimo sottogruppo comune a H e a G_1, e H_2 il massimo sottogruppo comune a H e a G_2. Dimostriamo che in ogni caso H_1 *è il massimo sottogruppo comune a* H *e a* G'_1, *e* H_2 *è il massimo sot-*

togruppo comune a H *e a* G'_2. Infatti ogni operazione di H_1 è certamente contenuta in G'_1; *) inversamente, se $g'_1 = h$ è un'operazione comune a G'_1 e a H, essa è comune a G_1 e H, e quindi è di H_1, il quale è dunque il massimo sottogruppo comune a G'_1 e a H.

Ne segue che ogni operazione di G'_1 che sia fuori di H_1 non si trova in H, e similmente, ogni operazione di G'_2 che sia fuori di H_2 non si trova in H.

Il gruppo H, contenendo H_1 e H_2, contiene pure il loro prodotto (H_1, H_2). Si vede subito che *se* H *coincide con* (H_1, H_2), *allora* G'_1 *coincide con* H_1 e G'_2 *con* H_2, e si ritorna al caso studiato nel § 14. Infatti allora ogni operazione di H è della forma $h_1 . h_2$, ecc.

Inversamente, se $G'_1 = H_1$, e $G'_2 = H_2$, allora $H = (H_1, H_2)$, poichè allora ogni operazione di H sarà il prodotto di una di H_1 per una di H_2.

Facciamo vedere che *in generale il gruppo* G'_1 *definito sopra è meriedricamente isomorfo a* H, *all'identità in* G'_1 *corrispondendo in* H *precisamente il sottogruppo* H_2; *e così pure che* G'_2 *è meriedricamente isomorfo a* H, *all'identità in* G'_2 *corrispondendo in* H *il sottogruppo* H_1: in altre parole, che si ha $G'_1 \equiv \frac{H}{H_2}$ e $G'_2 \equiv \frac{H}{H_1}$.

Detta h un'operazione qualunque di H, decompostala nel prodotto $g_1 . g_2$, si faccia corrispondere a h l'operazione g_1 di G'_1: a ogni operazione di H verrà così a corrispondere una e sola operazione di G'_1. Ora se $h \sim g_1$ e $h' \sim g'_1$, vuol dire che si ha $h = g_1 g_2$ e $h' = g'_1 g'_2$, essendo g_2 e g'_2 convenienti operazioni di G'_2; quindi $h h' = (g_1 g_2) . (g'_1 g'_2) = (g_1 g'_1) . (g_2 g'_2)$, onde $h h' \sim g_1 g'_1$: la relazione sopra stabilita ha G'_1 e H è dunque una relazione d'isomorfismo. Vediamo poi che all' identità in G'_1 corrisponde in H il sottogruppo H_2, poichè se h $(= g_1 . g_2)$ corrisponde all'identità in G'_1, vuol dire che $g_1 = 1$, e $h = g_2$, sicchè h, essendo comune a H e a G_2, si trova in H_2. Viceversa, ogni operazione di H che

---

*) Se h_1 è un' operazione di H_1, essa è un'operazione di H che si decompone nella forma $h_1 . 1$, e quindi h_1 appartiene a G'_1.

si trovi in H_2, corrisponde all' identità in G_2. C. d. d. Lo stesso dicasi poi per G'_2.

Segue di qui indirettamente che H_1 *e* H_2 *devono essere in ogni caso invarianti in* H, ciò che direttamente segue dal fatto che H_1 è il massimo sottogruppo comune a G_1 e a H, e che G_1 è permutabile con tutte le operazioni di H; e similmente per H_2. Segue che *anche il prodotto* (H_1, H_2) *è invariante in* H.

Fermiamoci su questo isomorfismo meriedrico che vi è tra G'_1 e H; vediamo che *al sottogruppo* (H_1, H_2) *di* H *corrisponde in* G'_1 *il sottogruppo* H_1, poichè se $h_1 . h_2$ è un'operazione di (H_1, H_2), ad essa corrisponde in G'_1 l'operazione h_1. E anzi, siccome (H_1, H_2) contiene H_2 (che corrisponde all'identità in G'_1), si ha che *il sottogruppo* (H_1, H_2) *è costituito da tutte le operazioni di* H, *cui corrispondano quelle di* H_1, *nel suddetto isomorfismo tra* H *e* G'_1 (§ 3). Si ha allora che H_1 è invariante in G'_1, poichè (H_1, H_2) lo è in H; e che $\frac{G'_1}{H_1} = \frac{H}{(H_1, H_2)}$; inoltre se $l_1, l_2, \ldots, l_q$ è un sistema completo di moltiplicatrici di H rispetto a (H_1, H_2), e se $g_1, g_2, \ldots, g_q$ sono le operazioni di G'_1 che corrispondono rispettivamente a $l_1, l_2, \ldots, l_q$, allora $g_1, g_2, \ldots, g_q$ formano un sistema completo di moltiplicatrici di G'_1 rispetto a H_1, e il gruppo $\frac{G'_1}{H_1}$ si ottiene dall'altro $\frac{H}{(H_1, H_2)}$, cambiandovi, nelle sostituzioni di questo, le lettere $l_1, l_2, \ldots, l_q$ ordinatamente nelle altre $g_1, g_2, \ldots, g_q$ (teor. II del § 5).

Similmente si ha che H_2 è invariante in G'_2, e che se $g'_1, g'_2, \ldots g'_q$ sono le operazioni di G'_2 che corrispondono rispettivamente a $l_1, l_2, \ldots, l_q$ nell'isomorfismo che vi è tra G'_2 e H, queste operazioni $g'_1, g'_2, \ldots, g_q$ formano un sistema completo di moltiplicatrici di G'_2 rispetto a H_2; inoltre le sostituzioni di $\frac{G'_2}{H_2}$ si ottengono da quelle di $\frac{H}{(H_1, H_2)}$, cambiando le lettere $l_1, l_2, \ldots, l_q$ ordinatamente nelle altre $g', g'_2, \ldots, g'_q$. Dunque si ha

$$\frac{G'_1}{H_1} \equiv \frac{G'_2}{H_2} \equiv \frac{H}{(H_1, H_2)},$$

e anzi questi tre gruppi coincidono, salvo il nome delle loro lettere.

Ora, data la natura della corrispondenza sopra stabilita tra le operazioni di H e quelle di G'_1 o di G'_2, l'operazione l_i di H, corrispondendo a g_i in G'_1, e a g'_i in G'_2, deve essere manifestamente uguale al prodotto $g_i\, g'_i$, qualunque sia $i = 1, 2, \ldots, q$. Dunque:

$$l_1 = g_1\, g'_1,\ l_2 = g_2\, g'_2, \ldots, l_q = g_q\, g'_q.$$

Scritti allora i tre quadri di H rispetto a (H_1, H_2), di G'_1 rispetto a H_1, e di G'_2 rispetto a H_2, vediamo subito che *le operazioni della riga i. ma del primo quadro si ottengono tutte e sole, e nessuna ripetuta più volte, moltiplicando ciascuna operazione del secondo quadro per tutte quelle del terzo.* Scriviamo infatti questi tre quadri:

$$H = \Big((H_1, H_2)\, g_1\, g'_1;\ (H_1, H_2)\, g_2\, g'_2, \ldots, (H_1, H_2)\, g_q\, g'_q\Big);$$

$$G'_1 = (H_1\, g_1, H_2\, g_2, \ldots, H_1\, g_q);\ G'_2 = (H_2\, g'_1, H_2\, g'_2, \ldots, H_2\, g'_q).$$

Ogni operazione della riga *i. ma* del primo quadro si può ridurre alla forma $(h_1\, h_2)\, g_i\, g'_i$, essendo h_1 una certa operazione di H_1, e h_2 una di H_2, e si ha

$$(h_1\, h_2)\, g_i\, g'_i = (h_1\, g_i).\,(h_2\, g'_i);$$

ora $h_1\, g_i$ si trova appunto nella riga *i. ma* del secondo quadro, e $h_2\, g'_i$ si trova nella riga *i. ma* del terzo, e dunque ogni operazione della riga *i. ma* del primo quadro è il prodotto di un'operazione della riga *i. ma* del secondo, per una della riga *i. ma* del terzo. Viceversa, prese due operazioni $h_1\, g_i$ e $h_2\, g'_i$, si ha

$$(h_1\, g_i).\,(h_2\, g'_i) = (h_1\, h_2)\, g_i\, g'_i,$$

ossia componendo un'operazione della riga *i. ma* del secondo quadro, per una della riga *i. ma* del terzo, si ottiene un'operazione della riga *i. ma* del primo quadro. E ciò vale qualunque sia $i = 1. 2, \ldots, q$. Infine nessuna operazione di H può così venire ripetuta più volte, poichè il numero delle operazioni di ciascuna riga del primo quadro è uguale al prodotto del numero delle operazioni di ciascuna riga del secondo, pel numero di quelle di ogni riga del terzo, essendo l'ordine di (H_1, H_2) uguale al prodotto degli ordini di H_1 e di H_2.

Segue subito da queste considerazioni che *se* $g_1, g_2, \ldots, g_q$ *è un sistema completo di moltiplicatrici di* G'_1 *rispetto a* H_1, *detta* g'_i *una qualunque delle operazioni di* G'_2, *che moltiplicate per* g_i *danno un'operazione di* H (*per* $i = 1, 2, \ldots, q$), *le* q *operazioni* $g'_1, g'_2, .. g'_q$ *formano un sistema completo di moltiplicatrici di* G'_2 *rispetto a* H_2, *e i* q *prodotti* $g_1 g'_1, g_2 g'_2, \ldots, g_q g'_q$ *formano un sistema completo di moltiplicatrici di* H *rispetto* a (H_1, H_2).

§ 19.

Inversione dei teoremi precedenti.

Dato un sottogruppo qualunque del prodotto diretto (G_1, G_2), abbiam trovato che, per costruirlo, bisogna partire da un certo sottogruppo G'_1 di G_1 e da un sottogruppo G'_2 di G_2, tali che G'_1 contenga un sottogruppo invariante H_1 (eventualmente coincidente con G'_1 stesso) e G'_2 contenga un sottogruppo invariante H_2 (eventualmente coincidente con G'_2), e tali inoltre che i due gruppi complementari $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$ siano oloedricamente isomorfi. Ora ci proponiamo d' invertire la cosa, di far vedere cioè, che, considerato un sottogruppo G'_1 di G_1 e un sottogruppo G'_2 di G_2, se G'_1 contiene un sottogruppo invariante H_1, e G'_2 un sottogruppo invariante H_2, tali che $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$ siano oloedricamente isomorfi tra loro, è sempre possibile costruire un corrispondente sottogruppo H di (G_1, G_2).

Per dimostrare questa proprietà inversa, dobbiamo premettere il seguente teorema (di *Jordan*):

TEOREMA V. — *Se due gruppi di sostituzioni, semplicemente transitivi e di ordine uguale al numero delle lettere su cui essi agiscono, sono oloedricamente isomorfi, le sostituzioni dell'uno si ottengono da quelle dell'altro con un semplice cambiamento delle lettere.*

Diciamo G e Γ i due gruppi; per le proprietà di tali gruppi transitivi, vi sarà sempre una e una sola loro sostituzione, che porti una data lettera di ognuno di essi in un'altra prefissata. Diciamo $g_1, g_2, \ldots, g_n$ le sostituzioni di G, e $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ quelle di Γ, e poniamo che nell'isomorfismo dato tra i due gruppi G e Γ, a g_i corrisponda γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Diciamo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le lettere su cui agisce G, e supponiamo, com'è lecito, che la sostituzione g_i sia quella che porti a_1 in a_i (altrimenti cambieremmo il nome alle lettere). Diciamo $b_1, b_2, \ldots, b_n$ le lettere su cui agisce Γ, e supponiamo che γ_i sia la sostituzione di Γ che porti b_1 in b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dimostriamo che *le sostituzioni di* Γ *si ottengono da quelle di* G, *semplicemente cambiando le lettere* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ordinatamente nelle altre* $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Basterà dimostrare che se g_k porta una lettera qualunque a_i in a_r, la sostituzione corrispondente γ_k porterà b_i in b_r.

Infatti il prodotto $g_i\, g_k$ porterà a_1 in a_r; ma anche g_r porta a_1 in a_r, e quindi $g_i\, g_k = g_r$, poichè è unica l'operazione di G che porta a_1 in a_r. Ma siccome $g_i \sim \gamma_i$, $g_k \sim \gamma_k$, e $g_r \sim \gamma_r$, si avrà, a causa dell'isomorfismo oloedrico tra G e Γ, che $\gamma_i\, \gamma_k = \gamma_r$, da cui $\gamma_k = \gamma_i^{-1}\, \gamma_r$. Ma γ_i^{-1} porta b_i in b_1, e quindi γ_k porta b_i in b_r. Dunque γ_k agisce sulle lettere $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nello stesso modo come la sostituzione corrispondente g_k agisce sulle lettere $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e il teor. è così dimostrato.

Premesso questo teorema, ritorniamo al nostro argomento. Siccome per ipotesi H_1 e H_2 sono invarianti in G'_1 e in G'_2 rispettivamente, i due gruppi complementari $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$ sono transitivi e hanno l'ordine uguale al numero delle lettere su cui essi agiscono; *) e siccome essi sono oloedricamente isomorfi, le sostituzioni dell'uno si ottengono da quelle dell' altro con un cambiamento delle lettere. Detto $g_1, g_2, \ldots, g_q$ un sistema completo di moltiplicatrici di G'_1 rispetto a H'_1, se γ_i è la sostituzione di $\frac{G'_1}{H_1}$ che corrisponde alla moltiplicatrice g_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$, si ha che $\frac{G'_1}{H_1}$ agisce sulle lettere $g_1\, g_2, \ldots, g_q$, e che la sua sostituzione γ_i porta $g_1 = 1$ in g_i; detta γ'_i la sostituzione di $\frac{G'_2}{H_2}$ che corrisponde a γ_i nel supposto isomorfismo oloedrico tra $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$, e detta g'_i la lettera in cui γ'_i porta $g'_1 = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$, segue dalla dimostrazione del teor. precedente che le sostituzioni di $\frac{G'_2}{H_2}$ si ottengono da quelle di $\frac{G'_1}{H_1}$, semplicemente cambiando le lettere $g_1, g_2, \ldots, g_q$ ordinatamente nelle altre $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$; in altre parole, *se γ_k manda la lettera g_i in g_r, anche γ'_k manderà la la lettera g'_i in g'_r, qualsiansi gli indici i e k.*

Si formino allora i quadri seguenti di G'_1 rispetto a H_1 e di G'_2 rispetto a H_2:

$G'_1 = (H_1 g_1, H_1 g_2, \ldots, H_1 g_q)$, e $G_2 = (H_2 g'_1, H_2 g'_2 \ldots, H_2 g'_q)$.

Si moltiplichi ciascuna operazione della riga *i. ma* del primo quadro per tutte quelle della riga *i. ma* del secondo, e si faccia questo lavoro per $i = 1, 2, \ldots, q$. La totalità dei prodotti che

---

*) In generale, dato un gruppo G e un suo sottogruppo *invariante* Σ, il gruppo complementare $\frac{G}{\Sigma}$ è transitivo e ha l'ordine uguale al numero delle lettere su cui esso agisce (uguale all' indice di Σ in G): infatti, se $g_1, g_2, \ldots, g_q$ è un sistema completo di moltiplicatrici di G rispetto a Σ, quell' operazione di $\frac{G}{\Sigma}$ che corrisponde a g_i, porta la lettera $g_1 = 1$ in g_i, onde $\frac{G}{\Sigma}$ è transitivo; il suo ordine è poi uguale all'indice q di Σ in G, essendo Σ invariante in G.

così si ottengono, costituisce, dimostriamo subito, un gruppo.

Ognuno dei prodotti suddetti sarà della forma $h\,h'\,g_i\,g'_i$, dove h è un' operazione di H_1, e h' una di H_2. Allora se $h\,h'\,g_i\,g'_i$ e $h_1 h'_1 g_k g'_k$ sono due tali operazioni, anche il loro prodotto $(hh'g_i g_i')$. $(h_1 h'_1 g_k\, g'_k)$, dimostriamo, si può ridurre alla forma $h_2\, h'_2\, g_r\, g'_r$ (essendo ancora h_1 e h_2 operazioni di H_1, e h_1 e h'_2 operazioni di H_2).

Infatti siccome H_1 è invariante in G'_1 e H_2 lo è in G'_2, il prodotto $g_i\, h_1\, g_i^{-1}$ è una certa operazione h_2 di H_1, onde $g_i\, h_1 = h_2\, g'_i$, e così pure $g'_i\, h'_1 = h'_2\, g_i$, essendo h'_2 una certa operazione di H_2; allora il prodotto

$$(hh'g_i g'_i)\,.\,(h_1 h'_1 g_k g'_k) = hh'\,(g_i h_1)\,.\,(g'_i h'_1)\, g_k g'_k =$$

$$hh'\,(h_2 g_i)\,(h'_2 g'_i)\, g_k g'_k = (hh_2)\,(h'h'_2)\,(g_i\, g_k)\,.\,(g'_i\, g'_k).$$

Ora se $g_i\, g_k = h_3\, g_r$, vuol dire, secondo la definizione dei gruppi complementari, che la sostituzione γ_k di $\dfrac{G'_1}{H_1}$ manda la lettera g_i in g_r: ma allora anche la sostituzione corrispondente γ'_k di $\dfrac{G'_2}{H_2}$ manderà, si è detto, la lettera g'_i in g'_r, ossia il prodotto $g'_i\, g'_k$ sarà equivalente a g'_r rispetto a H_2, cioè si avrà $g'_i g'_k = h'_3\, g'_r$. Ma segue che il prodotto considerato

$$(h h_2)\;(h' h'_2)\;(g_i g_k)\;(g'_i g'_k) \;=\; (hh_2)\;(h' h'_2)\;(h_3 g_r)\;(h'_3 g'_r) \;=$$
$$= (hh_2\, h_3)\;(h' h'_2\, h'_3) g_r\, g'_r\;,$$

che è il prodotto di un'operazione della riga *r. ma* del quadro di G'_1 rispetto a H_1, per un'operazione della riga *i. ma* del quadro di G'_2 rispetto a H_2, ossia è di nuovo un'operazione della serie considerata. questa costituisce dunque un gruppo. C. d. d.

Indichiamo con H questo gruppo così ottenuto, e osserviamo che ogni operazione di H è il prodotto di un'operazione di G'_1 per una di G'_2; di più che il mass. sott. comune a G'_1 e a H è H_1, e che il mass. sott. comune a G'_2 e a H è H_2. Infatti se g è un'operazione comune a G'_1 e a H, si ha $g = h_1\, h_2\, g_i\, g'_i$, da cui $h_2\, g'_i = 1$

e $g = h_1\, g_i$, ossia $g'_i = h_2^{-1}$, ossia g'_i si trova in H_2, e quindi l'indice $i = 1$; allora si ha $g = h_1\, g_1$, che è un'operazione di H_1, sicchè l'operazione considerata g si trova in H_1. Viceversa, ogni operazione di H_1 è comune a G'_1 e a H, onde H_1 è il mass. sott. comune a G'_1 e a H. Nello stesso modo si prova che H_2 è il mass. sott. comune a G'_1 e a H. È così dimostrato tutto quanto ci eravamo proposti.

Risulta da questa dimostrazione che la costruzione su esposta del gruppo H *è unica, quando sia determinata la relazione d'isomorfismo oloedrico tra i due gruppi* $\frac{G'_1}{H_1}$ *e* $\frac{G'_2}{H_2}$; del resto, siccome ogni operazione di (G'_1, G'_2) si decompone in un modo solo nel prodotto di un'operazione di G_1 per una di G_2, la costruzione trovata, per ogni sottogruppo H di (G_1, G_2), dev'essere unica. Il numero dei sottogruppi H di (G_1, G_2) che si possono costruire, partendo da dati gruppi G'_1, G'_2, H_1 e H_2 è uguale al numero delle relazioni distinte d'isomorfismo oloedrico che si possono stabilire tra $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$, cioè è uguale all'ordine del gruppo degl'isomorfismi di $\frac{G'_1}{H_1}$ in sè.

§ 20.

Costruzione di tutti i possibili sottogruppi del prodotto diretto (G_1, G_2).

Abbiamo trovato come si costruiscono tutt'i sottogruppi del prodotto diretto (G_1, G_2), dati i sottogruppi di G_1, e quelli di G_2. Essi si ottengono tutti secondo il seguente

Teorema VI. — *Se un gruppo* G *è il prodotto diretto di due gruppi* G_1 *e* G_2, *considerato un suo sottogruppo qualunque* H, *questo si costruisce nel modo seguente: decomposta ogni operazione di* H *nel prodotto di un'operazione* g *di* G_1 *per un'operazione* g' *di* G_2, *considerato il gruppo* G'_1 *formato dalla totalità di queste operazioni* g *di* G_1, *e il gruppo* G'_2 *formato dalla totalità delle operazioni*

g' di G_2, *detto* H_1 *il massimo sottogruppo comune a* G_1 *e a* H (*o a* G'_1 *e a* H), *e* H_2 *il massimo sottogruppo comune a* G_2 *e a* H (*o a* G'_2 *e a* H), *si costruisca il quadro di* G'_1 *rispetto a* H_1 : *detto* $g_1, g_2, \ldots, g_q$ *un sistema completo di moltiplicatrici di* G'_1 *rispetto* H_1, *e detta* g'_i *una qualunque delle operazioni di* G'_2, *che, moltiplicate per* g_i, *formano un'operazione di* H (*per* $i = 1, 2, \ldots, q$), *si ha che le q operazioni* $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$ *formano un sistema completo di moltiplicatrici di* G'_2 *rispetto a* H_2, *e che i q prodotti* $g_1\, g'_1, g_2\, g'_2, \ldots, g_q\, g'_q$ *costituiscono un sistema completo di moltiplicatrici di* H *rispetto a* (H_1, H_2); *costruito allora anche il quadro di* G'_2 *rispetto a* H_2 (*ponendo nella riga i. esima le operazioni equivalenti a* g'_i, *per* $i=1,2,\ldots, q$), *si ha che moltiplicando ciascuna operazione della riga i. ma del quadro di* G'_1 *rispetto a* H_1 *per tutte le operazioni della riga i. ma del quadro di* G'_2 *rispetto a* H_2, *e facendo questo lavoro per* $i = 1,2, \ldots, q$ *si ottengono tutte e sole, e ciascuna una sola volta, le operazioni del gruppo dato* H. *Insomma partendo dai due quadri*
$G'_1 = (H_1\, g_1, H_1\, g_2, \ldots, H_1\, g_q)$ e $G'_2 = (H_2 g'_1, H_2\, g'_2, \ldots, H_2 g'_q)$, si ottiene, moltiplicandone le operazioni righe per righe, il terzo quadro

$$H = ((H_1, H_2)\, g_1\, g'_1\, ; (H_1, H_2)\, g_2\, g'_2, \ldots, (H_1, H_2)\, g_q\, g'_q).$$

Inoltre si ha che i tre gruppi H_1, H_2 *e* (H_1, H_2) *sono invarianti in* H, *come* H_1 *lo è in* G'_1 *e* H_2 *lo è in* G'_2 ; *che il gruppo* $G'_1 \equiv \frac{H}{H_2}$ *e* $G'_2 \equiv \frac{H}{H_1}$, *e che i tre gruppi* $\frac{G'_1}{H_1}, \frac{G'_2}{H_2}$ *e* $\frac{H}{(H_1 H_2)}$ *sono oloedricamente isomorfi tra loro* (*e anzi agiscono nello stesso modo sopra le righe dei tre quadri suddetti*).

Inversamente, se G'_1 *è un sottgruppo di* G_1 *e* G'_2 *un sottogruppo* G'_2, *se il primo ammette un sottogruppo invariante* H_1 *e il secondo un sottogruppo invariante* H_2, *tali che i due gruppi* $\frac{G'_1}{H_1}$ *e* $\frac{G'_2}{H_2}$ *siano oloedricamente isomorfi, si può costruire un sottogruppo* H *di* (G_1, G_2), *in modo che ogni sua operazione si ottenga moltiplicando una di* G'_1 *per una certa di* G'_2, *e viceversa, ogni operazione di* G'_1, *moltiplicata per una conveniente operazione di* G'_2, *ne dia una di* H ; *e in modo inoltre che* H_1 *sia massimo sottogruppo co-*

mune a G'_1 *e a* H (*o a* G_1 *e a* H), *e* H_2 *sia il massimo sottogruppo comune a* G'_2 *e* H (*o a* G_2 *e a* H) : *il gruppo* H *si otterrà con la costruzione ora detta, moltiplicando cioè ciascuna operazione della riga i. ma del quadro di* G'_1 *rispetto a* H_1 *per tutte le operazioni della riga i. ma del quadro di* G'_2 *rispetto a* H_2 (*dopo aver preso le righe di quest'ultimo quadro in un ordine opportuno*) ; *e il numero dei gruppi* H *che si possono costruire, soddisfacenti a queste condizioni, è uguale all'ordine del gruppo degl'isomorfismi del gruppo* $\frac{G'_1}{H_1}$ *in sè, o di* $\frac{G'_2}{H_2}$ *in sè.*

Il gruppo H potremo dirlo, per brevità di espressione, *costruito coi gruppi* G'_1 *e* G'_2, *in base ai rispettivi sottogruppi* H_1 *e* H_2, *e a quell'isomorfismo oloedrico che si considera tra i due gruppi* $\frac{G'_1}{H_1}$ *e* $\frac{G'_2}{H_2}$ (una volta che ogni speciale relazione d'isomorfismo oloedrico tra i due gruppi $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$ dà luogo a uno e a un solo gruppo H) ; e quando non vi sia ambiguità, potremo dire il gruppo H costruito, senz' altro, coi due gruppi G'_1 e G'_2, in base ai loro sottogruppi H_1 e H_2.

Proseguendo nelle considerazioni delle proprietà dei sottogruppi del prodotto diretto (G_1, G_2), e mantenendo le stesse notazioni dei due §§ precedenti, consideriamo il prodotto diretto (G'_1, G'_2): esso contiene certamente H come sottogruppo, poichè ogni operazione di H è il prodotto di un'operazione di G'_1 per una di G'_2. Dimostriamo che le *operazioni* $g_1, g_2, \ldots, g_q$, *o anche le operazioni* $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$, *costituiscono un sistema completo di moltiplicatrici di* (G'_1, G'_2) *rispetto a* H.

Infatti se due operazioni g_i e g_k fossero equivalenti rispetto a H, sarebbe

$$g_i = h\, g_k = (h_1\, h_2\, g_r\, g'_r)\, g_k,$$

poichè ogni operazione h di H è della forma $h_1\, h_2\, g_r\, g'_r$. Si avrebbe $g_i = h_1\, g_r\, g_k$, e $h_2\, g'_r = 1$, da cui $g'_r = h_2^{-1}$, e quindi $g'_r = g'_1 = 1$, ossia l'indice $r = 1$; si avrebbe

$$g_i = h_1 \, g_1 \, g_k = h_1 \, g_k,$$

e cioè g_i e g_k sarebbero equivalenti rispetto a H_1, il che è assurdo, se $i \neq k$. Allora, siccome tra le operazioni $g_1, g_2, \ldots g_q$ di (G'_1, G'_2) non ve ne sono di equivalenti rispetto a H, mentre esse sono in numero uguale all'indice di H in (G'_1, G'_2), esse costituiscono un sistema completo di moltiplicatrici di (G'_1, G'_2) rispetto a H. *)

Aggiungiamo ora che il prodotto (G'_1, G'_2) coincide coi due prodotti (G'_1, H) e (G'_2, H).

I due gruppi H e G'_1 sono certamente contenuti nel gruppo (G'_1, G'_2), epperò anche il loro prodotto (G'_1, H) è contenuto in (G'_1, G'_2) ; talchè basta far vedere che l'indice di H in (G'_1, H) è pure uguale a q. Infatti siccome G'_1 è invariante in (G'_1, G'_2), nel quale il gruppo H è contenuto, i due gruppi H e G'_1 soro certamente permutabili (§ 2); e siccome essi hanno per mass. sott. comune H_1, segue cne l' indice di H in (G'_1, H) è uguale a quello di H_1 in G'_1, cioè appunto eguale a q. C. d. d. Il teor. VI può dunque completarsi, dicendo che *i tre prodotti* (G'_1, G'_2), (G'_1, H) *e* (G'_2, H) *coincidono, e che il gruppo* H è permutabile coi due gruppi G'_1 *e* G'_2 **).

Possiamo rappresentare tutti questi gruppi nel quadro seguente, in cui due qualunque dei gruppi scritti sono permutabili.

$$\begin{array}{ccc}
(G'_1, G'_2) = & (G'_1, H) & = (G'_2, H) \\
G'_1 & H & G'_2 \\
 & (H_1, H_2) & \\
H_1 & & H_2 \\
 & 1 &
\end{array}$$

---

*) L' ordine di (G'_1, G'_2) è uguale al prodotto degli ordini di G'_1 e di G'_2, e l'ordine di (H_1, H_2) è pure uguale propotto degli ordini di H_1 e di H_2, e siccome gl' indici di H_1 in G'_1, di H_2 in G'_2, e di (H_1, H_2) in H sono tutti uguali a q, l'indice di (H_1, H_2) in (G_1, G'_2) sarà $= q^2$, e quello di H in (G'_1, G'_2) sarà precisamente uguale a q.

**) Del resto, bastava osservare che dall'essere $h = g_1 \, g_2$, segue che $g_2 = g_1^{-1} h$, cioè che g_2 è contenuta in (G'_1, H), ecc.

Tutte queste proprietà del gruppo H rimarranno invariate, quando si consideri, invece dell'isomorfismo oloedrico proposto tra i due gruppi $\frac{G'_1}{H_1}$ *e* $\frac{G'_2}{H_2}$, in base al quale H è costruito, un altro isomorfismo. Se, considerato un altro isomorfismo oloedrico tra i due gruppi $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$, in base ad esso si costruisce un nuovo gruppo H′, i prodotti (G'_1, H), (G'_1, H'), ecc. coincideranno tutti tra loro e con (G'_1, G'_2); i gruppi $\frac{H}{(H_1, H_2)}$, $\frac{H'}{(H_1, H_2)}$, saranno oloedricamente isomorfi, ecc. Nulla assicura però in generale che i due gruppi H e H′ risulteranno dello stesso tipo; soltanto si potrà dire che saranno dello stesso tipo $\frac{H}{(H_1, H_2)}$ e $\frac{H'}{(H_1, H_2)}$, che sono entrambi dello stesso tipo di $\frac{G'_1}{H_1}$ e di $\frac{G'_2}{H_2}$. Possiamo però affermare che se uno dei gruppi H e H′ è invariante in G, o in (G'_1, G'_2), allora lo sarà anche l'altro: ciò che risulterà dal § 22.

§ 21.

Casi particolari. Caso del prodotto di due gruppi, ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro.

Nel caso particolare che il gruppo H coincida col prodotto diretto (H_1, H_2), allora si è visto che G'_1 coincide con H_1, e G'_2 coincide con H_2, e allora si ritorna al caso considerato nel § 14. Il gruppo H potrà poi essere distinto da (H_1, H_2), soltanto quando gli ordini dei due gruppi dati G_1 e G_2 non siano primi tra loro, poichè l'indice di (H_1, H_2) in H (uguale a quello di H_1 in G'_1 e di H_2 in G'_2), è un divisore comune degli ordini di G_1 e di G_2. Dunque se gli ordini dei due gruppi G_1 e G_2 sono primi tra loro, allora ogni sottogruppo di (G_1, G_2) è necessariamente il prodotto diretto di un sottogruppo di G_1, per un sottogruppo di G_2. *)

In generale si dimostra subito per induzione il teorema :

Se un gruppo G *è il prodotto diretto di più gruppi* $G_1, G_2, \ldots, G_r$, *aventi gli ordini primi tra loro a due a due, ogni sottogruppo di* G *è necessariamente il prodotto diretto di un sottogruppo di* G_1, *per un sottogruppo di* G_2, *ecc., per un sottogruppo di* G_r.

Nel caso generale che G_1 e G_2 siano ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, detto Σ il loro mass. sott. comune, applicando il teor. I del § 13, si deduce che *per tutt'i sottogruppi* H *di* $(G_1, G_2) = G$ *che contengono* Σ, vale una regola di costruzione perfettamente analoga a quella trovata nel caso particolare di $\Sigma = 1$, cioè dei prodotti diretti.

Infatti se poniamo $\frac{G}{\Sigma} = \Gamma$, e diciamo Γ_1 il sottogruppo di Γ che corrisponde al sottogruppo G_1 di G, e diciamo Γ_2 il sottogruppo di Γ che corrisponde a G_2, abbiamo che il gruppo Γ è il prodotto diretto di Γ_1 per Γ_2. Consideriamo un sottogruppo qualunque H di G che contenga Σ, e diciamo K il corrispondente sottogruppo di Γ ; supponiamo che K sia costruito coi due sottogruppi Γ'_1 e Γ'_2 (il primo contenuto in Γ_1, e il secondo in Γ_2), in base ai rispettivi sottogruppi Λ_1 e Λ_2; diciamo poi G'_1, G'_2, H_1 e H_2 i sottogruppi di G, che sono formati da tutte le possibili operazioni di G, cui corrispondano rispettivamente quelle di Γ'_1, di Γ'_2, di Λ_1 e di Λ_2. Siccome G'_1 e H contengono Σ, il loro mass. sott. comune conterrà pure Σ, e avrà per corrispondente in Γ il

---

*) Questo risultato si poteva stabilire subito a priori. Se H è un qualunque sottogruppo di (G_1, G_2), ogni sua operazione h è il prodotto di un'operazione g_1 di G_1, per una g_2 di G_2, cioè $h = g_1 g_2$; e basta dimostrare che g_1 e g_2 devono trovarsi in H, chè ne seguirà ~~che~~ g_1 si trova in H_1, mass. sott. comune a G_1 e a H, e similmente che G_2 si trova in H_2. Infatti se m è l'ordine di G_1, e n l'ordine di G_2, si ha $h^m = g_1^m g_2^m = g_2^m$; e se x è un numero intero, tale che $xm \equiv 1$ (mod n), si ha $h^{mx} = g_2^{mx} = g_2$, e dunque g_2 è in H. Lo stesso dicasi per g_1. C. d. d.

mass. sott. comune a Γ'_1 e a K, cioè Λ_1. Segue che il mass. sott. comune a G'_1 e H, contenendo Σ, deve essere proprio H_1 ; così pure il mass. sott. comune a G'_2 e a H sarà H_2, il quale conterrà pure Σ.

Detto ora $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_q$ un sistema completo di moltiplicatrici di Γ_1 rispetto a Λ_1, e detta γ_i una delle operazioni di Λ_2 che, moltiplicate per γ_i, danno un'operazione di K (per $i = 1, 2, \ldots, q$), si ha che $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_q$ è un sistema completo di moltiplicatrici di Γ'_1 rispetto a Λ_2, e i q prodotti $\gamma_1 \gamma'_1, \gamma_2 \gamma'_2, \ldots, \gamma_q \gamma'_q$ formano un sistema completo di moltiplicatrici di K rispetto a (Λ_1, Λ_2).

Allora, detta g_i una qualunque delle operazioni di G'_1, cui corrisponda γ_i, e g'_i una di quelle di G'_2, cui corrisponda γ'_i, siccome i gruppi H_1, H_2 e H contengono tutti Σ, si ha dal § 5 che le operazioni $g_1, g_2, \ldots, g_q$ formeranno un sistema completo di moltiplicatrici di G'_1 rispetto a H_1, che $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$ formeranno un sistema completo di moltiplicatrici di G'_2 rispetto a H_2, e che i q prodotti $g_1 g'_1, g_2 g'_2, \ldots, g_q g'_q$ ne formeranno uno di H rispetto a (H_1, H_2). Potremo scrivere cioè i tre quadri seguenti :

$$G_1 = (H_1 g_1, H_1 g_2, \ldots, H_1 g_q); G_2 = (H_2 g'_1, H_2 q'_q, \ldots, H_2 g'_q);$$

$$H = ((H_1, H_2)\, g_1 g'_1; (H_1, H_2)\, g_2 g'_2, \ldots, (H_1, H_2)\, g_q, g'_q).$$

Allora, con un ragionamento analogo a quello tenuto alla fine del § 18, si vede che *le operazioni della riga i.ma del quadro di* H *rispetto a* (H_1, H_2) *si ottengono, tutte e sole, moltiplicando quelle della riga i. ma del quadro di* G_1 *rispetto a* H_1, *per quelle pure della riga i.ma del quadro di* G'_2 *rispetto a* H_2, *qualunque sia i; talchè facendo poi* $i=1, 2, \ldots, q$, *si ottengono tutte quante le operazioni del gruppo considerato* H (*ognuna ripetuta un numero di volte uguale all' ordine di* Σ.

Inversamente poi, dato un sottogruppo G'_1 di G_1, e un sottogruppo G'_2 di G_2, se G'_1 contiene un sottogruppo invariante H_1, e G'_2 un sottogruppo invariante H_2, se questi contengono tutti Σ, e sono tali che $\frac{G'_1}{H_1} \equiv \frac{G'_2}{H_2}$, allora si può costruire un corrispondente sottogruppo H di (G_1, G_2), coi due gruppi G'_1 e G'_2, in base ai rispettivi sottogruppi H_1 e H_2, in modo analogo a quel che si è tenuto nel § 19, e di tali gruppi H ve n'è un numero uguale all'ordine del gruppo degl' isomorfismi di $\frac{G'_1}{H_1}$ in sè.

§ 22.

Sottogruppi invarianti del prodotto diretto di due gruppi.

Supposto che G sia il prodotto diretto di G_1 per G_2, osserviamo che il gruppo H, considerato nei precedenti §§, non è in generale invariante in (G'_1, G'_2) ; anzi facciamo vedere che ha luogo il seguente teorema :

Se il gruppo G *è il prodotto diretto di* G_1 *per* G_2, *se un suo sottogruppo* H *è costruito coi due gruppi* G'_1 *e* G'_2 *in base ai rispettivi sottogruppi* H_1 *e* H_2, *il gruppo* H *è invariante nel prodotto diretto* (G'_1, G'_2), *allora e allora soltanto che i due gruppi* $\frac{G'_1}{H_1}$ *e* $\frac{G'_2}{H_2}$ *siano abeliani.*

Si trasformi intanto un'operazione $h_1 h_2 g_i g'_i$ di H con un'operazione g_k ;si ha

$$g_k^{-1}(h_1 h_2 g_i g'_i) g'_k = (g_k^{-1} h_1 g_i) \cdot (g_k^{-1} h_2 g_i g'_i g_k) = h'_1 g_i^{-1} h_2 g_i g'_i g_k,$$

dove h'_1 è un'altra operazione di H_1, essendo questo invariante in G'_1 ; e si ha

$$g_k^{-1} (h_1 h_2 g_i g'_i) g_i = h'_1 h_2 (g_k^{-1} g_i g_k) g'_i.$$

Ora quest'operazione apparterrà ancora a H, allora e allora soltanto che $g_k^{-1} g_i g_k$ sia equivalente a g_i, ripetto a (H_1, H_2). Ma se γ_i e γ_k sono le operazioni del gruppo complementare $\frac{H}{(H_1, H_2)}$ che corrispondono rispettivamente a g_i e a g_k, si ha che $g_k^{-1} g_i g_k \sim \gamma_k^{-1} \gamma_i \gamma_k$, e se $g_k^{-1} g_i g_k$ è equivalente a g_i rispetto a (H_1, H_2), allora $\gamma_k^{-1} \gamma_i \gamma_k = \gamma_i$, e viceversa : *dunque l'operazione considerata* $g_k^{-1} (h_1 h\ g_i g'_i) g_k$ *appartiene ad* H, *allora e allora soltanto che sia* $\gamma_k^{-1} \gamma_i \gamma_k = \gamma_i$.

Ma se il gruppo H è invariante in (G'_1, G'_2), allora l'operazione $g_k^{-1}(h_1 h_2 g_i g'_i) g_k$ deve trovarsi ancora in H, qualsiansi gl'indici i e k, e quindi le due operazioni γ_i e γ_k devono essere permutabili, qualsiansi i e k, cioè il gruppo $\frac{H}{(H_1, H_2)}$ dev'essere abeliano, epperò anche i due gruppi $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$ devono essere abeliani: la condizione del teorema è dunque dimostrata necessaria.

Inversamente, se il gruppo $\frac{G'_1}{H_1}$ è abeliano, siccome $\frac{G'_1}{H_1} \equiv \frac{G'_2}{H_2} \equiv \frac{H}{(H_1, H_2)}$, anche $\frac{H}{(H_1, H_2)}$ è abeliano, e quindi il gruppo H è trasformato in sè medesimo da ognuna delle q operazioni $g_1, g_2, \ldots, g_q$, e anche da ognuna delle operazioni $g'_1, g'_2, \ldots, g'_q$. Ma siccome ogni operazione di (G'_1, G'_2) è della forma $h_1 h_2 g_i g'_k$, e siccome h_1 e h_2 trasformano certamente H in sè medesimo, tutte le operazioni di (G'_1, G'_2) trasformeranno H in sè stesso, cioè H sarà invariante in (G'_1, G'_2): la condizione è quindi anche sufficiente. C. d. d.

La cosa si può mettere sotto un'altra forma. Se H è invariante in (G'_1, G'_2), trasformando i tre gruppi G'_1, G'_2 e H con un'operazione qualunque di (G', G'_2), ogni operazione di G'_1 viene trasformata in un'altra equivalente ad essa rispetto a H_1, ogni operazione di G'_2 viene trasformata in un'altra equivalente rispetto a H_2, e ogni operazione di H in un'altra equivalente rispetto a (H_1, H_2); e inversamente.

In altre parole, costruiti i tre quadri di G'_1 rispetto a H_2, di G'_2 rispetto a H_2, e di H rispetto a (H_1, H_2), *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il gruppo H sia invariante in* (G'_1, G'_2) *è che trasformando i tre gruppi* G'_1, G'_2 *e* H *con una qualunque operazione di* (G'_1, G'_2) *tutte le righe di uno di questi quadri* (*e quindi anche degli altri due*) *restino invariate.*

È questo un altro modo di accertarsi se il gruppo H sia invariante in (G'_1, G'_2); un criterio perfettamente analogo si trova, quando si voglia stabilire se H sia invariante in G. Si trova allora che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè* H *sia invariante in* G, *è che trasformando i due gruppi* G'_1, G'_2 *con tutte le operazioni* (G_1, G_2), *le righe dei due quadri di* G'_1 *rispetto a* H_1, *e di* G'_2 *rispetto a* H_2, *restino tutte invariate.*

Segue da questi due teoremi che se H e H′ sono due sottogruppi di G, costruiti coi medesimi sottogruppi G'_1, G'_2 e H_1, H_2, ma in base a due diversi isomorfismi tra i due gruppi $\frac{G'_1}{H_1}$ e $\frac{G'_2}{H_2}$, se uno dei due gruppi H e H′ è invariante in (G'_1, G'_2), allora lo è anche l'altro, e se uno di essi è invariante in G, anche l'altro è invariante in G.

Ora se il gruppo H è invariante in (G'_1, G'_2), allora esso è permutabile con ognuna delle operazioni di G'_1 e di G'_2, e perciò secondo il teor. VI del § 7, i due gruppi $\frac{(G'_1, H)}{H} = \frac{(G'_1, G'_2)}{H}$ e $\frac{G'_1}{H_1}$ sono oloedricamente isomorfi ; e inversamente, se questo avviene, allora l'ordine di $\frac{(G'_1, G'_2)}{H}$ è uguale all'indice di H in $(G'_1 G'_2)$, e quindi H è invariante in (G'_1, G'_2).

Dunque la *condizione necessaria e sufficiente affinchè il gruppo* H *sia invariante in* $(G'_1\, G'_2) = (G'_1, H)$ *è che il gruppo complementare* $\frac{(H_1, H_2)}{H}$ *sia oloedricamente isomorfo ai tre gruppi* $\frac{G'_1}{H_1}$, $\frac{G'_2}{H_2}$ *e* $\frac{H}{(H_1, H_2)}$. *In generale se* H *non è invariante in* G, *allora i tre gruppi* $\frac{G'_1}{H_1}$, $\frac{G'_2}{H_2}$ *e* $\frac{H}{(H_1, H_2)}$ *sono oloedricamente isomorfi a un sottogruppo di* $\frac{(G'_1, G'_2)}{H}$ (teor. V del § 7).

Nel caso che $H = (H_1, H_2)$, $G'_1 = H_1$ e $G'_2 = H_2$, quelle condizioni si riducono all' altra che i due gruppi H_1 e H_2 siano invarianti in G.

Se i due gruppi G_1 e G_2 sono ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e hanno per mass. sott. comune Σ, per vedere se un sottogruppo H di (G_1, G_2), costruito coi due gruppi G'_1

e G'_2, in base ai sottogruppi H_1 eH_2, e contenenti Σ, sia invariante in (G'_1, G'_2), o in (G_1, G_2), valgono dei criteri perfettamente analoghi a quelli ora trovati.

§ 23.

Complemento dei risultati precedenti. Casi particolari.

Completiamo i risultati ottenuti nei §§ precedenti sui prodotti diretti. Supponiamo che il gruppo G sia il prodotto diretto dei due gruppi G_1 e G_2; conservando le stesse notazioni sinora adoperate, diciamo Δ_1 il prodotto dei due gruppi G_1 e H, e Δ_2 il prodotto (G_2, H). Dimostriamo che Δ_1 *è altresì il prodotto di* G_1 *per* G'_2, *che* $\Delta_2 = (G_2, G'_1)$ *e che* (G'_1, G'_2) *è il mass. sott. comune a* Δ_1 *e a* Δ_2, *mentre il mass. sott. comune a* Δ_1 *e a* G_2 *è* G'_1 *e il mass. sott. comune a* Δ_2 *e a* G_1 *è* G'_1.

Infatti si ha $(G_1, G'_2) = (G_1, G'_1, G'_2) = (G_1, G'_1, H) = (G_1, H) = \Delta_1$, e così pure $(G_2, G'_1) = \Delta_2$. Allora dal § 14 segue che G'_2 è il massimo sott. comune a Δ_1 e a G_2, che (G'_1, G'_2) è quello comune a Δ_1 e Δ_2, ecc., e segue ancora che Δ_1 è il prodotto di G_1 per $(G'_1\, G'_2)$, e Δ_2. è $=$ al prodotto di G_2 per (G'_1, G'_2); inoltre che il mass. sott. comune a (G'_1, G'_2) e a G_1 è G'_1, e quello comune a (G'_1, G'_2) e a G_2 è G'_2.

Se H è invariante in G, allora, come si è visto, anche H_1, H_2, G'_1, G'_2 e (G'_1, G'_2) sono invarianti in G, e anche i gruppi $\Delta_1 = (G_1, H)$ e $\Delta_2 = (G_2, H)$ sono invarianti in G. Segue allora dal teor. VI del § 7 che $\dfrac{G}{\Delta_1} \equiv \dfrac{\Delta_2}{(G'_1, G'_2)} \equiv \dfrac{G_2}{G'_2}$, e similmente che $\dfrac{G}{\Delta_2} \equiv \dfrac{\Delta_1}{(G'_1, G'_2)} \equiv \dfrac{G_1}{G'_1}$; inoltre:

$$\frac{G}{G_1} \equiv \frac{\Delta_2}{G'_1} \equiv G_2, \text{ e } \frac{G}{G_2} \equiv \frac{\Delta_1}{G'_2} \equiv G_1; \text{ poi } \frac{\Delta_1}{G_1} \equiv \frac{(G'_1, G'_2)}{G'_1} \equiv \frac{H}{H_1}.$$

Analogamente si ha $\dfrac{\Delta_2}{G_2} \equiv \dfrac{(G'_1, G'_2)}{G'_2} \equiv \dfrac{H}{H_2}$

Possiamo rappresentare tutti questi gruppi nel quadro seguente, in cui due qualunque dei gruppi scritti sono sempre permutabili tra loro.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & G & & & \\ & & \Delta_1 & & \Delta_2 & & \\ & G_1 & & (G'_1, G'_2) & & G_2 & \\ G'_1 & & & H & & & G'_2 \\ & & & (H_1, H_2) & & & \\ & H_1 & & & & H_2 & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

Nel caso che il gruppo G'_1 coincida con G_1, allora $\Delta_2 = (G_2, G'_1) = G$, e se anche G'_2 coincide con G_2, allora pure Δ_1 coincide con G, e (G'_1, G'_2) pure è uguale a G.

Nel caso che i due gruppi H_1 e H_2 *si riducano all'identità*, allora H è da dirsi costruito coi due gruppi G'_1 e G'_2, *in base all'identità*: allora $\frac{H}{(H_1, H_2)}$ diventa uguale a H, *il quale è dunque oloedricamente isomorfo a* G'_1 *e a* G'_2: allora le operazioni h_t di H si ottengono tutte e sole, moltiplicando una qualunque operazione g_t di G'_1 per la propria corrispondente g'_t di G'_2 (nell'isomorfismo oloedrico che dovrà esistere tra G'_1 e G'_2). E se il gruppo H è invariante in (G'_1, G'_2) (ciò che avverrà allora e allora soltanto che i due gruppi G'_1 e G'_2 siano abeliani), allora si ha la notevole proprietà che

$$\frac{(G'_1, G'_2)}{H} \equiv H \equiv G'_1 \equiv G'_2 \equiv \frac{(G'_1, G'_2)}{G'_2} \equiv \frac{(G'_1, G'_2)}{G'_1}.$$

In questo caso, dimostriamo, *il gruppo* (G'_1, G_2) *è il prodotto diretto di* G'_1 *per* H, ovvero *di* G'_2 *per* H: infatti i due gruppi G'_1 e H, avendo per prodotto (G'_1, G'_2) e per mass. sott. comune l'identità, ed essendo ognuno permutabile con tutte le operazioni dell'altro, devono necessariamente avere le singole operazioni dell'uno permutabili con tutte quelle dell'altro (§ 13). *Il gruppo* $(G'_1, G'_2) =$

$(G'_1, H) = (G'_2, H)$ *viene dunque a trovarsi, quando* H_1 e H_2 *si riducono all'identità, e quando* G'_1 *e* G'_2 *siano abeliani, nelle medesime condizioni rispetto ai tre gruppi* G'_1, G'_2 *e* H. Il gruppo G'_1 si può costruire allora coi due gruppi abeliani G'_2 e H, in base all'identità, nello stesso modo come H si costruisce coi due gruppi G'_1 e G'_2: precisamente, fatta corrispondere l' operazione $g'_i{}^{-1}$ di G'_2 all'altra h_i di H, si avrà tra G'_1 e H un isomorfismo oloedrico, *) e eseguendo tutti i prodotti della forma $g'_i{}^{-1} h_i = g_i$ si ottengono tutte e sole le operazioni di G'_1, ognuna una sola volta.

Nello stesso modo si costruisce G'_2 coi due gruppi G'_1 e H, in base all'identità. Considerati infine due gruppi H e H', costruiti in base a due diversi isomorfismi tra G'_1 e G'_2, essi sono oloedricamente isomorfi tra loro, e quando inoltre G'_1 o G'_2 sia abeliano, allora il gruppo (G'_1, G'_2) si trova nelle stesse condizioni rispetto ai quattro gruppi H, H', G'_1 e G'_2.

Supponiamo infine che H contenga G_1; allora si ha $G'_1 = H_1 = G_1$, e detto H_2 il mass. sott. comune a H e a G_2, il gruppo H è il prodotto diretto di G_1 per H_2. Insomma, come già sapevamo dal § 14, quei sottogruppi di G che contengono G_1 si ottengono tutti, facendo i prodotti diretti di G_1 per i vari sottogruppi di G_2.

In generale, se G_1 e G_2 sono due gruppi, tali che ognuno di essi sia permutabile con tutte le operazioni dell'altro, e abbiano per mass. sott. comune Σ, se ci si limita a considerare quei sottogruppi del prodotto (G'_1, G_2) che contengono Σ, per essi i risultati precedenti permarranno inalterati.

Le considerazioni sinora fatte sui prodotti diretti di due gruppi si possono estendere al caso del prodotto diretto di più gruppi:

---

*) Infatti si ha una relazione d'isomorfismo oloedrico tra G'_2 e H, facendo corrispondere a g'_i, h_i: ma quando G'_2 è abeliano, allora si ha manifestamente una relazione d'isomorfismo oloedrico di G'_1 con sè stesso, facendo corrispondere a g_i, $g_i{}^{-1}$; e allora si ha pure una relazione d'isomorfismo oloedrico tra G'_2 e H, facendo corrispondere a $g'_i{}^{-1}$, l'operazione h_i.

caso che del resto si riconduce a quello precedente. Se G è il prodotto diretto dei gruppi G_1, G_2, ..., G_r, per trovare tutt'i sottogruppi di G, basta trovare quelli del prodotto diretto dei due gruppi G_1 e poscia, G_2, trovati questi, cercare quelli del prodotto diretto dei due gruppi (G_1, G_2) e G_3; poi quelli del prodotto diretto dei due gruppi (G_1, G_2, G_3) e G_4; e così via.

§ 24.

Sui gruppi intransitivi di sostituzioni.

La prima e più notevole conseguenza della regola di costruzione dei sottogruppi dei prodotti diretti, è l'applicazione, che ora ne faremo, ai gruppi intransitivi: ogni gruppo intransitivo di sostituzioni è sempre, vedremo subito, un sottogruppo del prodotto diretto di certi gruppi transitivi, e si può sempre costruire, facendo uso ripetuto della costruzione suddetta.

Sia H un gruppo intransitivo qualunque di sostituzioni sopra lettere: queste lettere si ripartiscono in tanti sistemi di transitività; siano a_1, a_2, ..., a_r le lettere di un primo sistema di transitività; siano b_1 b_2, ..., b_s quelle di un secondo sistema; c_1, c_2, ..., c_t quelle di un terzo sistema di transitività, e così via.

Ogni sostituzione h di H è il prodotto di una sostituzione γ_1, che agisce soltanto sulle lettere a_1, a_2, ..., a_r del primo sistema, per una sostituzione γ_2, che agisce soltanto sulle lettere b_1, b_2, ..., b_s, per una sostituzione γ_3, che agisce soltanto sulle lettere c_1, c_2, ..., c_t, ecc.; e queste sostituzioni γ_1, γ_2, γ_3, ... sono uniche e perfettamente determinate, quando lo sia h. Vediamo che la totalità delle sostituzioni γ_1, che si ottengono, decomponendo nel modo suddetto tutte le operazioni di H, costituisce un gruppo Γ_1; la totalità delle sostituzioni γ_2 forma un gruppo Γ_2, ecc.

Intanto, siccome le sostituzioni γ_1 agiscono su lettere tutte diverse da quelle su cui agisce γ_2, da quelle su cui agisce γ_3, ecc., si ha che ogni sostituzione γ_1 è permutabile con ogni sostituzione

γ_2, ecc. Allora, se $h = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots$, e $h' = \gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3 \ldots$ sono due sostituzioni di H, si ha $h\,h' = (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots).(\gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3 \ldots) = (\gamma_1 \gamma'_1).(\gamma_2 \gamma'_2).(\gamma_3 \gamma'_3)\ldots$ Ma la sostituzione $\gamma_1 \gamma'_1$ agisce soltanto sulle lettere $a_1, a_2, \ldots, a_r$, e quindi $\gamma_1 \gamma'_1$ appartiene ancora alla prima totalità; così pure la sostituzione $\gamma_2 \gamma'_2$ appartiene alla seconda totalità, ecc.

Allora, se γ_1 e γ'_1 sono due sostituzioni qualsiansi della prima totalità, anche il loro prodotto $\gamma_1 \gamma'_1$ appartiene a questa totalità: infatti esisteranno due operazioni h e h' di H, che si decomporranno nel modo seguente: $h = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots$, e $h' = \gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3 \ldots$ (essendo γ_2, γ'_2 convenienti operazioni della seconda totalità, e γ_3, γ'_3 convenienti sostituzioni della terza, ecc.); per quel che si è visto, anche il prodotto $\gamma_1 \gamma'_1$ apparterrà alla prima totalità. Questa costituisce dunque un gruppo Γ_1; così pure la totalità delle sostituzioni γ_2 costituisce un gruppo Γ_2, quella delle sostituzioni Γ_3 costituisce un gruppo Γ_3, ecc.

Siccome due di questi gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ agiscono su lettere diverse tra loro, il loro prodotto $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots)$ sarà *prodotto diretto* dei gruppi stessi (§ 15), e siccome ogni operazione di H è il prodotto di una di Γ_1, per una di Γ_2, ecc., il gruppo H è un sottogruppo del prodotto diretto $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots)$. D'altra parte, i gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ sono tutti transitivi: il che discende dal fatto che le lettere $a_1, a_2, \ldots, a_r$, su cui agisce Γ_1, costituiscono uno dei sistemi di transitività, in cui si ripartiscono le lettere del gruppo dato H; come avviene pure dei gruppi $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$.

Aggiungiamo che, fatto corrispondere all' operazione h di H, l'operazione γ_1 di Γ_1, verrà stabilita una relazione d' isomorfismo (oloedrico o meriedrico), tra H e Γ_1; *) e così per gli altri gruppi $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ Dunque:

Ogni gruppo intransitivo di sostituzioni è sempre un sottogruppo

---

*) Se $h \sim \gamma_1$ e $h' \sim \gamma'_1$, vuol dire che h e h' si decompongono nel modo seguente: $h = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \ldots$, e $h' = \gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3, \ldots$; allora sarà $h\,h' = (\gamma_1 \gamma'_1)(\gamma_2 \gamma'_2).(\gamma_3 \gamma'_3)\ldots$, onde $h\,h' \sim \gamma_1 \gamma'_1$; la suddetta corrispondenza tra le operazioni di H e quelle di Γ_1 è una relazione d'isomorfismo.

del prodotto diretto di più gruppi transitivi, tutti isomorfi al gruppo dato.

Possiamo dunque applicare ai gruppi intransitivi le proprietà dei sottogruppi dei prodotti diretti. Cerchiamo intanto di ridurci al caso del prodotto diretto di due gruppi soli, nel qual caso ci saranno utili le ricerche fatte sui prodotti diretti di due gruppi. Per raggiungere l'intento, procediamo nel modo seguente:

Diciamo $a_1 a_2, \ldots, a_m$ l'insieme delle lettere di un certo numero di sistemi di transitività di H, e diciamo $b_1, b_2, \ldots, b_n$ le lettere rimanenti, costituenti i rimanenti sistemi di transitività di H. Ogni sostituzione di H si decomporrà nel prodotto di una sostituzione g_1, agente unicamente sulle lettere $a_1, a_2, \ldots, a_m$, per una sostituzione g_2, agente soltanto sulle rimanenti lettere $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Come sopra, la totalità delle sostituzioni g_1 che si ottengono, decomponendo in tal modo tutte le sostituzioni di H, forma un gruppo G_1, e la totalità delle sostituzioni g_2 che così si ottengono, forma un gruppo G_2. Questi due gruppi G_1 e G_2 sono isomorfi a H, e possiedono in ogni caso un numero di sistemi di transitività minore di quello dei sistemi di H (ne contengono uno solo, quand'essi siano transitivi); e ciò perchè i sistemi di transitività di G_1 sono precisamente tutti quelli di H, che son formati dalle lettere $a_1, a_2, \ldots, a_m$; e similmente per G_2. Inoltre i due gruppi G_1 e G_2 non hanno operazioni comuni, oltre l'identità, e le sostituzioni dell'uno sono tutte permutabili con quelle dell'altro, poichè essi agiscono su lettere diverse: dunque (G_1, G_2) è il *prodotto diretto* di G_1 per G_2, e il gruppo H è un sottogruppo di questo prodotto diretto.

Cerchiamo il massimo sottogruppo comune a H e a G_1, che diciamo H_1: esso è dato manifestamente dalla totalità delle sostituzioni di H che agiscono soltanto sulle lettere $a_1, a_2, \ldots a_m$, lasciando invariate le altre. Così pure il massimo sottogruppo comune a H e a G_2, che diciamo H_2, è dato dalla totalità delle sostituzioni di H che agiscono soltanto sulle lettere $b_1, b_2, \ldots, b_n$, lasciando invariate le prime. Secondo il modo di dire introdotto nel § 20, abbiamo che il gruppo considerato H *è costruito coi due gruppi*

G_1 *e* G_2, *in base ai rispettivi sottogruppi* H_1 *e* H_2. Applicando il teor. VI del detto § 20, abbiamo senz'altro il seguente teorema, che ci dà il modo di costruire il gruppo H :

Se H *è un gruppo intransitivo di sostituzioni sopra lettere, ripartite le lettere su cui esso agisce in tanti sistemi di transitività, dette* $a_1, a_2 \dots, a_m$ *le lettere complessive di un certo numero di questi sistemi, e dette* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *le lettere rimanenti, decomposta ogni sostituzione di H nel prodotto di una sostituzione* g_1, *agente soltanto sulle lettere* $a_1, a_2, \dots, a_m$, *per una sostituzione* g_2, *agente soltanto sulle lettere rimanenti, la totalità delle sostituzioni* g_1 *che così si ottengono costituisce un gruppo* G_1, *e quella delle sostituzioni* g_2 *costituisce un altro gruppo* G_2 *; detto* H_1 *il massimo sottogruppo comune a* H *e a* G_1 *(costituito dalla totalità delle sostituzioni di* H *che agiscono soltanto sulle lettere* $a_1 a_2, \dots, a_m$), *e detto* H_2 *il massimo sottogruppo comune a* H *e a* G_2 *(costituito ecc.) ; si ha che il gruppo dato* H *e un sottogruppo del prodotto diretto* $(G_1 G_2)$, *e si costruisce coi due gruppi* G_1 *e* G_2, *in base ai rispettivi sottogruppi* H_1 *e* H_2 : *precisamente, scritto il quadro di* G_1 *rispetto a* H_1 :

$$G_1 = (H_1 g_1, H_1 g_2, \dots, H_1 g_q),$$

e detta g'_i *una qualunque delle sostituzioni di* G_2 *che, moltiplicate per* g_i, *danno una sostituzione di* H, *ha luogo l'altro quadro :*

$$G_2 = (H_2 g'_1, H_2 g'_2, \dots, H_2 g'_q).$$

Moltiplicando allora ciascuna operazione della riga i. esima del primo quadro, per tutte quelle della riga i. esima del secondo, e facendo questo lavoro per $i = 1, 2, \dots, q$, *si ottengono, tutte e sole, e ciascuna una sola volta, le operazioni del gruppo dato* H, *e precisamente si ottiene il seguente quadro, di* H *rispetto a* $(H_1 H_2)$.

$$H = \Big((H_1, H_2)\, g_1\, g'_1 ; (H_1, H_2)\, g_2\, g'_2 ; \dots ; (H_1, H_2)\, g_q\, g'_q \Big).$$

Il gruppo H_1 *è poi invariante in* G_1, *come* H_2 *lo è in* G_2, *e come* (H_1, H_2) *lo è in* H ; *si ha che* G_1 *è oloedricamente isomorfo a* $\frac{H}{H_2}$, *come* G_2 *lo è a* $\frac{H}{H_1}$, *e che i tre gruppi* $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_2}{H_2}, \frac{H}{(H_1, H_2)}$ *sono oloedricamente isomorfi tra loro ; di più che i tre prodotti* (G_1, G_2), (G_1, H), *e* (G_2, H) *coincidono, ecc.*

§ 25.

Continuazione dell'argomento precedente.

Ora se i due gruppi G_1 e G_2 non sono transitivi, essi possiedono però in ogni caso un numero di sistemi di transitività minore di quello dei sistemi di transitività di H; si potrà applicare ad essi lo stesso processo: il gruppo G_1 verrà, poniamo, costruito con due altri gruppi G'_1, G'_2, in base a certi sottogruppi H'_1 e H'_2 ; e così via. Siccome G_1 e G_2 hanno un numero di sistemi di transitività minore di quello dei sistemi di transitività di H, *questo processo avrà un termine, e si troverà per ultimo un certo numero di gruppi transitivi, partendo dai quali, con successive costruzioni della natura suddetta, si otterrà il gruppo considerato* H; e questi gruppi transitivi, cui da ultimo si perverrà, sono poi, si vede subito, proprio i gruppi prima trovati Γ_1, Γ_2, Γ_3 , ...

Inversamente, se G_1 e G_2 sono due gruppi di sostituzioni, e le lettere $a_1, a_2, \ldots, a_m$, su cui agisce il primo, sotto tutte diverse dalle lettere $b_1, b_2, \ldots, b_n$, su cui agisce il secondo, se G_1 ammette un sottogruppo invariante H_1, e G_2 un sottogruppo invariante H_2, tali che i due gruppi $\frac{G_1}{H_1}$ e $\frac{G_2}{H_2}$ siano oloedricamente isomorfi, allora *ogni* gruppo H, costruito coi due gruppi G_1 e G_2, in base ai rispettivi sottogruppi H_1 e H_2, è intransitivo : $a_1, a_2, \ldots, a_m$ è è il complesso delle lettere di un certo numero di sistemi di transitività di H, e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ l'insieme delle lettere dei sistemi rimanenti : insomma i sistemi di transitività di H si ottengono, associando tutti quelli di G_1 con tutti quelli di G_2 ; e ogni sostituzione di H è il prodotto di una sostituzione g_1 di G_1, che agisce unicamente sulle lettere $a_1, a_2, \ldots, a_m$, per una sostituzione g_2 di G_2, agente soltanto sulle rimanenti lettere $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Dunque : *tutti i gruppi intransitivi di sostituzioni si ottengono, partendo da gruppi transitivi e operando successivamente con costruzioni della natura suddetta*; *inversamente, partendo da gruppi di sostituzioni, agenti su lettere diverse, e operando, quando sia possibile, con costruzioni della suddetta natura, si ottengono sempre nuovi gruppi intransitivi, i cui sistemi di transitività si ottengono, associando insieme i sistemi di transitività dei singoli gruppi, dai quali si parte.*

Partendo, ad esempio, da un gruppo G, agente sulle lettere $a_1, a_2, \ldots, a_m$, si cambino queste lettere, chiamando $b_1, b_2, \ldots, b_m$ le nuove lettere, e si indichi con G′ il gruppo che si ottiene, che è precisamente il gruppo trasformato

$$\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \ldots, & b_m \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_m \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathrm{G} \cdot \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \ldots, & b_m \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_m \end{pmatrix};$$

si costruisca un nuovo gruppo H, partendo dai due gruppi G e G′, in base all'identità (moltiplicando ciascuna sostituzione di G per la sostituzione corrispondente di G′, nell'isomorfismo oloedrico che vi è tra G e G′ : V. § 23): questo nuovo gruppo H sarà intransitivo, oloedricamente isomorfo a G e a G′ (§ 23), e i suoi sistemi, di transitività si otterranno associando quelli di G con quelli di G′. E questo processo si può ripetere: ad esempio, cambiando le lettere di G′, chiamando G″ il gruppo ottenuto, e costruendo un nuovo gruppo K, mediante i due gruppi H e G″, in base all'identità, questo gruppo K sarà oloedricamente isomorfo a G, e avrà un numero di sistemi di transitività triplo di quello dei sistemi di G. Così si può continuare indefinitamente. Ora siccome, dato un gruppo qualunque di operazioni, esiste sempre qualche gruppo transitivo di sostituzioni, oloedricamente isomorfo a esso (ne esistono sempre di quelli di ordine uguale al numero delle proprie lettere), abbiamo dunque :

Si possono costruire infiniti gruppi intransitivi di sostituzioni di un dato tipo, cioè oloedricamente isomorfi a un dato gruppo, e con un numero prefissato qualunque di sistemi di transitività.

Sui gruppi intransitivi di sostituzioni, come sottogruppi di certi prodotti diretti, non ci tratterremo oltre; ad essi si potrebbero applicare tutti i i teoremi trovati sui sottogruppi dei prodotti diretti, e se ne dedurrebbero delle proprietà di essi. Su questo però non ci fermiamo ; osserviamo soltanto che il problema di costruire tutti i gruppi di sostituzioni esistenti è così ricondotto all'altro di cercare tutti i possibili gruppi transitivi, dai quali si ottengono poi, nel modo che si è visto, tutti gli altri.

Se, ad esempio, i gruppi transitivi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ sono abeliani, allora anche il loro prodotto diretto è abeliano, e allora anche il gruppo H, che ne è un sottogruppo, sarà abeliano. Viceversa, se H è abeliano, tali sono anche tutti i gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, i quali sono isomorfi a H. Dunque tutti i gruppi abeliani intransitivi di sostituzioni si possono costruire, quando si siano costruiti tutti i gruppi abeliani transitivi.

Se il gruppo H è risolubile, tali sono anche tutti i gruppi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$*). Dunque, quando si conoscano tutti i gruppi transitivi risolubili, allora si possono costruire anche tutti quelli intransitivi risolubili di sostituzioni sopra lettere.

Similmente, quando si conoscano, ad esempio, tutti i gruppi transitivi d'ordine uguale alla potenza di un numero primo, allora si possono costruire anche tutti quegli intransitivi d'ordine uguale alla potenza di un numero primo, ecc. Insomma, partendo da date classi di gruppi transitivi di sostituzioni si possono ottenere, con le costruzioni suddette, delle classi di gruppi intransitivi.

A che cosa si riduca poi il problema di costruire tutti i gruppi transitivi, vedremo in un altro lavoro; qui ci limitiamo ad asserire che, quando siano noti tutti i tipi di gruppi di operazioni, allora si possono costruire anche tutti i gruppi transitivi di sostituzioni sopra lettere, e quindi poi anche tutti i gruppi intransitivi. Insomma il problema di costruire tutti i gruppi di sostituzioni sopra lettere si riconduce a quello di trovare tutti i tipi di gruppi di operazioni.

PACIFICO MAZZONI.

---

*) Se all' identità in Γ_i corrisponde in H il sottogruppo K_i, è noto che i fattori di composizione di H si ottengono aggiungendo a quelli di Γ_i, quelli di K_i; quindi se H è risolubile, tale è pure Γ_i

INDICE

PARTE I.

Sui gruppi isomorfi.

PARTE II.

Gruppi permutabili.

PARTE III.

Prodotti diretti di gruppi di operazioni.