

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SANSONE GIOVANNI

Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi e doppie piramidi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 13
(1919), exp. n° 5, p. 1-135

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1919_1_13__A5_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SANSONE GIOVANNI

Le divisioni regolari dello spazio iperbolico

IN

Piramidi e doppie piramidi

PISA

STAB. TIPOGRAFICO SUCC. FF. NISTRI

—
1917

PREFAZIONE.

È noto per le ricerche di Poincarè (Sur les groupes Kleinéens, Acta Mathem. Bd. 3) che il problema di costruire i gruppi propriamente discontinui di sostituzioni lineari sopra una variabile complessa equivale a quello della divisione regolare dello spazio iperbolico S in poliedri elementari congruenti. Lo studio di questi problemi dà quindi luogo a due diverse questioni, e cioè:

1.º Definito aritmeticamente il gruppo, cercare la corrispondente divisione di S .

2.º Data una divisione regolare di S , trovare la definizione aritmetica del gruppo corrispondente.

Con questo lavoro ci si propone di trattare il caso particolare in cui i poliedri congruenti che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico sono delle piramidi. Un primo esame della questione (1.ª parte, paragr. 1) ci mostra subito che le piramidi possono essere soltanto *triangolari* o *quadrangolari*. Essendo stato il caso delle triangolari studiato completamente nel lavoro pubblicato negli annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa¹⁾ (volume XII), ci resta da trattare il caso delle quadrangolari. Varie considerazioni ci permettono, fissata la piramide fondamentale di stabilire le sostituzioni generatrici dei gruppi corrispondenti a tali divisioni (paragr. 2, 3, 1.ª parte) e di determinare quindi le leggi aritmetiche di formazione dei

¹⁾ G. SANSONE, *Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e in tetraedri*.

coefficienti di tutte le sostituzioni del gruppo (paragrafo 4, 1.^a parte). Risolto così il problema aritmetico in generale, passo a esaminare la struttura di tali gruppi, trovandone tutti i sottogruppi di movimenti ellittici e parabolici (paragr. 5, 6, 1.^a parte). Nella 2.^a parte del lavoro si determinano tutte le celle che possono assumersi come piramidi fondamentali, di guisa che fissata una di queste celle, è anche trovato, per i risultati della 1.^a parte il gruppo corrispondente. In vari casi una stessa cella si è potuto considerarla, sia come campo fondamentale di un gruppo misto di movimenti di 1.^a e 2.^a specie, sia come campo fondamentale di uno o più gruppi di movimenti di 1.^a specie. Ma la questione più importante e anche più difficile risolta nella 2.^a parte, è stata quella di mettere in luce tutte le divisioni cui corrispondono gruppi congruenziali. Per questo ci siamo giovati del metodo tenuto nel lavoro citato, perfezionato nel nostro caso per i risultati già trovati nella 1.^a parte e cioè: trovate le sostituzioni di 1.^a e 2.^a specie (vedasi 1.^a parte) generatrici del gruppo, si indaga quali siano le leggi aritmetiche comuni cui soddisfano i coefficienti di esse, leggi però che debbono sussistere anche per le sostituzioni ottenute, moltiplicandole due a due. Si trovano poi le sostituzioni corrispondenti ai movimenti che riportano la cella fondamentale del gruppo in sè, le quali non dovendo appartenere al gruppo, ci portano in generale a nuove leggi per i coefficienti del gruppo oltre le trovate. Si procede infine in senso inverso verificando se le leggi trovate sono sufficienti a individuare il gruppo, o se occorra portare ancora convenienti restrizioni. Tale metodo ci ha permesso nei casi in cui i coefficienti delle sostituzioni generatrici appartengono a corpi quadratici immaginari, di portare sempre in fondo le ricerche.

Dal nostro studio si conclude che esistono soltanto $n. 33$ divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari (col vertice improprio) di cui 17 con piramidi che hanno tutti i vertici della base propri, 7 hanno tre vertici della base propri e uno improprio, 7 hanno due vertici della base propri e 2 impropri, 2 tutti i vertici della base impropri, e i quattro capitoli in cui è divisa la 2.^a parte trattano separatamente le varie divisioni, a seconda il numero dei vertici impropri della base.

Nel lavoro sono inserite due note che possono considerarsi di complemento alla 1.^a e 2.^a parte. Con la 1.^a e con metodo del tutto analogo di quello tenuto nella 1.^a parte; si risolve la questione di trovare la generazione arit-

metica delle sostituzioni dei gruppi piani propriamente discontinui il cui campo fondamentale è un triangolo con un vertice improprio, sviluppando però in questo caso i risultati ottenuti. Nella nota 2.^a si risolve la questione di determinare i gruppi propriamente discontinui il cui campo fondamentale è una doppia piramide, dimostrando in questo caso l'esistenza di 2 soli tipi di piramide, e determinando i gruppi congruenziali corrispondenti, di cui uno già noto che è il gruppo dell'ottaedro regolare (nota R. A. Lincei del Prof. L. Bianchi, anno 1909) l'altro ha tale gruppo come sottogruppo invariante di indice 4.

Questo lavoro in confronto al primo citato ha il vantaggio di dare una legge uniforme di generazione dei gruppi in esame, in secondo luogo lo completa, perchè *risultano ora determinati*, in modo analogo di quanto si opera nello spazio parabolico, *tutti i gruppi propriamente discontinui il cui campo fondamentale è una piramide, una doppia piramide, un poliedro regolare.*

PARTE 1.^a

**Generazione aritmetica dei gruppi propriamente discontinui il cui poliedro
fondamentale è una piramide quadrangolare.**

Generalità.

1. — Sia V_0 il vertice di una piramide Π che operi una divisione regolare dello spazio iperbolico S , siano $V_0V_1, V_0V_2, \dots, V_0V_n$ i suoi spigoli e V_1, V_2, \dots, V_n i vertici della base; si indichi con $\frac{\pi}{a_i}$ la misura del diedro V_0V_i .

Se si vuole che riflettendo Π sulle sue facce successivamente, ne risolti riempito S una e una sola volta, è per le condizioni di Poincaré a_i un numero intero maggiore o eguale 2. Non ci occuperemo delle divisioni regolari di S in piramidi triangolari avendo questo caso già esaminato completamente, è lecito perciò supporre:

$$(1) \quad n \geq 4.$$

D'altra parte deve aversi:

$$(2) \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n - 2,$$

valendo il segno $> 0 =$ secondo che V_0 sia improprio o proprio. Ora, dalla (2) tenendo conto che è $a_i \geq 2$ si ha:

$$\frac{n}{2} \geq n - 2,$$

quindi $4 \geq n$ e per la (1) $n = 4$, il vertice V_0 è quindi improprio e dalla eguaglianza:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 2,$$

si ha:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2,$$

cioè i diedri lungo gli spigoli V_0V_1 , V_0V_2 , V_0V_3 , V_0V_4 sono retti. Concludiamo quindi: *Le piramidi che effettuano le divisioni regolari dello spazio iperbolico sono triangolari o quadrangolari*, e di quest'ultimo caso d'ora innanzi ci occuperemo.

Le riflessioni generatrici del gruppo $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$

2. — Possiamo supporre che il vertice V_0 della piramide Π sia il punto all'infinito di S , le quattro facce di Π essendo allora dei piani normali al piano limite formano un prisma retto rettangolare. La base B' di Π è una semisfera col centro O nel piano limite, e noi converremo di prendere O come origine della terna di assi ortogonali (ξ, η, ζ) di cui gli assi ξ e η sono ortogonali alle facce della piramide, essendo poi il semiraggio $\zeta > 0$ quello compreso nel semispazio S . Se con $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ indichiamo la misura degli angoli diedri che le facce opposte di Π normali all'asse ξ formano con B' , con $\frac{\pi}{m_1}$, $\frac{\pi}{n_1}$ la misura degli angoli diedri che le facce opposte di Π normali ad η , formano con B' , per le condizioni di Poincarè, m, n, m_1, n_1 , sono interi maggiori o eguali a 2. Osserviamo che dovendo essere tutti i diedri di Π acuti o retti, il punto $(0, 0, 0)$ è interno al rettangolo o sul contorno del rettangolo che le facce di Π tracciano sul piano limite. Supporremo il raggio della semisfera B' eguale ad 1, e ponendo: (fig. 1^a)

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma = \cos \frac{\pi}{m}, & \tau = -\cos \frac{\pi}{n}, \\ \sigma_1 = \cos \frac{\pi}{m_1}, & \tau_1 = -\cos \frac{\pi}{n_1}, \end{cases}$$

$\sigma, \tau, \sigma_1, \tau_1$ sono i segmenti che le facce opposte di Π staccano sugli assi ξ e η e il gruppo il cui poliedro fondamentale è Π si genera con le riflessioni sui quattro piani:

$$\xi = +\sigma; \quad \xi = +\tau; \quad \eta = +\sigma_1; \quad \eta = +\tau_1,$$

e con la riflessione sulla sfera:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Tali riflessioni hanno la seguente espressione analitica:

$$z' = \begin{pmatrix} -1, 2\sigma \\ 0, 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} -1, 2\tau \\ 0, 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} 1; 2i\sigma_1 \\ 0; 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} 1, 2i\tau_1 \\ 0, 1 \end{pmatrix}; \quad z' = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} z_0;$$

e indicheremo nel seguito tanto esse che i corrispondenti piani o sfere di riflessione con

$$A, B, C, D, E,$$

e il gruppo misto di movimenti da esse generato con $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ e la piramide Π con $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$.

Analogamente indicheremo con $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ un gruppo di movimenti di 1.^a specie avente per piramide fondamentale $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$.

Ciò premesso il presente lavoro risolve le seguenti questioni:

1.^o *Trovare i valori interi che possono attribuirsi ad m, n, m_1, n_1 perchè esista la piramide $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ o ciò che è lo stesso per le (3) trovare i valori di $\sigma, \tau, \sigma_1, \tau_1$.*

2.^o *Dato il gruppo $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ trovare le leggi aritmetiche di generazione dei coefficienti delle sostituzioni lineari rappresentanti i suoi movimenti.*

Per brevità di esposizione tratteremo nella prima parte del presente lavoro il 2.^o problema, che ci renderà possibile di volta in volta che sia risolto il 1.^o problema di determinare i gruppi aritmeticamente. La 2.^a parte del lavoro oltre che l'esame della 1.^a questione, studia l'altra più importante dal punto di vista aritmetico di determinare le divisioni di S i cui gruppi corrispondenti sono congruenziali.

I movimenti di 1.^a specie del gruppo $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$

3. — Un movimento di 1.^a specie di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ si compone del prodotto di un numero pari di movimenti di 2.^a specie A, B, C, D, E , quindi i 25 prodotti che si formano con due qualunque di essi sono i movimenti di 1.^a specie generatori del sottogruppo G di movimenti di 1.^a specie di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$. G è evidentemente invariante in $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ e di indice 2, e si ha anche:

$$(4) \quad G^0_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1} = \begin{cases} G, \\ G \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0. \end{cases}$$

Osservando ora che :

$$1.^\circ) \quad A^2 = 1, \quad B^2 = 1, \quad C^2 = 1, \quad D^2 = 1, \quad E^2 = 1;$$

$$2.^\circ) \quad AE = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\sigma \end{pmatrix} z_0; \quad BE = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\tau \end{pmatrix} z_0; \quad CE = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i\sigma_1 \end{pmatrix} z_0; \quad DE = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i\tau_1 \end{pmatrix} z_0;$$

cioè AE, BE, CE, DE sono 4 movimenti di 1.^a specie ellittici a periodo m, n, m_1, n_1 , e quindi :

$$3.^\circ) \quad EA = (AE)^{m-1}, \quad EB = (BE)^{n-1}, \quad EC = (CE)^{m_1-1}, \quad ED = (DE)^{n_1-1};$$

e che ad esempio

$$4.^\circ) \quad BD = BE^2D = (BE)(ED) = (BE)(DE)^{n_1-1},$$

si ha che il sottogruppo di movimenti di 1.^a specie di $G^0_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ si genera con le 4 rotazioni :

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\sigma \end{pmatrix} z; \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\tau \end{pmatrix} z; \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i\sigma_1 \end{pmatrix} z, \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i\tau_1 \end{pmatrix} z.$$

Segue allora che il più generale movimento di 1.^a specie di $G^0_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ ha la forma

$$(I) \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_2 & k_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_n & k_n \end{pmatrix} z;$$

ove k_1, k_2, \dots, k_n rappresentano una disposizione con ripetizione di ordine n dei numeri $2\sigma, 2\tau, -2i\sigma_1, -2i\tau_1$, ed è

$$\varepsilon_i = -1, \quad \text{se } k_i = 2\sigma, 2\tau,$$

$$\varepsilon_i = +1, \quad \text{se } k_i = -2i\sigma_1, 2i\tau_1,$$

facendo poi, nel secondo membro di (I) il prodotto di una sostituzione per la successiva con la regola del prodotto delle colonne della prima per le righe della seconda.

Ponendo anche :

$$z' = \frac{P_n z + Q_n}{P'_n z + Q'_n}, \quad n \geq 1,$$

allora P_n, Q_n, P'_n, Q'_n sono legati agli ε e ai k dalle relazioni :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 = 0, Q_1 = 1, P'_1 = \varepsilon_1, Q'_1 = k_1, \\ \left| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & & \\ \varepsilon_1 & k_1 & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & \\ \varepsilon_2 & k_2 & \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \varepsilon_n & k_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} P_n & Q_n \\ P'_n & Q'_n \end{array} \right| \text{ per } n \geq 2, \end{array} \right.$$

ove nel primo membro della seconda delle (II) si fa il prodotto di ogni determinante per il successivo con la regola delle colonne del 1.º per le righe del 2.º, rappresentando P_n, Q_n, P'_n, Q'_n gli elementi del determinante del 2.º ordine ottenuto effettuando i prodotti indicati.

**Generazione aritmetica delle sostituzioni rappresentatrici
di movimenti di $G^0_{\sigma_1 \tau; \varepsilon \sigma_1, \varepsilon \tau_1}$.**

Per risolvere il problema propostoci nel paragrafo precedente occorrerà trovare la forma di P_n, Q_n, P', Q'_n . Dalle (II) segue:

$$(5) \quad P_2 = \varepsilon_1, Q_2 = k_1, P'_2 = \varepsilon_1 k_2, Q'_2 = \varepsilon_2 + k_1 k_2,$$

e in generale:

$$\left| \begin{array}{c|c} P_i & Q_i \\ P'_i & Q'_i \end{array} \right| \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \varepsilon_{i+1} & k_{i+1} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} P'_i & Q'_i \\ \varepsilon_{i+1} P_i + k_{i+1} P'_i & \varepsilon_{i+1} Q_i + k_{i+1} Q'_i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} P_{i+1} & Q_{i+1} \\ P'_{i+1} & Q'_{i+1} \end{array} \right|,$$

quindi:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} P_{i+1} = P'_i, \\ P'_{i+1} = \varepsilon_{i+1} P_i + k_{i+1} P'_i, \end{array} \right. \quad (7) \left\{ \begin{array}{l} Q_{i+1} = Q'_i, \\ Q'_{i+1} = \varepsilon_{i+1} Q_i + k_{i+1} Q'_i, \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

Dalle (6) e (7) si ha rispettivamente:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{i+1} P_i + k_{i+1} P_{i+1} - P_{i+2} = 0, \\ \varepsilon_{i+1} P'_{i-1} + k_{i+1} P'_i - P'_{i+1} = 0; \end{array} \right. \quad (8)^* \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{i+1} Q_i + k_{i+1} Q_{i+1} - Q_{i+2} = 0, \\ \varepsilon_{i+1} Q'_{i-1} + k_{i+1} Q'_i - Q'_{i+1} = 0; \end{array} \right.$$

$$\text{per } i = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

dalle quali determineremo le P e le Q.

Tenendo conto ad es. che $P_1 = \varepsilon_1; P'_2 = \varepsilon_1 k_2$ e della seconda delle (8) si ha per le P' il seguente sistema:

$$\begin{array}{r}
 P'_1 \\
 P'_2 \\
 \varepsilon_3 P'_1 + k_3 P'_2 - P'_3 \\
 \varepsilon_4 P'_2 + k_4 P'_3 - P'_4 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 \varepsilon_i P'_{i-2} + k_i P'_{i-1} - P'_i \\
 \varepsilon_{i+1} P'_{i-1} + k_{i+1} P'_i - P'_{i+1}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = \varepsilon_1 \quad , \\
 = \varepsilon_1 k_2 \quad , \\
 = 0 \quad , \\
 = 0 \quad , \\
 \dots \\
 \dots \\
 = 0 \quad , \\
 = 0 \quad .
 \end{array}
 \tag{9}$$

Il determinante dei coefficienti del sistema (9) è:

$$\begin{vmatrix}
 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\
 0 & , & 1 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\
 \varepsilon_3 & , & k_3 & , & -1 & , & 0 & , & \dots & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\
 0 & , & \varepsilon_4 & , & k_4 & , & -1 & , & \dots & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & \varepsilon_i & , & k_i & , & -1 & , & 0 \\
 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & 0 & , & \varepsilon_{i+1} & , & k_{i+1} & , & -1
 \end{vmatrix} = (-1)^{i-1},$$

onde dal sistema (9) per la regola di Cramer si ha:

$$P'_{i+1} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix}
 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \varepsilon_1 \\
 0 & , & 1 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \varepsilon_1 k_2 \\
 \varepsilon_3 & , & k_3 & , & -1 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\
 0 & , & \varepsilon_4 & , & k_4 & , & -1 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & \varepsilon_i & , & k_i & , & -1 & , & 0 \\
 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & \varepsilon_{i+1} & , & k_{i+1} & , & -1
 \end{vmatrix} .$$

Sottraendo dalla 2.^a riga del determinante la 1.^a moltiplicata per k_2 sviluppando per gli elementi dell'ultima colonna si ha con semplici trasformazioni:

$$(A) \quad P'_{i+1} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ \varepsilon_2 & , & k_2 & , & -1 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & \varepsilon_3 & , & k_3 & , & -1 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & \varepsilon_{i-1} & , & k_{i-1} & , & -1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & \varepsilon_i & , & k_i & , & -1 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & \varepsilon_{i+1} & , & k_{i+1} \end{vmatrix},$$

la quale vale per $i \geq 2$. Osservando poi che $P'_1 = \varepsilon_1$; $P'_2 = \varepsilon_1 k_2$ concludiamo che P'_{i+1} per $i \geq 0$ si esprime con il determinante di ordine $i + 1$ del 2.^o membro della (A). Essendo per la 1.^a delle (6) $P_{i+1} = P'_i$ si ha ancora:

$$(B) \quad \left. \begin{array}{l} P_1 = 0, \\ P_{i+1} = \end{array} \right\} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ \varepsilon_2 & , & k_2 & , & -1 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & \varepsilon_3 & , & k_3 & , & -1 & , & \dots & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & \varepsilon_{i-1} & , & k_{i-1} & , & -1 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , & \dots & , & 0 & , & \varepsilon_i & , & k_i \end{vmatrix} \text{ per } i \geq 1,$$

e perciò P_{i+1} per $i \geq 1$ si esprime con il determinante di ordine i del 2.^o membro della 2.^a delle (B).

Operando analogamente sulle 8*) si ha Q'_{i+1} espresso con il determinante di ordine $i + 1$:

$$(C) \quad Q'_{i+1} = \begin{vmatrix} k_1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & k_2 + \frac{\varepsilon_2}{k_1}, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon_3, & k_3, & -1, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon_4, & k_4, & -1, & \dots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & \varepsilon_{i-1}, & k_{i-1}, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & \varepsilon_i, & k_i, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \varepsilon_{i+1}, & k_{i+1} \end{vmatrix},$$

e tenendo presente che per la 1.^a delle (7) $Q_{i+1} = Q'_i$ si ha ancora :

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1=1, \\ Q_{i+1} = \begin{vmatrix} k_1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & k_2 + \frac{\varepsilon_2}{k_1}, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon_3, & k_3, & -1, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon_4, & k_4, & -1, & \dots, & 0, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & \varepsilon_{i-1}, & k_{i-1}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & \varepsilon_i, & k_i \end{vmatrix} \end{array} \right. \text{ per } i \geq 1,$$

perciò Q_{i+1} per $i \geq 1$ si esprime con il determinante di ordine i del 2.^o membro della 2.^a relazione delle (D).

Indicando con $P_{i+1}^{(0)}, Q_{i+1}^{(0)}, P_{i+1}'^{(0)}, Q_{i+1}'^{(0)}$ i numeri coniugati di $P_{i+1}, Q_{i+1}, P_{i+1}', Q_{i+1}'$, i quali si ottengono cambiando nelle (A), (B), (C), (D) i numeri :

$$-2i\sigma_1 = -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, \quad 2i\tau_1 = -2i \cos \frac{\pi}{n_1},$$

nei coniugati

$$2i \sigma_1 = 2i \cos \frac{\pi}{m_1}, \quad 2i \tau_1 = -2i \cos \frac{\pi}{n_1},$$

da quanto si è premesso deduciamo il seguente *teorema fondamentale*:

Se $\sigma, \tau; \sigma_1, \tau_1$, sono 4 numeri tali che la piramide $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ divide regolarmente lo spazio iperbolico, il gruppo $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ ha l'espressione:

$$(10) \quad G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0 = \begin{cases} z' = \begin{pmatrix} P_{i+1} & Q_{i+1} \\ P'_{i+1} & Q'_{i+1} \end{pmatrix} z, \\ z' = \begin{pmatrix} P_{i+1}^{(0)} & Q_{i+1}^{(0)} \\ P_{i+1}^{(0)} & Q_{i+1}^{(0)} \end{pmatrix} z_0, \end{cases}$$

essendo i numeri $P_{i+1}, Q_{i+1}, P'_{i+1}, Q'_{i+1}$ dati delle (A), (B), (C), (D) nelle quali i numeri k_1, k_2, \dots, k_{i+1} , dei determinanti dei secondi membri rappresentano una disposizione qualunque con ripetizione di ordine $i+1$ dei 4 numeri:

$$2\sigma = 2 \cos \frac{\pi}{m}, \quad 2\tau = -\cos \frac{\pi}{n}, \quad -2i\sigma_1 = -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, \quad -2i\tau_1 = 2i \cos \frac{\pi}{n_1}$$

ed è:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= -1, \text{ se } k_i = 2\sigma, \quad 2\tau, \\ \epsilon_i &= +1, \text{ se } k_i = -2i\sigma_1, \quad -2i\tau_1 \end{aligned}$$

Si ha inoltre, a secondo che i numeri ϵ eguali $a-1$ della disposizione $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{i+1}$, sono in numero pari o dispari:

$$(11) \quad P_{i+1} Q'_{i+1} - P'_{i+1} Q_{i+1} = \pm 1.$$

I movimenti ellittici di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$.

Come le 5 riflessioni A, B, C, D, E formano una base del gruppo $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ analogamente le 4 rotazioni:

$$\begin{aligned} AE &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} z; \quad BE = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} z; \quad CE = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2i \cos \frac{\pi}{m_1} \end{pmatrix} z; \quad DE = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & +2i \cos \frac{\pi}{n_1} \end{pmatrix} z; \end{aligned}$$

formano una *base* del sottogruppo di movimenti di 1.^a specie di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$. Si vede subito geometricamente che AE, BE, CE, DE rappresentano rotazioni di periodo m, n, m_1, n_1 attorno agli spigoli $V_1V_2, V_3V_4, V_2V_3, V_4V_1$ di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$.

Sono rotazioni attorno agli stessi spigoli le potenze ed esponente s intero qualunque di AE, BE, CE, DE, la cui espressione analitica è:

$$(12) \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & t \end{pmatrix}^s z,$$

dove t è uno qualunque dei numeri $2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n}, -2i \cos \frac{\pi}{m_1},$

$2i \cos \frac{\pi}{n_1}$ avendosi

$$(a) \quad \begin{cases} \varepsilon = -1 & \text{se } t = 2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n}, \\ \varepsilon = +1 & \text{se } t = -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, +2i \cos \frac{\pi}{n_1}. \end{cases}$$

Inversamente una rotazione di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ che lasci fisso uno fra gli spigoli $V_1V_2, V_2V_3, V_3V_4, V_4V_1$ ha la precedente espressione analitica.

Osserviamo poi che le 4 rotazioni a periodo 2:

$$\begin{aligned} AC &= (AE)(EC) = (AE)(CE)^{m_1-1}, & BC &= (BE)(CE)^{m_1-1} \\ BD &= (BE)(DE)^{n_1-1}, & AD &= (AE)(DE)^{n_1-1} \end{aligned}$$

lasciano fissi gli spigoli rettilinei $V_0V_1, V_0V_2, V_0V_3, V_0V_4$ di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ ed esse solo godono di questa proprietà. La loro corrispondente espressione analitica è:

$$(13) \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}^{m_b-1} z,$$

ove

$$a = 2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n}, \text{ e } b = -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, 2i \cos \frac{\pi}{n_1},$$

avendosi poi:

$$(b) \quad \begin{cases} m_b = m_1, & \text{se } b = -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, \\ m_b = n_1, & \text{se } b = 2i \cos \frac{\pi}{n_1}. \end{cases}$$

Si conclude che l'espressione analitica di un qualsiasi movimento ellittico di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che lasci fisso uno spigolo di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ è data dalle (12) o dalle (13). Ciò premesso possiamo determinare aritmeticamente tutti i movimenti ellittici g di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$. È chiaro che g rappresenta una rotazione attorno a un spigolo c di una piramide P' appartenente alla divisione Σ di S determinata da $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ sicchè chiamando con h il movimento di 1.^a o 2.^a specie di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che porta $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ in P' è hgh^{-1} una rotazione attorno a uno spigolo di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ cioè rappresentabile con le (12) o le (13), ed inversamente il trasformato di un opportuno movimento (12) o (13) con h da g , si hanno quindi le seguenti espressioni analitiche per g , a secondo che h è di 1.^a o 2.^a specie:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} z' = \begin{pmatrix} P_r & Q_r \\ P'_r & Q'_r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_r & Q_r \\ P'_r & Q'_r \end{pmatrix} z, \\ z' = \begin{pmatrix} P_r & Q_r \\ P'_r & Q'_r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}^{m_b-1} \begin{pmatrix} P_r & Q_r \\ P'_r & Q'_r \end{pmatrix} z, \end{array} \right.$$

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} z' = \begin{pmatrix} P_r^0 & Q_r^0 \\ P_r'^0 & Q_r'^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_r^0 & Q_r^0 \\ P_r'^0 & Q_r'^0 \end{pmatrix} z, \\ z' = \begin{pmatrix} P_r^0 & Q_r^0 \\ P_r'^0 & Q_r'^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}^{m_b-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_r^0 & Q_r^0 \\ P_r'^0 & Q_r'^0 \end{pmatrix} z. \end{array} \right.$$

Osservando ora che se

$$\begin{pmatrix} P_r & Q_r \\ P'_r & Q'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_2 & k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & k_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix},$$

è

$$\begin{pmatrix} P_r & Q_r \\ P'_r & Q'_r \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_2 & k_2 \end{pmatrix}^{m_{k_2}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1},$$

con le convenzioni che se:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_i = 2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n} \text{ è } m_{k_i} = m, n \text{ rispettivamente,} \\ \text{e se: (c)} \\ k_i = -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, +2i \cos \frac{\pi}{n_1} \text{ è } m_{k_i} = m_1, n_1 \text{ rispettivamente,} \end{array} \right.$$

si ha che l'espressione analitica di un movimento ellittico di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ è una delle seguenti:

$$\begin{aligned}
 \alpha) \quad z' &= \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & ; & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2 \end{pmatrix}^{m_{k_2}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \\
 & \quad \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon & ; & t \end{pmatrix}^s \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r \end{pmatrix} z, \\
 \beta) \quad z' &= \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & ; & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & a \end{pmatrix} \\
 & \quad \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & b \end{pmatrix}^{m_b-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r \end{pmatrix} z, \\
 \gamma) \quad z' &= \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r^0 \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & ; & k_{r-1}^0 \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1^0 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon & ; & t \end{pmatrix}^s \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2^0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r^0 \end{pmatrix} z, \\
 \delta) \quad z' &= \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r^0 \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & ; & k_{r-1}^0 \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1^0 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & b \end{pmatrix}^{m_b-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2^0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r^0 \end{pmatrix} z;
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

dove k_1, k_2, \dots, k_r hanno il solito significato $k_1^0, k_2^0, \dots, k_r^0$ sono i numeri coniugati, valendo poi le convenzioni (a), (b), (c).

Le (16) non solo danno analiticamente tutti i movimenti ellittici di $G^0_{\sigma, \tau; i \sigma_1, i \tau_1}$ ma li esprimono sotto la forma (I), in modo tale cioè che applicando i risultati del paragrafo precedente si possono calcolare agevolmente i coefficienti delle sostituzioni lineari rappresentatrici di essi.

Geometricamente i movimenti α) e γ) sono rotazioni a periodo:

$$m, n, m_1, n_1,$$

o secondo che :

$$t = 2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n}; -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, 2i \cos \frac{\pi}{n_1},$$

mentre le β) e le δ) rappresentano rotazioni a periodo 2.

Ponendo:

$$m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_r} + s = i + 1,$$

$$m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_r} + m_{k_l} = l + 1,$$

i movimenti ellittici (16) assumono rispettivamente la forma:

$$\alpha^*) z' = \frac{P_{i+1} z + Q_{i+1}}{P'_{i+1} z + Q'_{i+1}}, \beta^*) z' = \frac{P_{i+1} z + Q_{i+1}}{P'_{i+1} z + Q'_{i+1}}, \gamma^*) z' = \frac{P_{i+3}^* z + Q_{i+3}^*}{P'^*_{i+3} z + Q'^*_{i+3}};$$

$$\delta^*) z' = \frac{P_{i+3}^* z + Q_{i+3}^*}{P'^*_{i+3} z + Q'^*_{i+3}},$$

e dalle (16) stesse si ricavano semplici regole sul modo di prendere in ogni caso le disposizioni:

$$k_1, k_2, \dots, k_{i+1},$$

$$k_1, k_2, \dots, k_{i+1},$$

$$k_1^0, k_2^0, \dots, k_{i+3}^0,$$

$$k_1^0, k_2^0, \dots, k_{i+3}^0,$$

perchè i movimenti $\alpha^*)$, $\beta^*)$, $\gamma^*)$, $\delta^*)$ rappresentino dei movimenti ellittici.

Così ad es. nel caso $\alpha^*)$ k_1, k_2, \dots, k_{i+1} sono una disposizione con ripetizione di ordine $i+1$ dei numeri $2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{m}, -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, 2i \cos \frac{\pi}{n_1}$, tale che, il 1.º gruppo di $m_{k_r} - 1$ elementi sia formato di elementi tutti eguali a k_r , il 2.º gruppo di $m_{k_{r-1}} - 1$ elementi sia formato di elementi tutti eguali a k_{r-1}, \dots, l' r.º gruppo di $m_{k_1} - 1$ elementi sia formato di s elementi tutti eguali a k_1, l' $(r+1)$.º gruppo di s elementi tutti eguali a t, l' $(r+2)$.º gruppo ordinatamente degli elementi k_1, k_2, \dots, k_r . Analoghe regole si ottengono nei casi $\beta^*)$, $\gamma^*)$, $\delta^*)$.

Per l'osservazione dianzi fatta (*) a secondo che $t = 2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n}, -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, 2i \cos \frac{\pi}{n_1}$, si ha rispettivamente:

$$\left| \begin{array}{l} P_{i+1} + Q'_{i+1} \\ P_{i+3}^* + Q'^*_{i+3} \end{array} \right\} = 2 \cos \frac{s \pi}{m}, 2 \cos \frac{s \pi}{n}, 2 \cos \frac{s \pi}{m_1}, 2 \cos \frac{s \pi}{n_1},$$

e dalle $\beta^*)$ e $\delta^*)$ si ha pure:

$$\left| \begin{array}{l} P_{i+1} + Q'_{i+1} \\ P_{i+3}^* + Q'^*_{i+3} \end{array} \right\} = \sqrt{2}.$$

*) e ricordando che il modulo della somma del 1.º e 4.º coefficienti di una sostituzione rappresentatrice di movimento ellittico è eguale al doppio del coseno dell'angolo di rotazione.

Osserviamo infine che se nelle α) e γ) delle (16) a s, facciamo percorrere un sistema completo di resti rispetto ad m, n, m_1, n_1 , a secondo che t sia $2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n}, -2i \cos \frac{\pi}{m_1}, 2i \cos \frac{\pi}{n_1}$, si ottiene un gruppo finito, di ordine m, n, m_1, n_1 rispettivamente, di rotazioni attorno ad una geodetica c , che è uno spigolo della divisione Σ .

I movimenti parabolici di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$.

6.—Con metodo analogo a quello seguito per la ricerca delle sostituzioni ellittiche di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ ci proponiamo determinare le sostituzioni g paraboliche di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$. È chiaro che il punto V che g lascia fisso è necessariamente un vertice V della divisione Σ di S determinata da $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$. Proviamo subito che V è *improprio*, basterà mostrare per questo che attorno a un vertice V' proprio di Σ vi è un numero finito di celle. Poichè V' è proprio, ogni cella P di Σ di cui V' è un vertice, ha V' vertice di un angoloide triedro i cui diedi come vedremo nella 2.^a parte del lavoro, hanno per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$. Rappresentando S entro la sfera limite in modo che V' abbia per immagine il centro di essa, le immagini delle tre facce dell'angoloide di P che ha vertice in V' segnano sulla sfera limite un triangolo sferico che per un numero finito di riflessioni sui lati copre una e una sola volta la sfera limite, segue che con un numero finito di riflessioni sulle tre facce di P che concorrono in V' si riempie una e una sola volta lo spazio S attorno a V' , o ciò che è lo stesso attorno a V' vi è un numero finito di celle di Σ . Tra i movimenti quindi che lasciano fisso un vertice V' proprio di Σ non ve ne è nessuno parabolico, giacchè le potenze di esso porterebbero P in infinite altre celle congruenti aventi il vertice comune V' e ciò è impossibile. Ciò premesso il problema propostoci può enunciarsi nel seguente modo: *trovare i movimenti parabolici che lasciano fissi i vertici impropri di Σ , e noi cominceremo dal determinare quelli che lasciano fissi i vertici impropri della piramide fondamentale $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$. Il vertice quadrangolare V_0 di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$*

i cui diedri hanno per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ è improprio, i vertici impropri della base, che come vedremo nella seconda parte sono in numero di 1, 2, 4, sono di due specie, e con diedri la cui misura è $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$; o con diedri la cui misura è $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ e noi studieremo perciò il nostro problema in ognuno di questi 3 casi.

**a) Movimenti parabolici che lasciano fisso V_0
o i vertici di Σ equivalenti.**

I prodotti AB, CD la cui espressione analitica è la seguente

$$AB \sim z' = \begin{pmatrix} -1; 2 \cos \frac{\pi}{m} \\ 0; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1; -2 \cos \frac{\pi}{n} \\ 0; 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1; -2 \left(\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n} \right) \\ 1; 0 \end{pmatrix} z,$$

$$CD \sim z' = \begin{pmatrix} 1; -2i \cos \frac{\pi}{m_1} \\ 0; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1; -2i \cos \frac{\pi}{n_1} \\ 0; 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1; -2i \left(\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n} \right) \\ 0; 1 \end{pmatrix} z,$$

sono due movimenti parabolici che lasciano fisso V_0 .

Ponendo

$$\Omega = -2 \left(\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n} \right); \quad \Omega_1 = -2i \left(\cos \frac{\pi}{m_1} + \cos \frac{\pi}{n_1} \right),$$

i moduli di Ω e Ω_1 rappresentano geometricamente il doppio della distanza delle facce opposte A e B, C e D di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ ed osservando che

$$(AB)^h \sim z' = \begin{pmatrix} 1 & l\Omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z; \quad (CD)^h \sim z' = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \Omega_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

$$(AB)^l (CD)^h = (CD)^h (AB)^l \sim z' = \begin{pmatrix} 1 & l\Omega + l_1 \Omega_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

si ha che il gruppo di movimenti parabolici $(AB)^l (CD)^{l_1}$ con l e l_1 interi qualunque lascia fisso il vertice V_0 . Inversamente ogni movimento parabolico di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che lascia fisso V_0 si ottiene nel modo precedente, concluderemo quindi: *Tutti i movimenti parabolici che lasciano fisso V_0 formano un gruppo che ha per base i 2 movimenti:*

$$ABz' = \sim \begin{pmatrix} 1 & \Omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \quad ; \quad CD \sim z' = \begin{pmatrix} 1 & \Omega_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z,$$

e ogni movimento del gruppo ha la forma $(AB)^l (CD)^{l_1}$ con l e l_1 interi positivi nulli o negativi. Il trasformato di questo gruppo con un movimento generico di $G_{\sigma_1 \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ ci dà il più generale gruppo di movimenti parabolici che lascia fisso un vertice di Σ equivalente a V_0 .

Noi daremo di questi movimenti un'espressione analitica conforme alla (I) del paragrafo 4, di guisa che applicando i risultati ivi ottenuti si possano calcolare i coefficienti delle sostituzioni paraboliche rappresentatrici dei movimenti in esame. Si osservi che essendo

$$AB = (AE)(EB) = (AE)(BE)^{n-1} \sim z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{n-1} z,$$

$$CD = (CE)(DE)^{n_1-1} \sim z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i \cos \frac{\pi}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +1 & 2i \cos \frac{\pi}{n_1} \end{pmatrix}^{n_1-1} z,$$

il più generale movimento parabolico che lascia fisso V_0 è:

$$z' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{n-1} \right]^l \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i \cos \frac{\pi}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \cos \frac{\pi}{n_1} \end{pmatrix}^{n_1-1} \right]^{l_1} z,$$

o il suo inverso, e quindi il più generale movimento parabolico che lascia fisso V_0 o un vertice equivalente di Σ si esprime analiticamente:

$$\begin{aligned}
 & z' = \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & ; & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2 \end{pmatrix}^{m_{k_2}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \\
 & \left[\begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \right]^{l_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -2i \cos \frac{\pi}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 2i \cos \frac{\pi}{n_1} \end{pmatrix} \right]^{l_1} \\
 & \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r \end{pmatrix} z, \\
 (17) \quad & z' = \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r^0 \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & ; & k_{r-1}^0 \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_2 & ; & k_2^0 \end{pmatrix}^{m_{k_2}-1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1^0 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \\
 & \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \right]^{l_1} \\
 & \left[\begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -2i \cos \frac{\pi}{m_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 2i \cos \frac{\pi}{n_1} \end{pmatrix} \right]^{l_1} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_1 & ; & k_1^0 \end{pmatrix} \cdots \\
 & \cdots \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ \varepsilon_r & ; & k_r^0 \end{pmatrix} z;
 \end{aligned}$$

dove k_1, k_2, \dots, k_r e il loro coniugati e gli esponenti m_{k_i} hanno il solito significato, essendo l e l_1 interi positivi, nulli negativi arbitrari. Si noti che se l o l_1 sono negativi, le (17) non hanno propriamente la forma (I) del paragrafo 4, ma si riduce subito a questo caso osservando ad es. che

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \right]^{-l} = \\
 & \left[\begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \right]^l.
 \end{aligned}$$

b) **Movimenti parabolici che lasciano fissi, i vertici V della base di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ appartenenti a triedri i cui diedri hanno per misura**

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \text{ o vertici di } \Sigma \text{ equivalenti a V.}$$

Sia V un vertice della base di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ della specie considerata, senza alterare le generalità lo supporremo formato dalle facce A e C e dalla sfera E di guisa che

$$A \curvearrowright z' = \begin{pmatrix} -1; \sqrt{2} \\ 0; 1 \end{pmatrix} z_0; \quad C \curvearrowright z' = \begin{pmatrix} 1; i\sqrt{2} \\ 0; 1 \end{pmatrix} z_0; \quad E \curvearrowright z' = \begin{pmatrix} 0; 1 \\ 1; 0 \end{pmatrix} z_0.$$

Per determinare rapidamente il gruppo di movimenti parabolici che lascia fisso V e le sue sostituzioni generatrici facciamo le seguenti considerazioni. Si trasformi $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ e la divisione Σ con un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto a una sfera avente centro in V. Il triedro di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che ha vertice V si rappresenta con un prisma Π' retto, triangolare, isoscele di cui le facce A* e B* formanti il diedro retto corrispondono ai piani di riflessione A e B, e la terza faccia E* alla sfera di riflessione E. Tutti i triedri di Σ aventi il vertice in V hanno per rappresentazione i prismi ottenuti riflettendo Π' sulle sue facce. Tali prismi segnano sul piano limite la ben nota rete triangolare $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ e il gruppo di movimenti parabolici che porta un triangolo in un altro della rete si genera componendo le potenze ed esponenti intero positivo o negativo delle due traslazioni fondamentali permutabili.

$$A^*E^*C^*E^*, \quad C^*E^*A^*E^*. \quad (\text{fig. 2}).$$

Segue allora che *il gruppo di movimenti parabolici che lascia fisso V si genera componendo le potenze ad esponente positivo dei due movimenti parabolici:*

$$(AE)(CE) \curvearrowright z' = \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ 1; -i\sqrt{2} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} -i; i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}; i+2 \end{pmatrix} z,$$

$$(CE)(AE) \curvearrowright z' = \begin{pmatrix} 0; 1 \\ 1; -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; \sqrt{2} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} i; \sqrt{2} \\ i\sqrt{2}; -i+2 \end{pmatrix} z,$$

e dei movimenti parabolici inversi:

$$(AECE)^{-1} = (EC)(EA) = (CE)^3(AE)^3 \sim z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^3 z,$$

$$(CEAE)^{-1} = (EA)(EC) = (AE)^3(CE)^3 \sim z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}^3 z,$$

di guisa che con analoghe considerazioni delle precedenti concludiamo:

Il più generale movimento parabolico di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che lasci fisso V o un vertice di Σ equivalente ha una delle seguenti espressioni analitiche:

$$(18) \left\{ \begin{aligned} z' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}^\rho \right]^l \\ & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}^{\rho_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{\rho_1} \right]^{l_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix} z, \\ z' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}^\rho \right]^l \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}^{\rho_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{\rho_1} \right]^{l_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_2 & k_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix} z; \end{aligned} \right.$$

ove ρ e ρ_1 sono una disposizione con ripetizione dei numeri 1, 3; l e l_1 interi positivi arbitrari e k_1, k_2, \dots, k_r i loro coniugati, ε_r gli esponenti m_{k_r} hanno il solito significato. Si osservi che le (18) hanno la forma (I) del paragrafo 4. Si noti ancora che se oltre V la base di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ avesse altri vertici della stessa specie, per ognuno di essi il corrispondente gruppo di sostituzioni paraboliche di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che lo lascia fermo si calcola in modo analogo, sostituendo ad A e C le 2 facce che con E formano il triedro della specie considerata.

c) **Movimenti parabolici che lasciano fissi, i vertici V' della base di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ appartenenti a triedri i cui diedri hanno per misura**

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \text{ o vertici di } \Sigma \text{ equivalenti a } V'.$$

Sia V' un vertice della base di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ della specie considerata, che senza alterare le generalità supporremo formato dalle facce A e C e dalla sfera E , si abbia cioè:

$$A \sim z' = \begin{pmatrix} -1 & ; & 0 \\ 0 & ; & 1 \end{pmatrix} z_0 ; C \sim z' = \begin{pmatrix} 1 & ; & i\sqrt{3} \\ 0 & ; & 1 \end{pmatrix} z_0 ; E \sim z' = \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & 0 \end{pmatrix} z_0.$$

Si trasformi al solito $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ e la divisione Σ con un'inversione per raggi vettori reciproci rispetto a una sfera avente centro in V' . Il triedro di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che ha per vertice V' si rappresenta con una prisma Π' retto triangolare i cui diedri hanno per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ e indicheremo le immagini di A, C, E rispettivamente con A^*, C^*, E^* . Tutti i triedri di Σ aventi il vertice V hanno per immagine i prismi ottenuti riflettendo Π' sulle sue facce. Si ottiene così una rete di prismi che segna sul piano limite la rete triangolare $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, e il gruppo di movimenti parabolici che porta un triangolo in un altro, della rete si genera con le potenze ad esponente intero, positivo nullo o negativo, delle due traslazioni fondamentali permutabili: (fig. 3)

$$(A^*E^*C^*)^2, (C^*A^*E^*)^2,$$

Segue allora che il gruppo di movimenti parabolici che lascia fisso V' si genera con le potenze ad esponente positivo dei due movimenti parabolici:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} L &= (AEC)^2 = (AE)(CE)(EA)(EC) \sim z' = \begin{pmatrix} 2 - i\sqrt{3} & ; & -2 \\ -(1 + i\sqrt{3}) & ; & i\sqrt{3} \end{pmatrix} z = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}^5 z, \\ M &= (CAE)^2 = (CE)(EA)(EC)(AE) \sim z' = \begin{pmatrix} -1 & ; & 1 + i\sqrt{3} \\ -1 + i\sqrt{3} & ; & 3 \end{pmatrix} z = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ +1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix} z, \end{aligned} \right.$$

e con le potenze ad esponente positivo dei movimenti parabolici inversi:

$$(19^*) \left\{ \begin{aligned} L^{-1} &= (AEC)^{-2} \sim z = \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix}^2 z, \\ M^{-1} &= (CAE)^{-2} \sim z = \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ 1 & ; & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}^5 z. \end{aligned} \right.$$

Per le (18) e (19*), per $L^{\pm l} M^{\pm l_1}$ si hanno espressioni analitiche del tipo (I) del paragrafo 4, talmentechè si conclude:

Il più generale movimento parabolico di $G_{\sigma_1 \tau; i \sigma_1, i \tau_1}^0$ che lasci fisso V' o un vertice di Σ equivalente ha una delle seguenti espressioni anaitiche:

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} L^{\pm l} M^{\pm l_1} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r \end{pmatrix} z, \\ z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r^0 \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_{r-1} & k_{r-1}^0 \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1^0 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L^{\pm l} M^{\pm l_1} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_1 & k_1^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_2 & k_2^0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r & k_r^0 \end{pmatrix} z; \end{array} \right.$$

ove l e l_1 sono interi arbitrari, e k_1, k_2, \dots, k_r , i loro coniugati, ε_i, m_{k_i} , hanno il solito significato. Anche in questo caso si ripetono parola a parola le osservazioni fatte in fine al caso b).

Da quanto si è detto nei casi a), b), c) concludiamo il seguente teorema:

Per ogni vertice improprio V di Σ esiste un sotto gruppo di movimenti parabolici di $G_{\sigma_1 \tau; i \sigma_1, i \tau_1}^0$ che lascia fisso V e che si genera con le potenze ad esponente positivo e negativo di due movimenti parabolici permutabili tra loro.

NOTA I.^a

Generazione aritmetica dei gruppi di sostituzioni lineari propriamente discontinui aventi per campo fondamentale un triangolo con un vertice improprio.

1. — Sia T un triangolo del semipiano iperbolico S che abbia per vertice V_∞ improprio il punto all'infinito di S e ne operi per riflessione sui lati una divisione regolare. I lati a, b , di T concorrenti in V_∞ sono due rette normali alla retta limite l . Il terzo lato di T è un semicerchio c con il centro O su l . Supporremo che c abbia raggio 1, chiameremo A e B i punti che c ha in comune con l , A' e B' i punti $(a, l), (c, l)$. A' e B' sono interni al segmento AB, ed è lecito supporre che A, A', B', B si seguano. Prenderemo al solito la retta l come asse delle ascisse ξ (\overline{BA} direzione positiva), e per asse η delle ordinate positive il raggio normale ad l nel punto O. Chiamando con $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$ gli angoli $\widehat{ac}, \widehat{bc}$, m e n sono per il teorema di Poincarè interi ≥ 2 . Viceversa se m e n sono interi arbitrari ≥ 2 , esiste sempre un triangolo con gli angoli $0, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$, che opera la divisione regolare di S. Osserviamo che essendo gli angoli $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{m}$, retti o acuti i punti B' o, A' si seguono, noi porremo: $\overline{OA'} = \sigma$; $\overline{OB'} = \tau$ e quindi $\sigma = \cos \frac{\pi}{m}$, $\tau = -\cos \frac{\pi}{n}$. (v. fig.^a 1.^a Nota 1.^a).

Il triangolo T è pertanto il triangolo fondamentale del gruppo $G^0_{\sigma, \tau}$ generato con le due riflessioni sulle rette:

$$\xi = \sigma; \quad \xi = \tau,$$

e la riflessione sulla sfera:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

che si esprimono analiticamente con le sostituzioni:

$$z' = \begin{pmatrix} -1 & 2\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} -1 & 2\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0.$$

Con analoga dimostrazione di quella tenuta nel paragrafo 3 della 1.^a parte si trova che il sottogruppo $G_{\sigma, \tau}$ delle sostituzioni unimodulari di 1.^a specie di $G_{\sigma, \tau}^0$ si genera con le due sostituzioni ellittiche a periodo m e n :

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\sigma \end{pmatrix} z; \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\tau \end{pmatrix} z;$$

e che il più generale movimento di 1.^a specie di $G_{\sigma, \tau}^0$ ha per espressione analitica:

$$(I) \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_{i+1} \end{pmatrix} z;$$

ove k_1, k_2, \dots, k_{i+1} sono una disposizione con ripetizione di ordine $i+1$ dei numeri $2\sigma = 2 \cos \frac{\pi}{m}$, $+2\tau = -2 \cos \frac{\pi}{n}$, avendosi poi:

$$(II) \quad G_{\sigma, \tau}^0 = \begin{cases} G_{\sigma, \tau}, \\ G_{\sigma, \tau} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0. \end{cases}$$

Esprimendo il movimento (I) con la sostituzione lineare:

$$z' = \frac{P_{i+1} z + Q_{i+1}}{P'_{i+1} z + Q'_{i+1}},$$

per i risultati del paragrafo 4 della 1.^a parte si hanno per $P_{i+1}, Q_{i+1}, P'_{i+1}, Q'_{i+1}$ le seguenti espressioni analitiche:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & P_1 = 0, \\
 (1) \quad & P_{i+1} = \begin{vmatrix}
 -1; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 -1; & k_2; & -1; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 0; & -1; & k_3; & -1; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 0; & 0; & -1; & k_4; & -1; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & -1; & k_{i-2}; & -1; & 0 \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & -1; & k_{i-1}; & -1 \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & -1; & k_i
 \end{vmatrix} ; \\
 & \dots \\
 (2) \quad & P'_{i+1} = \begin{vmatrix}
 -1; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 -1; & k_2; & -1; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 0; & -1; & k_3; & -1; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 0; & 0; & -1; & k_4; & -1; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & -1; & k_{i-2}; & -1; & 0 \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & -1; & k_{i-1}; & -1 \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & -1; & k_i \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & -1; k_{i+1}
 \end{vmatrix} \\
 & \dots \\
 & Q_1 = 1, \\
 (3) \quad & Q_{i+1} = \begin{vmatrix}
 k_1; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 0; & k_2 - \frac{1}{k_1}; & -1; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 0; & -1; & k_3; & -1; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 0; & 0; & -1; & k_4; & -1; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & -1; & k_{i-2}; & -1; & 0 \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & -1; & k_{i-1}; & -1 \\
 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & -1; & k_i
 \end{vmatrix}
 \end{aligned}
 \right\}
 \end{aligned}$$

$$(4) Q'_{i+1} = \begin{vmatrix} k_1; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & k_2 - \frac{1}{k_1}; & -1; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & -1; & k_3; & -1; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ \mathbf{0}; & 0; & -1; & k_4; & -1; & \dots; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & -1; & k_{i-2}; & -1; & 0; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & -1; & k_{i-1}; & -1; & 0 \\ (; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & -1; & k_i; & -1 \\ 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0; & -1; & k_{i+1} \end{vmatrix}.$$

2. — In questo paragrafo ci proponiamo dare gli sviluppi dei determinanti (1), (2), (3), e (4). Per questo stabiliamo le seguenti definizioni: *Dati n numeri k_1, k_2, \dots, k_n in un dato ordine, col simbolo $s_{i+h,n}(k_{i+1}; k_{i+2}; \dots; k_{i+h})$, con $i+h \leq n$, si intende la somma di tutti i prodotti $k_{r_1} k_{r_2} \dots k_{r_h}$ di fattori che possono formarsi con gli $n-i$ numeri $k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_n$ tali che gli indici r_1, r_2, \dots, r_h soddisfino alle relazioni:*

a)
$$r_1 < r_2 < r_3 \dots < r_h;$$

e alle altre:

b)
$$\begin{cases} r_1 \equiv r_3 \equiv r_5 \equiv \dots \equiv i+1, \pmod{2}, \\ r_2 \equiv r_4 \equiv r_6 \equiv \dots \equiv i, \pmod{2}. \end{cases}$$

Se $i+h > n$ converremo sia $S_{i+h,n}(k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_{i+h}) = 0$.

Segue ad esempio:

$$s_{1,n}(k_1) = k_1 + k_3 + k_5 + \dots,$$

$$s_{2,n}(k_2) = k_2 + k_4 + k_6 + \dots$$

Dalle definizioni date segue:

(5)
$$s_{i+1,n}(k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_{i+h}) = s_{i+1,n-i}(k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_{i+h}).$$

Si dimostrano pure subito le seguenti proprietà:

$$(6) \quad s_{1,2n+1}(k_1, k_2, \dots, k_{2i+1}) = s_{1,2n+2}(k_1, k_2, \dots, k_{2i+1}),$$

$$(7) \quad s_{1,2n}(k_1, k_2, \dots, k_{2i}) = s_{1,2n+1}(k_1, k_2, \dots, k_{2i}).$$

Per provare ad es. la (6) si osservi che i prodotti appartenenti alla sommatoria $s_{1,2n+2}(k_1, k_2, \dots, k_{2i+1})$, $k_{r_1} k_{r_2} \dots k_{r_{2i+1}}$ debbono trarsi dagli elementi $k_1, k_2, \dots, k_{2n+2}$, ma per le (b) il fattore k_{2n+2} non può figurare in nessuno di tali prodotti, onde i prodotti $k_{r_1} k_{r_2} \dots k_{r_{2i+1}}$ si formano con gli elementi $k_1, k_2, \dots, k_{2n+1}$ come volevasi provare. Analoga dimostrazione si ripete per provare la (7). Segue ancora dalle definizioni:

$$(8) \quad s_{1,n}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = k_1 k_2 k_3 \dots k_n,$$

$$(9) \quad k_{n+1} s_{1,n}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = s_{1,n+1}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, k_{n+1}).$$

Un'altra proprietà dei simboli $s_{i,n}$ è espressa dalla seguente identità:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{1,n}(k_1, k_2, \dots, k_r) + k_{n+1} s_{1,n}(k_1, k_2, \dots, k_{r-1}) = s_{1,n+1}(k_1, k_2, \dots, k_r), \\ \text{nell'ipotesi:} \\ r < n; n + 1 \equiv r, (\text{mod. } 2). \end{array} \right.$$

La (10) si dimostra nel seguente modo. Uno qualunque dei prodotti di cui è formata la sommatoria $s_{1,n+1}(k_1, k_2, \dots, k_r)$ può o no contenere k_{n+1} . La somma di quelli che non lo contengono è $s_{1,n}(k_1, k_2, \dots, k_r)$, ed inversamente $s_{1,n}(k_1, k_2, \dots, k_r)$ fa parte di $s_{1,n+1}(k_1, k_2, \dots, k_r)$ mentre la somma di quei termini che contengono k_{n+1} si esprime con $k_{n+1} s_{1,n}(k_1, k_2, \dots, k_{r-1})$ ed inversamente, risulta quindi la (10) dimostrata.

Si osservi infine che cambiando nel prodotto $k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_r}$; k_{i_1} in εk_{i_1} il prodotto stesso si cambia in $\varepsilon' k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_r}$, quindi è evidente l'identità:

$$(11) \quad s_{1,n}(k_1 \varepsilon, k_2 \varepsilon, \dots, k_r \varepsilon) = \varepsilon' s_{1,n}(k_1, k_2, \dots, k_r).$$

Siamo ora in grado di dare gli sviluppi richiesti dei determinanti (1), (2), (3), (4). Per questo cominciamo col provare le seguenti identità:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} (-1)^{n-1} P_{2n+1} &= -s_{1,2n+1}(k_2) + s_{1,2n+1}(k_2, k_3, k_4) - s_{1,2n+1}(k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) + \dots \\ &\dots + (-1)^n s_{1,2n+1}(k_2, k_3, \dots, k_{2n}) ; \\ (-1)^n P_{2n+2} &= -1 + s_{1,2n+2}(k_2, k_3) - s_{1,2n+2}(k_2, k_3, k_4, k_5) + \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} s_{1,2n+2}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+1}). \end{aligned} \right.$$

Le (12) per $n=0$ sono vere, avendosi $P_1 = 0, P_2 = -1$. Sono anche vere per $n=1$ avendosi $P_3 = -k_2, P_4 = 1 - k_2 k_3$; dimostreremo le (12) col principio di induzione completa, provando che se sono vere per n , sono anche vere per $n + 1$. Per questo, osserviamo che la prima delle eguaglianze (8) del paragrafo 4 della 1.^a parte, da cui discende la (1) può nel nostro caso scriversi:

$$P_{2n+3} = k_{2n+2} P_{2n+2} - P_{2n+1} ,$$

ovvero:

$$(-1)^n P_{2n+3} = k_{2n+2} (-1)^n P_{2n+2} + (-1)^{n-1} P_{2n+1} ,$$

ossia, in conseguenza delle (12) che abbiamo supposto vere:

$$\begin{aligned} (-1)^n P_{2n+3} &= -[s_{1,2n+1}(k_2) + k_{2n+2}] + \\ &+ [s_{1,2n+1}(k_2, k_3, k_4) + k_{2n+2} s_{1,2n+2}(k_2, k_3)] - \\ &- [s_{1,2n+1}(k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) + k_{2n+2} s_{1,2n+2}(k_2, k_3, k_4, k_5)] + \\ &+ \dots + \\ &+ (-1)^n [s_{1,2n+1}(k_2, k_3, \dots, k_{2n}) + k_{2n+2} s_{1,2n+2}(k_2, k_3, \dots, k_{2n-1})] + \\ &+ (-1)^{n+1} k_{2n+2} s_{1,2n+2}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+1}) ; \end{aligned}$$

ovvero, tenendo conto delle proprietà (6), (9), (10) si ha:

$$\begin{aligned} (-1)^n P_{2n+3} &= -s_{1,2n+2}(k_2) + s_{1,2n+2}(k_2, k_3, k_4) - s_{1,2n+2}(k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) + \\ &+ \dots + (-1)^n s_{1,2n+2}(k_2, k_3, \dots, k_{2n}) + (-1)^{n+1} s_{1,2n+2}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+2}) ; \end{aligned}$$

e ancora per la (7)

$$(13) \quad (-1)^n P_{2n+3} = -s_{1,2n+3}(k_2) + s_{1,2n+3}(k_2, k_3, k_4) - s_{1,2n+3}(k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) + \dots + (-1)^n s_{1,2n+3}(k_2, k_3, \dots, k_{2n}) + (-1)^{n+1} s_{1,2n+3}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+2}),$$

che è appunto quello che volevasi provare. Ci resta ora a dimostrare che anche la seconda delle identità (12) è vera cambiando n in $n + 1$. Dalla 1.^a relazione (8) del paragrafo 4 della 1.^a parte si ha ancora:

$$(-1)^{n+1} P_{2n+4} = k_{2n+3} (-1)^{n+1} P_{2n+3} + (-1)^n P_{2n+2},$$

e tenendo conto della seconda delle (12), che abbiamo supposto vera, e della (13) che abbiamo dimostrata, si ha:

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} P_{2n+4} = & -1 + [s_{1,2n+2}(k_2, k_3) + k_{2n+3} s_{1,2n+3}(k_2)] - \\ & - [s_{1,2n+2}(k_2, k_3, k_4, k_5) + k_{2n+3} s_{1,2n+3}(k_2, k_3, k_4)] + \\ & + \dots + (-1)^{n+1} [s_{1,2n+2}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+1}) + k_{2n+3} s_{1,2n+3}(k_2, k_3, \dots, k_{2n})] + \\ & + (-1)^{n+2} k_{2n+3} s_{1,2n+3}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+2}); \end{aligned}$$

ovvero tenendo conto delle proprietà (7), (9), (10) si ha:

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} P_{2n+4} = & -1 + s_{1,2n+3}(k_2, k_3) - s_{1,2n+3}(k_2, k_3, k_4, k_5) + \\ & + \dots + (-1)^{n+1} s_{1,2n+3}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+1}) + (-1)^{n+2} s_{1,2n+3}(k_2, k_3, \dots, k_{2n+3}); \end{aligned}$$

ovvero per la (6) si ha la seconda delle (12) cambiandovi n in $n + 1$, *c. v. p.*

In modo analogo, tenendo conto delle (8*) del paragrafo 4 della 1.^a parte si prova che:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^n Q_{2n+1} = & -1 + s_{1,2n+1}(k_1, k_2) - s_{1,2n+1}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \dots + \\ & + (-1)^{n+1} s_{1,2n+1}(k_1, k_2, \dots, k_{2n}), \\ (-1)^n Q_{2n+2} = & s_{1,2n+2}(k_1) - s_{1,2n+2}(k_1, k_2, k_3) + \dots + \\ & + (-1)^n s_{1,2n+2}(k_1, k_2, \dots, k_{2n+1}). \end{aligned} \right.$$

Tenendo ancora conto che le (3) e (4) si deducono dalle relazioni:

$$P'_i = P_{i+1} \quad ; \quad Q'_i = Q_{i+1},$$

si ha il seguente teorema:

I movimenti di 1.^a specie del gruppo $G^0_{\sigma, \tau}$ hanno per espressione analitica:

$$(15) z' = \frac{[s_{1,2n+1}(k_2) - s_{1,2n+1}(k_2, k_3, k_4) + \dots]z + [1 - s_{1,2n+1}(k_1 k_2) + s_{1,2n+1}(k_1 k_2 k_3 k_4) - \dots]}{[-1 + s_{1,2n+1}(k_2, k_3) - s_{1,2n+1}(k_2, k_3, k_4, k_5) + \dots]z + [s_{1,2n+1}(k_1) - s_{1,2n+1}(k_1 k_2, k_3) + \dots]},$$

ove $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{2n+1}$ sono una disposizione con ripetizione di ordine $2n+1$ dei numeri $2\sigma = 2 \cos \frac{\pi}{m}$, $2\tau = -2 \cos \frac{\pi}{n}$, ovvero l'altra:

$$(15^*) z' = \frac{[1 - s_{1,2n+2}(k_2, k_3) + s_{1,2n+2}(k_2, k_3, k_4, k_5) - \dots]z + [-s_{1,2n+2}(k_1) + s_{1,2n+2}(k_1, k_2, k_3) - \dots]}{[s_{1,2n+2}(k_2) - s_{1,2n+2}(k_2, k_3, k_4) + \dots]z + [1 - s_{1,2n+2}(k_1, k_2) + s_{1,2n+2}(k_1, k_2, k_3, k_4) - \dots]},$$

ove $k_1, k_2, \dots, k_{2n+2}$ sono una disposizione con ripetizione di ordine $2n+2$ dei numeri $2 \cos \frac{\pi}{m}$, $-2 \cos \frac{\pi}{n}$.

Richiamando la (II) facilmente si trovano per i movimenti di 2.^a specie di $G^0_{\sigma, \tau}$ espressioni analitiche analoghe alle (15) e (15*), che per brevità si omettono.

Tenendo infine conto che le (15) e (15*) sono sostituzioni lineari unimodulari, cambiando nei coefficienti k_i in εk_i , tenendo ancora conto della (11) e del principio di identità delle funzioni razionali intere si ha per le sommatorie s la seguente identità:

$$(16) \left\{ \begin{aligned} & s_{1,m}(k_1) s_{1,m}(k_2, k_3, \dots, k_{2r}) + s_{1,m}(k_1, k_2, k_3) s_{1,m}(k_2, k_3, \dots, k_{2r-2}) + \dots + \\ & + s_{1,m}(k_1, k_2, \dots, k_{2r-1}) s_{1,m}(k_2) = \\ & = s_{1,m}(k_1, k_2, \dots, k_{2r}) + s_{1,m}(k_1, k_2, \dots, k_{2r-2}) s_{1,m}(k_2, k_3) + \\ & + s_{1,m}(k_1; k_2, \dots, k_{2r-4}) s_{1,m}(k_2, k_3, k_4, k_5) + \dots + s_{1,m}(k_2, k_3, \dots, k_{2r+1}). \end{aligned} \right.$$

3) — Considerazioni analoghe di quelle fatte nei paragrafi 5 e 6 della 1.^a parte ci permettono determinare infine le sostituzioni ellittiche e paraboliche di $G_{\sigma, \tau}$. Si chiami V_1 il vertice (ac) del triangolo T , V_2 il vertice (bc). Le rotazioni a periodo m e n ,

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}^e z \quad ; \quad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{e_1}$$

con ρ e ρ_1 interi sono tutte e solo le rotazioni del gruppo che lasciano fissi rispettivamente V_1, V_2 , onde le più generali rotazioni del gruppo che lasciano fissi V_1 e V_2 o vertici equivalenti hanno l'espressione analitica:

$$\begin{aligned} z' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}^e \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix} z, \\ z' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{e_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix} z, \\ (17) \quad z' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix} z, \\ z' &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{e_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k_r \end{pmatrix} z; \end{aligned}$$

ove k_1, k_2, \dots, k_r sono una disposizione con ripetizione di ordine r dei numeri $2 \cos \frac{\pi}{m}, -2 \cos \frac{\pi}{n}$, ed è:

$$m_{k_i} = m \text{ se } k_i = 2 \cos \frac{\pi}{m},$$

$$m_{k_i} = n \text{ se } k_i = -2 \cos \frac{\pi}{n},$$

essendo ρ e ρ_1 interi positivi arbitrari.

Così pure le potenze ad esponente positivo della sostituzione parabolica:

$$\begin{aligned} AB \sim z' &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 & -2(\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{n-1} z, \end{aligned}$$

e le potenze ad esponente positivo della sostituzione parabolica inversa;

$$\begin{aligned} BA \sim z' &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 & 2(\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & +2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}^{m-1} z, \end{aligned}$$

sono tutte e sole le sostituzioni paraboliche di $G_{\sigma, r}^0$ che lasciano fisso V_∞ , onde i più generali movimenti parabolici di $G_{\sigma, r}$ che lasciano fisso V_∞ o vertice equivalenti hanno per espressione analitica:

$$\begin{aligned}
 z' &= \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \\
 &\left[\begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{n-1} \right]^l \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix} z; \\
 z' &= \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ 1; 0 \end{pmatrix} \\
 &\left[\begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}^{n-1} \right]^l \begin{pmatrix} 0; 1 \\ +1; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix} z; \\
 (18) \quad z' &= \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \\
 &\left[\begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}^{m-1} \right]^{l_1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix} z; \\
 z' &= \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix}^{m_{k_r}-1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_{r-1} \end{pmatrix}^{m_{k_{r-1}}-1} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix}^{m_{k_1}-1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ 1; 0 \end{pmatrix} \\
 &\left[\begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; -2 \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; 2 \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}^{m-1} \right]^{l_1} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ 1; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0; 1 \\ -1; k_r \end{pmatrix} z;
 \end{aligned}$$

avendo $k_1, k_2, \dots, k_r, m_{k_i}$ il solito significato ed essendo l e l_1 interi positivi arbitrari.

PARTE 2.^a

**Le 33 divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari
e dei gruppi congruenziali corrispondenti a 14 divisioni.**

CAPITOLO 1.^o

**Le 17 divisioni dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari
con i vertici della base propri.**

1. — Sia V_0 il vertice della piramide $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ che rappresenteremo in S come è indicato nel paragrafo 2, della 1.^a parte; V_1, V_2, V_3, V_4 i vertici propri della base, chiamando con $\frac{\pi}{a_{i,k}}$ la misura del diedro $V_i V_k$ è $a_{i,k}$, un numero intero maggiore o eguale a 2, $a_{i,k} = a_{k,i}$, e per la dimostrazione del paragrafo 1 della prima parte:

$$a_{0,1} = a_{0,2} = a_{0,3} = a_{0,4} = 2.$$

Tenendo conto che i vertici V_1, V_2, V_3, V_4 sono propri, i numeri $a_{i,k}$ soddisfanno le disequaglianze:

$$a) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{4,1}} > \frac{1}{2}, b) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{2,3}} > \frac{1}{2}; c) \frac{1}{a_{2,3}} + \frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{2}; d) \frac{1}{a_{3,4}} + \frac{1}{a_{4,1}} > \frac{1}{2}.$$

Si osservi che i numeri $a_{i,k}, a_{l,m}$, dove i, k, l, m sono una permutazione dei numeri 1, 2, 3, 4, non possono essere entrambi eguali a due, perchè per rispetto alla sfera che rappresenta la base della piramide, le due facce opposte $V_0 V_i V_k, V_0 V_l V_m$ dovrebbero essere ortogonali e inoltre sono parallele tra loro, che è impossibile. Per trovare tutte le soluzioni del sistema a), b), c), d) alle quali corrispondono piramidi $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ geometricamente distinte procederemo nel seguente modo.

Supporremo dapprima che uno almeno dei diedri $V_1 V_2, V_2 V_3, V_3 V_4, V_4 V_1$ sia retto, e senza alterare le generalità sia $a_{1,2} = 2$. In questo caso le a) e b) qualunque siano i valori attribuiti ad $a_{1,4}, a_{2,3}$ sono soddisfatte. Per l'osservazione fatta, essendo $a_{1,2} = 2$ è $2 < a_{3,4}$, D'altra parte è $a_{3,4} < 6$, perchè supponendo $a_{3,4} \geq 6$ per le c) e d) sarebbe $a_{1,4} = a_{2,3} = 2$, che si è visto impossibile, quindi nell'ipotesi $a_{1,2} = 2$ per $a_{3,4}$ si hanno le limitazioni: $2 < a_{3,4} < 6$. Supponendo ancora, come è lecito $a_{2,3} \leq a_{1,4}$ un semplice esame ci mostra che le soluzioni del sistema a), b), c), d) sono nel nostro caso:

I)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 2; a_{1,4} = 3;$
II)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 2; a_{1,4} = 4;$
III)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 2; a_{1,4} = 5;$
IV)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 3;$
V)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 4;$
VI)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 5;$
VII)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 4; a_{1,4} = 4;$
VIII)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 4; a_{1,4} = 5;$
IX)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 5; a_{1,4} = 5;$
α)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 4; a_{2,3} = 2; a_{1,4} = 3;$
X)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 4; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 3;$
β)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 5; a_{2,3} = 2; a_{1,4} = 3;$
XI)	$a_{1,2} = 2; a_{3,4} = 5; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 3.$

Nessuno dei diedri della base sia ora retto, cioè si abbia $a_{i,k} > 2$. Dalle a), b), c), d) segue subito che almeno due diedri opposti della base di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ hanno per misura $\frac{\pi}{3}$. Siccome non può aversi sempre $a_{i,k} \geq 4$, qualunque siano i, k , perchè le a), b), c), d) sarebbero in questo caso impossibili, è lecito

supporre che uno almeno dei diedri $a_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$) abbia per misura $\frac{\pi}{3}$ sia ad esempio $a_{1,2} = 3$. Se $a_{3,4} > 3$ allora dalla c) e d) segue $a_{1,4} = a_{2,3} = 3$
c. v. d.

Supponendo quindi $a_{1,2} = a_{3,4} = 3$; e come prima $a_{2,3} \leq a_{1,4}$ le soluzioni del sistema a), b), c), d) sono:

- XII) $a_{1,2} = 3; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 3;$
- XIII) $a_{1,2} = 3; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 4;$
- XIV) $a_{1,2} = 3; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 3; a_{1,4} = 5;$
- XV) $a_{1,2} = 3; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 4; a_{1,4} = 4;$
- XVI) $a_{1,2} = 3; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 4; a_{1,4} = 5;$
- XVII) $a_{1,2} = 3; a_{3,4} = 3; a_{2,3} = 5; a_{1,4} = 5.$

Ai casi I), II), ..., XVII) corrispondono effettivamente 17 piramidi, e le costruzioni geometriche per ottenerle ce ne mostrano l'univocità. I casi α) e β) sono sostanzialmente identici ai casi II) e III), concludiamo quindi: *Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari con i vertici della base propri sono 17.* La tavola I.^a ci dà le tracce delle facce di tali piramidi sul piano improprio. Nei paragrafi seguenti studieremo fra i gruppi corrispondenti alle 17 visioni trovate, quelli che si presentano come gruppi congruenziali.

I gruppi $G_{0; \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$, $G^0_{0; \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$.

2. — In una memoria del Prof. L. Bianchi (Mathematischen Annalen XL. Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari) è dimostrato che il gruppo G^0 di sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1, i,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ ampliato con la riflessione $z' = z_0$ ha per poliedro fondamentale P la porzione del prisma retto triangolare:

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \xi = \eta,$$

esterna alla sfera:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Si associ a P il simmetrico P' rispetto al piano $\xi = \eta$ si ottiene la *piramide* $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ che si vede subito essere la *piramide fondamentale* del gruppo G di *movimenti* di 1.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1, i,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, interi del campo $(1, i)$ cioè tale gruppo è un $G_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$.

Infatti ogni punto A di S o è equivalente a un punto di P per un movimento di 1.^a specie di G^0 e quindi di G, o lo è per un movimento di 2.^a specie, nel qual caso con un movimento di 1.^a specie di G^0 , e quindi di G, è equivalente a un punto di P', (perchè da P si passa a P' con la riflessione $z' = iz_0$). È evidente che due punti interni a $P + P'$ non sono equivalenti rispetto a G, resta perciò provato che G ha per piramide fondamentale $P + P' = P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$

cioè G è un $G_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ c. v. p.

Esprimeremo ora aritmeticamente i movimenti del gruppo $G_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ dimostrando che $G_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}^0$ è il gruppo G^0 di sostituzioni di 1.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ ampliata con la riflessione:

$$z' = z_0.$$

Le sostituzioni ellittiche di G^0 si hanno per $\alpha + \delta = 0, \pm 1$, cioè hanno il periodo 2 o 3. Le riflessioni di G^0 corrispondono alle sostituzioni:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + i b}{i c z_0 + (a_1 - i a_2)},$$

$$(1) \quad a_1^2 + a_2^2 + b c = 1.$$

I piani di riflessione si hanno per $c=0$, quindi $a_1 = \pm 1, a_2 = 0; a_1 = 0, a_2 = \pm 1$ e la loro equazione è perciò:

$$\xi = \frac{k}{2}, \quad \eta = \frac{l}{2},$$

con k, l interi arbitrari. Le sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(2) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c} \right)^2 + z_2^2 = \frac{1}{c^2},$$

e ad esse appartiene la sfera:

$$(I) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

La porzione del prisma: (F. 1 tavola 1.^a).

$$\xi = 0; \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \eta = \frac{1}{2},$$

esterna alla sfera (I) forma la piramide $P_{o, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{2}}$ che è la piramide fondamentale del gruppo G^0 . Infatti nessun piano di riflessione di G^0 penetra in $P_{o, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{2}}$ e nessuna sfera di riflessione attraversa $P_{o, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{2}}$ lungo uno spigolo. Invertici $P_{o, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{2}}$ sono:

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); V_2 \equiv (0, 0, 1); V_3 \equiv \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); V_0 = \infty;$$

e nessuno di essi è interno alle sfere (2). Infatti se V_1 fosse interno a una sfera (2) dovrebbe aversi:

$$(c - 2a_2)^2 + 4a_1^2 + 3c^2 < 4,$$

da cui $c=1, a_1=0$, e perciò $1 - 2a_2=0$ che è assurdo. Per V_2 dovrebbe aversi

$$a_1^2 + a_2^2 < 0.$$

che è assurda; per V_3 dovrebbe aversi:

$$4 a_2^2 + (c + 2 a_1)^2 + 3 c^2 < 4,$$

e perciò $c=1$, $a_2=0$, $1+2a_1=0$ che è assurda. Infine per V_4 dovrebbe aversi:

$$(c - 2a_2)^2 + (c + 2a_1)^2 + 2c^2 < 4,$$

dalla qual essendo $c = 1$ dovrebbe aversi o $1 - 2a_2 = 0$, oppure $1 - 2a_1 = 0$ ed esse sono assurde.

Esiste un solo movimento, oltre l'identità, che riporta $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ in sè, esso è la riflessione $z' = i z_0$ che avendo il determinante i non è di G^0 . Resta pertanto provato che G^0 è il gruppo $G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$.

I gruppi congruenziali $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$, $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ e alcuni lemmi sulla composizione delle sostituzioni lineari sopra una variabile.

3) Se alla piramide $P_{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{i}{2}}$ fondamentale del gruppo $G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ associamo la simmetrica rispetto al piano $\xi = 0$, si ottiene la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ che è la cella fondamentale del gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ formato dalle sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, interi del campo $(1, i)$.

Per rappresentare sotto forma congruenziale il gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ premettiamo 6 lemmi sul prodotto di due sostituzioni lineari sopra una variabile che ci saranno utili anche nel seguito del lavoro.

Lemma 1.° Date due sostituzioni lineari $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ i cui coefficienti siano interi di un certo campo algebrico che soddisfano in esso le congruenze;

(I) $a + d \equiv b \equiv c, \pmod{2}$; $\alpha + \delta \equiv \beta \equiv \gamma, \pmod{2}$;
 anche i coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano ad analoghe congruenze
 Infatti è:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & b\alpha + d\beta \\ a\gamma + c\delta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix}$$

Proviamo subito che è:

$$b\alpha + d\beta \equiv a\gamma + c\delta, \pmod{2},$$

oppure tenendo conto delle ipotesi:

$$c\alpha + d\gamma \equiv a\gamma + c\delta, \pmod{2},$$

ovvero:

$$c(\alpha + \delta) + \gamma(a + d) \equiv 0, \pmod{2},$$

tenendo ancora conto dell'ipotesi:

$$2c\gamma \equiv 0, \pmod{2},$$

che è vera.

Proveremo ora che la somma del 1.^o e 4.^o coefficiente della sostituzione prodotto è congrua al 3.^o coefficiente per rispetto al modulo 2, cioè basterà provare che:

$$a(\alpha + \gamma) + c(\beta + \delta) \equiv b\gamma + d\delta, \pmod{2},$$

ovvero:

$$a\delta + b\alpha \equiv b\gamma + d\delta, \pmod{2},$$

oppure:

$$\delta(a + d) + b(\alpha + \gamma) \equiv 0, \pmod{2}.$$

cioè:

$$b\delta + b\delta \equiv 0, \pmod{2}$$

che è vera.

Lemma 2.^o Date due sostituzioni lineari $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, i cui coefficienti siano interi di un certo campo algebrico nel quale soddisfano le congruenze:

$$\text{II)} \quad a \equiv d \equiv b + c, \pmod{2}; \quad \alpha \equiv \delta \equiv \beta + \gamma, \pmod{2}$$

i coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano rispetto al modulo 2 a delle congruenze del tipo (I) del lemma 1.º, cioè il 2.º coefficiente è congruo al 3.º coefficiente e alla somma del 1.º e 4.º coefficiente rispetto al modulo 2.

Per provare infatti che:

$$b\alpha + d\beta \equiv a\gamma + c\delta, \pmod{2},$$

basterà provare tenendo conto delle ipotesi che:

$$b\delta + a\beta = a\gamma + c\delta, \pmod{2},$$

ovvero:

$$\delta(b + c) + a(\beta + \gamma) \equiv 0, \pmod{2},$$

ossia:

$$a\delta + a\delta \equiv 0, \pmod{2}, \text{ c. v. p.}$$

Ci resta da provare che:

$$a(\alpha + \gamma) + c(\beta + \delta) \equiv b\gamma + d\delta, \pmod{2},$$

ovvero:

$$a\beta + c\gamma \equiv b\gamma + a\delta, \pmod{2},$$

oppure:

$$a(\beta + \delta) + \gamma(b + c) \equiv 0, \pmod{2},$$

ciò che è lo stesso.

$$a\gamma + a\gamma \equiv 0, \pmod{2}, \text{ che è vera.}$$

Lemma 3.º Date due sostituzioni lineari, con coefficienti interi di un certo campo, tali che i coefficienti di una di esse soddisfino a congruenze del tipo I, e i coefficienti dell'altra e congruenze del tipo II, i coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano alle congruenze del tipo II.

I coefficienti della 1.ª sostituzione soddisfino alle I) quelli della 2.ª alle II) si abbia cioè:

$$a + d \equiv b \equiv c, \pmod{2}, \quad \alpha \equiv \delta \equiv \beta + \gamma, \pmod{2},$$

noi proveremo che è:

$$a) \alpha + c\beta \equiv b\gamma + d\delta, \pmod{2}; \quad b) a(\alpha + \gamma) + c(\beta + \delta) \equiv b\alpha + d\beta, \pmod{2},$$

Per la *a*) basterà provare che:

$$a\delta + b\beta \equiv b\gamma + d\delta, \pmod{2},$$

ovvero:

$$\delta(a + d) + b(\beta + \gamma) \equiv 0, \pmod{2},$$

cioè

$$b\delta + b\delta \equiv 0, \pmod{2} \text{ che è vera.}$$

Per la *b*) basterà provare che:

$$a\beta + b\gamma \equiv b\alpha + d\beta, \pmod{2},$$

ovvero:

$$\beta(a + d) + b(\alpha + \gamma) \equiv 0, \pmod{2}.$$

ossia:

$$b\beta + b\beta \equiv 0, \pmod{2}, \text{ che è vera.}$$

Facciamo ora l'altra ipotesi che i coefficienti della 1.ª sostituzione soddisfino alla II) e quella della 2.ª alla I), si abbia cioè:

$$a \equiv d \equiv b + c \pmod{2}; \quad \alpha + \delta \equiv \beta \equiv \gamma, \pmod{2},$$

proveremo sono ancora vere la congruenza *a*) e la *b*).

Per la *a*) basterà provare che:

$$d\alpha + c\beta \equiv b\beta + d\delta, \pmod{2}$$

ovvero:

$$d(\alpha + \delta) + \beta(b + c) \equiv 0, \pmod{2},$$

cioè:

$$d\beta + \beta d \equiv 0, \pmod{2}, \text{ che è vera.}$$

Per la b) basterà provare che:

$$d\delta + c\alpha \equiv b\alpha + d\beta, \pmod{2},$$

ovvero:

$$d(\beta + \delta) + \alpha(b + c) \equiv 0, \pmod{2},$$

ossia:

$$d\alpha + \alpha d \equiv 0, \pmod{2} \text{ che è vera.}$$

Osservazione 1.^a I Lemmi dimostrati sussistono ancora, se essendo $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, interi del campo $(1, i)$ al modulo 2 si sostituisca modulo $1 + i$.

Lemma 4.^o Date due sostituzioni lineari $\begin{pmatrix} a+ia_1; b+ib_1 \\ c+ic_1; d+id_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+i\alpha_1; \beta+i\beta_1 \\ \gamma+i\gamma_1; \delta+i\delta_1 \end{pmatrix}$ con coefficienti interi del campo $(1, i)$; di cui la parte reale e il coefficiente dell'immaginario soddisfano alle congruenze:

$$A) \left\{ \begin{array}{l} a+a_1+d+d_1 \equiv b+b_1+c+c_1, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1+c_1, \pmod{2}, \end{array} \right. A') \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\alpha_1+\delta+\delta_1 \equiv \beta+\beta_1 \equiv \gamma+\gamma_1, \pmod{2} \\ \alpha_1 \equiv \delta_1 \equiv \beta_1+\gamma_1, \pmod{2}, \end{array} \right.$$

anche le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario dei coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano ad analoghe congruenze.

Infatti è:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a+ia_1; b+ib_1 \\ c+ic_1; d+id_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha+i\alpha_1; \beta+i\beta_1 \\ \gamma+i\gamma_1; \delta+i\delta_1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a\alpha+c\beta-(a_1\alpha_1+c_1\beta_1)+i(a\alpha_1+a_1\alpha+c\beta_1+c_1\beta); b\alpha+d\beta-(b_1\alpha_1+d_1\beta_1)+i(b\alpha_1+b_1\alpha+d\beta_1+d_1\beta) \\ a\gamma+c\delta-(a_1\gamma_1+c_1\delta_1)+i(a\gamma_1+a_1\gamma+c\delta_1+c_1\delta); b\gamma+d\delta-(b_1\gamma_1+d_1\delta_1)+i(b\gamma_1+b_1\gamma+d\delta_1+d_1\delta) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e le prime congruenze A) si verificano per i coefficienti della sostituzione prodotto in conseguenza del lemma I^o). Infatti la somma della parte reale e del coefficiente dell'immaginario di ogni coefficiente della sostituzione prodotto, formano salvo il segno di due termini, cioè che non ha influenza sulle congruenze modulo 2, i coefficienti della sostituzione ottenuta moltiplicando le due $\begin{pmatrix} a+a_1; b+b_1 \\ c+c_1; d+d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+\alpha_1; \beta+\beta_1 \\ \gamma+\gamma_1; \delta+\delta_1 \end{pmatrix}$, per le quali il verificarsi delle prime congruenze A) e A') implica il verificarsi delle condizioni del lemma I^o). Quindi facendo il prodotto di queste due ultime sostituzioni, i

coefficienti della sostituzione ottenuta soddisfano ancora a delle congruenze dello stesso tipo delle prime congruenze A) e perciò la somma delle parti reali e dei coefficienti dell'immaginario dei coefficienti della sostituzione prodotto delle date soddisfano alle prime congruenze A) *c. v. ν* .

Ci resta da provare che:

$$(a) \quad a \alpha_1 + a_1 \alpha + c \beta_1 + c_1 \beta \equiv b \gamma_1 + b_1 \gamma + d \delta_1 + d_1 \delta, \pmod{2},$$

$$(b) \quad a(\alpha_1 + \gamma_1) + a_1(\alpha + \gamma) + c(\beta_1 + \delta_1) + c_1(\beta + \delta) \equiv b\alpha_1 + b_1\alpha + d\beta_1 + d_1\beta, \pmod{2},$$

Per la (a) tenendo conto delle ipotesi basterà provare che:

$$a \delta_1 + d_1 \alpha + c \beta_1 + c_1 \beta + b \gamma_1 + b_1 \gamma + d \delta_1 + d_1 \delta \equiv 0, \pmod{2},$$

ovvero:

$$(a + d) \delta_1 + (\alpha + \delta) d_1 + c \beta_1 + c_1 \beta + b \gamma_1 + b_1 \gamma \equiv 0, \pmod{2},$$

ovvero:

$$(b + b_1) (\beta_1 + \gamma_1) + (\beta + \beta_1) (b_1 + c_1) + c \beta_1 + c_1 \beta + b \gamma_1 + b_1 \gamma \equiv 0, \pmod{2},$$

ossia:

$$b(\beta_1 + \gamma_1 + \gamma_1) + b_1(\beta_1 + \gamma_1 + \beta + \beta_1 + \gamma) + c_1(\beta + \beta_1 + \beta) + c \beta_1 \equiv 0, \pmod{2},$$

e riducendo:

$$b \beta_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \beta_1 + c \beta_1 \equiv 0, \pmod{2},$$

ovvero:

$$\beta_1 [b + b_1 + c + c_1] \equiv 0, \pmod{2},$$

la quale è vera essendo $b + b_1 + c + c_1 \equiv 0, \pmod{2}$.

Per provare la (b) basta provare che:

$$a\beta_1 + (b_1 + c_1)(\alpha + \gamma) + c\gamma_1 + c_1(\beta + \delta) + b(\beta_1 + \gamma_1) + b_1\alpha + d\beta_1 + (b_1 + c_1)\beta \equiv 0, \pmod{2}$$

ovvero:

$$\beta_1(a + b + d) + b_1(\alpha + \gamma + \alpha + \beta) + c_1(\alpha + \gamma + \beta + \delta + \beta) + \gamma_1(c + b) \equiv 0, \pmod{2},$$

e tenendo conto delle ipotesi e riducendo:

$$b_1 \beta_1 + b_1 (\beta_1 + \gamma_1) + c_1 \gamma_1 + (b_1 + c_1) \gamma_1 \equiv 0, \pmod{2},$$

ovvero:

$$\beta_1(b_1 + b_1) + \gamma_1(b_1 + c_1 + b_1 + c_1) \equiv 0, \pmod{2},$$

cioè:

$$2b_1\beta_1 + 2(b_1 + c_1)\gamma_1 \equiv 0, \pmod{2}, \text{ che è vera.}$$

Con analoghe dimostrazioni alle precedenti, che per brevità si omettono, si dimostrano i seguenti lemmi:

Lemma 5.° Date due sostituzioni lineari $\begin{pmatrix} a+ia_1; b+ib_1 \\ c+ic_1; d+id_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+i\alpha_1; \beta+i\beta_1 \\ \gamma+i\gamma_1; \delta+i\delta_1 \end{pmatrix}$ a coefficienti interi del campo $(1, i)$ di cui le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario dei coefficienti soddisfano alle congruenze:

$$B) \left\{ \begin{array}{l} a+a_1 \equiv d+d_1 \equiv b+b_1+c+c_1, \pmod{2}, \\ a+d \equiv b \equiv c, \pmod{2}; \end{array} \right. B') \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\alpha_1 \equiv \delta+\delta_1 \equiv \beta+\beta_1+\gamma+\gamma_1, \pmod{2}, \\ \alpha+\delta \equiv \beta \equiv \gamma, \pmod{2}, \end{array} \right.$$

le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario dei coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano a delle congruenze del tipo A).

Lemma 6.° Date due sostituzioni lineari $\begin{pmatrix} a+ia_1; b+ib_1 \\ c+ic_1; d+id_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+i\alpha_1; \beta+i\beta_1 \\ \gamma+i\gamma_1; \delta+i\delta_1 \end{pmatrix}$, a coefficienti interi del campo $(1, i)$ di cui le parti reali ed il coefficiente dell'immaginario dei coefficienti di una di esse soddisfano a congruenze del tipo A) e le parti reali e i coefficienti dell'immaginario dei coefficienti dell'altra soddisfano a congruenze del tipo B), le parti reali e i coefficienti dell'immaginario dei coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano a delle congruenze del tipo B).

Osservazione 2.ª Si noti che per la sostituzione $\begin{pmatrix} a+ia_1; b+ib_1 \\ c+ic_1; d+id_1 \end{pmatrix}$ le condizioni A possono scriversi:

$$A^*) \left\{ \begin{array}{l} a+d \equiv b+b_1 \equiv c+c_1, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1+c_1, \pmod{2}; \end{array} \right.$$

e le B) possono scriversi

$$B^*) \left\{ \begin{array}{l} a+a_1 \equiv d+d_1 \equiv b_1+c_1, \pmod{2}, \\ a+d \equiv b \equiv c, \pmod{2}. \end{array} \right.$$

Ciò premesso noi dimostreremo che il gruppo G^0 formato dalle sostituzioni (movimenti) di 1.^a specie unimodulari:

$$z' = \begin{pmatrix} a + i a_1 & ; & b + i b_1 \\ c + i c_1 & ; & d + i d_1 \end{pmatrix} z,$$

a coefficienti interi del campo $(1, i)$ tali che sia:

$$(3) \quad \begin{cases} a + d \equiv b + b_1 \equiv c + c_1, & (\text{mod. } 2), \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, & (\text{mod. } 2); \end{cases}$$

oppure:

$$(4) \quad \begin{cases} a + a_1 \equiv d + d_1 \equiv b_1 + c_1, & (\text{mod. } 2), \\ a + d \equiv b \equiv c, & (\text{mod. } 2); \end{cases}$$

ampliato con la riflessione:

$$z' = z_0$$

è il gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$.

Infatti che i movimenti dati formino gruppo segue dai lemmi 4.^o, 5.^o, 6.^o, proveremo che il poliedro fondamentale di G^0 è $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$.

Le sostituzioni ellittiche di G^0 si ottengono per $a+d=0, \pm 1$, cioè sono a periodo 2 o 3. Le sfere di riflessioni corrispondono ai movimenti:

$$z' = \frac{(a + i a_1) z_0 + i b_1}{i c_1 z_0 + (a - i a_1)}, \quad \text{con (5) } a^2 + a_1^2 + b_1 c_1 = 1,$$

ed hanno per equazione;

$$(6) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a}{c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2};$$

e le condizioni (3) e (4) diventano rispettivamente:

$$(3^*) \quad \begin{cases} b_1 \equiv c_1 \equiv 0, & (\text{mod. } 2), \\ a_1 \equiv b_1 + c_1 & (\text{mod. } 2); \end{cases} \quad (4^*) \quad \begin{cases} a + a_1 \equiv b_1 + c_1, & (\text{mod. } 2); \end{cases}$$

I piani di riflessione corrispondono a $c_1 = 0$ quindi per la (5):

$$\alpha) \quad a = 0, \quad a_1 = \pm 1 : \quad \text{oppure } \beta) \quad a = \pm 1, \quad a_1 = 0.$$

Le α) sono incompatibili con le (3*), mentre la (4*) diviene:

$$b_1 \equiv 1 \pmod{2}, \quad \text{cioè } b_1 = 2k + 1,$$

e le condizioni $a = 0, a_1 = \pm 1, c_1 = 0, b_1 = 2k + 1$, danno per equazione dei corrispondenti piani di riflessione: $\xi = \frac{2k+1}{2}$ con k intero qualunque.

Dal confronto delle condizioni β) con le (3*) e (4*) si ha che b_1 può essere intero pari o dispari qualunque, e le condizioni $a = \pm 1, a_1 = 0, c_1 = 0, b_1 = l$, l intero arbitrario, danno per equazione dei corrispondenti piani di riflessione:

$$\eta = \frac{l}{2} \text{ con } l \text{ intero qualunque.}$$

Riepilogando i piani di riflessione di G^0 hanno per equazione:

$$\xi = \frac{2k+1}{2}, \quad \eta = \frac{l}{2} \quad \text{con } l \text{ e } k \text{ interi qualunque.}$$

Consideriamola porzione del prisma compresa fra i 4 piani di riflessione. (F. 2 tavola 1.ª)

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{1}{2},$$

esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a = a_1 = 0, \quad b_1 = c_1 = 1)$$

essa è la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ che è la piramide fondamentale del gruppo G^0 . Infatti nessun piano di riflessione del gruppo penetra in $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ nè nessuna sfera può attraversarlo lungo uno spigolo, come

facilmente si vede, tenendo conto che le sostituzioni ellittiche di G^0 sono a periodo 2 o 3. I vertici di $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ sono:

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right); V_2 \equiv \left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right); V_3 \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); V_0 = \infty;$$

e nessuno di essi è interno alle sfere (6). Infatti perchè V_1 e V_2 siano interni alla sfera (6) dovrebbe aversi:

$$(\pm c_1 - 2a_1)^2 + 4a^2 + 3c_1^2 < 4,$$

ed essendo $c_1 \neq 0$, deve essere $a=0$, $\pm 1 - 2a_1 = 0$ e quest'ultima è assurda. Analogamente perchè V_3 e V_4 siano interni alla sfera (6) deve aversi:

$$(\pm c_1 - 2a_1)^2 + (c_1 + 2a)^2 + 2c_1^2 < 4,$$

quindi $c_1 = 1$ e l'una o l'altra delle somme $\pm 1 - 2a_1$, $1 + 2a$ dovrebbe annullarsi, il che è assurdo. Il movimento che riporta $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ in se oltre

l'identità è la riflessione: $z' = -z_0$, che avendo per espressione $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ non appartiene a G^0 , giacchè non sono soddisfatte nè le (3) nè le (4). Resta pertanto dimostrato che G^0 è il gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$.

I gruppi congruenziali $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$; $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$

4. — Per la dimostrazione in fine al paragrafo precedente associando a $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ una simmetrica rispetto al piano $\eta = 0$, segue che il gruppo di sostituzioni unimodulari di 1.^a specie a coefficienti interi del campo $(1, i)$,

$$z' = \begin{pmatrix} a + ia_1 & ; & b + ib_1 \\ c + ic_1 & ; & d + id_1 \end{pmatrix} z,$$

tali che siano soddisfatte le (6) o le (7) ha per piramide fondamentale $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$.

Dimostriamo ora che il gruppo G^0 formato alle sostituzioni unimodulari di 1.^a specie a coefficienti interi del campo $(1, i)$,

$$z' = \begin{pmatrix} a + i a_1 & ; & b + i b_1 \\ c + i c_1 & ; & d + i d_1 \end{pmatrix} z,$$

tali che sia:

$$(7) \quad \begin{cases} a + d \equiv b + b_1 \equiv c + c_1, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \end{cases}$$

e dalle sostituzioni unimodulari di 2.^a specie a coefficienti interi del campo $(1, i)$

$$z' \equiv \begin{pmatrix} a + i a_1 & ; & b + i b_1 \\ c + i c_1 & ; & d + i d_1 \end{pmatrix} z_0,$$

con:

$$(8) \quad \begin{cases} a + a_1 \equiv d + d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a + d \equiv b \equiv c, \pmod{2}. \end{cases}$$

è il gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$.

Le sostituzioni date formano gruppo in conseguenza dei lemmi 4, 5, 6.

Avendo le sostituzioni ellittiche di G^0 il periodo 2 o 3 se due sfere (piani) di riflessione si attraversano formano angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$. Le sfere di riflessione di G^0 corrispondono alle sostituzioni:

$$z' = \frac{(a + i a_1) z_0 + i b_1}{i c_1 z_0 + (a - i a_1)},$$

ed hanno per equazione:

$$(9) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a}{c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

con

$$(10) \quad \begin{cases} a^2 + a_1^2 + b_1 c_1 = 1, \\ a + a_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}. \end{cases}$$

I piani di riflessione si ottengono per $c_1=0$, quindi per la prima delle (10) $a = \pm 1, a_1 = 0$, oppure $a = 0; a_1 = \pm 1$, mentre in ogni caso la 2.^a delle (10) da $b_1 \equiv 1, (\text{mod. } 2)$ cioè $b_1 = 2l + 1$; segue quindi che i piani di riflessione hanno per equazione:

$$\xi = \frac{2l+1}{2}, \quad \eta = \frac{2m+1}{2}, \quad \text{con } l \text{ e } m \text{ interi arbitrari.}$$

La porzione del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (F. 3 tavola 1.^a).

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2},$$

esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a = a_1 = 0, \quad b_1 = c_1 = 1)$$

forma la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$ che io dico è la fondamentale di G^0 .

Nessun piano di riflessione attraversa $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$, nessuna sfera di riflessione vi penetra lungo uno spigolo

I vertici di $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$ sono.

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad V_2 \equiv \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad V_3 \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad V_0 = \infty,$$

e nessuno di essi è interno alle sfere (9). Infatti perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni a una sfera (9) dovrebbe aversi:

$$(\pm c_1 - 2a_1)^2 + (\pm c_1 + 2a)^2 + 2c_1^2 < 4,$$

ed essendo $c_1=1$, una o l'altra delle somme $\pm 1 - 2a_1, \pm 1 + 2a$ dovrebbe annullarsi, ciò che non può essere.

I movimenti che riportano $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$ in se formano il gruppo G_8

$$G_8 \sim \left\{ \begin{array}{l} z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z ; z' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z ; z' = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} z ; z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} z ; \\ z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 ; z' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 ; z' = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} z_0 ; z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} z_0 ; \end{array} \right.$$

Il 2° , il 4° , il 6° e l'8° movimento non appartengono a G^0 perchè a determinante i , il 1.° è l'identità, i coefficienti del 3.° non soddisfano alle congruenze (7), i coefficienti del 5.° e 7.° non soddisfano alle congruenze (8). Resta pertanto dimostrato che G^0 è il gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$.

Il gruppo $G^0_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$

5. — Il gruppo G^0 di sostituzioni di 1.^a specie

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{2})z + (b_1 + ib_2\sqrt{2})}{(c_1 + ic_1\sqrt{2})z + (d_1 + id_2\sqrt{2})}$$

a determinante ± 1 , con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti, ampliato con la riflessione:

$$z' = z_0,$$

è il gruppo $G^0_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

Proveremo il teorema, seguendo il solito metodo. La somma del 1.° e 4.° coefficiente di una sostituzione di 1.^a specie è:

$$a_1 + d_1 + i(a_2 + d_2)\sqrt{2},$$

e se essa è a determinante 1 perchè sia ellittica occorre sia la somma $a_1 + d_1 + i(a_2 + d_2)\sqrt{2}$ reale, cioè $a_2 + d_2 = 0$ e in valore assoluto minore di 2, cioè $a_1 + d_1 = 0, \pm 1$, cioè le sostituzioni ellittiche hanno periodo 2 o 3. Se la sostituzione è a determinante -1 , perchè sia ellittica deve essere $i(a_1 + d_1) - (a_2 + d_2)\sqrt{2}$ reale, cioè $a_1 + d_1 = 0$, e $|(a_2 + d_2)\sqrt{2}| < 2$, ossia $(a_2 + d_2) = 0, \pm 1$ e le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno il periodo 2 e 4. Concludendo le sostituzioni ellittiche di G^0 hanno il periodo 2, 3, 4

onde se due sfere (piani) di riflessione di G^0 si attraversano formano angoli aventi per misura $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$.

Le sostituzioni di 2.^a specie di G^0 a determinante 1 sono riflessioni quando hanno la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{2})z_0 + ib_2\sqrt{2}}{ic_2\sqrt{2}z_0 + (a_1 - ia_2\sqrt{2})}$$

con

$$(11) \quad a_1^2 + 2a_2^2 + 2b_2c_2 = 1;$$

le corrispondenti sfere di riflessioni hanno per equazione:

$$(12) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_2\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_2^2}.$$

I piani di riflessione si ottengono per $c_2 = 0$ quindi per la (11) $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$, e perciò essi hanno per equazione:

$$\eta = \frac{b_2}{\sqrt{2}}, \text{ con } b_2 \text{ intero arbitrario.}$$

Le sostituzioni di 2.^a specie a determinante -1 sono riflessioni quando hanno la forma

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{2})z_0 + b_1}{c_1z_0 + (-a_1 + ia_2\sqrt{2})},$$

con

$$(13) \quad a_1^2 + 2a_2^2 + b_1c_1 = 1,$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(14) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{2}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi per la (13) $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$, cioè hanno per equazione:

$$\xi = \frac{b_1}{2}, \text{ con } b_1 \text{ intero qualunque.}$$

La porzione del prisma formato dai 4 piani di riflessione:

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

esterna alla sfera di riflessione: (Tavola 1.ª F. 4).

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0; \quad b_1 = c_1 = 1, \quad (14))$$

forma la piramide $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ che è, come dimostreremo, la fondamentale del gruppo G^0 .

Osserviamo che nessun piano di riflessione penetra in $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

Nessuna sfera di riflessione penetra in $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ lungo uno spigolo.

Infatti le sfere che bisegano i diedri $V_2 V_1, V_2 V_3$ hanno per raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e non sono di G^0 ; le sfere che passando per lo spigolo $V_2 V_1$ o $V_2 V_3$ formano con una faccia dei diedri corrispondenti l'angolo $\frac{\pi}{3}$ formano con l'altra faccia

l'angolo $\frac{\pi}{6}$ e perciò non sono sfere di riflessione di G^0 . I vertici di $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ sono:

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); & V_2 &\equiv (0, 0, 1); & V_3 &\equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \\ V_4 &\equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right); & V_0 &= \infty \end{aligned}$$

e noi proveremo che essi non possono essere interni nè alle sfere (12) nè alle

(14). Perchè $V_1, V_2 V_3, V_4$ siano interni a una sfera (12) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} (c_2 - 2a_2)^2 + 2a_1^2 + 3c_2^2 &< 2, \\ 2a_2^2 + a_1^2 + 2c_2^2 &< 1, \\ 2a_2^2 + (c_2 + a_1)^2 + c_2^2 &< 1, \\ (c_2 - 2a_2)^2 + 2(c_2 + a_1)^2 + c_2^2 &< 2; \end{aligned}$$

e le prime tre di queste disequaglianze sono assurde essendo $|c_2| \geq 1$, per l'ultima dovrebbe aversi $c_2=1$, $1-2a_2=0$ e quest'ultima è assurda. Analogamente perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni a una sfera (14), dovrebbe aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} (c_1 - 2a_1)^2 + 8a_2^2 + 3c_1^2 &< 4, \\ a_1^2 + 2a_2^2 + c_1^2 &< 1, \\ 2a_1^2 + (c_1 - 2a_2)^2 + c_1^2 &< 2, \\ (c_1 - 2a_1)^2 + 2(c_1 - 2a_2)^2 + c_1^2 &< 4; \end{aligned}$$

e perchè sussista la prima deve aversi $c_1=1$, $1-2a_1=0$, che è assurdo, la 2.^a è impossibile essendo $|c_1| \geq 1$, per la terza dovrebbe aversi $c_1=1$, $1-2a_2=0$ che non può essere; per la 4.^a dovrebbe aversi $c_1=1$ e una o l'altra della somma $1-2a_1$, $1-2a_1$ nulla che non può essere.

Non esiste nessun movimento che riporti $P_{o, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ in se, perciò G^0 è il gruppo $G^0_{o, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ c. v. p.

I gruppi $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{\sqrt{2}}}$; $G_{o, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$; e il gruppo congruenziale $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, o, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

6. — Associando alla piramide $P_{o, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ la simmetrica rispetto al piano $\xi=0$, o l'altra rispetto al piano $\mu=0$ si ha che il gruppo di sostituzioni di 1.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{2})z + (b_1 + i b_2 \sqrt{2})}{(c_1 + i c_2 \sqrt{2})z + (d_1 + i d_2 \sqrt{2})},$$

a determinante ± 1 , con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti ha per piramide fondamentale sia $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; o, \frac{i}{\sqrt{2}}}$, sia che $P_{o, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$, cioè

può considerarsi tanto come un $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ che un $G_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

Per determinare il gruppo $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ premettiamo le seguenti considerazioni:

Consideriamo tutte le sostituzioni di 1.^a specie:

$$z' = \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 \sqrt{2} & ; & b_1 + i b_2 \sqrt{2} \\ c_1 + i c_2 \sqrt{2} & ; & d_1 + i d_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} z,$$

a determinante $D = \pm 1$, con $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2$ interi assoluti tali che se $D = 1$ i coefficienti soddisfino le congruenze:

$$(15) \quad a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2},$$

e se $D = -1$ le congruenze

$$(16) \quad a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}.$$

Tali sostituzioni io dico formano gruppo. Si osservi: infatti che:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 \sqrt{2} & ; & b_1 + i b_2 \sqrt{2} \\ c_1 + i c_2 \sqrt{2} & ; & d_1 + i d_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + i \alpha_2 \sqrt{2} & ; & \beta_1 + i \beta_2 \sqrt{2} \\ \gamma_1 + i \gamma_2 \sqrt{2} & ; & \delta_1 + i \delta_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 \alpha_1 + c_1 \beta_1 - 2(a_2 \alpha_2 + c_2 \beta_2) + i \sqrt{2}(a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + c_1 \beta_2 + c_2 \beta_1) & ; \\ a_1 \gamma_1 + c_1 \delta_1 - 2(a_2 \gamma_2 + c_2 \delta_2) + i \sqrt{2}(a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_1 + c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1) & ; \\ b_1 \alpha_1 + d_1 \beta_1 - 2(b_2 \alpha_2 + d_2 \beta_2) + i \sqrt{2}(b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_1 + d_1 \beta_2 + d_2 \beta_1) & ; \\ b_1 \gamma_1 + d_1 \delta_1 - 2(b_2 \gamma_2 + d_2 \delta_2) + i \sqrt{2}(b_1 \gamma_2 + b_2 \gamma_1 + d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1) & ; \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

e le parti reali dei coefficienti della sostituzione prodotto rispetto al modulo 2, possono ritenersi ottenute componendo le due sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} a_1 & ; & b_1 \\ c_1 & ; & d_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & ; & \beta_1 \\ \gamma_1 & ; & \delta_1 \end{pmatrix},$$

onde, tenendo conto dei lemmi 1. 2. 3 (paragrafo 3) si ha che le parti reali dei coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano, a secondo che

essa sia a determinante 1 o -1 , alle (15) o alle (16). Si ampli il gruppo considerato con la riflessione $z' = z_0$, si ottiene il gruppo G^0 di sostituzioni di 1.^a e 2.^a specie:

$$z' = \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 \sqrt{2} & ; & b_1 + i b_2 \sqrt{2} \\ c_1 + i c_2 \sqrt{2} & ; & d_1 + i d_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} z ; z' = \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 \sqrt{2} & ; & b_1 + i b_2 \sqrt{2} \\ c_1 + i c_2 \sqrt{2} & ; & d_1 + i d_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} z_0,$$

a determinante $D = \pm 1$, con $a, a_1, b, b_1, c, c_1, d, d_1$ interi assoluti tali che se:

$$\begin{aligned} D = 1 & \text{ è (15) } a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ D = -1 & \text{ è (16) } a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \end{aligned}$$

e che noi dimostreremo è il gruppo $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Siccome il gruppo G^0 ha le sostituzioni ellittiche a periodo 2, 3, 4 se due sfere di riflessioni del gruppo si attraversano formano angoli diedri aventi per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$.

Se $D = 1$, una sostituzione di 2.^a specie è una riflessione se è della forma:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{2}) z_0 + i b_2 \sqrt{2}}{i c_2 \sqrt{2} z_0 + (a_1 - i a_2 \sqrt{2})} \quad \text{con (17) } a_1^2 + 2a_2^2 + 2b_2 c_2 = 1,$$

e le condizioni (15) risultano soddisfatte. Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(18) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_2 \sqrt{2}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_2^2},$$

i piani di riflessioni si ottengono per $c_2 = 0$, e dalla (17) $a_2 = 0, a_1 = \pm 1$ cioè hanno per equazione:

$$\eta = \frac{b_2}{\sqrt{2}},$$

con b_2 intero qualunque.

Se $D = -1$, una sostituzione di 2.^a specie è una riflessione se è della forma:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{2})z_0 + b_1}{c_1z_0 + (-a_1 + ia_2\sqrt{2})}, \quad \text{con (19) } a_1^2 + 2a_2^2 + b_1c_1 = 1,$$

e le (16) diventano

$$(20) \quad a_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}.$$

Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(21) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right) + \left(\eta + \frac{a_2\sqrt{2}}{c_1}\right) + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2};$$

i piani di riflessione si ottengono per $c_1 = 0$ e tenendo conto delle (19) e (20) si ha ancora, $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$, $b_1 = 2k + 1$ con k intero arbitrario, cioè i piani di riflessione hanno per equazione:

$$\eta = \frac{2k + 1}{2}$$

con k intero arbitrario.

Si consideri del prisma formato dai piani di riflessione: (Tavola 1.^a F. 6).

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

la porzione esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = c_1 = 1, \quad (21))$$

si ottiene la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ nell'interno della quale non penetra

alcun piano di riflessione. Poichè le sostituzioni ellittiche di G^0 sono a periodo 2, 3, 4, l'unica sfera che può supporre penetri in $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$

lungo uno spigolo è quella che bisega il dietro retto V_1V_2 , ma avendo essa il raggio eguale a $\sqrt{2}$ non è del gruppo. I vertici di $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ sono:

$$\left. \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\} \equiv \left(\pm \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left. \begin{matrix} V_3 \\ V_4 \end{matrix} \right\} \equiv \left(\mp \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right); V_0 = \infty;$$

e nessuno di essi è interno ad alcuna sfera di riflessione.

Perchè V_1, V_2 siano interni ad una sfera (18) deve aversi:

$$(\pm c_2 - 2a_2)^2 + 2a_1^2 + 3c_2^2 < 2, \text{ che è assurda essendo } |c_2| > 1.$$

Perchè V_3, V_4 , siano interni ad una sfera (19) deve aversi:

$$(\mp c_2 - 2a_2)^2 + 2(c_2 + a_1)^2 + c_2^2 < 2,$$

che è assurda, perchè per sussistere dovrebbe essere $c_2 = 1, \mp 1 - 2a_2 = 0$.

Analogamente perchè V_1, V_2 siano interni a una sfera (21) deve aversi:

$$(\pm c_1 - 2a_1)^2 + 8a_2^2 + 3c_1^2 < 4,$$

e quindi $c_1 = 1, a_2 = 0, \pm 1 - 2a_1 = 0$ che è assurda; e perchè V_3, V_4 siano interni a una sfera (21) deve aversi:

$$(\mp c_1 - 2a_1)^2 + 2(c_1 - 2a_2)^2 + c_1^2 < 4,$$

da cui $c_1 = 1$ e una o l'altra delle somme $\pm 1 - 2a_1, 1 - 2a_2$ nulla, cioè che non può essere.

L'unico movimento, oltre l'identità, che riporta $P - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$ in sè

è quello di 2.^a specie a determinante $-1, z' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0$, i cui coefficienti non soddisfano alle congruenze (16) e che perciò non è del gruppo, Resta pertanto dimostrato che G^0 è il gruppo $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Tre lemmi sopra la composizione delle sostituzioni lineari sopra una variabile.

7. — Lemma 7.^o. Tutte le sostituzioni di 1.^a specie, a determinante $D = \pm 1$,

$$z' = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 \sqrt{2} & b_1 + ib_2 \sqrt{2} \\ c_1 + ic_2 \sqrt{2} & d_1 + id_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} z,$$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti, tali che a seconda sia $D = \pm 1$, siano soddisfatte le relazioni:

$$(22) \quad \begin{cases} D = 1, \\ \alpha) a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ \beta) a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

oppure

$$(23) \quad \begin{cases} D = -1, \\ \gamma) a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ \delta) a_2 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

formano gruppo.

Noi proveremo perciò che se due sostituzioni soddisfano entrambe alle (22) o alle (23) il loro prodotto soddisfa alle (22), se invece una di esse soddisfa alle (22) e l'altra alle (23), il loro prodotto soddisfa alle (23).

Facciamo la 1.^a ipotesi, si abbiano cioè due sostituzioni:

$$z' = \begin{pmatrix} a_1 + i a_2 \sqrt{2} & ; & b_1 + i b_2 \sqrt{2} \\ b_1 + i c_2 \sqrt{2} & ; & d_1 + i d_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} z, \quad z' = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i \alpha_2 \sqrt{2} & ; & \beta_1 + i \beta_2 \sqrt{2} \\ \gamma_1 + i \gamma_2 \sqrt{2} & ; & \delta_1 + i \delta_2 \sqrt{2} \end{pmatrix} z,$$

soddisfacenti entrambe alle (22), per le quali si abbia cioè:

$$(22) \quad \left. \begin{cases} D = 1, \\ \alpha) a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ \beta) a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}; \end{cases} \right\} (22^*) \quad \left. \begin{cases} D = 1, \\ \alpha^*) \alpha_1 + \delta_1 \equiv \beta_1 \equiv \gamma_1, \pmod{2}, \\ \beta^*) \alpha_2 \equiv \delta_2 \equiv \beta_2 + \gamma_2, \pmod{2}, \end{cases} \right\}$$

proveremo che i coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano alle (22). Che i coefficienti della sostituzione prodotto soddisfino le α) segue dall'osservazione fatta nel paragrafo precedente, ci resta da provare le β) che nel nostro caso diventano:

$$(l) \quad a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + c_2 \beta_1 + c_1 \beta_2 \equiv b_1 \gamma_2 + b_2 \gamma_1 + d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1, \pmod{2},$$

$$(m) \quad a_1(\alpha_2 + \gamma_2) + a_2(\alpha_1 + \gamma_1) + c_2(\beta_1 + \delta_1) + c_1(\beta_2 + \delta_2) \equiv b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_1 + d_1 \beta_2 + d_2 \beta_1, \pmod{2},$$

delle quali la (l) corrisponde alla condizione $a_2 \equiv d_2$ e la (m) alla condizione $a_2 + b_2 + c_2 \equiv 0$, cioè insieme alle due condizioni β).

Per provare, la (l) basterà dimostrare che è:

$$a_1(\beta_2 + \gamma_2) + (b_2 + c_2)\alpha_1 + c_2(\alpha_1 + \delta_1) + (a_1 + d_1)\beta_2 + (a_1 + d_1)\gamma_2 + b_2(\alpha_1 + \delta_1) + d_1(\beta_2 + \gamma_2) + (b_2 + c_2)\delta_1 \equiv 0, \pmod{2},$$

ovvero:

$$\beta_2(a_1 + a_1 + d_1 + d_1) + \gamma_2(a_1 + a_1 + d_1 + d_1) + \alpha_1(b_2 + c_2 + c_2 + b_2) + \delta_1(c_2 + b_2 + b_2 + c_2) \equiv 0, \pmod{2},$$

ossia:

$$2(a_1 + d_1)\beta_2 + 2(a_1 + d_1)\gamma_2 + 2(b_2 + c_2)\alpha_1 + 2(b_2 + c_2)\delta_1 \equiv 0, \pmod{2}, \text{ che è vera.}$$

Per la (m) basta provare che:

$$a_1\beta_2 + (b_2 + c_2)\delta_1 + c_2\alpha_1 + (a_1 + d_1)\gamma_2 + (a_1 + d_1)(\beta_2 + \gamma_2) + b_2\alpha_1 + d_1\beta_2 + (b_2 + c_2)(\alpha_1 + \delta_1) \equiv 0, \pmod{2},$$

ossia:

$$\beta_2(a_1 + a_1 + d_1 + d_1) + \delta_1(b_2 + c_2 + b_2 + c_2) + \alpha_1(c_2 + b_2 + b_2 + c_2) + \gamma_2(a_1 + d_1 + a_1 + d_1) \equiv 0, \pmod{2},$$

ovvero:

$$2(a_1 + d_1)\beta_2 + 2(b_2 + c_2)\delta_1 + 2(b_2 + c_2)\alpha_1 + 2(a_1 + d_1)\gamma_2 \equiv 0, \pmod{2} \text{ che è vera.}$$

Si faccia la 2.^a ipotesi, che la 1.^a sostituzione soddisfi le condizioni (22), l'altra le condizioni (23), si abbia cioè:

$$(22) \left. \begin{array}{l} D = 1, \\ \alpha) a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \quad (23^*) \\ \beta) a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} D = -1, \\ \gamma^*) \alpha_1 \equiv \delta_1 \equiv \beta_1 + \gamma_1, \pmod{2}, \\ \delta^*) \alpha_2 + \delta_2 \equiv \beta_1 + \beta_2 \equiv \gamma_1 + \gamma_2, \pmod{2}, \end{array}$$

proveremo che i coefficienti della sostituzione prodotto soddisfano le (23). Che le (γ) siano soddisfatte risulta ancora dall'osservazione fatta nel paragrafo precedente, ci resta da provare che:

$$n) \quad b_1\alpha_1 + d_1\beta_1 + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_1 + d_1\beta_2 + d_2\beta_1 + a_1\gamma_1 + c_1\delta_1 + \\ + a_1\gamma_2 + a_2\gamma_1 + c_2\delta_1 + c_1\delta_2 \equiv 0, \pmod{2},$$

$$p) \quad a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + c_2\beta_1 + c_1\beta_2 + b_1\gamma_2 + b_2\gamma_1 + d_1\delta_2 + d_2\delta_1 + b_1\alpha_1 + \\ + d_1\beta_1 + b_1\alpha_2 + b_2\alpha_1 + d_1\beta_2 + d_2\beta_1 \equiv 0, \pmod{2},$$

corrispondenti rispettivamente alle condizioni:

$$\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 \equiv 0, \pmod{2} \quad ; \quad \alpha_2 + \delta_2 + \beta_1 + \beta_2 \equiv 0, \pmod{2},$$

in cui si scindono le condizioni δ .

Per provare la (n) basterà provare che:

$$(a_1 + d_1)(\beta_1 + \gamma_1) + d_1\beta_1 + (a_1 + d_1)\alpha_2 + b_2(\beta_1 + \gamma_1) + d_1\beta_2 + (b_2 + c_2)\beta_1 + a_1\gamma_1 + \\ + (a_1 + d_1)\delta_1 + a_1\gamma_2 + (b_2 + c_2)\gamma_1 + c_2(\beta_1 + \gamma_1) + (a_1 + d_1)\delta_2 \equiv 0, \pmod{2},$$

ossia:

$$a_1(\beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \delta_1 + \gamma_2 + \delta_2) + d_1(\beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2) + \\ + b_2(\beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \gamma_1) + c_2(\beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \gamma_1) \equiv 0, \pmod{2},$$

ovvero tenendo ancora conto delle ipotesi e riducendo:

$$2(\gamma_1 + \gamma_2)a_1 + 2(\beta_1 + \beta_2)d_1 + 2(\beta_1 + \gamma_1)b_2 + 2(\beta_1 + \gamma_1)c_2 \equiv 0, \pmod{2}, \quad \text{che è vera.}$$

Per la $p)$ basterà provare che:

$$a_1\alpha_2 + (b_2 + c_2)(\beta_1 + \gamma_1) + c_2\beta_1 + (a_1 + d_1)\beta_2 + (a_1 + d_1)\gamma_2 + b_2\gamma_1 + d_1\delta_2 + (b_2 + c_2)(\beta_1 + \gamma_1) + \\ + (a_1 + d_1)(\beta_1 + \gamma_1) + d_1\beta_1 + (a_1 + d_1)\alpha_2 + b_2(\beta_1 + \gamma_1) + d_1\beta_2 + (b_2 + c_2)\beta_1 \equiv 0; \pmod{2},$$

oppure:

$$a_1(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2) + b_2(\beta_1 + \gamma_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \beta_1) + \\ + c_2(\beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \beta_1) + d_1(\beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 + \beta_1 + \gamma_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2) \equiv 0, \pmod{2},$$

e riducendo:

$$a_1(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2) + d_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2 + \delta_2) \equiv 0, \pmod{2},$$

e per le ipotesi :

$$2(\beta_1 + \beta_2)a_1 + 2(\gamma_1 + \gamma_2)d_1 \equiv 0, \pmod{2}, \quad \text{che è vera.}$$

Per brevità ometteremo le dimostrazioni nel caso che le sostituzioni soddisfino entrambe alle (23) o la prima alle (23) e la 2.^a alle (22), che si fanno del resto in modo del tutto analogo.

Le seguenti considerazioni ci permettono ora di ricavare dal lemma precedente due altri lemmi che ci saranno utili nel seguito. Consideriamo il gruppo del lemma precedente, e moltiplichiamo tutte le sue sostituzioni a destra, per la riflessione $z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0$. Poichè si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix},$$

e le (22) e (23) danno condizioni simmetriche, rispetto al 1.^o e 4.^o coefficiente, 2.^o e 3.^o coefficiente, segue che: Lemma 8.^a *tutti movimenti di 1.^a specie a determinante ± 1 ,*

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{2})z + (b_1 + ib_2\sqrt{2})}{(c_1 + ic_2\sqrt{2})z + (d_1 + id_2\sqrt{2})}$$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti soddisfacenti le condizioni:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = 1, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}. \end{array} \right.$$

oppure

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = -1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}; \\ a_2 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \end{array} \right.$$

e di 2.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2 \sqrt{2})z_0 + (b_1 + ib_2 \sqrt{2})}{(c_1 + ic_2 \sqrt{2})z_0 + (d_1 + id_2 \sqrt{2})}$$

soddisfacenti le condizioni: (*)

$$(24) \quad \begin{cases} D = 1, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_2 + c_2; \pmod{2}, \end{cases}$$

oppure

$$(25) \quad \begin{cases} D = -1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}, \end{cases}$$

formano gruppo.

Si osservi che per dimostrare che i coefficienti di una sostituzione prodotto soddisfino alle congruenze delle (22), (23), (24), (25) non si è mai dovuto tenere conto del valore del determinante delle sostituzioni componenti che anzi i risultati ora ottenuti possono anche enunciarsi nel seguente modo: si indichi con $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ rispettivamente una sostituzione generica:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2 \sqrt{2})z_0 + (b_1 + ib_2 \sqrt{2})}{(c_1 + ic_2 \sqrt{2})z_0 + (d_1 + id_2 \sqrt{2})},$$

i cui coefficienti soddisfino rispettivamente le congruenze delle (22), (23), (24), (25), componendo le $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$, si ha:

(*) Le (24) (25) esprimono rispettivamente le (23) e le (22) per le sostituzioni ottenute moltiplicando quelle di 1.^a specie a destra per $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0$,

$$(\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 \Omega_1 = \Omega_1; \Omega_1 \Omega_2 = \Omega_2; \Omega_1 \Omega_3 = \Omega_3; \Omega_1 \Omega_4 = \Omega_4; \\ \Omega_2 \Omega_1 = \Omega_2; \Omega_2 \Omega_2 = \Omega_1; \Omega_2 \Omega_3 = \Omega_4; \Omega_2 \Omega_4 = \Omega_3; \\ \Omega_3 \Omega_1 = \Omega_3; \Omega_3 \Omega_2 = \Omega_4; \Omega_3 \Omega_3 = \Omega_1; \Omega_3 \Omega_4 = \Omega_2; \\ \Omega_4 \Omega_1 = \Omega_4; \Omega_4 \Omega_2 = \Omega_3; \Omega_4 \Omega_3 = \Omega_2; \Omega_4 \Omega_4 = \Omega_1; \end{array} \right.$$

Segue allora; Lemma 9: *Tutte le sostituzioni di 1.^a specie a determinante ± 1 ,*

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2 \sqrt{2})z + (b_1 + ib_2 \sqrt{2})}{(c_1 + ic_2 \sqrt{2})z + (d_1 + id_2 \sqrt{2})}$$

soddisfacenti alle condizioni:

$$(26) \quad \text{se } D = 1; \quad \left\{ \begin{array}{l} D = 1, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}, \\ \text{oppure} \\ D = 1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}, \end{array} \right.$$

$$(27) \quad \text{e se } D = -1; \quad \left\{ \begin{array}{l} D = -1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}; \\ \text{oppure:} \\ D = -1 \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_2 + c_2 \pmod{2}; \end{array} \right.$$

e quelle di 2.^a specie a determinante ± 1

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2 \sqrt{2})z_0 + (b_1 + ib_2 \sqrt{2})}{(c_1 + ic_2 \sqrt{2})z_0 + (d_1 + id_2 \sqrt{2})}$$

soddisfacenti alle condizioni

$$(28) \quad \text{se } D = 1; \quad \left\{ \begin{array}{l} D = 1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ \text{oppure:} \\ D = 1 \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}; \end{array} \right.$$

$$(30) \quad \text{e se } D = -1, \quad \left\{ \begin{array}{l} D = -1, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}, \\ \text{oppure:} \\ D = -1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}, \end{array} \right.$$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti formano un gruppo G^0 , come si verifica subito tenendo conto delle (ε).

Il gruppo congruenziale $G^0_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

8. — Dimostreremo ora che il gruppo G_0 di cui il lemma 9 è il gruppo $G^0_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

Le sostituzioni ellittiche di G^0 essendo a periodo 2, 3, 4, se due sfere (piani) di riflessione si tagliano, formano angoli diedri aventi per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$.

Le riflessioni di G^0 per $D = 1$ hanno la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{2}) z_0 + i b_2 \sqrt{2}}{i c_2 \sqrt{2} z_0 + (a_1 - i a_2 \sqrt{2})},$$

con

$$(31) \quad a_1^2 + 2a_2^2 + 2b_2 c_2 = 1.$$

Il 1.º gruppo di condizioni (28) diviene $a_1 \equiv 0; (\text{mod. } 2), b_2 \equiv c_2 \equiv 0, (\text{mod. } 2)$, cioè che non può esser per la (31). Il 2.º gruppo di condizioni (28) dà:

$$(32) \quad a_1 + a_2 \equiv b_2 + c_2, (\text{mod. } 2),$$

e soddisfatte le (31) e (32) le sfere corrispondenti di riflessione hanno per equazione:

$$(33) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_2 \sqrt{2}} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_2^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_2 = 0$, quindi per la (31) $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$, per la (32), $b_2 = 2k + 1$, cioè hanno per equazione:

$$\eta = \frac{2k+1}{2}, \quad \text{con } k \text{ intero arbitrario.}$$

Le riflessioni di G^0 per $D = -1$ hanno la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{2}) z_0 + b_1}{c_1 z_0 + (-a_1 + i a_2 \sqrt{2})},$$

con

$$(34) \quad a_1^2 + 2a_2^2 + b_1 c_1 = 1,$$

e le (30) diventano rispettivamente:

$$(35) \quad a_2 \equiv b_1 \equiv c_1 \equiv 0, (\text{mod. } 2); \quad (35^*) \quad a_1 \equiv b_1 + c_1, (\text{mod. } 2).$$

Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(36) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{2}}{c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2};$$

i piani di riflessione si ottengono per $c_1 = 0$ e per le (34) $a_2 = 0, a_1 = \pm 1$. Se si verificano insieme le (34) e (35) si ha: $a_1 = \pm 1, a_2 = 0, c_1 = 0, b_1 = 2k$, cioè *i corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione:*

$$\xi = k, \quad k \text{ intero qualunque.}$$

Se si verificano insieme le (34) e (35*) si ha: $a_1 = \pm 1, a_2 = 0, c_1 = 0, b_1 = 2k + 1$, e i corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione:

$$\xi = \frac{2k+1}{2}, \quad \text{con } k \text{ intero qualunque.}$$

Concludendo i piani di riflessione di G^0 hanno per equazione :

$$\xi = \frac{l}{2}, \quad \eta = \frac{2l+1}{2}, \quad \text{con } l \text{ intero qualunque.}$$

La porzione del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (Tavola 1.^aF.5)

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2} \quad ; \quad \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0; b_1 = c_1 = 1, \quad (34),$$

forma la piramide $P_0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$ che è il poliedro fondamentale del gruppo G^0 .

Infatti in $P_0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$ non penetra alcun piano di riflessione, e la sfera che bisega il diedro $V_1 V_2$ ha il raggio eguale a $\sqrt{2}$ e non è di G^0 .

I vertici di $P_0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$ sono:

$$\left. \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\} \equiv \left(0; \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad ; \quad \left. \begin{matrix} V_3 \\ V_4 \end{matrix} \right\} \equiv \left(\frac{1}{2}; \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad V_0 = \infty;$$

e nessuno di essi è interno a una sfera di riflessione di G^0 . Infatti perchè V_1 , o V_2 siano interni ad una sfera di riflessione (33) dovrebbe aversi:

$$2a_2^2 + (\pm c_2 + a_1)^2 + c_2^2 < 1,$$

ciò che non può essere essendo $|c_2| \geq 1$. Perchè V_3 o V_4 siano interni ad una sfera (33) deve aversi: $(c_2 - 2a_2)^2 + 2(\pm c_2 + a_1)^2 + c_2^2 < 2$, quindi $c_2 = 1$, $1 - 2a_2 = 0$ che è assurdo. Analogamente, perchè V_1 o V_2 siano interni a una sfera (36) deve aversi: $2a_1^2 + (\pm c_1 - 2a_2)^2 + c_1^2 < 2$, quindi $c_1 = 1$, $\pm 1 - 2a_2 = 0$ che non può essere; infine perchè V_3 o V_4 siano interni a una sfera (36) deve aversi: $(c_1 - 2a_1)^2 + 2(\pm c_1 - 2a_2)^2 + c_1^2 < 4$, quindi $c_1 = 1$ e una o l'altra delle somme $1 - 2a_1$, $\pm 1 - 2a_2$ nulla, ciò che non può essere.

L'unico movimento, oltre l'identità che riporti $P_{0, \frac{1}{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$ in sè

è la riflessione: $z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0$, ma i suoi coefficienti

non soddisfano nè al primo gruppo, nè al secondo gruppo delle condizioni (28), e perciò esso non è di G^0 . Resta pertanto dimostrato che il gruppo G^0 del lemma 9 è il gruppo $G_{0, \frac{1}{2}}^0; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$.

I gruppi congruenziali $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$, $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$.

9. — Proveremo che ora il gruppo congruenziale G^0 di cui il lemma 8, cioè che il gruppo dei movimenti di 1.^a specie a determinante ± 1 ,

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{2})z + (b_1 + ib_2\sqrt{2})}{(c_1 + ic_2\sqrt{2})z + (d_1 + id_2\sqrt{2})},$$

soddisfacenti le condizioni:

$$(22) \quad \begin{cases} D = 1, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2} \end{cases}$$

oppure:

$$(23) \quad \begin{cases} D = -1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

e dei movimenti di 2.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{2}) z_0 + (b_1 + i b_2 \sqrt{2})}{(c_1 + i c_2 \sqrt{2}) z_0 + (d_1 + i d_2 \sqrt{2})},$$

soddisfacenti le condizioni:

$$(24) \quad \begin{cases} D = 1, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

oppure:

$$(25) \quad \begin{cases} D = -1, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

è il gruppo $G^0 = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}$.

Infatti le sostituzioni ellittiche di G^0 hanno il periodo 2, 3, 4, onde se due sfere di riflessioni di G^0 si attraversano formano angoli diedri $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$.

Le riflessioni di G^0 per $D = 1$ hanno la espressione:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{2}) z_0 + i b_2 \sqrt{2}}{i c_2 \sqrt{2} z_0 + (a_1 - i a_2 \sqrt{2})},$$

con

$$(37) \quad a_1^2 + 2a_2^2 + 2b_2c_2 = 1,$$

e le congruenze (24) diventano:

$$(38) \quad a_1 + a_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2};$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(39) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_2} \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_2^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_2 = 0$, quindi per la (37) $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$, e per la (38) $b_2 = 2k + 1$, cioè hanno per equazione:

$$\eta = \frac{2k+1}{2}, \quad \text{con } k \text{ intero qualunque.}$$

Le riflessioni di G^0 a determinante -1 , hanno per espressione:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{2}z_0 + b_1)}{c_1z_0 + (-a_1 + ia_2\sqrt{2})}$$

con

$$(40) \quad a_1^2 + 2a_2^2 + b_1c_1 = 1,$$

e le (25) diventano:

$$(41) \quad a_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}.$$

Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(42) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{2}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1 = 0$, quindi per le (40) e (41), $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$, $b_1 = 2k + 1$, cioè hanno per equazione:

$$\xi = \frac{2k+1}{2}, \quad \text{con } k \text{ intero arbitrario.}$$

Consideriamo del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (Tavola 1^a F. 7)

$$\xi = \pm \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2},$$

la porzione esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0; \quad b_1 = c_1 = 1; \quad (40), (41))$$

che è la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$, che è come ora dimostreremo la

piramide fondamentale di G^0 . Infatti $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ non è attraversata

da nessun piano di riflessione di G^0 , nè attraversata lungo gli spigoli da sfere di riflessioni di G^0 . I verti di $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ sono:

$$V_1, V_2, V_3, V_4 \equiv \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2} \right) ; \quad V_0 = \infty ;$$

e nessuno di essi è interno alle sfere (39) o (42). Infatti perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni ad una sfera (39) deve aversi:

$$(\pm c_2 - 2a_2)^2 + 2(\pm c_2 + a_1)^2 + c_2^2 < 2,$$

quindi $c_2 = 1$, $\pm 1 - 2a^2 = 0$ ciò che non può essere. Analogamente perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni a una sfera (42) deve aversi:

$$(\pm c_1 - 2a_1)^2 + 2(\pm c_1 - 2a_2)^2 + c_1^2 < 4,$$

quindi $c_1 = 1$, e l'una o l'altra delle somme $\pm 1 - 2a_1$, $\pm 1 - 2a_2$ nulla, ciò che non può essere.

I movimenti che riportano $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ in se sono:

$$G_4^0 \sim \left\{ \begin{array}{l} z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \quad ; \quad z' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z ; \\ z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 \quad ; \quad z' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 ; \end{array} \right.$$

e di essi il 2° non è di G^0 perchè i suoi coefficienti non soddisfano le congruenze (23), il 3° non è di G^0 perchè i suoi coefficienti non soddisfano le congruenze (24), il 4° non è di G_0 perchè i suoi coefficienti non soddisfano le congruenze (25); concludiamo che nessun movimento di G^0 oltre l'identità riporta $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ in se, cioè G^0 è il gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

Osserviamo che la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ può ottenersi associando

alla piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ la simmetrica rispetto al piano $\eta = 0$, o alla

piramide $P_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ la simmetrica rispetto al piano $\xi = 0$, quindi

richiamando i risultati ottenuti nei paragrafi 6 e 8 concludiamo: *il gruppo G di movimenti di 1.ª specie:*

$$(a) \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{2})z + (b_1 + i b_2 \sqrt{2})}{(c_1 + i c_2 \sqrt{2})z + (d_1 + i d_2 \sqrt{2})}$$

a determinante ± 1 con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$, interi assoluti che soddisfino: se $D = 1$ le (15), se $D = -1$ le congruenze (16) è un gruppo $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$; oppure: il gruppo di movimenti di 1.^a specie (a) a determinante ± 1 per i quali se $D = 1$ sia soddisfatto l'uno o l'altro dei due sistemi di congruenze di cui si compone le (26), e se $D = -1$ l'uno o l'altro dei due sistemi di congruenze di cui si compone le (27) è un gruppo $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

I gruppi G^0 corrispondenti alle altre 10 divisioni.

10. — Noi abbiamo determinato aritmeticamente i gruppi di movimenti corrispondenti a sette delle divisioni trovate nel paragrafo 1 di questo capitolo, per i quali i coefficienti delle espressioni analitiche dei loro movimenti sono numeri interi di corpi quadratici immaginari. Non è la stessa cosa per i gruppi corrispondenti alle altre 10 divisioni, per i quali le espressioni aritmetiche dei coefficienti delle sostituzioni che ne rappresentano i movimenti sono però quelle che risultano dal paragrafo 4, formule A) B), C), D) della 1.^a parte del lavoro. Noi ci limiteremo qui a dire che gli altri 10 gruppi propriamente discontinui in S la cui piramide fondamentale è quadrangolare con i vertici della base propri sono, come risulta dal paragrafo 1. i gruppi:

$$G^0_{0, \frac{\sqrt{5+1}}{4}; 0, \frac{i}{2}}; G^0_{-\frac{\sqrt{5+1}}{4}, \frac{\sqrt{5+1}}{4}; 0, \frac{i}{2}}; G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, i \frac{\sqrt{5+1}}{4}};$$

$$G^0_{-\frac{\sqrt{5+1}}{4}, \frac{\sqrt{5+1}}{4}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}; G^0_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}; G^0_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}};$$

$$G^0_{-\frac{\sqrt{5+1}}{4}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}; G^0_{-\frac{\sqrt{5+1}}{4}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}; G^0_{-\frac{\sqrt{5+1}}{4}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}};$$

$$G^0_{-\frac{\sqrt{5+1}}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$$

e che si ha in generale (paragrafo 3. formula (4) della 1.^a parte)

$$G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0 \left\{ \begin{array}{l} G \sim \left[z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\sigma \end{pmatrix} z; z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\sigma \end{pmatrix} z; z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i\sigma_1 \end{pmatrix} z; z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2i\tau_1 \end{pmatrix} z \right. \\ \left. G \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0 ; \right.$$

ove dentro la parentesi quadra si sono scritti i movimenti di 1.^a specie generatori del sottogruppo di movimenti di 1.^a specie di $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}^0$ invariante di indice 2.

CAPITOLO 2.º

**Le 7 divisoni dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari
con 1 solo vertice della base improprio.**

11. — Sia improprio, oltre il vertice V_0 della piramide $P_{\sigma, \tau, i \sigma_1, i \tau_1}$ anche il vertice V_1 della base, si dovranno avere al solito tra i numeri $a_{i, k}$ le relazioni:

$$a) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{1,4}} = 2; \quad b) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{2,3}} > \frac{1}{2}; \quad c) \frac{1}{a_{2,3}} + \frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{2}; \quad d) \frac{1}{a_{3,4}} + \frac{1}{a_{1,4}} > \frac{1}{2}.$$

Possiamo supporre come è lecito $a_{1,2} \leq a_{1,4}$, allora dalla a) si ha :

$$\alpha) \quad a_{1,2} = a_{1,4} = 4,$$

oppure:

$$\beta) \quad a_{1,2} = 3; \quad a_{1,4} = 6.$$

Nel caso α) si ha dalla b) $\frac{1}{a_{2,3}} > \frac{1}{4}$, e dalla d) $\frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{4}$, e soddisfatte queste due ultime condizioni resta soddisfatta la c). I casi possibili sono quindi:

I)	$a_{1,2} = a_{1,4} = 4; \quad a_{2,3} = a_{3,4} = 2;$
II)	$a_{1,2} = a_{1,4} = 4; \quad a_{2,3} = 2, \quad a_{3,4} = 3;$
γ)	$a_{1,2} = a_{1,4} = 4; \quad a_{2,3} = 3, \quad a_{3,4} = 2,$
III)	$a_{1,2} = a_{1,4} = 4; \quad a_{2,3} = a_{3,4} = 3.$

Nel caso β) dalla d) si ha: $\frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{3}$, cioè $a_{3,4} = 2$; per $a_{3,4} = 2$, la c) è vera qualunque sia $a_{2,3}$, mentre dalla b) si ha: $\frac{1}{a_{2,3}} > \frac{1}{6}$, onde $a_{2,3} = 2, 3, 4, 5$ quindi le altre soluzioni possibili delle disequaglianze $a), b), c), d)$ sono:

- IV) $a_{1,2} = 3, a_{1,4} = 6, a_{3,4} = 2, a_{2,3} = 2$;
 V) $a_{1,2} = 3, a_{1,4} = 6, a_{3,4} = 2, a_{2,3} = 3$;
 VI) $a_{1,2} = 3, a_{1,4} = 6, a_{3,4} = 2, a_{2,3} = 4$;
 VII) $a_{1,2} = 3, a_{1,4} = 6, a_{3,4} = 2, a_{2,3} = 5$.

Le costruzioni geometriche per determinare i tipi I, II, ..., VII ce ne mostrano l'esistenza e l'univocità, le piramidi corrispondenti alle soluzioni II e γ) sono identiche. Concludiamo quindi: *Le divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari con un solo vertice della base improprio sono 7, o ciò che è lo stesso:*

I gruppi:

$$G^0_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}} \quad G^0_{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}} \quad ; \quad G^0_{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}} \quad ;$$

$$G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad ; \quad G^0_{0, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}} \quad ; \quad G^0_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i\sqrt{3}}{2}} \quad ; \quad G^0_{0, \frac{1}{2}; -i\frac{\sqrt{5+1}}{4}, i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad ;$$

sono propriamente discontinui, e sono tutti e solo quelli in cui poliedro fondamentale è una piramide quadrangolare con un solo vertice della base improprio. La tavola 2.^a ci dà le tracce di tali piramidi sul piano improprio.

Nei paragrafi 12 e 13 seguenti daremo aritmeticamente i gruppi $G^0_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$; $G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$.

$$\text{I gruppi } G^0_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}} \quad ; \quad G^0_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

12. — Nel lavoro già citato *), a pag. 43, si dimostra che il gruppo G^0 formato dai movimenti:

*) G. SANSONE. *Divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e tetraedri.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Vol. XII).

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{2\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{2\alpha z + \beta}{2\gamma z + 2\delta}.$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ e tali che sia rispettivamente:

$$\alpha\delta - 2\beta\gamma = 1, i; \quad 2\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i;$$

ampliato con la riflessione $z' = z_0$ ha per piramide fondamentale Π , la porzione del prisma triangolare:

$$\eta = 0; \quad \xi = \frac{1}{2}; \quad \xi - \eta = 0;$$

esterna alla sfera:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}.$$

Operando su Π con l'omotetia $z' = \sqrt{2} z$, e trasformando conseguentemente G^0 con la sostituzione $z' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z$, ove si tenga conto che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta\sqrt{2} \\ \gamma\sqrt{2} & \delta \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{2} & \beta \\ \gamma & \delta\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

concludiamo che il gruppo formato dai movimenti:

$$z' = \frac{\alpha\sqrt{2}z + \beta}{\gamma z + \delta\sqrt{2}}; \quad z' = \frac{\alpha z + \beta\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2}z + \delta}, \quad D = 1, i,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ ampliato con la riflessione $z' = z_0$ ha per piramide fondamentale Π' la porzione del prisma:

$$\eta = 0; \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \xi - \eta = 0;$$

esterna alla sfera:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Associando a Π' la simmetrica rispetto al piano $\xi - \eta = 0$, si ha che:

$G_0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$ è il gruppo di movimenti:

$$z' = \frac{\alpha \sqrt{2}z + \beta}{\gamma z + \delta \sqrt{2}}, \quad z' = \frac{\alpha z + \beta \sqrt{2}}{\gamma \sqrt{2}z + \delta}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ e con il determinante dei coefficienti uguale $1, i$.

Dimostriamo ora che il gruppo di movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha \sqrt{2}z + \beta}{\gamma z + \delta \sqrt{2}}; \quad z' = \frac{\sigma z + \beta \sqrt{2}}{\gamma \sqrt{2}z + \delta}$$

con:

$$2\alpha\delta - \gamma\beta = 1; \quad \alpha\delta - 2\beta\gamma = 1,$$

e $\sigma, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ ampliato con la riflessione $z' = z_0$ da un gruppo G^0 che è il gruppo $G^0_0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Osserviamo che le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha \sqrt{2}; \beta \\ \gamma; \delta \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sono ellittiche se $|\alpha + \delta| \sqrt{2} < 2$, cioè per $\alpha + \delta = 0, \pm 1$, ossia sono a periodo 2, 4. Le sostituzioni $z' = \begin{pmatrix} \alpha; \beta \sqrt{2} \\ \gamma \sqrt{2}; \delta \end{pmatrix} z$ sono ellittiche se $\alpha + \delta = 0, \alpha + \delta = \pm 1$, ma essendo quest'ultima incompatibile con la condizione $\alpha\delta = 1, (\text{mod. } 2)$, resta solo il caso $\alpha + \delta = 0$, cioè le sostituzioni ellittiche hanno il periodo 2; concludendo le sostituzioni ellittiche di G^0 sono a periodo 2, 4, onde se due sfere di riflessione (piani) si tagliano formano angoli diedri aventi per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.

I movimenti di 2.^a specie di G^0 sono riflessioni se hanno la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2) \sqrt{2} z_0 + i b_2}{i c_2 z_0 + (a_1 - i a_2) \sqrt{2}}, \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + i b_2 \sqrt{2}}{i c_2 \sqrt{2} z_0 + (a_1 - i a_2)}$$

essendo rispettivamente:

$$(43) \quad 2(a_1^2 + a_2^2) + b_2 c_2 = 1. \quad (44) \quad a_1^2 + a_2^2 + 2b_2 c_2 = 1$$

e avendo le sfere di riflessioni corrispondenti per equazione:

$$(43^*) \quad \left(\xi - \frac{a_2 \sqrt{2}}{c_2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1 \sqrt{2}}{c_2} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_2^2};$$

$$(44^*) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_2 \sqrt{2}} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_2 \sqrt{2}} \right) + \zeta^2 = \frac{1}{2 c_2^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_2 = 0$, e corrispondenti al 1.º tipo non ne esistono, essendo per la (43) $c_2 \equiv 1 \pmod{2}$; nella (44) facendo $c_2 = 0$ si ha $a_1 = \pm 1$, $a_2 = 0$; oppure $a_1 = 0$, $a_2 = \pm 1$, e i piani di riflessione hanno per equazione

$$\eta = \frac{l}{\sqrt{2}}, \quad \xi = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

con l e m interi arbitrari.

La porzione del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (Tavola 2.^a, F. 1).

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

esterna alla sfera di riflessione: (Tavola 2.^a, F. 1).

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0, \quad b_2 = c_2 = 1, \quad (43),$$

forma la piramide $P_0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$ che è il poliedro fondamentale del gruppo G^0 . Infatti in $P_0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$ non penetra alcun piano di riflessione, e nessuna sfera vi penetra lungo uno spigolo, perchè quelle che bisegnano i diedri V_2V_3 e V_3V_4 hanno il raggio eguale a $\sqrt{2}$ e non sono del gruppo. I vertici di $P_0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$ sono:

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); V_2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); V_3 \equiv (0, 0, 1); V_4 \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); V_0 = \infty$$

ed essi non sono interni ad alcuna sfera di riflessione (43*), (44*). Infatti perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni a una sfera (43*) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} \alpha) & \quad (c_2 - 2a_2)^2 + (c_2 + 2a_1)^2 < 2, \\ \beta) & \quad (c_2 - 2a_2)^2 + 4a_1^2 + c_2^2 < 2, \\ \gamma) & \quad 2a_2^2 + 2a_1^2 + c_2^2 < 1, \\ \delta) & \quad 4a_2^2 + (c_2 + 2a_1)^2 + c_2^2 < 2; \end{aligned}$$

Perchè sussista la α) deve aversi: $c_2=2a_2=-2a_1$, e dalla (43) $2c_2^2+2b_2c_2=2$, quindi $c_2=1$, cioè che è incompatibile con la condizione $1=2a_2=-2a_1$; può anche aversi $c_2-2a_2=0$, $c_2+2a_1=\pm 1$; oppure $c_2-2a_2=\pm 1$, $c_2+2a_1=0$, e queste sono incompatibili tra loro, come si vede subito sommande. Per la β) deve aversi: $c_2=1$, $a_1=0$, $1-2a_2=C$ cioè che è impossibile, la γ) non è possibile essendo $|c_2|\geq 1$, per la δ) si ha $c_2=1$, $a_2=0$, $1+2a_1=0$, ciò che non può essere.

Analogamente perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni alle sfere (44*) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} \alpha^*) & (c_2 - a_2)^2 + (c_2 + a_1)^2 < 1, \\ \beta^*) & (c_2 - a_2)^2 + a_1^2 + c_2^2 < 1, \\ \gamma^*) & a_2^2 + a_1^2 + 2c_2^2 < 1, \\ \delta^*) & a_2^2 + (c_2 + a_1)^2 + c_2^2 < 1. \end{aligned}$$

Per la $\alpha^*)$ deve aversi $c_2=a_2=-a_1$ e dalla (44) $2c_2^2+2b_2c_2=1$, che è impossibile, le $\beta^*)$, $\gamma^*)$, $\delta^*)$ sono impossibili essendo $|c_2|\geq 1$.

L'unico movimento che riporti $P_0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$ in se oltre l'identità è la riflessione:

$$z' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0,$$

che essendo a determinante i non è di G^0 . Resta così dimostrato che G^0 è il gruppo $G^0_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Il gruppo congruenziale $G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$.

13. — Vogliamo noi dimostrare che il gruppo di movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z + (b_1 + 2b_2\varepsilon)}{(c_1 + 2c_2\varepsilon)z + (d_1 + 2d_2\varepsilon)},$$

a determinante ± 1 , con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$, interi assoluti, $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$,

ampliato con la riflessione $z' = z_0$ è il gruppo $G^0_{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$. Se $D = 1$, le sostituzioni ellittiche del nostro gruppo si hanno per $|a_1 + d_1 + 2(a_2 + d_2)\varepsilon| < 2$, cioè quando la somma del 1.° e 4.° coefficiente è 0, oppure ± 1 cioè hanno periodo 2, 3. Se $D = -1$, le sostituzioni ellittiche si hanno quando la somma del 1.° e 4.° coefficiente è $l\sqrt{3}$, con $l = 0, \pm 1$, cioè le sostituzioni ellittiche hanno periodo 2, o 6.

Concludendo, due sfere (piani) di riflessioni possono tagliarsi secondo gli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$.

Le riflessioni del gruppo a determinante 1, corrispondono alle sostituzioni

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z_0 + ib\sqrt{3}}{ic\sqrt{3}z_0 + (a_1 + 2a_2\varepsilon^2)},$$

con

$$(45) \quad (a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 + 3bc = 1,$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(46) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1 - a_2}{c\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3c^2}.$$

I piani di riflessione si ottengono per $c = 0$, e dalla (44) $a_2 = 0, a_1 - a_2 = \pm 1$, cioè $a_1 = \pm 1$, hanno quindi per equazione:

$$\eta = \frac{b\sqrt{3}}{2},$$

con b intero qualunque.

Se $D = -1$ sono riflessioni tutte e solo le sostituzioni:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z_0 + b}{cz_0 - (a_1 + 2a_2\varepsilon^2)},$$

con

$$(47) \quad (a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 + bc = 1;$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(48) \quad \left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{c} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{3}}{c} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c=0$, quindi dalla (47) $a_2=0$, $a_1=\pm 1$, e perciò hanno per equazione:

$$\xi = \frac{b}{2},$$

con b intero qualunque.

La porzione del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (Tavola 2.^a F. 4).

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}; \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0, \quad b = c = 1, \quad (47))$$

è la piramide $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ che è la fondamentale del gruppo in esame. Infatti nessun piano di riflessione penetra in $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ nessuna sfera vi penetra lungo uno spigolo, perchè le sfere che dividono a i diedri V_3V_2, V_3V_4 in due diedri aventi per misura $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ hanno per raggio 2 oppure $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e non sono del gruppo in esame, quella che bisega il diedro V_1V_2 ha il raggio $\sqrt{3}$ e anche essa non è del gruppo.

I vertici di $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ sono:

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right); V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right); V_3 \equiv (0, 0, 1); V_4 \equiv \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right); V_0 \equiv \infty;$$

e nessuno di essi può essere interno alle sfere (46), (48). Infatti perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni a una sfera (46) si dovrebbero verificare rispettivamente le disequaglianze:

$$\begin{aligned} 3(c-2a_2)^2 + (3c+2(a_1-a_2))^2 &< 4, \\ 3(c-2a_2)^2 + 4(a_1-a_2)^2 + 9c^2 &< 4, \\ 3a_2^2 + (a_1-a_2)^2 + 3c^2 &< 1, \\ 12a_2^2 + (3c+2(a_1-a_2))^2 + 3c^2 &< 4. \end{aligned}$$

Ora perchè sussista la 1.^a di esse dovrebbe aversi: $c-2a_2=0$, $3c+2a_1-2a_2=0$; quindi $a_1=-2a_2$, $c=2a_2$, contro la (45) che può scriversi $a_1^2+4a_2^2-2a_1a_2+3bc=1$; oppure $c-2a_2=0$, e $3c+2a_1-2a_2=\pm 1$: o infine $c-2a_2=\pm 1$, $3c+2a_1-2a_2=0$ e in entrambi i casi le due eguaglianze sono incompatibili, essendo per una di esse c pari e per l'altra dispari.

La 2.^a e la 3.^a disequaglianza avanti scritte non sono possibili essendo $|c|\geq 1$, per la 4.^a dovrebbe aversi: $c=1$, $a_2=0$, $3+2a_1=0$, che non può essere. Analogamente perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni a una sfera (48) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} [c-2(a_1-a_2)]^2 + 3(c-2a_2)^2 &< 4, \\ [c-2(a_1-a_2)]^2 + 12a_2^2 + 3c^2 &< 4, \\ (a_1-a_2)^2 + 3a_2^2 + c^2 &< 1, \\ 4(a_1-a_2)^2 + 3(c-2a_2)^2 + c^2 &< 4. \end{aligned}$$

Perchè sussista la 1.^a deve essere: $c+2a_2-2a_1=0$, $c-2a_2=0$, cioè $c=2a_2$, $a_1=2a_2$, che non è possibile per la (47), oppure $c-2a_1+2a_2=0$, $c-2a_2=\pm 1$, ovvero $c-2a_1+2a_2=\pm 1$, $c-2a_2=0$, e in entrambi i casi le due eguaglianze sono incompatibili, essendo per una di esse c , pari, per l'altra c dispari, ciò che non può essere. Perchè sussista la 2.^a delle disequaglianze avanti scritte deve aversi: $c=1$, $a_2=0$, $1-2a_1+2a_2=0$ che non può essere, la terza è impossibile perchè $|c|\geq 1$, per la 4.^a si dovrebbe avere: $c=1$, $a_1=a_2$, $1-2a_2=0$ che non può essere. Quindi i vertici di $P_{o, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ non sono interni ad

alcuna sfera di riflessione.

Non esiste, oltre l'identità, alcun movimento che riporti $P_{o, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ in sè, restato pertanto dimostrato il nostro teorema.

CAPITOLO 3.º

**Le 7 divisioni dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari
con due soli vertici della base impropri.**

14. Siano V_1, V_2 i vertici impropri della base, V_3 e V_4 i propri, tenendo le solite notazioni fra i numeri $a_{i,k}$ debbono aversi le relazioni:

$$a) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{1,4}} = \frac{1}{2}; \quad b) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{2,3}} = \frac{1}{2}; \quad c) \frac{1}{a_{2,3}} + \frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{2}; \quad d) \frac{1}{a_{1,4}} + \frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{2}.$$

Per la $a)$ i valori possibili per $a_{1,4}$ sono 3, 4, 6.

Sia $a_{1,4} = 3$, dalla $a)$ segue $a_{1,2} = 6$, dalla $b)$ $a_{2,3} = 3$, e la $c)$ e $d)$ danno $\frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{6}$ talchè per il sistema $a), b), c), d)$ si hanno le seguenti soluzioni:

I)	$a_{1,4} = 3, a_{1,2} = 6, a_{2,3} = 3, a_{3,4} = 2,$
II)	$a_{1,4} = 3, a_{1,2} = 6, a_{2,3} = 3, a_{3,4} = 3,$
III)	$a_{1,4} = 3, a_{1,2} = 6, a_{2,3} = 3, a_{3,4} = 4,$
IV)	$a_{1,4} = 3, a_{1,2} = 6, a_{2,3} = 3, a_{3,4} = 5.$

Se $a_{1,4} = 4$, per la $a)$ è $a_{1,2} = 4$, per la $b)$ $a_{2,3} = 4$, e dalla $c)$ e $d)$ $\frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{4}$, si hanno quindi per il sistema $a), b), c), d)$ le altre soluzioni:

V)	$a_{1,4} = a_{1,2} = a_{2,3} = 4 \quad ; \quad a_{3,4} = 2 ;$
VI)	$a_{1,4} = a_{1,2} = a_{2,3} = 4 \quad ; \quad a_{3,4} = 3 .$

Infine se $a_{1,4} = 6$, è per la a) $a_{1,2} = 3$, dalla b) $a_{2,3} = 6$, e dalle c) e d) si ha $\frac{1}{a_{3,4}} > \frac{1}{3}$ cioè $a_{3,4} = 2$, si ha perciò per il nostro sistema l'altra soluzione:

$$\text{VII)} \quad a_{1,4} = a_{2,3} = 6; a_{1,2} = 3; a_{3,4} = 2.$$

Le costruzioni geometriche per determinare ciascuno dei tipi trovati ce ne mostrano l'esistenza e l'univocità. Concludiamo quindi: *Le divisioni regolari dello spazio iperbolico con piramidi quadrangolari con due soli vertici della base impropri sono sette*, o ciò che è lo stesso: *i gruppi* $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -i, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $G^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$; $G^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}$; $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$ sono propriamente discontinui, e sono tutti e solo quelli il cui poliedro fondamentale è una piramide quadrangolare con 2 soli vertici della base impropri. La tavola III.^a ci dà le tracce delle facce di queste piramidi sul piano improprio.

Nei paragrafi seguenti daremo aritmeticamente i gruppi corrispondenti alla 5.^a, 1.^a, 7.^a divisione.

**Un lemma sulla composizione delle sostituzioni lineari
sopra una variabile e i gruppi** $G - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$, $G^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$

15. — Dai risultati del paragrafo 12 del 2.^o capitolo si ha che il gruppo di movimen'i di 1.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha\sqrt{2}z + \beta}{\gamma z + \delta\sqrt{2}}; \quad z' = \frac{\sigma z + \beta\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{2}z + \delta},$$

a determinante ± 1 , ha per poliedro fondamentale la piramide

$$P - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}} \quad \text{cioè è un } G - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Per determinare la costituzione aritmetica del gruppo $G^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$ premetteremo il seguente lemma:

Lemma 10. Tutte le sostituzioni :

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$, a determinate $D = 1, i$, tali che sia soddisfatto l'uno o l'altro dei due sistemi di congruenze :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \delta \equiv \gamma, \pmod{2}, \\ \beta \equiv 0, \pmod{2}, \\ \gamma \equiv 0, \pmod{1-i}, \end{array} \right. \quad (50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv \beta \equiv \delta, \pmod{2}, \\ \gamma \equiv 0, \pmod{1-i}; \end{array} \right.$$

formano gruppo, proveremo anzi che se due sostituzioni sono tali che i loro coefficienti soddisfino alle (49) oppure alle (50), il loro prodotto soddisfa le (49), se una di esse soddisfa le (49) e l'altra le (50) il prodotto soddisfa le (50).

Supponiamo infatti che le due sostituzioni $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{smallmatrix} \right)$ il cui prodotto è $\left(\begin{smallmatrix} \alpha\alpha' + \gamma\beta' & \beta\alpha' + \delta\beta' \\ \alpha\gamma' + \gamma\delta' & \beta\gamma' + \delta\delta' \end{smallmatrix} \right)$ soddisfino le (49) sia cioè :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \delta \equiv \gamma, \pmod{2}, \\ \beta \equiv 0, \pmod{2}, \\ \gamma \equiv 0, \pmod{1-i}; \end{array} \right. \quad (49^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' + \delta' \equiv \gamma', \pmod{2}, \\ \beta' \equiv 0, \pmod{2}, \\ \gamma' \equiv 0, \pmod{1-i}; \end{array} \right.$$

dalle ipotesi segue subito:

$$\begin{aligned} \beta\alpha' + \delta\beta' &\equiv 0, \pmod{2}, \\ \alpha\gamma' + \gamma\delta' &\equiv 0, \pmod{1-i} \end{aligned}$$

per provare il lemma nella ipotesi fatta, ci resta a provare che:

$$\alpha\alpha' + \gamma\beta' + \alpha\gamma' + \gamma\delta' + \beta\gamma' + \delta\delta' \equiv 0, \pmod{2},$$

oppure:

$$\alpha(\alpha' + \gamma') + \delta'(\gamma + \delta) \equiv 0, \pmod{2},$$

ossia:

$$\alpha\delta' + \delta'\alpha \equiv 0, \pmod{2},$$

che è vera.

Si faccia ora l'ipotesi che la prima delle sostituzioni date soddisfi la (49), l'altra le (50), sia cioè:

$$(49) \quad \begin{cases} \alpha + \delta \equiv \gamma, \pmod{2}, \\ \beta \equiv 0, \pmod{2}, \\ \gamma \equiv 0, \pmod{1-i}; \end{cases} \quad (50^*) \quad \begin{cases} \alpha' \equiv \beta' \equiv \delta', \pmod{2}, \\ \gamma' \equiv 0 \pmod{1-i}; \end{cases}$$

proveremo che la sostituzione prodotta soddisfa le (50). Dall'ultima delle (49) e (50*) segue subito:

$$\alpha\gamma' + \gamma\delta' = 0, \pmod{1-i};$$

ci resta da provare che è:

$$\alpha\alpha' + \gamma\beta' \equiv \beta\alpha' + \delta\beta' \equiv \beta\gamma' + \delta\delta', \pmod{2}.$$

Per provare che:

$$\alpha\alpha' + \gamma\beta' \equiv \beta\alpha' + \delta\beta', \pmod{2},$$

basterà provare, tenendo conto delle (49) e (50*) che è:

$$\alpha\alpha' + \gamma\alpha' \equiv \delta\alpha', \pmod{2},$$

ovvero:

$$\alpha'(\alpha + \gamma + \delta) = 0, \pmod{2},$$

che è vera per la prima delle (49). Per provare che è

$$\alpha\alpha' + \gamma\beta' \equiv \beta\gamma + \delta\delta', \pmod{2},$$

basterà provare che $\alpha\alpha' + \gamma\alpha' \equiv \delta\alpha'$ (mod. 2) che è vera, come si è già visto.

Analoghe dimostrazioni, che per brevità si omettono si fanno nel caso che la prima delle sostituzioni soddisfi alle (50) e la 2.^a alle (49) oppure entrambe soddisfino le (50). Ciò premesso dimostreremo: *che il gruppo di cui il lemma 10, ampliato con la riflessione $z' = z_0$ ha per poliedro fondamentale una piramide del tipo $P \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$*

Si cominci col determinare il periodo delle sostituzioni ellittiche del gruppo.

Se $D = 1$, si hanno le sostituzioni ellittiche per $\alpha + \delta = 0, \pm 1$. Ma essendo per le (49) e (50) $\gamma \equiv 0, \pmod{1-i}$ e quindi $\alpha\delta \equiv 1, \pmod{1-i}$ segue che l'ipotesi $\alpha + \delta = \pm 1$, non è possibile, resta perciò da considerare solo il caso $\alpha + \delta = 0$, e le sostituzioni ellittiche corrispondenti hanno il periodo 2.

Se $D=i$ una sostituzione del gruppo è ellittica se $\frac{1-i}{\sqrt{2}}(\alpha+\delta)$ è reale e

$\left| \frac{1-i}{\sqrt{2}}(\alpha+\delta) \right| < 2$ cioè $\alpha + \delta = 0, \alpha - \delta = 1 + i$, e quindi il periodo delle corrispondenti sostituzioni, ellittiche è 2 o 4. Concludendo: le sostituzioni ellittiche del gruppo hanno il periodo 2, 4 cioè se due sfere di riflessioni (piani si tagliano formano angoli diedri $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$. Per $D=1$ le sostituzioni di 2.^a specie del gruppo sono riflessioni se hanno per espressione

$$z' = \frac{(a + ia_1)z_0 + il_1}{ic_1 z_0 + (a - ia_1)}$$

con

$$(51) \quad a^2 + a_1^2 + b_1 c_1 = 1,$$

e le (49) e (50) diventano nel nostro caso rispettivamente:

$$(52) \quad b_1 \equiv c_1 \equiv 0, \pmod{2}; \quad (53) \quad \begin{cases} c_1 \equiv 0, \pmod{2}, \\ a + i(b_1 + a_1) \equiv 0, \pmod{2}; \end{cases}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(54) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1} \right)^2 + \left(\eta + \frac{a}{c_1} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1=0$ e dalla (51) $a=0, a_1 = \pm 1$; oppure $a = \pm 1, a_1=0$. Se $c=0, a=0, a_1 = \pm 1$, le (52) ci danno $b_1 = 2k$, le (53) $b_1 = 2k + 1$, sicchè i piani di riflessione hanno per equazione:

$$\xi = \frac{l}{2},$$

con l intero qualunque.

Se è invece $c_1=0$, $a=\pm 1$, $a_1=0$, dalle (49) segue $b_1=2k$, le (53) non possono sussistere, perchè l'ultima di esse diviene $\pm 1 + ib_1 \equiv 0 \pmod{2}$ che non può essere. È solo possibile quindi $b_1=2k$, e i piani di riflessione corrispondenti hanno per equazione

$$\eta = k,$$

con k intero qualunque.

Per $D=i$, le sostituzioni di 2.^a specie del gruppo sono riflessioni se hanno per espressione:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2)z_0 + b(1-i)}{c(1-i)z_0 + (ia_1 + a_2)},$$

con

$$(55) \quad a_1^2 + a_2^2 + 2bc = 1,$$

e le (49) e (50) diventano rispettivamente:

$$(56) \quad \begin{cases} b \equiv 0, \pmod{2}, \\ a_1 + a_2 \equiv ci, \pmod{1+i}; \end{cases} \quad (a) \quad \begin{cases} a_1 \equiv a_2, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv bi, \pmod{1-i}. \end{cases}$$

Si osservi che le (a) sono incompatibili con la (55), restano pertanto le condizioni (55) e (56) per le riflessioni del gruppo a determinante i , e l'equazione delle corrispondenti sfere di riflessione è

$$(57) \quad \left(\xi + \frac{a_2 - a_1}{2c} \right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2c} \right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c^2}.$$

Non può farsi in questo caso l'ipotesi $c=0$, perchè dalle (55) si avrebbe: $a_1=\pm 1, 0$; $a_2=0, \pm 1$, e dalla seconda delle (56) $a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{1+i}$ cioè condizioni incompatibili, perciò per il determinante i non si hanno piani di riflessione.

Si consideri ora del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (Tavola 3.^a, F. V).

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \eta = 1,$$

la porzione esterna alla sfera di riflessione:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}, \quad (c = 1, a_2 = 0, a_1 = 1, b = 0, (56), (57))$$

si ottiene una piramide P che è del tipo $P - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Nell'interno di P non penetra alcun piano di riflessione, e nessuna riflessione vi penetra lungo uno spigolo, perchè quella che bisega il diedro V_3V_4 , unica possibile, ha il raggio eguale a 1, e centro nel punto di coordinate $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ e non può essere quindi nè una sfera (54) nè una (57).

I vertici di P sono:

$$V_1 \equiv \left(0, 1, 0\right); V_2 \equiv \left(0, 0, 0\right); V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right); V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right); V_0 = \infty;$$

e nessuno di essi è interno alle sfere di riflessioni (54) e (57).

Infatti perchè V_1 sia interno a una sfera (54) deve aversi:

$$a_1^2 + (c_1 + a)^2 < 1,$$

quindi $a_1 = 0$, $a = -c_1$ e dalla (51) $c_1 = 1$, che non può essere per le (52) e (53). Perchè V_2 sia interno a una sfera (54) deve aversi: $a^2 + a_1^2 < 1$, quindi $a = 0, a_1 = 0$, e dalla (51) $b_1 = \pm 1, c_1 = \mp 1$, e ciò non può essere, essendo per le (52) e (53) $c_1 \equiv 0, (\text{mod. } 2)$. Perchè V_3 o V_4 siano interni a una sfera (54) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} (c_1 - 2a_1)^2 + 4a^2 + c_1^2 &< 4, \\ (c_1 - 2a_1)^2 + 4(c_1 + a)^2 + c_1^2 &< 4, \end{aligned}$$

dalle quali $c_1 = 1$ contro le (52) e (53) per le quali $c_1 \equiv 0, (\text{mod. } 2)$.

Analogamente perchè V_1 sia interno a una sfera (57) deve essere:

$$(a_2 - a_1)^2 + [2c - (a_1 + a_2)]^2 < 2,$$

dalla quale si ha $a_2 - a_1 = 0$, $2c - (a_1 + a_2) = 0$, cioè $a_1 = a_2 = c$, che non può essere per la (55), oppure $a_2 - a_1 = \pm 1.0$; $2c - (a_1 + a_2) = 0, \pm 1$ le quali sono incompatibili. Si ha pure, che perchè V_2 sia interno a una sfera (57) deve aversi: $(a_2 - a_1)^2 + (a_1 + a_2)^2 < 2$, ossia $a_1^2 + a_2^2 < 1$, e perciò $a_1 = a_2 = 0$ contro

la (55). Infine, perchè V_3 o V_4 siano interni a una sfera (57) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} [c + (a_2 - a_1)]^2 + (a_1 + a_2)^2 + c^2 &< 2, \\ [c + (a_2 - a_1)]^2 + [2c - (a_1 + a_2)]^2 + c^2 &< 2, \end{aligned}$$

dalle quali si ha $c=1$, e $1+(a_2-a_1)=0$, $a_1+a_2=0$; oppure $1+(a_2-a_1)=0$, $2-(a_1+a_2)=0$ ed esse sono incompatibili.

Il movimento che riporta P in se oltre l'identità è la riflessione

$$z' = z_0 + i = \begin{pmatrix} 1 & ; & i \\ 0 & ; & 1 \end{pmatrix} z_0,$$

ma i coefficienti di essa non soddisfano nè le (49) nè le (50) e perciò non è del gruppo. Resta pertanto dimostrato che il gruppo in esame ha per piramide fondamentale P che è del tipo $P_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

Si noti che per comodità di ricerca si è riferita la piramide $P_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ ad un altro sistema di assi, che non è quello adottato uniformemente nel lavoro, ma è chiaro che il gruppo $G^0_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ non è che un trasformato del gruppo trovato.

$$\text{I gruppi congruenziali } G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}} \quad , \quad G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}.$$

16. — Associando alla piramide $P_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ del paragrafo 13 (2.º capitolo) la simmetrica rispetto al piano $\xi=0$, otteniamo la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ che può considerarsi fondamentale del gruppo di movimenti di 1.ª specie $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z + (b_1 + 2b_2\varepsilon)}{(c_1 + 2c_2\varepsilon)z + (d_1 + 2d_2\varepsilon)}, \quad \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

a determinante ± 1 , con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti.

Prima di determinare la costituzione aritmetica di $G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}$ premettiamo alcune considerazioni sulla composizione di 2 sostituzioni lineari sopra una variabile. Si osservi il prodotto:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2\varepsilon & ; & b_1 + 2b_2\varepsilon \\ c_1 + 2c_2\varepsilon & ; & d_1 + 2d_2\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2\varepsilon & : & \beta_1 + 2\beta_2\varepsilon \\ \gamma_1 + 2\gamma_2\varepsilon & ; & \delta_1 + 2\delta_2\varepsilon \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} a_1\alpha_1 + c_1\beta_1 - 4(a_2\alpha_2 + c_2\beta_2) + 2\varepsilon[a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + c_1\beta_2 + c_2\beta_1 - 2(a_2\alpha_2 + c_2\beta_2)]; \\ a_1\gamma_1 + c_1\delta_1 - 4(a_2\gamma_2 + c_2\delta_2) + 2\varepsilon[a_1\gamma_2 + a_2\gamma_1 + c_1\delta_2 + c_2\delta_1 - 2(a_2\gamma_2 + c_2\delta_2)]; \\ b_1\alpha_1 + d_1\beta_1 - 4(b_2\alpha_2 + d_2\beta_2) + 2\varepsilon[b_1\alpha_2 + b_2\alpha_1 + d_1\beta_2 + d_2\beta_1 - 2(b_2\alpha_2 + d_2\beta_2)]; \\ b_1\gamma_1 + d_1\delta_1 - 4(b_2\gamma_2 + d_2\delta_2) + 2\varepsilon[b_1\gamma_2 + b_2\gamma_1 + d_1\delta_2 + d_2\delta_1 - 2(b_2\gamma_2 + d_2\delta_2)]; \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e le somme della parte reale e del coefficiente di 2ε dei singoli coefficienti della sostituzione prodotto, rispetto al modulo 2, sono identiche a quelle che si ottengono moltiplicando le due precedenti sostituzioni quando al posto di 2ε si sostituisca 1, di guisa che ricordando i lemmi 1^o, 2^o, 3^o del paragrafo 3 del 1.^o capitolo si ha che tutte le sostituzioni di 1.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z + (b_1 + 2b_2\varepsilon)}{(c_1 + 2c_2\varepsilon)z + (d_1 + 2d_2\varepsilon)},$$

a determinante ± 1 , con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti, $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, tali che sia:

$$(58) \quad \text{per } D = 1 \quad a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2},$$

$$(59) \quad \text{per } D = -1, \quad a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2},$$

formano gruppo. Ciò premesso dimostriamo che il gruppo di movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z + (b_1 + 2b_2\varepsilon)}{(c_1 + 2c_2\varepsilon)z + (d_1 + 2d_2\varepsilon)},$$

a determinante ± 1 , tali che per $D = 1$ sia soddisfatta la (58), per $D = -1$ sia soddisfatta la (59), ampliato con la riflessione $z' = z_0$ è il gruppo

$$G^0 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Al solito le sostituzioni del gruppo ellittiche hanno il periodo 2, 3, 6, onde se due sfere (piani) di riflessione si attraversano formano angoli diedri aventi per misura $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$. Un movimento di 2.^a specie a determinante 1 rappresenta una riflessione se ha la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z_0 + b(1 + 2\varepsilon)}{c(1 + 2\varepsilon)z_0 + (a_1 + 2a_2\varepsilon^2)} = \frac{[(a_1 - a_2) + ia_2\sqrt{3}]z_0 + bi\sqrt{3}}{ci\sqrt{3}z_0 + [(a_1 - a_2) - ia_2\sqrt{3}]},$$

con

$$(60) \quad (a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 + 3bc = 1;$$

e le (58) risultano soddisfatte. Le corrispondenti sfere di riflessione hanno equazione:

$$(61) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1 - a_2}{c\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3c}.$$

I piani di riflessione si ottengono per $c=0$, e dalla (60) $a_2=0$, $a_1=\pm 1$ hanno quindi per equazione: $\eta = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, con b intero qualunque.

Le sostituzioni di 2.^a specie a determinante -1 sono riflessioni se hanno la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z_0 + b_1}{c_1z_0 - (a_1 + 2a_2\varepsilon^2)} = \frac{[(a_1 - a_2) + ia_2\sqrt{3}]z_0 + b_1}{c_1z_0 + [-(a_1 - a_2) + ia_2\sqrt{3}]},$$

con

$$(62) \quad (a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 + b_1c_1 = 1,$$

e

$$(63) \quad a_1 + a_2 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}.$$

Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione.

$$(64) \quad \left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2};$$

i piani di riflessione si ottengono per $c_1=0$, dalla (62) $a_2=0, a_1=\pm 1$, (63) $b_1=2k+1$, cioè hanno per equazione:

$$\xi = \frac{2k+1}{2},$$

con k intero qualunque.

Consideriamo del prisma formato dai 4 piani di riflessione (Tavola 3ª, F. I).

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

la porzione esterna alla sfera di riflessione

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1; \quad (a_1 = a_2 = 0, b_1 = c_1 = 1, (62), (63)),$$

si forma la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ che io dico è la fondamentale del gruppo in esame.

Nell'interno di $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ non penetra alcun piano di riflessione, le sfere che dividono il diedro $V_3 V_4$ in due diedri aventi per misura $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ hanno il raggio eguale a 2, oppure a $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e non sono del gruppo, e quelle che bisegano i diedri $V_2 V_3$, o $V_1 V_4$ hanno il raggio eguale a $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e nemmeno esse possono essere sfere di riflessione del gruppo. I vertici di $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ sono:

$$\left. \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} \right\} \equiv \left(\pm \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad \left. \begin{matrix} V_3 \\ V_4 \end{matrix} \right\} \equiv \left(\mp \frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

e nessuno di essi è interno alle sfere di riflessioni del gruppo. Infatti perchè V_1, V_2 siano interni ad una sfera (61) deve aversi:

$$3(\pm c - 2a_2)^2 + [3c + 2(a_1 - a_2)]^2 < 4,$$

quindi deve aversi:

$$\pm c - 2a_2 = 0, \quad 3c + 2(a_1 - a_2) = 0,$$

oppure

$$\pm c - 2a_2 = \pm 1, 0; \quad 3c + 2(a_1 - a_2) = 0, \pm 1.$$

Le ultime condizioni sono incompatibili, risultando da una c pari, dall'altra c dispari, dalle prime si ha che c e a_1 sono pari, contrariamente alla (60) Analogamente perchè V_3, V_4 siano interni a una sfera (61) deve aversi:

$$3(\mp c - 2a_2)^2 + 4(a_1 - a_2)^2 + 9c^2 < 4,$$

che è impossibile essendo $|c| \geq 1$.

Così pure perchè V_1, V_2 siano interni a una sfera (64) deve aversi:

$$[\pm c_1 - 2(a_1 - a_2)]^2 + 3(c_1 - 2a_2)^2 < 4,$$

da cui $\pm c_1 - 2a_1 + 2a_2 = 0$, $c_1 = 2a_2$;

oppure $\pm c_1 - 2a_1 + 2a_2 = \pm 1, 0$; $c_1 - 2a_2 = 0, \pm 1$. Queste ultime sono incompatibili, dalle prime si ha c_1 e a_1 pari che non può essere per le (62). Infine perchè V_3, V_4 siano interni a una sfera (64) deve aversi:

$$[\mp c_1 - 2(a_1 - a_2)]^2 + 12a_2^2 + 3c_1^2 < 4,$$

quindi $c_1 = 1, \mp 1 - 2a_1 + 2a_2 = 0$ che è impossibile.

Il movimento che riporta $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ in se oltre l'identità è la riflessione $z' = -z_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0$, e i suoi coefficienti non soddisfano le (59). Segue perciò che il gruppo esaminato è il gruppo $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$.

Due lemmi sulla composizione delle sostituzioni lineari sopra una variabile e i gruppi congruenziali

$$G_0, \frac{1}{2}; -, \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad G_0^0, \frac{1}{2}, -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

17. — Se alla piramide $P_0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}$ si associa la simmetrica rispetto al piano $\eta = 0$ per i risultati del paragrafo 15 concludiamo: che il gruppo di

movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + 2a_2 \varepsilon)z + (b_1 + 2b_2 \varepsilon)}{(c_1 + 2c_2 \varepsilon)z + (d_1 + 2d_2 \varepsilon)}, \quad \varepsilon = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

a determinante ± 1 , con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti è un gruppo $G_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$. Per determinare il gruppo $G_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

premetteremo ancora due lemmi sulla composizione delle sostituzioni lineari sopra una variabile complessa.

Dai lemmi 4^o, 5^o, 6^o del 1^o capitolo (paragrafo 3) segue che *tutte le sostituzioni a determinante ± 1 , con coefficienti interi di Gauss:*

$$(z) \quad z' = \frac{(a_1 + ia_2)z + (b_1 + ib_2)}{(c_1 + ic_2)z + (d_1 + id_2)}$$

tali che siano soddisfatte l'una e l'altra delle condizioni

$$(A) \quad \begin{cases} D = 1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} D = -1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2} \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}; \end{cases}$$

formano un gruppo G. Si consideri col gruppo G le sostituzioni ottenute moltiplicando quelle di G a destra per $z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z$, per le quali si

ha cioè:

$$(C) \quad \begin{cases} D = 1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} D = -1; \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}. \end{cases}$$

Siccome la trasformata di una sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ con la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{è:} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

e le condizioni (A), (B) sono simmetriche rispetto α e δ , β e γ , concludiamo che il gruppo delle sostituzioni G è permutabile con $z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e perciò tutte le sostituzioni (α) che soddisfano con i coefficienti o le A), o le B), o le C) o le D) formano gruppo. Dai risultati ottenuti possiamo trarre un'altra conseguenza. Si indichi con Ω_1 una sostituzione (α) i cui coefficienti soddisfino le (A), con Ω_2 una sostituzione (α) i cui coefficienti soddisfino le (D), allora si vede facilmente che si ha, tenendo sempre conto dei lemmi 4, 5, 6:

$$\Omega_1 \Omega_1 = \Omega_1; \quad \Omega_1 \Omega_2 = \Omega_2 \Omega_1 = \Omega_2; \quad \Omega_2 \Omega_2 = \Omega_1;$$

segue che tutte le sostituzioni (α) i cui coefficienti soddisfino le (A) o le (D) formano gruppo.

Si osservi ora il prodotto.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 \sqrt{3} & b_1 + ib_2 \sqrt{3} \\ c_1 + ic_2 \sqrt{3} & d_1 + id_2 \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 \sqrt{3} & \beta_1 + i\beta_2 \sqrt{3} \\ \gamma_1 + i\gamma_2 \sqrt{3} & \delta_1 + i\delta_2 \sqrt{3} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 \alpha_1 + c_1 \beta_1 - 3(a_2 \alpha_2 + c_2 \beta_2) + i\sqrt{3}(a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + c_1 \beta_2 + c_2 \beta_1); \\ a_1 \gamma_1 + c_1 \delta_1 - 3(a_2 \gamma_2 + c_2 \delta_2) + i\sqrt{3}(a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_1 + c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1); \\ b_1 \alpha_1 + d_1 \beta_1 - 3(b_2 \alpha_2 + d_2 \beta_2) + i\sqrt{3}(b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_1 + d_1 \beta_2 + d_2 \beta_1); \\ b_1 \gamma_1 + d_1 \delta_1 - 3(b_2 \gamma_2 + d_2 \delta_2) + i\sqrt{3}(b_1 \gamma_2 + b_2 \gamma_1 + d_1 \delta_2 + d_2 \delta_1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

la parte reale, e i coefficienti di $i\sqrt{3}$ dei singoli coefficienti della sostituzione prodotto, sono eguali rispetto a modulo 2, a quelli ottenuti moltiplicando

le due sostituzioni date fra loro, quando al posto di $i\sqrt{3}$ si sostituiscia i , talchè per i risultati ora ottenuti possiamo enunciare i due lemmi seguenti.

Lemma 11. *Tutti i movimenti a determinante ± 1 ,*

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{3})z + (b_1 + i b_2 \sqrt{3})}{(c_1 + i c_2 \sqrt{3})z + (d_1 + i d_2 \sqrt{3})},$$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti, tali che siano soddisfatte le condizioni:

$$(65) \left\{ \begin{array}{l} D = 1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}; \\ \text{oppure:} \\ D = 1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}, \end{array} \right.$$

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} D = -1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2 \pmod{2}, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}, \\ \text{oppure} \\ D = -1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2 \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}; \end{array} \right.$$

formano gruppo.

Lemma 12. *Tutti i movimenti a determinante ± 1 ,*

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{3})z + (b_1 + i b_2 \sqrt{3})}{(c_1 + i c_2 \sqrt{3})z + (d_1 + i d_2 \sqrt{3})}$$

con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$, interi assoluti, tali che siano soddisfatte le condizioni:

$$(67) \begin{cases} D = 1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}, \end{cases}$$

$$(68) \begin{cases} D = -1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1 \pmod{2}; \end{cases}$$

formano gruppo.

Ciò premesso si considerino col gruppo G di cui il lemma 11, tutti i movimenti ottenuti moltiplicando G a destra per la riflessione $z' = -z_0$, si ottiene un gruppo G^0 , in cui i coefficienti dei movimenti di 1.^a specie soddisfano le (65) e (66), e quelli di 2.^a specie $z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z_0 + (b_1 + ib_2\sqrt{3})}{(c_1 + ic_2\sqrt{3})z_0 + (d_1 + id_2\sqrt{3})}$, sono tali che si ha

$$(66^*) \begin{cases} D = 1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}; \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} D = 1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}; \end{cases}$$

$$(65^*) \begin{cases} D = -1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} D = -1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}; \end{cases}$$

proveremo che tale gruppo G^0 è il gruppo $G^0_{0, \frac{1}{2}}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Al solito, le sostituzioni ellittiche di G^0 hanno il periodo 2,3,6. onde se due sfere (piani) di riflessione si attraversano formano angoli diedri aventi per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$.

I movimenti di 2.^a specie a determinante 1 sono riflessioni se hanno per espressione analitica:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z_0 + ib_2\sqrt{3}}{ic_2\sqrt{3}z_0 + (a_1 - ia_2\sqrt{3})},$$

con

$$(67) \quad a_1^2 + 3a_2^2 + 3b_2c_2 = 1,$$

e le (66*) divengono:

$$(68) \quad a_1 + a_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}; \text{ oppure } a_1 \equiv b_2 \equiv c_2 \equiv 0, \pmod{2}.$$

Le sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(69) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3c_2^2}.$$

I piani di riflessione si ottengono per $c_2=0$, e dalla (67) $a_2=0$, $a_1=\pm 1$ e per le (68) $b_2=2k+1$, mentre la 2.^a condizione (68) non può sussistere. Segue pertanto che l'equazione dei piani di riflessione è nel nostro caso:

$$\eta = \frac{(2k+1)\sqrt{3}}{2} \quad \text{con } k \text{ intero arbitrario.}$$

I movimenti di 2.^a specie a determinante -1 , sono riflessioni se hanno per espressione analitica corrispondente:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z_0 + b_1}{c_1z_0 + (-a_1 + ia_2\sqrt{3})},$$

con

$$(70) \quad a_1^2 + 3a_2^2 + b_1c_1 = 1,$$

e le (65*) divengono:

$$(71) \quad a_2 \equiv b_1 \equiv c_1 \equiv 0, \pmod{2}; \text{ oppure } a_1 + a_2 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}.$$

Le sfere di riflessioni corrispondenti hanno per equazione:

$$(72) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2};$$

i piani di riflessione si ottengono per $c_1 = 0$, dalla (70), $a_2 = 0$, $a_1 = \pm 1$, e dalla 1^a delle (71) $b_1 = 2k$; dall'altra $b_1 = 2k + 1$, sicchè i piani di riflessione corrispondenti hanno per equazione:

$$\xi = \frac{l}{2}, \quad \text{con } l \text{ intero qualunque.}$$

Si consideri del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (Tav. 3^a, F. VII)

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

la porzione esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0 \quad b_1 = c_1 = 1, \quad (70), (71)).$$

si ottiene la piramide $P_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ che noi proveremo è la fondamentale del gruppo G^0 . Infatti in $P_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ non penetra alcun piano di riflessione, le uniche sfere di riflessioni che si possono supporre penetrino lungo uno spigolo sono, quelle che partono il diedro $V_3 V_4$ in due diedri aventi per misura $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ che hanno il raggio eguale a 2 oppure a $\frac{2}{\sqrt{2}}$, quella che bisega il diedro $V_1 V_2$ che ha per raggio $\sqrt{3}$, e nessuna di queste sfere può essere di riflessione per G^0 .

I vertici di $P_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ sono:

$$\begin{matrix} V_1 \\ V_1 \end{matrix} \equiv \left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right); \begin{matrix} V_3 \\ V_4 \end{matrix} \equiv \left(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

e non sono interni ad alcuna sfera di riflessione. Perchè V_1 o V_2 siano interni a una sfera (69) deve aversi: $3(c_2 - 2a_2)^2 + (\pm 3c_2 + 2a_1)^2 < 4$, dalla quale si ha: $c_2 - 2a_2 = 0$, $\pm 3c_2 + 2a_1 = 0$; cioè $c_2 = 2a_2$, $a_1 = \pm 3a_2$ che non può essere per la (67), oppure $c_2 - 2a_2 = 0$, ± 1 , e $\pm 3c_2 + 2a_1 = \pm 1, 0$ le quali sono incompatibili.

Così pure, perchè V_3, V_4 siano interni ad una sfera (69) deve aversi:

$$12a_2^2 + (\pm 3c_2 + 2a_1)^2 + 3c_2^2 < 4,$$

da cui $c_2 = 1, a_2 = 0, \pm 3 + 2a_1 = 0$ che non può essere.

Analogamente, perchè i vertici V_1, V_2 siano interni ad una sfera (72) deve aversi:

$$(c_1 - 2a_1)^2 + 3(\pm c_1 - 2a_2)^2 < 4,$$

da cui $c_1 = 2a_1, c_1 = \pm 2a_2$, e la (70) può in questo caso scriversi $c_1(c_1 + b_1) = 1$, da cui $c_1 = \pm 1$ che non può essere essendo $c_1 = 2a_1 = \pm 2a_2$; la diseguaglianza precedente potrebbe anche verificarsi per $c_1 - 2a_1 = 0, \pm 1; \pm c_1 - 2a_2 = \pm 1, 0$ ma esse sono incompatibili.

Infine perchè V_3, V_4 siano interni a una sfera (72) deve aversi:

$$4a_1^2 + 3(\pm c_1 - 2a_2)^2 + c_1^2 < 4,$$

quindi $c_1 = 1, a_1 = 0, \pm 1 - 2a_2 = 0$, che non è possibile.

Il movimento che riporta $P_0, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$ in se oltre l'identità è

la riflessione:

$$z' = z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0,$$

la quale non appartiene a G^0 , non essendo soddisfatte le (66*). Resta perciò dimostrato che il gruppo G^0 è il gruppo $G^0_0, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

CAPITOLO 4.º

Le due divisioni dello spazio iperbolico con piramidi quadrangolari con i vertici della base impropri, e i gruppi congruenziali corrispondenti.

18. Abbiamo esaminato nei capitoli precedenti i casi in cui due vertici al più della piramide $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ sono impropri. Tenendo sempre le solite notazioni, si osservi che da tre fra le 4 relazioni:

$$a) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{1,4}} = \frac{1}{2}, \quad b) \frac{1}{a_{1,2}} + \frac{1}{a_{2,3}} = \frac{1}{2}; \quad c) \frac{1}{a_{2,3}} + \frac{1}{a_{3,4}} = \frac{1}{2}; \quad d) \frac{1}{a_{3,4}} + \frac{1}{a_{1,4}} = \frac{1}{2}$$

segue l'altra, o ciò che è lo stesso se una piramide $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ ha tre dei vertici della base impropri, lo è anche il 4.º e si conclude perciò, che l'ultimo caso che ci resta da esaminare è quello in cui i vertici della base di $P_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$ siano tutti impropri. (Facilmente si dimostra geometricamente la circostanza ora detta, che se unε piramide di quelle in esame ha tre vertici della base impropri, ha anche improprio il 4.º vertice della base). Si abbia ora una piramide che effettui la divisione regolare di S e con i vertici V_1, V_2, V_3, V_4 impropri, valgano allora le $a), b), c), d)$, e supponendo $a_{1,2} \leq a_{1,4}$ è per la $a)$, $a_{1,2} = 3, 4$.

Se I) $a_{1,2} = 3$, sarà $a_{1,4} = 6, a_{2,3} = 6, a_{3,4} = 3$:

se II) $a_{1,2} = 4$, sarà $a_{1,4} = a_{2,3} = a_{3,4} = 4$;

e alle soluzioni I) II) del sistema a), b), c), d) corrispondono due piramidi e due sole. Concludiamo: *Esistono due tipi e due soli, di divisione regolare dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari con i vertici tutti impropri.* La tavola IV^a ci dà le tracce delle facce di queste piramidi sul piano improprio. Noi nei due paragrafi seguenti daremo le leggi aritmetiche di formazione dei coefficienti dei gruppi corrispondenti alle precedenti divisioni.

Quattro gruppi congruenziali di 1^a specie e il gruppo G^o aventi la piramide fondamentale del tipo I.

19. — Per lo studio aritmetico dei gruppi la cui piramide fondamentale è del tipo $P - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$, converrà riferire questa piramide ad un sistema di assi ortogonali ξ, η, ζ di cui $V_1V_2 = \xi$; $V_1V_4 = \eta$, analogamente a quanto si è operato nel paragrafo 15. Si osservi anzi che se alla piramide P, del paragrafo 15, associamo la simmetrica rispetto al piano $\xi = \frac{1}{2}$, otteniamo una piramide P' formata dai quattro piani:

$$\xi = 0; \xi = 1; \eta = 0; \eta = 1,$$

e dalla sfera:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2},$$

che è del tipo $P - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}$ e può considerarsi come fondamentale del gruppo di movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, interi del campo $(1, i)$, a determinante $1, i$, tali che siano soddisfatti l'uno o l'altro dei due sistemi di congruenze.

$$A) \left\{ \begin{array}{l} \sigma + \delta \equiv \gamma, \pmod{2}, \\ \beta \equiv 0, \pmod{2}, \\ \gamma \equiv 0, \pmod{1-i}; \end{array} \right. \quad \text{oppure B) } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv \beta \equiv \delta, \pmod{2}, \\ \gamma \equiv 0, \pmod{1-i}. \end{array} \right.$$

Un altro gruppo di movimenti di 1.^a specie avente per poliedro fondamentale P', si ottiene considerando del gruppo precedente il trasformato con la rotazione $z' = iz + 1$, attorno al punto $\frac{1+i}{2}$.

Osservando che è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i + \gamma & -\sigma i - \gamma + \delta i - \beta \\ \gamma & -\gamma + \delta i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

ed $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ soddisfano, corrispondentemente ai sistemi A) e B), l'uno o l'altro dei due sistemi di congruenze:

$$A^*) \left\{ \begin{array}{l} \alpha' + \delta' \equiv \gamma', \pmod{2}, \\ \beta' \equiv 0, \pmod{2}, \\ \gamma' \equiv 0, \pmod{1-i}, \end{array} \right. \quad ; \quad B^*) \left\{ \begin{array}{l} \alpha' \equiv \delta', \pmod{2}, \\ \alpha' \equiv \beta' i, \pmod{2}, \\ \gamma' \equiv 0, \pmod{1-i}; \end{array} \right.$$

e inversamente se i coefficienti della sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ soddisfano le A*) o le B*) i coefficienti della trasformata $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ soddisfano le A) o le B) segue che la piramide P' è la fondamentale del gruppo di movimenti di 1.^a specie $z' = \frac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'}$ a determinante 1, i, con coefficienti del campo (1, i) soddisfacenti le A*) o B*).

Un terzo gruppo di movimenti di 1.^a specie che ha per piramide fondamentale P' si ottiene con le seguenti considerazioni. A pag. 27, 28 del lavoro citato (G. SANSONE Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e tetraedri) si dimostra che il gruppo θ^0 di movimenti di 1.^a e 2.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1, \quad i$$

i cui coefficienti sono interi del campo $(1, i)$ e per i quali si abbia:

$$C) \gamma \equiv 0, \pmod{2}; \beta \equiv 0, \pmod{1+i},$$

ha per poliedro fondamentale la porzione del prisma triangolare Π

$$\eta = 0; \xi - \eta = 0, \xi + \eta = 1,$$

esterna alla sfera: $\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}$.

Associando a Π il simmetrico Π' rispetto al piano $\eta = 0$, ed osservando che $\Pi + \Pi'$ col movimento $z' = (1+i)z$ si trasforma in P' e che d'altra parte è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta(1+i) \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2i\beta \\ (1-i)\gamma & \delta \end{pmatrix};$$

e

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 2\beta' \\ (1+i)\gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & (1-i)\beta' \\ 2i\gamma' & \delta' \end{pmatrix};$$

concluderemo che il gruppo di movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma^2 = 1, \quad i,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$, tali che sia:

$$\beta \equiv 0, \pmod{2}; \gamma \equiv 0, \pmod{1-i};$$

ha per poliedro fondamentale P' .

Un quarto gruppo di movimenti di 1.^a specie avente per piramide fondamentale P' si ottiene considerando il sottogruppo di movimenti di 1.^a specie del gruppo misto avente per poliedro fondamentale la piramide triangolare i cui vertici sono V_0, V_1, V_2, V_4 . Basterà per questo trasformare θ^0 con il movimento $z' = (1-i)z_0 + i$. Osservando allora che:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta(1+i) \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - (1-i)\gamma & -i\alpha - 2i\beta + (i+1)\gamma + \delta i \\ \gamma(1+i) & (1-i)\gamma + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

con

$$D) \quad \gamma' \equiv 0, \pmod{1-i} \quad \beta' + \gamma' + i(\delta' - \alpha') \equiv 0, \pmod{2},$$

e inversamente se i coefficienti $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ della sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ soddisfano le D), i coefficienti della trasformata:

$$\begin{pmatrix} 1-i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' + \gamma'i & \frac{\beta' + \gamma'i + i(\delta' - \alpha')}{1+i} \\ \gamma'(1+i) & \delta' - \gamma'i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

sono tali che sono soddisfatte le C), segue: la piramide P' può considerarsi fondamentale del gruppo di movimenti di 1^a specie:

$$z' = \frac{\sigma z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

con $\sigma, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ a determinante $1, i$, tali che siano soddisfatte le congruenze:

$$\gamma \equiv 0, \pmod{1-i} \quad ; \quad \beta + \gamma + i(\delta - \alpha) \equiv 0, \pmod{2}.$$

Passeremo ora a determinare il gruppo G^0 la cui piramide fondamentale è P' , e noi proveremo che il gruppo di movimenti di 1^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + 2\beta}{(1-i)\gamma + \delta},$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ tali che sia soddisfatta la congruenza:

$$(73) \quad \alpha + \delta \equiv \gamma(1-i), \pmod{2},$$

ampliato con la riflessione $z' = z_0$ ha per piramide fondamentale P' . Proviamo subito che i movimenti dati formano gruppo. Si osservi che è:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \gamma(1-i) & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 2\beta' \\ \gamma'(1-i) & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + 2(1-i)\gamma\beta' & 2(\beta\alpha' + \delta\beta') \\ (1-i)(\alpha\gamma' + \gamma\delta') & 2(1-i)\beta\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

onde ci resta da mostrare che è:

$$\alpha\alpha' + \delta\delta' \equiv (1-i)(\alpha\gamma' + \gamma\delta'), \pmod{2},$$

ovvero:

$$\alpha[\gamma' - (1-i)\gamma] + \delta'[\delta - (1-i)\gamma] = 0, \pmod{2},$$

e per le ipotesi:

$$\alpha\delta' + \delta'\alpha \equiv 0, \pmod{2}$$

che è vera.

Facilmente si vede che le sostituzioni ellittiche del gruppo sono a periodo 2, 4, onde se due sfere (piani) di riflessione si attraversano formano angoli diedri $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$

Per $D=1$, si hanno i movimenti di 2.^a specie dati sono riflessioni se:

$$z' = \frac{(a + ia_1)z_0 + 2ib_1}{2ic_1 + (a - ia_1)},$$

con

$$(74) \quad a^2 + a_1^2 + 4b_1c_1 = 1;$$

la (73) risulta soddisfatta, e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(75) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4c_1^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1=0$, quindi dalla (74) $a=\pm 1$, $a_1=0$; oppure $a=0$, $a_1=\pm 1$, hanno cioè per equazione:

$$\xi = k; \quad \eta = l \quad \text{con } k \text{ e } l \text{ interi qualunque.}$$

I movimenti di 2.^a specie dati, a determinante i sono riflessioni se hanno la forma:

$$z' = \frac{(a + ia_1)_0 z + 2(1-i)b}{(1-i)cz_0 + (a_1 + ia)},$$

con:

$$(76) \quad a^2 + a_1^2 + 4bc = 1,$$

e la (73) diventa:

$$(a + a_1)(1 + i) \equiv (1 - i)c, \pmod{2},$$

ovvero

$$(77) \quad a + a_1 = -i c, \pmod{1 + i}.$$

Per $c=0$, la (76) da $a=0, \pm 1$; $a_1=\pm 1, 0$ e la (77) non è soddisfatta, cioè non si hanno piani di riflessione corrispondenti.

Le sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(78) \quad \left(\xi + \frac{a_1 - a}{2c}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a}{2c}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c^2}.$$

La porzione del prisma formato dai quattro piani di riflessione: (Tavola 4.^a F. II).

$$\xi = 0, \xi = 1, \eta = 0, \eta = 1,$$

esterna alla sfera di riflessione:

$$(79) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}, \quad (a_1=1, a=0, c=1, b=0, (76), (77), (78))$$

forma la piramide P' . Nessun piano di riflessione penetra in P' , e nessuna sfera di riflessione vi può penetrare lungo uno spigolo.

I vertici di P' sono:

$$V_0 = \infty; V_1 \equiv (0, 0, 0); V_2 \equiv (1, 0, 0); V_3 \equiv (1, 1, 0); V_4 \equiv (0, 1, 0),$$

e noi proveremo che nessuno di essi è interno alle sfere (75), (78).

Infatti perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni ad una sfera (75) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a^2 &< 1, \\ (2c_1 - a_1)^2 + a^2 &< 1, \\ (2c_1 - a_1)^2 + (2c_1 + a)^2 &< 1, \\ a_1^2 + (2c_1 + a)^2 &< 1, \end{aligned}$$

e perchè si verifichi la 1.^a occorre $a = a_1 = 0$ per la 2.^a, $a_1 = 2c_1, a = 0$; per la terza $a_1 = 2c_1, a = -2c_1$; per la 4.^a $a_1 = 0, a = -2c_1$, in ogni caso a e a_1 risultano pari, contrariamente alla (74).

Così pure perchè V_1, V_2, V_3, V_4 siano interni a una sfera (78) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned}(a_1 - a)^2 + (a_1 + a)^2 &< 2, \\ [2c + (a_1 - a)]^2 + (a_1 + a)^2 &< 2, \\ [2c + (a_1 - a)]^2 + [2c - (a_1 + a)]^2 &< 2, \\ (a_1 - a)^2 + [2c - (a_1 + a)]^2 &< 2.\end{aligned}$$

Osservando ora che i 2 termini che compongono i primi membri di ciascuna delle precedenti disequazioni hanno la stessa parità, si ha che esse si possono verificare rispettivamente per:

$$\begin{aligned}a_1 = a = 0, \\ a = -a_1 = c, \\ a_1 = 0, a = -2c, \\ a = a_1 = c;\end{aligned}$$

ma in ognuno di questi casi non può sussistere in numeri interi la (76). I movimenti che riportano P' in se, sono formati dal gruppo ciclico G_4 di movimenti di 1.^a specie:

$$G_4 \sim z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z; \quad z' = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z; \quad z' = \begin{pmatrix} i & i(1+i) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z; \quad z' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} z;$$

che ampliato dalla riflessione $z' = z_0$, dà altre 4 riflessioni:

$$z' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0; \quad z' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0;$$

che trasformano ancora P' in se; e degli otto movimenti precedenti ad eccezione del primo, che è l'identità, nessuno appartiene al gruppo in esame. Resta con ciò dimostrato che il gruppo esaminato ha per poliedro fondamentale la piramide P' .

Due gruppi congruenziali $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$ **e il gruppo**
congruenziale $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

20. — Dai risultati dei paragrafi 16, 17, possiamo concludere che sia il gruppo di movimenti di 1.^a specie: $z' = \frac{(a_1 + 2a_2\varepsilon)z + (b_1 + 2b_2\varepsilon)}{(c_1 + 2c_2\varepsilon)z + (d_1 + 2d_2\varepsilon)}$, con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti, $\varepsilon = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, a determinante ± 1 , tali che si abbia l'una o l'altra delle condizioni:

$$\begin{aligned} D &= 1, a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ D &= -1, a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2}; \end{aligned}$$

che il gruppo di movimenti di 1.^a specie $z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z_0 + (b_1 + ib_2\sqrt{3})}{(c_1 + ic_2\sqrt{3})z_0 + (d_1 + id_2\sqrt{3})}$, i cui coefficienti soddisfino le condizioni (65) (66) del lemma 11 (del capitolo 3), hanno per poliedro fondamentale la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Ci resta infine a determinare il gruppo $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Per il lemma 12, del capitolo 3, tutti i movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z + (b_1 + ib_2\sqrt{3})}{(c_1 + ic_2\sqrt{3})z + (d_1 + id_2\sqrt{3})},$$

a determinante $D = \pm 1$, con $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ interi assoluti, tali che si abbia:

$$(67^*) \quad \left\{ \begin{aligned} &D = 1, \\ &a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ & \qquad \qquad \qquad a_2 \equiv d_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}, \end{aligned} \right.$$

$$(68^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = -1, \\ a_1 + a_2 + d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_1 \equiv d_1 \equiv b_1 + c_1, \pmod{2}; \end{array} \right.$$

formano gruppo. Si consideri il gruppo G^0 formato da tali movimenti, e di quelli ottenuti moltiplicando i precedenti per la riflessione $z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0$ permutabile con essi; i coefficienti dei movimenti di 2.^a specie di G^0 :

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z_0 + (b_1 + ib_2\sqrt{3})}{(c_1 + ic_2\sqrt{3})z_0 + (d_1 + id_2\sqrt{3})},$$

sono caratterizzati dal soddisfare le condizioni:

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = 1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_1 + d_1 \equiv b_1 \equiv c_1, \pmod{2}; \end{array} \right.$$

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = -1, \\ a_1 + a_2 \equiv d_1 + d_2 \equiv b_1 + b_2 + c_1 + c_2, \pmod{2}, \\ a_2 + d_2 \equiv b_2 \equiv c_2, \pmod{2}, \end{array} \right.$$

corrispondenti rispettivamente alle (68*) e (67*).

Proveremo che il gruppo G^0 ha per poliedro fondamentale $P \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Osserviamo anzitutto, che essendo le sostituzioni ellittiche di G^0 a periodo 2,3,6 se due sfere (piani) di riflessione si tagliano, formano angoli diedri, aventi per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$.

I movimenti di 2.^a specie a determinante 1, sono riflessioni se hanno la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z_0 + ib_2\sqrt{3}}{ic_2\sqrt{3}z_0 + (a_1 - ia_2\sqrt{3})},$$

e le (80) divengono :

$$(82) \quad \begin{cases} a_1^2 + 3a_2^2 + 3b_2c_2 = 1, \\ a_1 + a_2 \equiv b_2 + c_2, \pmod{2}. \end{cases}$$

Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione :

$$(83) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c_2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3c_2^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_2=0$, quindi dalle (82), $a_2=0, a_1=\pm 1, b_2=2k+1$, cioè hanno per equazione :

$$\eta = \frac{(2k+1)\sqrt{3}}{2}. \quad (k \text{ intero arbitrario}).$$

I movimenti di 2.^a specie a determinante -1 , sono riflessioni se hanno per espressione:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{3})z_0 + b_1}{c_1z_0 + (-a_1 + ia_2\sqrt{3})},$$

e le (81) divengono:

$$(84) \quad \begin{cases} a_1^2 + 3a_2^2 + b_1c_1 = 1, \\ a_1 + a_2 \equiv b_1 + c_1. \pmod{2}. \end{cases}$$

Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione :

$$(85) \quad \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}.$$

I piani di riflessione si hanno per $c_1=0$, quindi dalle (84), $a_2=0, a_1=\pm 1, b_1=2k+1$, cioè hanno per equazione :

$$\xi = \frac{2k+1}{2} \quad (k \text{ intero arbitrario}).$$

Consideriamo del prisma formato dai 4 piani di riflessione: (Tavola 4.^a, F. I).

$$\xi = -\frac{1}{2}; \quad \xi = \frac{1}{2}; \quad \eta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

la porzione esterna alla sfera di riflessione :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 = c_1 = 1, \quad (84)),$$

si ottiene la piramide $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ che è la fondamentale del gruppo in esame.

Infatti in $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ non penetra alcun piano di riflessione; le sfere che bisevano i diedri V_1V_4, V_3V_3 hanno il raggio eguale a $\sqrt{3}$, e non sono perciò sfere di riflessione del gruppo.

I vertici di $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ sono :

$$V_i = \left(\mp \frac{1}{2}; \mp \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right); \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

e non sono interni ad alcuna sfera di riflessione (83), (85). Infatti perchè V_i sia interno a una sfera di riflessione (83) deve essere :

$$3(\pm c_2 - 2a_2)^2 + (\pm 3c_2 + 2a_1)^2 < 4,$$

la quale, avendo $\pm c_2 - 2a_2$ e $\pm 3c_2 + 2a_1$ la stessa parità, può verificarsi soltanto per $\pm c_2 - 2a_2 = 0$; $\pm 3c_2 + 2a_1 = 0$; ossia $\pm c_2 = 2a_2$, $a_1 = \pm 3a_2$, e la prima delle (82) diventa: $12a_2^2 + 3b_2c_2 = 1$, che non può essere. Così pure perchè V_i sia interno a una sfera (85) deve aversi :

$$(\pm c_1 - 2a_1)^2 + 3(\pm c_1 - 2a_2)^2 < 4,$$

la quale può verificarsi soltanto per $\pm c_1 = 2a_1$, $\pm c_1 = -2a_2$ e la 1.^a delle (84) può allora scriversi $4c_1^2 + 4b_1c_1 = 4$, da cui $c_1 = \pm 1$, mentre c_1 è pari.

I movimenti che riportano $P_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ in se sono :

$$G_4^0 \sim \left\{ \begin{array}{l} z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z ; z' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z ; \\ z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 ; z' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0 ; \end{array} \right.$$

e di essi il primo è l'identità, il 2.º non è del gruppo perchè i suoi coefficienti non soddisfano le (68*), e il 3.º non è del gruppo perchè i suoi coefficienti non soddisfano le (80), il 4.º non è del gruppo perchè i suoi coefficienti non soddisfano le (81).

Resta perciò dimostrato che il gruppo in esame è il gruppo

$$G^0 \quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} ; -\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

FINE 2.ª PARTE.

NOTA II.^a

**Le due divisioni dello spazio iperbolico in doppie piramidi congruenti,
e i gruppi congruenziali corrispondenti.**

1.—In questa nota ci si propone far conoscere le divisioni regolari dello spazio iperbolico in doppie piramidi. Noi proveremo che lo spazio iperbolico può dividersi regolarmente soltanto in 2 modi con doppie piramidi. Esse sono triangolari e quadrangolari, e daremo le leggi aritmetiche generatrici dei gruppi corrispondenti.

Si rammenti che per la dimostrazione del paragrafo 1 della 1.^a parte se un poliedro Π divide regolarmente lo spazio iperbolico ha i suoi angoloidi trispigoli, o quadrispigoli a diedri retti. Sia allora Π una doppia piramide che effettui una divisione regolare dello spazio iperbolico. Chiamiamo con V_0 e V'_0 i vertici opposti della doppia piramide V_1, V_2, \dots, V_i gli altri vertici, tutti situati su un medesimo piano. Siccome V_1, V_2, \dots, V_i sono tutti vertici di angoloidi quadrispigoli, i diedri di Π sono tutti retti, V_1, V_2, \dots, V_i sono tutti impropri, e V_0 e V'_0 sono insieme vertici di angoloidi trispigoli o quadrispigoli a diedri retti. Si conclude quindi che le divisioni che possono effettuarsi dello spazio iperbolico con doppie piramidi sono di 2 tipi.

I.^o con una doppia piramide triangolare a diedri retti, con i vertici V_0 e V'_0 propri, e i vertici V_1, V_2, V_3 impropri.

II.^o Con una doppia piramide quadrangolare a vertici impropri e a diedri tutti retti.

La doppia piramide corrispondente al II.^o tipo è l'ottaedro regolare dello spazio iperbolico, trovato dal Prof. L. Bianchi in una sua nota della R. A. dei Lincei del 1909. In questa nota si dimostra che la porzione del semispazio $\zeta > 0$ interna al prisma racchiuso dai 4 piani :

$$\eta = 0 ; \quad \eta = 1 ; \quad \xi = 0 ; \quad \xi = 1 ;$$

esterna alle 4 sfere :

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} ; \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} ; \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} ; \\ \left(\xi - 1\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} ;$$

forma un ottaedro regolare P, con angoli piani nulli e diedri retti, che è il poliedro fondamentale del gruppo G di sostituzioni unimodulari di 1.^a e 2.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi di Gauss, per i quali riescano soddisfatte le congruenze :

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0, \pmod{2}.$$

2. — Proveremo ora che esiste la doppia piramide triangolare a diedri retti, corrispondente al 1.^o tipo di divisione, troveremo anzi tale piramide come cella fondamentale di un gruppo misto H^0 di movimenti di 1.^a e 2.^a specie che ha il gruppo dell'ottaedro regolare, come sottogruppo invariante di indice 4.

Si consideri il gruppo H^0 formato dalle sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + 2\beta}{\gamma z + \delta}; \quad z' = \frac{\alpha z_0 + 2\beta}{\gamma z_0 + \delta}; \quad (1) \quad \alpha\delta - 2\beta\gamma = 1,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$. Le sue sostituzioni ellittiche si ottengono per $\alpha + \delta = 0, \alpha + \delta = \pm 1$, ma essendo per la (1) $\alpha\delta \equiv 1, \pmod{2}$, non può mai essere $\alpha + \delta = \pm 1$, resta quindi $\alpha + \delta = 0$ cioè le sostituzioni ellittiche

di H^0 sono a periodo 2, cioè se due sfere di riflessione (piani) si attraversano formano diedri retti. Le riflessioni di H^0 hanno la forma:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2)z_0 + 2ib}{ic z_0 + (a_1 - ia_2)}, \quad \text{con (2) } a_1^2 + a_2^2 + 2bc = 1.$$

Si hanno piani di flessione di H_0 quando sia $c=0$, e dalla (2) $a_1 = \pm 1$, $a_2 = 0$, oppure $a_1 = 0$, $a_2 = \pm 1$, e b intero qualunque, cioè i piani di riflessione di H_0 hanno per equazione:

$$\xi = b; \quad \text{oppure } \eta = b, \quad \text{con } b \text{ intero qualunque.}$$

Tali piani dividono lo spazio iperbolico in prismi retti a sezione retta quadrata, e fra essi si consideri il prisma τ formato dai 4 piani.

$$\xi = 0; \quad \xi = 1; \quad \eta = 0; \quad \eta = 1,$$

nell'interno del quale non penetra alcun piano di riflessione. Le sfere di riflessione di H^0 hanno per equazione:

$$(3) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{c}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c^2},$$

e fra esse consideriamo le due:

$$a) \quad \begin{aligned} & \sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2} = 1, & (c = 1, a_2 = 1, a_1 = 0; b = 0) \\ & \sqrt{\xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2} = 1; & (c = 1, a_2 = 0; a_1 = -1; b = 0) \end{aligned}$$

la porzione del prisma τ esterna alle due sfere $a)$ forma una doppia piramide Π triangolare a diedri retti, cioè del tipo I i cui vertici sono:

$$\begin{aligned} V_0 & \equiv (0, 1, 1); V'_0 \equiv (1; 0; 1); \\ V_1 & \equiv (0, 0, 0); V_2 \equiv (1; 1; 0); V_3 = \infty, \end{aligned}$$

di cui V_0 e V'_0 sono propri e $V_1 V_2 V_3$ impropri. (Nota II. Fig. 1.).

Si osservi che nessuna sfera di riflessione può attraversare Π lungo un spigolo perchè si è dimostrato che le sostituzioni ellittiche di H^0 sono a periodo 2. Nessuno dei vertici di Π è interno alle sfere di riflessioni (3). Infatti perchè V_0 e V'_0 siano interni a una sfera (3), deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} a_2^2 + (c + a_1)^2 + c^2 &< 1, \\ (c - a_2)^2 + a_1^2 + c^2 &< 1, \end{aligned}$$

che non sono possibili essendo $|c| \geq 1$.

Perchè V_1, V_2 , siano interni a una sfera (3) deve aversi rispettivamente:

$$\begin{aligned} a_2^2 + a_1^2 &< 1, \\ (c - a_2)^2 + (c + a_1)^2 &< 1, \end{aligned}$$

e quindi per la prima di esse $a_1 = a_2 = 0$; per la 2.^a $c = a_2 = -a_1$ e in ogni caso $a_1^2 + a_2^2 \equiv 0$, (mod. 2), contro le (2). Si conclude quindi che Π non è attraversato da nessun piano e da nessuna sfera di riflessione. Per provare che H^0 ha per piramide fondamentale Π , ci resta a dimostrare, che nessuno dei movimenti diversi dall'identità che riportano Π su se, appartiene a H^0 . Costruendo tali movimenti, e tenendo presente che essi operano separatamente sui vertici propri e impropri di Π si trova che essi formano un gruppo misto G_{12}^0 ed analiticamente sono espressi dalle sostituzioni:

$$\begin{aligned} z' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z; z' = \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z; z' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 0 \end{pmatrix} z; z' = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & -(1+i) \end{pmatrix} z; \\ z' &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ i & 1-i \end{pmatrix} z; z' = \begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0; z' = \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_0; z' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0; z' = \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ i & -(1+i) \end{pmatrix} z_0; \\ z' &= \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} z_0; z' = \begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z_0. \end{aligned}$$

Geometricamente il 1.^o movimento è l'identità, il 2.^o, 3.^o, 4.^o rotazioni a periodo due che lasciano fermo un vertice improprio, permutano tra loro gli altri due vertici impropri e i due propri, il 5.^o e 6.^o rotazioni a periodo 3 che lasciano fissi i vertici propri e inducono una permutazione ciclica sugli impropri. Il 7.^o, 8.^o, 9.^o, e 10.^o movimento rappresentano 4 riflessioni le prime due sui piani $\xi - \eta = 0$, $\xi + \eta = 1$, le altre due sulle sfere: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2$; $(\xi - 1)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 2$; infine l'11 e 12.^o movimento permutano tra loro i vertici propri di Π e inducono una sostituzione ciclica sugli impropri. Nessuno dei

12 movimenti trovati ad eccezione dell'identità è di H^0 . Si conclude quindi: la porzione del semispazio $\zeta > 0$, racchiuso dai 4 piani:

$$\xi = 0, \eta = 0 \quad \xi = 1, \eta = 1,$$

esterna alle due sfere

$$\begin{aligned} (\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1, \\ \xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 &= 1, \end{aligned}$$

forma una doppia piramide triangolare Π a diedri retti e del tipo 1° che è il poliedro fondamentale del gruppo di sostituzioni unimodulari di 1.^a e 2.^a specie H^0 :

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}; \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

i cui coefficienti sono interi di Gauss, avendosi per il 2.° coefficiente:

$$\beta \equiv 0, \pmod{2}.$$

Tale gruppo si genera con le 6 riflessioni:

$$z' = -z_0; \quad z' = -z_0 + 2; \quad z' = z_0; \quad z' = z_0 + 2i; \quad z' = \frac{i z_0}{i z_0 - i}; \quad z' = \frac{z_0}{-i z_0 + 1}.$$

Dalle espressioni aritmetiche dei gruppi G^0 e H^0 risulta che il gruppo dell'ottaedro regolare è un sottogruppo congruenziale di H^0 . Geometricamente si vede subito che l'indice di G^0 in H^0 è 4. Infatti se noi operiamo su Π con la riflessione attorno alla sua faccia:

$$(\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

che ha per espressione analitica $z' = \frac{i z_0}{i z_0 - i}$, e sulle due celle così ottenute con la riflessione sulla faccia comune:

$$\xi^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = 1,$$

che ha per espressione analitica $z' = \frac{z_0}{-i z_0 + 1}$, otteniamo 4 doppie piramidi (Π compreso) che insieme formano l'ottaedro regolare di cui il paragrafo 1

di questa nota. Osservando che i movimenti che riportano Π in una di queste quattro piramidi sono:

$$h_1 \circlearrowright z' = \begin{pmatrix} 1; 0 \\ 0; 1 \end{pmatrix} z; h_2 \circlearrowright z' = \begin{pmatrix} i; 0 \\ i; -i \end{pmatrix} z_0; h_3 \circlearrowright z' = \begin{pmatrix} 1; 0 \\ -i; 1 \end{pmatrix} z_0; h_4 \circlearrowright z' = \begin{pmatrix} i; 0 \\ 1+i; -i \end{pmatrix} z,$$

segue per l'espressione di H^0 il seguente quadro:

$$H^0 \circlearrowright \left\{ \begin{array}{l} G^0, \\ G^0 \begin{pmatrix} i; 0 \\ i; -i \end{pmatrix} z_0, \\ G^0 \begin{pmatrix} 1; 0 \\ -i; 1 \end{pmatrix} z_0, \\ G^0 \begin{pmatrix} i; 0 \\ 1+i; -i \end{pmatrix} z. \end{array} \right.$$

Tenendo conto che dalla condizione $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4}$ per i coefficienti delle sostituzioni di G^0 segue: $\alpha \equiv \delta \pm 0 \pmod{2}$, si prova facilmente che G^0 è trasformato da h_1, h_2, h_3, h_4 in sè, onde G^0 è sottogruppo invariante di indice 4 in H^0 .

3. — Troveremo ancora Π come cella fondamentale di un gruppo di movimenti di 1.^a specie. Nel lavoro citato (sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e tetraedri) a pagina 34 si dimostra che il gruppo Γ^0 delle sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta},$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$ per i quali si abbia:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i; \quad \gamma = 0, \pmod{2},$$

ha per poliedro fondamentale la piramide triangolare P le cui facce sono:

$$\eta = 0; \quad \xi = \frac{1}{2}; \quad \xi - \eta = 0; \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}.$$

Operando su P con la similitudine $z'=2z$, e trasformando quindi Γ^0 con la sostituzione $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si può concludere, che il gruppo Γ^0 di sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$, per i quali si abbia:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i; \quad \beta = 0, \pmod{2},$$

ha per poliedro fondamentale la piramide P' le cui facce sono:

$$\eta=0; \quad \xi=1; \quad \xi-\eta=0; \quad (\xi-1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Associando a P' la simmetrica per la faccia $\xi-\eta=0$, otteniamo la doppia piramide triangolare Π che è, per i soliti ragionamenti, la cella fondamentale del gruppo di movimenti di 1.^a specie:

$$z' = \frac{\alpha z + 2\beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, i,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, interi del campo $(1, i)$.

Settembre 1916.

FINE.

INDICE

PREFAZIONE	Pag. 3
----------------------	--------

PARTE 1.^a

Generazione aritmetica dei gruppi propriamente discontinui il cui poliedro fondamentale è una piramide quadrangolare.

§ 1. Generalità sulle divisioni Σ dello spazio iperbolico con piramidi quadrangolari	Pag. 7
2. Le riflessioni generatrici del gruppo $G^0_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$	» 8
3. I movimenti di 1. ^a specie del gruppo $G_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$	» 9
4. Generazione aritmetica delle sostituzioni rappresentatrici di mo- vimenti di $G^0_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$	» 11
5. I movimenti ellittici di $G^0_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$	» 15
6. I movimenti parabolici di $G^0_{\sigma, \tau; i\sigma_1, i\tau_1}$	» 20

NOTA 1.^a

Studio aritmetico dei gruppi piani, propriamente discontinui, aventi per campo fondamentale un triangolo con un vertice improprio.	» 29
---	------

PARTE 2.^a

Le 33 divisioni dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari congruenti e i gruppi congruenziali corrispondenti.

CAPITOLO 1.^o

§ 1. Le 17 divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi qua- drangolari con i vertici della base propri	Pag. 41
2. I gruppi $G_{0; \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}; G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$	» 43

3. I gruppi congruenziali $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$, $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{2}}$ e alcuni
 lemmi sulla composizione delle sostituzioni lineari sopra una
 variabile pag. 46

4. I gruppi congruenziali $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$, $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{2}, \frac{i}{2}}$ » 55

5. Il gruppo $G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ » 58

6. I gruppi $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$; $G_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ e il gruppo
 congruenziale $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ » 61

7. Tre lemmi sulla composizione delle sostituzioni lineari sopra una
 variabile » 65

8. Il gruppo congruenziale $G^0_{0, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ » 72

9. I gruppi congruenziali
 $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$, $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ » 75

10. I gruppi G^0 corrispondenti alle altre 10 divisioni dello spazio
 iperbolico » 79

CAPITOLO 2.º

11. Le 7 divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi qua-
 drangolari con un solo vertice della base improprio. » 81

12. I gruppi $G_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ e $G^0_{0, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ » 82

13. Il gruppo congruenziale $G^0_{0, \frac{1}{2}; 0, \frac{i\sqrt{3}}{2}}$ » 86

CAPITOLO 3.º

14. Le 7 divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi qua-
 drangolari con 2 soli vertici della base impropri » 91

15. I gruppi $G_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$, $G^0_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; 0, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ e un
 lemma sulla composizione delle sostituzioni lineari sopra una
 variabile » 92

16. I gruppi congruenziali $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, i\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ pag. 98
17. Due lemmi sulla composizione delle sostituzioni lineari sopra una variabile e i gruppi congruenziali $G_{0, \frac{1}{2}; -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $G^0_{0, \frac{1}{2}; -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ » 102

CAPITOLO 4.º

18. Le due divisioni regolari dello spazio iperbolico in piramidi quadrangolari con i vertici impropri » 111
19. Quattro gruppi congruenziali di 1.ª specie e il gruppo G^0 aventi la piramide fondamentale del tipo $P_{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}}$ » 112
20. Due gruppi congruenziali $G_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ e il gruppo congruenziale $G^0_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -i\frac{\sqrt{3}}{2}, i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ » 119

NOTA 2.ª

Le due divisioni dello spazio iperbolico in doppie piramidi congruenti e i gruppi congruenziali corrispondenti. » 125