

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PAOLO MICHEL

**Sulle deformazioni del paraboloide di rotazione in
relazione alle superficie minime**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 13
(1919), exp. n° 4, p. 1-42

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1919_1_13__A4_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PAOLO MICHEL

SULLE DEFORMAZIONI
DEL
PARABOLOIDE DI ROTAZIONE
IN RELAZIONE
ALLE SUPERFICIE MINIME

TESI DI LAUREA.

**Sulle deformazioni del paraboloido di rotazione
in relazione alle superficie minime *)**

PARTE PRIMA

§ 1.

Il Sig. Guichard, nei « Comptes Rendus » de l'Académie des Sciences del 1899¹⁾, enunciava alcuni teoremi sulla deformazione delle quadriche di rotazione.

Il Prof. Bianchi ne deduceva poi nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante, e nuove trasformazioni delle superficie ad area minima²⁾.

*) Il lavoro qui pubblicato è la riproduzione integrale della tesi di laurea presentata nel 1902 dal prof. PAOLO MICHEL, allora alunno della Scuola. Le ricerche originali contenute nella seconda parte del lavoro sembrano conservare anche oggidi, non ostante il tempo trascorso, un certo interesse; ma nell'intenzione dell'autore dovevano essere continuate e completate prima di pubblicarle. Da questo proposito lo distolsero i nuovi studi di matematica attuariale a cui il Michel si accinse nella carriera intrapresa, nella quale ebbe pur campo di farsi conoscere con onore.

Scoppiata la grande guerra delle nazioni, e trascinata l'Italia nostra nella lotta per la libertà e la civiltà del mondo, il Michel, lasciando la giovane sposa e la bambina, offriva volontariamente la sua vita alla patria, e il 10 ottobre 1916, cadeva sul Carso eroicamente combattendo.

Il Consiglio Direttivo della Scuola, ad onorare la memoria del caro e prode alunno, deliberava di pubblicare negli Annali questo suo primo lavoro.

LA DIREZIONE.

¹⁾ Sur la déformation des quadriques de révolution (23 gennaio 1899).

²⁾ Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1899. Annali di matematica pura ed applicata 1899.

Riportiamo l'enunciato del teorema di Guichard, per il caso del paraboloido di rotazione, che è quello che qui particolarmente ci interessa :

Considerato un qualsiasi paraboloido di rotazione, ed il sistema ∞^2 di raggi emananti dai suoi punti ed inizialmente convergenti nel fuoco, immaginiamo una qualsiasi flessione della superficie nella quale i raggi accompagnino la superficie in guisa da rimanere invariabilmente uniti ai corrispondenti piani tangenti: gli estremi focali dei vari raggi riempiono una superficie ad area minima, ad essi ortogonale.

Considerati poi i raggi riflessi terminati ad una egual distanza dalla deformata del paraboloido, nel luogo degli estremi loro (simmetrici dei già considerati rispetto ai piani tangenti) si ottiene una nuova superficie minima ortogonale ad essi.

Il Prof. Bianchi si proponeva poi la seguente questione: Immaginata una superficie qualunque S_0 , ed un sistema ∞^2 di segmenti rettilinei M_0M uscenti dai punti M_0 di S_0 , e supposto di deformare in un modo qualsiasi la superficie, e che i raggi la accompagnino nelle sue deformazioni in guisa da restare invariabilmente uniti ai piani tangenti, se in una speciale configurazione della S_0 i segmenti M_0M riescono normali nei loro estremi ad una superficie S , in ogni altra configurazione il luogo di M sarà costantemente ortogonale ai medesimi raggi. Quando accadrà che in tutte le deformazioni della S_0 la superficie S ortogonale ai raggi, si conservi costantemente ad area minima ?

Egli dimostra che non esistono altre soluzioni al di fuori di quelle fornite dal teorema di Weingarten nelle evolute delle superficie d'area minima, e dal teorema di Guichard nelle deformate del paraboloido di rotazione. ¹

Lo stesso Prof. Bianchi invertiva poi il teorema di Guichard proponendosi la seguente quistione :

Supponiamo data una qualunque superficie minima, e ricerchiamo se è sempre possibile staccare sulle sue normali dei segmenti

¹) *Annali di matematica*, 1899.

MM_0 tali che il luogo dei loro estremi riesca una superficie applicabile sul paraboloido di rotazione, e tali inoltre che queste normali costituiscano una delle congruenze associate alle deformate del paraboloido, dal teorema di Guichard.

A questa quistione si risponde affermativamente, e costruendo la superficie minima ortogonale ai raggi riflessi se ne deduce una trasformazione di superficie minime. La determinazione del segmento MM_0 viene a dipendere dalla integrazione di un sistema di equazioni ai differenziali totali illimitatamente integrabile.

Negli Annali della Scuola Normale Superiore di Parigi del 1897, compariva un lavoro del Sig. Thybaut sulle deformate del paraboloido. Il Sig. Thybaut scopriva delle singolari congruenze rettilinee, nelle quali le due falde focali sono superficie d'area minima, che si corrispondono con conservazione delle linee assintotiche. Questo elemento importante del lavoro del Thybaut fu posto in relazione col teorema di Guichard dallo stesso Prof. Bianchi, il quale dimostrò:

Considerate le due superficie ad area minima, che Guichard associa ad una qualsiasi deformata del paraboloido di rotazione, e costruite le superficie minime coniugate in applicabilità secondo Bonnet delle due precedenti, queste, convenientemente collocate nello spazio, riescono le falde focali di una delle menzionate congruenze scoperte da Thybaut¹⁾.

Noi diremo queste congruenze, congruenze di Thybaut.

Accennato in questo modo rapidamente a tutti questi risultati io comincerò a dimostrare il teorema di Guichard indi a dimostrare per la stessa via il teorema del Prof. Bianchi, che lo pone in relazione colle congruenze di Thybaut.

Ci tratterremo poi sulle trasformazioni di superficie minime, facendo conoscere anche le formole che fanno passare da una delle due falde focali di una congruenza di Thybaut, all'altra falda focale.

Nell'ultima parte del lavoro, faremo poi conoscere un'appli-

¹⁾ Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1889, Vol. VIII.

cazione del teorema di Guichard, ricercando le deformate del paraboloido di rotazione quando si prescriva la deformata di una sua curva assegnata, e riconducendo questo problema alle sole quadrature.

Tratteremo poi, di quest'ultima quistione, alcuni casi particolari.

§ 2.

Sia $x^2 + y^2 = 2pz$ l'equazione cartesiana di un paraboloido di rotazione, e riferita la superficie ai meridiani ed ai paralleli poniamo :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = \frac{\rho^2}{2p}$$

Detto ds^2 il quadrato dell'elemento lineare sarà:

$$(1) \quad ds^2 = \left(1 + \frac{\rho^2}{p^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

Consideriamo poi un punto M del paraboloido, ed il triedro trirettangolo formato dalla tangente positiva al meridiano (nel senso di ρ crescente) dalla tangente positiva al parallelo (nel senso di θ crescente), e dalla normale positiva al paraboloido (volta verso l'interno) che riuscirà congruente al triedro coordinato.

Condotto il raggio focale MF volto da M verso il fuoco F diciamo θ, σ, φ gli angoli concavi da esso formati con gli assi del precedente triedro trirettangolo. Sarà :

$$\cos \theta = \frac{-\rho}{\sqrt{\rho^2 + p^2}}, \quad \cos \sigma = 0, \quad \cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \rho^2}}$$

Detta poi T la lunghezza assoluta del raggio focale, sarà:

$$T = \frac{\rho^2}{2p} + \frac{p}{2}.$$

Premesse queste formole, immaginiamo una qualunque superficie applicabile sul paraboloido considerato, riferita alle deformate dei meridiani e dei paralleli, cioè alle linee a curvatura costante, e alle traiettorie ortogonali.

Dette ξ, η, ζ le coordinate del suo punto generico M e ds^2 il quadrato del suo elemento lineare, sarà :

$$\xi = \xi(\rho, \theta), \quad \eta = \eta(\rho, \theta), \quad \zeta = \zeta(\rho, \theta)$$

$$(1) \quad ds^2 = \left(1 + \frac{\rho^2}{p^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Per individuare poi completamente la superficie, che diremo per brevità superficie S, associeremo alla precedente la 2.^a forma fondamentale:

$$(2) \quad -\Sigma d\xi dX = D d\rho^2 + 2 D' d\rho d\theta + D'' d\theta^2$$

dove D, D', D'' soddisfano alle 3 equazioni di Gauss e di Codazzi.

Immaginiamo poi che in questa deformazione del paraboloide i raggi focali MF abbiano accompagnata la superficie nel modo assegnato dal teorema di Guichard, ed andiamo anzitutto a scrivere i coseni di direzione di tali raggi.

Usando le ordinarie notazioni della teoria delle superficie, saranno

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \xi}{\partial \rho}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \eta}{\partial \rho}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho}, \\ & \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \xi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}, \\ & X, \quad Y, \quad Z, \end{aligned}$$

i coseni di direzione del triedro principale della S, e detti α, β, γ quelli del raggio focale corrispondente, sarà:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \cos \theta + X \cos \varphi = \frac{-\rho p}{\rho^2 + p^2} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \frac{p}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} X \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \cos \theta + Y \cos \varphi = \frac{-\rho p}{\rho^2 + p^2} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} + \frac{p}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} Y \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \cos \theta + Z \cos \varphi = \frac{-\rho p}{\rho^2 + p^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \frac{p}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} Z. \end{aligned} \right.$$

Dalle precedenti si ottiene poi per derivazione:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = A \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + B \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + C X \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = A' \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + B' \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + C' X \end{array} \right. \text{ e le analoghe per } \beta \text{ e } \gamma,$$

con:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{p^3}{(\rho^2 + p^2)^2} - \frac{D p^3}{(\rho^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad A' = -\frac{D' p^3}{(\rho^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ B = -\frac{D' p}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + p^2}}; \quad B' = -\frac{p}{\rho^2 + p^2} - \frac{D'' p}{\sqrt{\rho^2 + p^2}}; \\ C = -\frac{D \rho p}{\rho^2 + p^2} - \frac{\rho p}{(\rho^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad C' = -\frac{\rho p D'}{\rho^2 + p^2}. \end{array} \right.$$

Indichiamo con x_1, y_1, z_1 le coordinate dell'estremo focale del raggio considerato; sarà:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \xi + \alpha T \\ y_1 = \eta + \beta T \\ z_1 = \zeta + \gamma T \end{array} \right.$$

e derivando

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} = M \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + N \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + P X \\ \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = M' \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + N' \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + P' X \end{array} \right. \text{ e le analoghe}$$

con:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{p^2}{2(\rho^2 + p^2)} - \frac{D p^2}{2\sqrt{\rho^2 + p^2}}, \quad M' = -\frac{D' p^2}{2\sqrt{\rho^2 + p^2}}, \\ N = -\frac{D' \sqrt{\rho^2 + p^2}}{2\rho^2}, \quad N' = \frac{1}{2} - \frac{D'' \sqrt{\rho^2 + p^2}}{2\rho^2}, \\ P = -\frac{D \rho}{2} + \frac{\rho}{2\sqrt{\rho^2 + p^2}}, \quad P' = -\frac{\rho D'}{2}. \end{array} \right.$$

Detti ora X_1, Y_1, Z_1 i coseni di direzione della normale alla superficie luogo del punto (x_1, y_1, z_1) che diremo superficie S_1 , sarà:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \rho} \frac{\partial z_1}{\partial \theta} - \frac{\partial z_1}{\partial \rho} \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \right) \\ Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \left(\frac{\partial z_1}{\partial \rho} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} - \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \right) \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial y_1}{\partial \theta} - \frac{\partial y_1}{\partial \rho} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

ed usando delle (5) e (6) si trova subito:

$$(7) \quad X_1 = -\alpha, \quad Y_1 = -\beta, \quad Z_1 = -\gamma,$$

come discende naturalmente dalla teoria generale delle congruenze rettilinee normali.

Quadrando e sommando nelle (5) si ottiene poi, tenendo conto anche dell'equazione di Gauss per la S:

$$\begin{aligned} E_1 &= \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho} \right)^2 = -\frac{D}{2} \sqrt{\rho^2 + p^2} + \frac{D^2(\rho^2 + p^2)}{4} + \frac{DD''(\rho^2 + p^2)}{4\rho^2}; \\ F_1 &= \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = -\frac{D'}{2} \sqrt{\rho^2 + p^2} + \frac{DD'(\rho^2 + p^2)}{4} + \frac{D'D''(\rho^2 + p^2)}{4\rho^2}; \\ G_1 &= \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 = -\frac{D''}{2} \sqrt{\rho^2 + p^2} + \frac{DD''(\rho^2 + p^2)}{4} + \frac{D''^2(\rho^2 + p^2)}{4\rho^2}; \end{aligned}$$

e cioè:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = D \Omega \\ F_1 = D' \Omega \\ G_1 = D'' \Omega \end{array} \right.$$

con

$$\Omega = -\frac{\sqrt{\rho^2 + p^2}}{2} + \frac{D(\rho^2 + p^2)}{4} + \frac{D''(\rho^2 + p^2)}{4\rho^2}.$$

Dalle formole precedenti ricaviamo intanto:

Ai sistemi coniugati di S corrispondono su S₁ dei sistemi ortogonali.

Passando a calcolare i coefficienti della 2.^a forma fondamentale di S₁, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial X_1}{\partial \rho} = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} \\
 D'_1 &= -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial X_1}{\partial \theta} = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \rho} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \\
 D''_1 &= -\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial X_1}{\partial \theta} = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} ,
 \end{aligned}$$

e tenuto conto delle (4) e (5).

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned}
 D_1 &= \frac{p}{2} \left\{ -\frac{1}{\rho^2+p^2} + D^2 + \frac{D'^2}{\rho^2} \right\} \\
 D'_1 &= \frac{pD'}{2} \left\{ D + \frac{D''}{\rho^2} \right\} \\
 D''_1 &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{-\rho^2}{\rho^2+p^2} + D'^2 + \frac{D''^2}{\rho^2} \right\} .
 \end{aligned} \right.$$

Combinando ora le (8) con le (9) si ottiene:

$$E_1 D''_1 + G_1 D_1 - 2 F_1 D'_1 = \Omega \frac{p}{2} \left[D + \frac{D''}{\rho^2} \right] \left\{ \frac{-\rho^2}{\rho^2+p^2} + DD'' - D'^2 \right\}$$

e tenuto conto dell'equazione di Gauss

$$E_1 D''_1 + G_1 D_1 - 2 F_1 D'_1 = 0$$

La S_1 è dunque una superficie ad area minima, e resta così dimostrata la prima parte del teorema di Guichard.

Passiamo ora a stabilire le formole relative ai raggi riflessi. Adoprando analoghe notazioni sarà:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \cos \bar{\theta} &= -\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+p^2}} , \quad \cos \bar{\sigma} = 0 , \quad \cos \bar{\varphi} = \frac{-p}{\sqrt{\rho^2+p^2}} \\
 \bar{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \cos \bar{\theta} + X \cos \bar{\varphi} = \frac{-\rho p}{\rho^2+p^2} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} - \frac{p}{\sqrt{\rho^2+p^2}} X \\
 \bar{\beta} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \cos \bar{\theta} + Y \cos \bar{\varphi} = \frac{-\rho p}{\rho^2+p^2} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} - \frac{p}{\sqrt{\rho^2+p^2}} Y \\
 \bar{\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \cos \bar{\theta} + Z \cos \bar{\varphi} = \frac{-\rho p}{\rho^2+p^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \frac{p}{\sqrt{\rho^2+p^2}} Z
 \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \rho} = \bar{A} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \bar{B} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \bar{C} X \\ \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \theta} = \bar{A}' \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \bar{B}' \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \bar{C}' X \end{array} \right. \text{ e le analoghe per } \beta, \gamma$$

con :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A} = -\frac{p^3}{(\rho^2+p^2)} + \frac{D p^3}{(\rho^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \bar{A}' = \frac{D' p^3}{(\rho^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \bar{B} = \frac{D' p}{\rho^2 \sqrt{\rho^2+p^2}}; \quad \bar{B}' = \frac{-p}{\rho^2+p^2} + \frac{D'' p}{\rho^2 \sqrt{\rho^2+p^2}}; \\ \bar{C} = -\frac{D \rho p}{\rho^2+p^2} + \frac{\rho p}{(\rho^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \bar{C}' = -\frac{\rho p D'}{\rho^2+p^2}; \end{array} \right.$$

Indicando con $x_2 y_2 z_2$ le coordinate dell'estremo del raggio riflesso, si ha :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \xi + \bar{\alpha} T \\ y_2 = \eta + \bar{\beta} T \\ z_2 = \zeta + \bar{\gamma} T \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} = \bar{M} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \bar{N} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \bar{C} X \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} = \bar{M}' \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \bar{N}' \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \bar{C}' X \end{array} \right.$$

con :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{M} = \frac{p^2}{2(\rho^2+p^2)} + \frac{D p^2}{2 \sqrt{\rho^2+p^2}}; \quad \bar{M}' = \frac{D' p^2}{2 \sqrt{\rho^2+p^2}}; \\ \bar{N} = \frac{D' \sqrt{\rho^2+p^2}}{2 \rho^2}; \quad \bar{N}' = \frac{1}{2} + \frac{D'' \sqrt{\rho^2+p^2}}{2 \rho^2}; \\ \bar{P} = -\frac{D \rho}{2} - \frac{\rho}{2 \sqrt{\rho^2+p^2}}; \quad \bar{P}' = -\frac{\rho D'}{2}. \end{array} \right.$$

Si ottiene poi naturalmente :

$$(7) \quad X_2 = -\bar{\alpha} \quad Y_2 = -\bar{\beta} \quad Z_2 = -\bar{\gamma}$$

L'elemento lineare della superficie S_2 normale ai raggi riflessi, diviene:

$$(8) \quad \begin{cases} E_2 = D \bar{\Omega} \\ F_2 = D' \bar{\Omega} \\ G_2 = D'' \bar{\Omega} \end{cases}$$

$$\text{con } \bar{\Omega} = \frac{\sqrt{\rho+p^2}}{2} + \frac{D(\rho^2+p^2)}{4} + \frac{D''(\rho^2+p^2)}{4\rho^2}.$$

Dalle (8) si ricava poi come or ora dalle (8):

« Ai sistemi coniugati di S corrispondono sistemi ortogonali su S_2 »

Per i coefficienti della 2.^a forma fondamentale di S_2 si hanno poi le espressioni:

$$(9) \quad \begin{cases} D_2 = D_1 = \frac{p}{2} \left\{ -\frac{1}{\rho^2+p^2} + D^2 + \frac{D'^2}{\rho^2} \right\} \\ D'_2 = D'_1 = \frac{pD'}{2} \left\{ D + \frac{D''}{\rho^2} \right\} \\ D''_2 = D''_1 = \frac{p}{2} \left\{ \frac{-\rho^2}{\rho^2+p^2} + D'^2 + \frac{D''^2}{\rho^2} \right\}. \end{cases}$$

Si ha poi:

$$E_2 D''_2 + G_2 D_2 - 2 F_2 D'_2 = 0,$$

e perciò anche la S_2 è ad area minima.

Resta così completamente dimostrato il teorema di Guichard.

Di più ricaviamo dalle formole precedenti:

Le due superficie ad area minima S_1, S_2 associate alla deformata del paraboloido si corrispondono:

- 1.° con conservazione di angoli;
- 2.° con conservazione di assintotiche;
- 3.° con conservazione di linee di curvatura.

§ 3.

Stabiliamo ora una formola relativa alla superficie luogo dei punti di mezzo del segmento che congiunge due punti corrispon-

denti delle due superficie minime S_1, S_2 , giacchè ne ricaveremo una conseguenza un po' più avanti. Chiamando S_3 la superficie in questione, che diremo anche la « superficie media della figura di Guichard » e che riesce manifestamente anche il luogo delle proiezioni sui piani tangenti della deformata del paraboloido, degli estremi dei raggi focali corrispondenti, avremo :

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

e poi per derivazione, tenuto conto delle (5) e (5) :

$$E_3 = \frac{p^2}{4(\rho^2 + p^2)} + \frac{D^2 \rho^2}{4},$$

$$F_3 = \frac{\rho^2}{4} \cdot DD',$$

$$G_3 = \frac{\rho^2}{4} + D'^2 \cdot \frac{\rho}{4},$$

e quindi per il discriminante della sua prima forma fondamentale, si ha l'espressione :

$$(10) \quad E_3 G_3 - F_3^2 = \frac{\rho^2}{16} \left\{ \frac{p^2}{\rho^2 + p^2} + D^2 \rho^2 + \frac{p^2 D'^2}{\rho^2 + p^2} \right\}.$$

Riprenderemo queste formole più tardi.

§ 4.

Andiamo ora a stabilire il teorema del Prof. Bianchi che pone in relazione il teorema di Guichard, colle congruenze di Thybaut.

A tal fine ricordiamo come data una qualsiasi superficie d'area minima, ne resta individuata subito un'altra che si dice la sua « coniugata in applicabilità secondo Bonnet » che è definita a meno di una traslazione, e che corrisponde alla prima per uguaglianza di elemento lineare, per ortogonalità di elementi, e per parallelismo di normali.

Ritornando alla figura di Guichard, ed alle formole precedenti, andiamo a determinare le due superficie minime coniugate in appli-

cabilità delle due S_1, S_2 associate alla deformata del paraboloide.

Se le diciamo rispettivamente S_{10}, S_{20} avremo:

$$(11) \quad \begin{cases} dx_{10} = Y_1 dz_1 - Z_1 dy_1 \\ dy_{10} = Z_1 dx_1 - X_1 dz_1 \\ dz_{10} = X_1 dy_1 - Y_1 dx_1 \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} dx_{20} = Y_2 dz_2 - Z_2 dy_2 \\ dy_{20} = Z_2 dx_2 - X_2 dz_2 \\ dz_{20} = X_2 dy_2 - Y_2 dx_2 \end{cases}$$

Ricorrendo alle (5), (5), (7), (7), eseguendo i calcoli e riducendo si ottiene:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} dx_{10} = & \left\{ \frac{-p^2 D'}{2\rho \sqrt{\rho^2 + p^2}} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} (-1 + D \sqrt{\rho^2 + p^2}) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} - \frac{D'}{2} X \right\} d\rho + \\ & + \left\{ \frac{p^2}{2\rho \sqrt{\rho^2 + p^2}} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} - D'' \right) \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \frac{\sqrt{\rho^2 + p^2}}{2\rho} D' \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} - D'' \right) X \right\} d\theta \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} dx_{20} = & \left\{ \frac{-p^2 D'}{2\rho \sqrt{\rho^2 + p^2}} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} (1 + D \sqrt{\rho^2 + p^2}) \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{D'}{2} X \right\} d\rho + \\ & + \left\{ \frac{p^2}{2\rho \sqrt{\rho^2 + p^2}} \left(\frac{-\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} - D'' \right) \frac{\partial \xi}{\partial \rho} + \frac{\sqrt{\rho^2 + p^2}}{2\rho} D' \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} + D'' \right) X \right\} d\theta \end{aligned} \right.$$

e le analoghe per $y_{10}, z_{10}, y_{20}, z_{20}$.

Le superficie S_{10}, S_{20} sono dunque definite dalle precedenti a meno di una traslazione nello spazio, e sono poste naturalmente in corrispondenza di punto a punto.

Se ora ricordiamo le proprietà fondamentali della corrispondenza che interviene fra S_1 e S_2 e stabilite al § 2, quelle ricordate della corrispondenza che intercede fra una superficie minima e la sua coniugata in applicabilità secondo Bonnet, e l'altra « *alle linee di curvatura di una superficie minima corrispondono sulla coniugata in applicabilità le linee assintotiche e viceversa* » otteniamo:

La corrispondenza che intercede fra S_{10}, S_{20} gode delle seguenti proprietà

- 1.° mantiene le linee di curvatura
- 2.° mantiene le linee assintotiche
- 3.° mantiene gli angoli.

Per dimostrare dunque il teorema del Prof. Bianchi, che cioè le due superficie $S_{10} S_{20}$ convenientemente collocate nello spazio costituiscono le due falde focali di una congruenza di Thybaut, basterà mostrare che si possono scegliere le costanti additive che compariscono in $x_{10} x_{20}$ etc. etc. in modo, che le congiungenti i punti corrispondenti riescano tangenti nei medesimi punti alle due superficie.

A tal fine notiamo che il raggio tangente alle due superficie $S_{10} S_{20}$ nei punti corrispondenti, dovendo riuscire normale alle due normali nei punti stessi delle due stesse superficie, dovrebbe esser parallelo alla tangente alla deformata del parallelo nel punto corrispondente di S , cioè alla tangente alla $\rho = \text{cost}$ nel punto corrispondente della deformata del paraboloido. Posto perciò:

$$\begin{aligned} x_{20} &= x_{10} + \Delta \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ y_{20} &= y_{10} + \Delta \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \\ z_{20} &= z_{10} + \Delta \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

e derivando, e tenendo conto delle (12) $(\overline{12})$, dobbiamo vedere se è possibile determinare per Δ un valore tale da soddisfare simultaneamente alle 3 precedenti equazioni.

Eseguiti i calcoli si trova che si soddisfa con:

$$\Delta = \rho$$

Il teorema del Prof. Bianchi resta in tal modo dimostrato, e si hanno le formole:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} x_{20} &= x_{10} + \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ y_{20} &= y_{10} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \\ z_{20} &= z_{10} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \end{aligned} \right.$$

La distanza dei punti corrispondenti delle due falde focali è ρ , ed espressa per la lunghezza del raggio focale corrispondente, riesce:

$$(14) \quad \rho = \sqrt{p(2T-p)}.$$

Ne ricaviamo il seguente teorema:

Data una qualunque deformata del paraboloido di rotazione, e costruita una delle superficie minime associate secondo Guichard, indi la sua coniugata in applicabilità secondo Bonnet, conducendo dai punti di quest'ultima i raggi paralleli alle tangenti delle linee a curvatura costante della deformata data nei punti corrispondenti, si ottiene una congruenza di Thybaut. L'altra falda focale della stessa congruenza si ottiene staccando sugli stessi raggi un segmento uguale a $\sqrt{p(2T-p)}$. se T è la lunghezza dei raggi focali corrispondenti.

§ 5.

Indichiamo con S_{30} la superficie media della congruenza di Thybaut ora costruita, e calcoliamo il suo elemento lineare.

Sarà:

$$x_{30} = \frac{1}{2}(x_{10} + x_{20})$$

$$y_{30} = \frac{1}{2}(y_{10} + y_{20})$$

$$z_{30} = \frac{1}{2}(z_{10} + z_{20}).$$

Derivando, e tenendo conto delle (12), (12'), indi quadrando e sommando si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{30} = \Sigma \left(\frac{\partial x_{30}}{\partial \rho} \right)^2 = \frac{p^2 D'^2}{4\rho^2} + \frac{D^2(\rho^2 + p^2)}{4} \\ F_{30} = \Sigma \frac{\partial x_{30}}{\partial \rho} \frac{\partial x_{30}}{\partial \theta} = \frac{D'}{4} \left(\frac{p^2 D''}{\rho^2} + D(\rho^2 + p^2) \right) \\ G_{30} = \Sigma \left(\frac{\partial x_{30}}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{p^2 D''^2}{4\rho^2} + \frac{D'^2(\rho^2 + p^2)}{4} + \frac{\rho^4}{4(\rho^2 + p^2)} \end{array} \right.$$

e quindi :

$$E_{30}G_{30} - F_{30}^2 = \frac{\rho^2}{16} \left\{ \frac{p^2}{\rho^2 + p^2} + D^2\rho^2 + \frac{p^2 D'^2}{\rho^2 + p^2} \right\}.$$

Confrontando con la (10), se ne deduce :

$$E_3 G_3 - F_3^2 = E_{30} G_{30} - F_{30}^2$$

e cioè :

La superficie media della figura di Guichard, e la superficie media della corrispondente congruenza di Thybaut, si corrispondono per uguaglianza di aree.

§ 6.

Più avanti abbiamo detto che il Prof. Bianchi invertì il teorema di Guichard, risolvendo la seguente quistione :

Data una qualunque superficie minima, è possibile staccare sulle sue normali dei segmenti in guisa che il luogo degli estremi sia una superficie applicabile sul paraboloide di rotazione? Riassumiamo brevemente il metodo e le formole del Prof. Bianchi per ricavarne altre conseguenze.

Riferita la superficie minima data alle sue linee di curvatura, si può porre il suo elemento lineare sotto la forma :

$$ds^2 = e^{\theta} (du^2 + dv^2)$$

dove θ è una soluzione dell'equazione di Liouville: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = e^{-\theta}$

La seconda forma fondamentale riesce poi :

$$-\Sigma dx dX = -du^2 + dv^2.$$

Staccato un segmento T sulle normali della superficie, si consideri la superficie a cui si giunge, e si traducano in calcolo le 2 seguenti proprietà soddisfatte nella figura di Guichard.

1.° l'angolo d'inclinazione del raggio focale sulla superficie d'arrivo è legato a T dalla relazione :

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \sigma} = 2KT \text{ con } K \text{ costante}$$

2.° alle linee di curvatura della superficie minima corrisponde un sistema coniugato sulla superficie d'arrivo.

Eseguiti i calcoli, risultano per T le due seguenti equazioni:

$$(I) \quad \frac{1}{(e^\theta + T e^{-\theta})^2} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{(e^\theta - T e^{-\theta})^2} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)^2 + 1 = 2 K T$$

$$(II) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} = \left(\frac{e^{-\theta}}{e^\theta + T e^{-\theta}} - \frac{e^{-\theta}}{e^\theta - T e^{-\theta}} \right) \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v} + \\ + \frac{e^\theta - T e^{-\theta}}{e^\theta + T e^{-\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{e^\theta + T e^{-\theta}}{e^\theta - T e^{-\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v}$$

Si trasformano poi queste due condizioni per T in un sistema completo di equazioni del 2.° ordine illimitatamente integrabile. La soluzione generale del sistema viene allora a contenere 2 costanti arbitrarie, e 3 costanti se non è a priori fissato il valore di K.

Scelta poi per T una qualsiasi soluzione del sistema (I) (II), si dimostra che la superficie a cui si arriva è precisamente una superficie applicabile sul paraboloido di rotazione di parametro K, e la congruenza delle normali della superficie minima è precisamente una delle due associate di Guichard alla deformata del paraboloido ottenuto.

E precisamente assumendo sulla superficie ottenuta quali coordinate le linee $T = \text{cost}$ e le loro traiettorie ortogonali si trova per il suo elemento lineare la forma :

$$ds^2 = \frac{2 K T}{2 K T - 1} d T^2 + C^2 (2 K T - 1) d \omega^2,$$

dove c è una costante.

Per la 2.ª forma fondamentale della stessa superficie, riferita alle linee u, v di prima, si trova poi la espressione :

$$\frac{K}{\sqrt{2 K T}} (e^{2\theta} - T^2 e^{-2\theta}) (du^2 + dv^2)$$

e cioè come era evidente:

Le linee della deformata del paraboloido corrispondenti alle linee di curvatura della superficie minima, costituiscono un sistema *isotermo-coniugato*.

Aggiungiamo che saremmo potuti partire dalle linee assintotiche della superficie minima anzichè dalle linee di curvatura, ed allora nei parametri delle assintotiche stesse, posto che le due forme fondamentali della superficie fossero

$$e^{2\theta} (du^2 + dv^2); 2 du dv;$$

le condizioni per T risulterebbero:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \frac{4T}{e^{2\theta} + T^2} e^{-2\theta} \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v} &= (2KT - 1) \frac{(e^{2\theta} - T^2 e^{-2\theta})^2}{e^{2\theta} + T^2 e^{-2\theta}} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + 2e^{-2\theta} T \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v} + (e^{2\theta} - T^2 e^{-2\theta}) \left(1 + \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v}\right) &+ \\ + \frac{\partial T}{\partial u} \left\{ -2T \frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial v} (e^{2\theta} + T^2 e^{-2\theta}) \right\} &+ \\ + \frac{\partial T}{\partial v} \left\{ -2T \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial \theta}{\partial u} (e^{2\theta} + T^2 e^{-2\theta}) \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Passando poi a calcolare gli elementi della superficie minima riflessa, trae il Prof. Bianchi la sua trasformazione di superficie minime.

Noi ci proponiamo ora di partire da una superficie minima e considerata questa come una delle falde focali di una congruenza di Thybaut, trovare le formole che danno direttamente l'altra falda focale. Le formole relative a questa trasformazione si ricaveranno collegando quello che abbiamo riportato in questo paragrafo, con quello che abbiamo stabilito nei paragrafi precedenti.

§ 7.

Consideriamo una superficie minima S, e supponiamola riferita alle sue linee assintotiche, di modo che le sue due forme fondamentali riuscireanno:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\theta} (du^2 + dv^2) \\ - \Sigma dx dX &= 2 du dv \end{aligned}$$

Proponiamoci di ricercare i coseni di direzione del raggio da spiccare dai suoi punti (tangenzialmente) onde ottenere una congruenza di Thybaut.

A tal fine, ricordando quello che abbiám veduto nei precedenti paragrafi, noi dovremo considerare la superficie minima coniugata in applicabilità secondo Bonnet della data, e sulle normali di questa staccare quel tal segmento T il cui estremo genera una superficie applicabile sul paraboloido di rotazione. Queste due ultime superficie riescono così naturalmente poste in corrispondenza con la superficie minima di partenza. Determinate allora sulla deformata del paraboloido ottenuta le linee a curvatura costante e condotte le loro tangenti, per ottenere la ricercata congruenza di Thybaut dovremo condurre ad esse le parallele dai punti corrispondenti della superficie minima data.

Staccando poi su ogni raggio un segmento uguale a $\sqrt{p(2T-p)}$ = $\frac{1}{K} \sqrt{2KT-1}$, dove T ha il significato più volte attribuite, otterremo l'altra falda focale della congruenza.

La superficie minima coniugata in applicabilità della data, riuscirà riferita alle linee di curvatura ed avrà le due seguenti forme fondamentali.

$$e^{2\theta}(du^2 + dv^2) - du^2 + dv^2$$

Il T da staccare sulle sue normali onde ottenere nel luogo degli estremi una superficie S_0 applicabile sul paraboloido di rotazione dovrà soddisfare alle due seguenti:

$$(I) \quad \frac{1}{(e^\theta + T e^{-\theta})^2} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{(e^\theta - T e^{-\theta})^2} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)^2 + 1 = 2 K T$$

$$(II) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} = \left(\frac{e^{-\theta}}{e^\theta + T e^{-\theta}} - \frac{e^{-\theta}}{e^\theta - T e^{-\theta}} \right) \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{e^\theta - T e^{-\theta}}{e^\theta + T e^{-\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{e^\theta + T e^{-\theta}}{e^\theta - T e^{-\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v}.$$

Riferita la superficie S_0 alle linee a curvatura costante $T = \text{cost}$

ed alle loro traiettorie ortogonali $\omega = \text{cost}$, il suo elemento lineare riesce

$$ds_0^2 = \frac{2KT}{2KT-1} dT^2 + c^2 (2KT-1) d\omega^2.$$

I coseni di direzione della tangente alla $T = \text{cost}$ sono :

$$\frac{1}{c\sqrt{2KT-1}} \frac{\partial x_0}{\partial \omega}, \quad \frac{1}{\sqrt{c(2KT-1)}} \frac{\partial y_0}{\partial \omega}, \quad \frac{1}{c\sqrt{2KT-1}} \frac{\partial z_0}{\partial \omega}.$$

Se si ricerca allora l'angolo τ che questi raggi formano colla $v = \text{cost}$ della superficie S data, nei punti corrispondenti si trova con facili calcoli:

$$\begin{aligned} \cos \tau &= \frac{1}{\sqrt{2KT-1}(e^\theta + Te^{-\theta})} \frac{\partial T}{\partial u} \\ \text{sen } \tau &= \frac{1}{\sqrt{2KT-1}(e^\theta - Te^{-\theta})} \frac{\partial T}{\partial v}. \end{aligned}$$

Se teniamo conto poi del fatto che la lunghezza del raggio da spicarsi dai punti di S per ottenere l'altra falda focale è $\frac{1}{K}\sqrt{2KT-1}$, ricaviamo subito le formole di trasformazione ricercate.

Veramente ci sarebbe ambiguità di segno, giacchè non sapremo da quale parte del raggio tangente alla S dobbiamo riportare la considerata lunghezza, ma è facile riconoscere che il segno da prendere nelle formole che seguono è precisamente il segno *meno*.

Si hanno dunque le seguenti formole di trasformazione che fanno passare da una delle due falde focali S , all'altra \bar{S} di una congruenza di Thybaut direttamente :

$$\bar{x} = x - \frac{e^{-\theta}}{K(e^\theta + Te^{-\theta})} \frac{\partial T}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{e^{-\theta}}{K(e^\theta - Te^{-\theta})} \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

In T compariscono 3 costanti arbitrarie, e perciò da una superficie minima, se ne traggono in questo modo una tripla infinità.

Per derivazione dalle precedenti, si ottiene poi per l'elemento lineare della \bar{S} la forma :

$$ds^2 = T^2 e^{-\theta} (du^2 + dv^2)$$

L'elemento lineare della superficie media della congruenza di viene :

$$\left[\left(\frac{e^\theta - T e^{-\theta}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2 K (e^\theta - T e^{-\theta})^2} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)^2 \right] du^2 +$$

$$+ \left[\left(\frac{e^\theta + T e^\theta}{2} \right)^2 - \frac{1}{2 K (e^\theta + T e^{-\theta})^2} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)^2 \right] dv^2$$

e si ha perciò :

Il sistema della superficie media che corrisponde alle assintotiche delle sue falde focali, è un sistema ortogonale.

PARTE SECONDA

§ 1.

Dai teoremi generali sulle deformazioni delle superficie, ricaviamo il seguente :

*È possibile (in due modi differenti) deformare una superficie in guisa che una sua curva C assuma una forma arbitrariamente prestabilita Γ , purchè la prima curvatura di Γ sia in ogni punto maggiore della curvatura geodetica di C nel punto corrispondente *).*

Le formole effettive risolutive di questa quistione si ricavano in generale, dalla integrazione di un'equazione alle derivate parziali del 2.^o ordine, del tipo di Ampère. In casi particolari però, cioè per particolari superficie, il problema può ridursi più semplice, ed è appunto per il paraboloido di rotazione che si presenta uno di questi casi.

Noi dimostreremo precisamente, che per il paraboloido di rotazione il problema si riduce alle sole quadrature.

Per giungere a questo risultato faremo uso del teorema di Guichard di cui abbiamo parlato innanzi.

Riportiamo l'enunciato :

Considerato un qualsiasi paraboloido di rotazione, ed il sistema ∞^2 di raggi emananti dai suoi punti ed inizialmente convergenti nel fuoco, immaginiamo una qualsiasi flessione della superficie nella quale i raggi accompagnino la superficie in guisa da rimanere invariabilmente uniti ai corrispondenti piani tangenti: gli estremi focali dei vari raggi focali riempiono una superficie minima ad essi ortogonale.

*) V. BIANCHI L., *Lez.* vol. I, pag. 248.

Considerati poi i raggi riflessi terminati ad una egual distanza dalla deformata del paraboloido, nel luogo dei loro estremi (simmetrici dei già considerati rispetto ai piani tangenti) si ottiene una nuova superficie ortogonale ad essi.

Da questa costruzione geometrica riesce poi stabilita una corrispondenza di punto a punto fra le due superficie d'area minima, che gode delle seguenti proprietà:

- 1.° Si corrispondono le assintotiche
- 2.° La corrispondenza è conforme.

§ 2.

Premettiamo la seguente considerazione:

Sia $x^2 + y^2 = 2pz$ l'equazione del paraboloido di rotazione, e:

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2p} = z(s)$$

sieno le equazioni, rispetto all'arco, di una sua qualsiasi linea. Considerato poi un punto arbitrario P di questa curva, e condotto il raggio focale P F, diciamo θ l'angolo concavo formato dalla tangente positiva in P alla linea col suddetto raggio focale P F volto da P verso F, e T la lunghezza assoluta dello stesso raggio focale.

Sarà:

$$\cos \theta = -\frac{x}{T} \frac{dx}{ds} - \frac{y}{T} \frac{dy}{ds} + \frac{\frac{p}{2} - z}{T} \frac{dz}{ds} \text{ e poichè}$$

$$T^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{p}{2}\right)^2 \text{ ne segue:}$$

$$(1) \quad \frac{dT}{ds} + \cos \theta = 0.$$

Sia ora C una curva assegnata del paraboloido, e Γ una arbitraria curva dello spazio. Immaginiamo poi fissata una corrispondenza di punto a punto fra le due curve con uguaglianza d'arco, e supponiamo inoltre che la prima curvatura di Γ in ogni suo punto

sia maggiore della curvatura geodetica di C nel punto corrispondente.

Detto P il punto generico di C, P' il punto corrispondente di Γ , $x y z$ le coordinate di P, $x' y' z'$ quelle di P', ed s il comune arco delle due curve, avremo :

$$(2) \quad \begin{cases} x = x(s) & y = y(s) & z = \frac{x^2 + y^2}{2p} = z(s) \\ x' = x'(s) & y' = y'(s) & z' = z'(s) \end{cases}$$

tutte quante funzioni note di s .

Proponiamoci di ricercare le (due) deformate del paraboloide contenenti Γ , e sulle quali Γ è la trasformata di C, secondo la corrispondenza da noi stabilita.

Condotti i raggi focali dai punti della C, ed immaginando che essi accompagnino il paraboloide nelle sue deformazioni, rimanendo invariabilmente uniti ai piani tangenti, andiamo anzitutto a ricercare come essi si disporranno dopo la deformazione, rispetto alla curva Γ .

Detto intanto θ l'angolo che ciascun raggio focale volto verso il fuoco forma con la corrispondente tangente positiva alla C, sarà θ anche l'angolo che ciascun raggio focale trasformato formerà con la tangente positiva alla Γ nel punto corrispondente.

Se diciamo dunque:

$$\begin{aligned} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \xi & \cos \eta & \cos \zeta \\ \cos \lambda & \cos \mu & \cos \nu \end{aligned}$$

i nove coseni di direzione del triedro principale relativo al punto generico di Γ , e che saranno funzioni note di s , e X Y Z i coseni di direzione del raggio focale trasformato corrispondente allo stesso punto e volto verso l'estremo focale, sarà intanto :

$$(3) \quad \cos \alpha . X + \cos \beta . Y + \cos \gamma . Z = \cos \theta .$$

Per determinare completamente la direzione dei raggi focali trasformati, andiamo innanzi a determinare quella delle normali al-

l'una e all'altra delle due deformate del paraboloido ricercate, lungo i punti di Γ .

A tale scopo indichiamo con ρ_g la curvatura geodetica di C , che possiamo ritenere funzione nota di s , e ricordiamo che essa si mantiene durante la deformazione del paraboloido, talmente che sarà ρ_g pure la curvatura geodetica di Γ pensata come appartenente all'una o all'altra delle due deformate. Per fissare anche il segno di ρ_g , secondo le convenzioni ordinariamente seguite¹⁾, consideriamo la direzione contenuta nel piano tangente al paraboloido e normale alla C , ed assumiamone per senso positivo quello che rispetto alla tangente positiva alla C ed alla normale positiva del paraboloido che intendiamo volta verso l'esterno, è rispettivamente situata come l'asse delle y rispetto a quelli delle x e delle z .

Intenderemo allora che ρ_g sia positiva o negativa, secondo che per andare dal punto considerato di C verso il centro di curvatura geodetica che si trova nella direzione ora considerata, si va nel senso positivo o negativo della direzione stessa. Rispetto poi alla Γ nelle superficie deformate manteniamo le identiche convenzioni intendendo che i sensi positivi delle normali alle superficie ed alla tangente alla Γ sieno quelli che seguono per la supposta applicabilità.

Indichiamo poi con ε l'angolo di cui deve ruotare in verso positivo nel piano normale a Γ la direzione positiva della normale ad una delle due deformate per sovrapporsi a quella della normale principale a Γ .

Secondo una formula nota, detto ρ il primo raggio di curvatura di Γ , sarà per le convenzioni stabilite circa ai segni:

$$(4) \quad \frac{1}{\rho_g} = - \frac{\text{sen } \varepsilon}{\rho}.$$

Nella (4) secondo i nostri dati, ρ e ρ_g si possono ritenere funzioni note di s , e perciò essa ci fornisce due valori per ε fra loro supplementari, a ciascuno dei quali corrisponderà una delle deformate in quistione.

¹⁾ V. BIANCHI, *Idem*, pag. 179.

Se indichiamo ora con $X' Y' Z'$ i coseni di direzione positiva della normale alla deformata lungo Γ , avremo manifestamente:

$$(5) \quad \begin{cases} X' \cos \xi + Y' \cos \eta + Z' \cos \zeta = \cos \varepsilon \\ X' \cos \alpha + Y' \cos \beta + Z' \cos \gamma = 0. \end{cases}$$

E giacchè, pel modo come è stato fissato ε , si ha anche:

$$X' \cos \lambda + Y' \cos \mu + Z' \cos \nu = -\operatorname{sen} \varepsilon$$

segue:

$$(6) \quad \begin{cases} X' = \cos \varepsilon \cos \xi - \cos \lambda \operatorname{sen} \varepsilon \\ Y' = \cos \varepsilon \cos \eta - \cos \mu \operatorname{sen} \varepsilon \\ Z' = \cos \varepsilon \cos \zeta - \cos \nu \operatorname{sen} \varepsilon. \end{cases}$$

Consideriamo ora la direzione or ora introdotta, contenuta nel piano tangente al paraboloidi e normale alla C , situata rispetto alla tangente positiva alla C ed alla normale al paraboloidi, come l'asse delle y è rispettivamente situato rispetto agli assi delle x e delle z e diciamo poi φ e σ gli angoli che il raggio focale forma con la direzione ora ricordata e con la normale alla superficie.

Se pensiamo ora a come abbiamo immaginato che avvenga la deformazione della superficie, ed il conseguente movimento dei raggi focali, e diciamo a, b, c i coseni di direzione della direzione trasformata di quella normale alla C ora considerata, sarà:

$$(7) \quad \begin{cases} a = Y' \cos \gamma - Z' \cos \beta \\ b = Z' \cos \alpha - X' \cos \gamma \\ c = X' \cos \beta - Y' \cos \alpha \end{cases}$$

ed anche:

$$(8) \quad \begin{cases} a X + b Y + c Z = \cos \varphi \\ X' X + Y' Y + Z' Z = \cos \sigma. \end{cases}$$

Ricordando la (3), e notando che è:

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \sigma + \cos^2 \theta = 1$$

si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} X = \cos \theta \cos \alpha + \cos \varphi \cdot a + \cos \sigma \cdot X' \\ Y = \cos \theta \cos \beta + \cos \varphi \cdot b + \cos \sigma \cdot Y' \\ Z = \cos \theta \cos \gamma + \cos \varphi \cdot c + \cos \sigma \cdot Z' \end{cases}$$

e ricorrendo alle (7):

$$(10) \quad \begin{cases} X = \cos \theta \cos \alpha + (Y' \cos \gamma - Z' \cos \beta) \cos \varphi + \cos \sigma \cdot X' \\ Y = \cos \theta \cos \beta + (Z' \cos \alpha - X' \cos \gamma) \cos \varphi + \cos \sigma \cdot Y' \\ Z = \cos \theta \cos \gamma + (X' \cos \beta - Y' \cos \alpha) \cos \varphi + \cos \sigma \cdot Z' \end{cases}$$

Riprendendo infine le (6):

$$(11) \quad \begin{cases} X = \cos \theta \cos \alpha + \cos \xi (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \lambda (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ Y = \cos \theta \cos \beta + \cos \eta (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \mu (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ Z = \cos \theta \cos \gamma + \cos \zeta (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \nu (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \end{cases}$$

In queste formole tutto è noto in funzione di s , giacchè vi compariscono i 9 coseni di direzione del triedro principale relativo alla curva Γ , e gli angoli (concavi) θ, φ, σ , che il raggio focale PF forma con gli assi del triedro trirettangolo formato dalla tangente positiva alla C, dalla normale a questa nel piano tangente al paraboloido debitamente fissata di senso, e dalla normale positiva al paraboloido.

Vi comparisce poi anche l'angolo ε definito dalla (4), che dalla (4) stessa riceve due valori $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ con $\varepsilon + \bar{\varepsilon} \equiv \pi \pmod{2\pi}$, a ciascuno dei quali corrisponde un sistema di valori per X, Y, Z e conseguentemente, come ora vedremo, una deformata del paraboloido, ma per ora intendiamo di scegliere fra i due valori di ε uno di essi e fermarsi alla considerazione di una sola deformata.

§ 3.

Andiamo ora a determinare la posizione dell'estremo focale su ciascun raggio trasformato.

Indichiamo con F_1 questo estremo focale, con x_1, y_1, z_1 le sue coordinate, e con Γ_1 il luogo di F_1 .

Se come abbiám fatto nel §§ 1, indichiamo con T la lunghezza assoluta del raggio focale, avremo:

$$(12) \quad \begin{cases} x_1 = x' + T X \\ y_1 = y' + T Y \\ z_1 = z' + T Z. \end{cases}$$

Se nelle formule (12) intendiamo che oltre s , T sia pure un parametro variabile, esse ci definiscono la superficie rigata riempita dai raggi $X Y Z$; se ne ricava, detto ds_1^2 il quadrato del suo elemento lineare:

$$ds_1^2 = dT^2 + 2 \cos \theta dT ds + \left(1 + T^2 \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] + 2T \left(\cos \alpha \frac{dx}{ds} + \cos \beta \frac{dy}{ds} + \cos \gamma \frac{dz}{ds} \right) \right) ds^2.$$

Segue allora che l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali delle generatrici rettilinee è: $dT + \cos \theta ds = 0$.

Se ora ricordiamo la (1) stabilita nel §§ 1, ricaviamo che la Γ_1 è traiettoria ortogonale delle stesse generatrici, come segue del resto anche dalle proprietà generali delle congruenze normali di rette.

Indicando ora con T_0 il valore di T nell'origine degli archi della C , sarà:

$$(13) \quad T - T_0 = - \int_0^s \cos \theta ds.$$

Ne segue per le (12):

$$(14) \quad \begin{cases} x_1 = x' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) X \\ y_1 = y' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) Y \\ z_1 = z' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) Z \end{cases}$$

e per le (11):

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) (\cos \theta \cos \alpha + \\ \quad + \cos \xi [\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon] - \cos \lambda [\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon]) \\ y_1 = y' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) (\cos \theta \cos \beta + \\ \quad + \cos \eta [\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon] - \cos \mu [\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon]) \\ z_1 = z' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) (\cos \theta \cos \gamma + \\ \quad + \cos \zeta [\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon] - \cos \nu [\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon]). \end{array} \right.$$

Ora ricordiamo come dalla teoria generale delle superficie ad area minima discenda questo teorema:

Il problema di costruire la superficie minima che passa per una curva assegnata, e che ha lungo di essa normali assegnate, o come si dice, costruire una superficie minima conoscendone una *striscia*, e che non è altro che un caso particolare del problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali del 2.º ordine, si risolve per le superficie minime colle sole quadrature, e precisamente colle seguenti formole di Schwarz:

Detta Γ_1 la curva assegnata, ed x_1, y_1, z_1 le coordinate del suo punto generico, detti $X Y Z$ i coseni di direzione delle normali assegnate lungo i punti di Γ_1 , poniamo:

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} u = x_1 + i \int (Z dy_1 - Y dz_1) \\ v = y_1 + i \int (X dz_1 - Z dx_1) \\ w = z_1 + i \int (Y dx_1 - X dy_1). \end{array} \right.$$

Eseguite le quadrature nelle (16), estendiamo le funzioni $u v w$ della variabile s al piano complesso: indicando inoltre con $R (A)$ la parte reale di una quantità complessa A , poniamo:

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} x = R (u) \\ y = R (v) \\ z = R (w). \end{array} \right.$$

Le (17) ci definiscono la superficie minima richiesta.

Se ora ricordiamo il teorema di Guichard, e se consideriamo la curva Γ_1 luogo degli estremi focali dei raggi i cui coseni di direzione abbiamo indicato con $X Y Z$, riconosciamo che la superficie minima che passa per Γ_1 e che lungo i suoi punti ha per normali questi raggi, è precisamente una delle due superficie minime che Guichard associa alle deformate del paraboloido di rotazione.

Andiamo perciò a determinare queste superficie minima colle formole di Schawarz.

Per la nostra superficie minima, avremo :

$$u = x' + TX + i \int [Z d(y' + TY) - Y d(z' + TZ)]$$

$$v = y' + TY + i \int [X d(z' + TZ) - Z d(x' + TX)]$$

$$w = z' + TZ + i \int [Y d(x' + TX) - X d(y' + TY)]$$

con $T = T_0 - \int_0^s \cos \theta ds$ ed $X Y Z$ forniti dalle (11).

§ 4.

Immaginiamo ora i raggi riflessi sul paraboloido dei raggi focali, e supponiamo che questi pure accompagnino la superficie nelle sue deformazioni: se a partire dal paraboloido su questi raggi riflessi riportiamo una lunghezza eguale a quella del corrispondente raggio focale, noi sappiamo per il teorema di Guichard che questi estremi costituiscono pure una superficie minima, ed ora intendiamo di andare a determinare analiticamente anche questa seconda superficie minima.

A tale scopo notiamo come sostituendo ai raggi focali i raggi riflessi, dovremo in tutte le formole incontrate fare il cambiamento di σ in $\pi - \sigma$.

Se indichiamo allora con un soprassegno tutti gli elementi relativi ai raggi riflessi, ed alla conseguente superficie minima, mantenendo analoghe notazioni, avremo :

$$\bar{X}' = X, \bar{Y}' = Y, \bar{Z}' = Z,$$

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \bar{X} = \cos\theta \cos\alpha + (Y' \cos\gamma - Z' \cos\beta) \cos\varphi - X' \cos\sigma = \\ \quad = \cos\theta \cos\alpha - \cos\xi (\cos\sigma \cos\varepsilon + \cos\varphi \sin\varepsilon) + \cos\lambda (\cos\sigma \sin\varepsilon - \cos\varphi \cos\varepsilon) \\ \bar{Y} = \cos\sigma \cos\beta + (Z' \cos\alpha - X' \cos\gamma) \cos\varphi - Y' \cos\sigma = \\ \quad = \cos\theta \cos\beta - \cos\eta (\cos\sigma \cos\varepsilon + \cos\varphi \sin\varepsilon) + \cos\mu (\cos\sigma \sin\varepsilon - \cos\varphi \cos\varepsilon) \\ \bar{Z} = \cos\theta \cos\gamma + (X' \cos\beta - Y' \cos\alpha) \cos\varphi - Z' \cos\sigma = \\ \quad = \cos\theta \cos\gamma - \cos\zeta (\cos\sigma \cos\varepsilon + \cos\varphi \sin\varepsilon) + \cos\nu (\cos\sigma \sin\varepsilon - \cos\varphi \cos\varepsilon) \end{array} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1 = x' + T \bar{X} \\ \bar{y}_1 = y' + T \bar{Y} \\ \bar{z}_1 = z' + T \bar{Z} \end{array} \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{x}_1 + i \int (\bar{Z} d\bar{y}_1 - \bar{Y} d\bar{x}_1) \\ \bar{v} = \bar{y}_1 + i \int (\bar{X} d\bar{z}_1 - \bar{Z} d\bar{x}_1) \\ \bar{w} = \bar{z}_1 + i \int (\bar{Y} d\bar{x}_1 - \bar{X} d\bar{y}_1) \end{array} \right.$$

e le equazioni della superficie minima riflessa:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = R(\bar{u}) \\ \bar{y} = R(\bar{v}) \\ \bar{z} = R(\bar{w}). \end{array} \right.$$

§ 5.

In questo modo noi siamo giunti a determinare le due superficie minime che Guichard associa alla ricercata deformata del paraboloidi di rotazione, ed ora non ci resta più che ricordare le proprietà della corrispondenza che nasce fra queste due superficie minime per completare la risoluzione del problema che ci eravamo proposti.

Secondo quanto abbiamo enunciato da principio, noi dovremmo ora stabilire fra le due superficie la corrispondenza di Guichard

nella quale alle linee assintotiche della prima corrispondono le linee assintotiche della seconda, e conseguentemente alle linee di curvatura dell'una le linee di curvatura dell'altra: infine ai punti x, y, z di Γ_1 , i punti $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ di $\bar{\Gamma}_1$.

Stabilita questa corrispondenza, e condotte le normali alle due superficie minime nei punti corrispondenti, queste si incontrerebbero due a due nei punti della deformata cercata.

Per stabilire ora questa corrispondenza fra le due superficie, dimostreremo che per il modo col quale sono state determinate quelle superficie minime, non occorrono ulteriori calcoli ma discende naturalmente dalle formole già stabilite.

A tale scopo scindiamo s, u, v, w nelle loro parti reali ed immaginarie, e poniamo.

$$s = a + ib, \quad u = x + ix_0, \quad v = y + iy_0, \quad w = z + iz_0.$$

Avremo :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(a, b) \\ y = y(a, b) \\ z = z(a, b) \end{array} \right.$$

e riferita la superficie minima luogo di x, y, z alle linee $a = \text{cost.}$ ($b = \text{cost.}$) tenuto conto del fatto che x, y, z sono parti reali di funzioni della variabile complessa $a + ib$, e che le u, v, w sono legate dalla relazione :

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dw}{ds}\right)^2 = 0,$$

ne segue per l'elemento lineare della superficie minima l'espressione

$$ds^2 = \lambda (da^2 + db^2)$$

e cioè le linee $a = \text{cost.}, b = \text{cost.}$ segnano su di essa un sistema isoterma.

Altrettanto facciamo ora per l'altra superficie minima.

$$\text{Posto: } s = a + ib, \quad \bar{u} = \bar{x} + i\bar{x}_0, \quad \bar{v} = \bar{y} + i\bar{y}_0, \quad \bar{w} = \bar{z} + i\bar{z}_0,$$

avremo :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \bar{x}(a, b) \\ \bar{y} = \bar{y}(a, b) \\ \bar{z} = \bar{z}(a, b) \end{array} \right.$$

e :

$$\bar{d}s^2 = \bar{\lambda}(da^2 + d\bar{b}^2).$$

In tal modo nasce di per sè stessa una corrispondenza fra i punti delle due superficie minime, che hanno uguali coordinate a, b .

Per quel che precede questa corrispondenza è conforme, e fa corrispondere ai punti x, y, z della nuova T_1 , i punti $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, di \bar{T}_1 , riducendosi ivi s reale, ed eguale nei punti corrispondenti.

Ciò basta ad assicurare che questa corrispondenza è la stessa di quella che stabilisce il teorema di Guichard.

Infatti quest'ultima è una corrispondenza conforme, ed essendo i due sistemi a, b sulle due superficie minime, sistemi isotermi, se diciamo per un momento \bar{a}, \bar{b} il sistema a, b sulla seconda superficie minima, essa qualunque sia si otterrà ponendo :

$$\bar{a} + i\bar{b} = \varphi(a + ib)$$

e perciò lungo le due curve luogo dei punti $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, sarà $\bar{a} = \varphi(a)$. Ma nella supposta corrispondenza di Guichard si ha lungo le stesse curve $\bar{a} = a$, e perciò lungo tutti i punti delle due superficie:

$$\bar{a} = a, \quad \bar{b} = b.$$

Possiamo dunque ormai concludere che per determinare la ricercata deformata del paraboloido, non ci restano a determinare che i punti di intersezione delle normali alle due superficie nei punti corrispondenti a, b .

Indicando ora $X Y Z, \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$ i coseni di direzione delle normali alle superficie minime in due punti corrispondenti, sarà:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} \right) \\ Y = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} \right) \\ Z = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} \right) \\ \bar{X} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial a} \frac{\partial \bar{z}}{\partial b} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial a} \frac{\partial \bar{y}}{\partial b} \right) \\ \bar{Y} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial a} \frac{\partial \bar{x}}{\partial b} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial a} \frac{\partial \bar{z}}{\partial b} \right) \\ \bar{Z} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial a} \frac{\partial \bar{y}}{\partial b} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial a} \frac{\partial \bar{x}}{\partial b} \right). \end{array} \right.$$

Se diciamo T la lunghezza assoluta del raggio focale corrispondente alla coppia di punti di coordinate a, b , avremo :

$$\begin{aligned} x - T X &= \bar{x} - T \bar{X} \\ y - T Y &= \bar{y} - T \bar{Y} \\ z - T Z &= \bar{z} - T \bar{Z} \end{aligned}$$

e perciò

$$T = \frac{x - \bar{x}}{X - \bar{X}} = \frac{y - \bar{y}}{Y - \bar{Y}} = \frac{z - \bar{z}}{Z - \bar{Z}}$$

e dette infine ξ, η, ε , le coordinate del punto corrispondente della deformata del paraboloidi ricercata, avremo :

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \xi = x - T X = \bar{x} - T \bar{X} = \frac{\bar{x} X - x \bar{X}}{X - \bar{X}} \\ \eta = y - T Y = \bar{y} - T \bar{Y} = \frac{\bar{y} Y - y \bar{Y}}{Y - \bar{Y}} \\ \varepsilon = z - T Z = \bar{z} - T \bar{Z} + \frac{\bar{x} Z - z \bar{Z}}{Z - \bar{Z}} \end{array} \right.$$

Abbiamo in tal modo, ormai risoluto completamente il problema che ci eravamo proposti da principio, e tenuto conto del processo che abbiamo adottato, possiamo concludere :

Il problema della determinazione delle deformate del paraboloido di rotazione, quando sia assegnata la trasformata di una assegnata linea del paraboloido, si risolve colle sole quadrature.

§ 6.

Sino dalla fine del § 2, abbiamo osservato come nelle formole (11) tutto era noto, giacchè vi comparivano i nove coseni di direzione del triedro principale relativo al punto generico di T, gli angoli θ φ σ che il raggio focale P F forma con gli assi del triedro trirettangolo formato dalla tangente positiva alla C, dalla normale a questa nel piano tangente al paraboloido debitamente fissata di senso, e dalla normale positiva al paraboloido; ed infine l'angolo ε che riusciva determinato dalla (4) :

$$\frac{1}{\rho_g} = - \frac{\text{sen } \varepsilon}{\rho}.$$

Però siccome l'angolo ε riesce in tal modo individuato per il suo seno, ne seguono come abbiám detto due valori $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ con: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pi$ (mod. 2π). A ciascuno di questi due valori di ε corrispondono due deformate distinte: però sino da allora ci siamo ridotti alla considerazione di una sola delle due, ed ora per completare intendiamo di scrivere anche le formole relative all'altra.

Possiamo osservare che ai due valori di ε , corrispondono due deformate differenti non solo, ma che corrispondendo due differenti sistemi di valori per i coseni di direzione dei raggi focali trasformati lungo i punti della curva Γ , corrispondono pure due differenti coppie di superficie minime.

Detto ε il minore dei due valori $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, indichiamo con S_1, \bar{S}_1 le superficie minime corrispondenti a questo valore ε , con S_2, \bar{S}_2 quelle corrispondenti all'altro valore.

Indichiamo poi con Σ_1 Σ_2 le due deformate del paraboloide rispettivamente corrispondenti a questi due valori, ed indichiamo infine con lettere munite dell'indice 1 tutti gli elementi relativi al 1.º valore, e con lettere munite dell'indice 2, gli elementi relativi al secondo.

Avremo manifestamente:

Elementi relativi al primo valore.

$$(11) \begin{cases} X_1 = \cos \theta \cos \alpha + \cos \xi (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \lambda (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ Y_1 = \cos \theta \cos \beta + \cos \eta (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \mu (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ Z_1 = \cos \theta \cos \gamma + \cos \zeta (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \nu (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} \bar{X}_1 = \cos \theta \cos \alpha - \cos \xi (\cos \sigma \cos \varepsilon + \cos \varphi \sin \varepsilon) + \cos \lambda (\cos \sigma \sin \varepsilon - \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ \bar{Y}_1 = \cos \theta \cos \beta - \cos \eta (\cos \sigma \cos \varepsilon + \cos \varphi \sin \varepsilon) + \cos \mu (\cos \sigma \sin \varepsilon - \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ \bar{Z}_1 = \cos \theta \cos \gamma - \cos \zeta (\cos \sigma \cos \varepsilon + \cos \varphi \sin \varepsilon) + \cos \nu (\cos \sigma \sin \varepsilon - \cos \varphi \cos \varepsilon) \end{cases}$$

$$(15) \begin{cases} x_{11} = x' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) X_1 \\ y_{11} = y' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) Y_1 \\ z_{11} = z' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) Z_1 \end{cases} \quad (15) \begin{cases} \bar{x}_{11} = \bar{x}' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) \bar{X}_1 \\ \bar{y}_{11} = \bar{y}' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) \bar{Y}_1 \\ \bar{z}_{11} = \bar{z}' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) \bar{Z}_1 \end{cases}$$

$$(16) \begin{cases} u_1 = x_{11} + i \int (Z_1 dy_{11} - Y_1 dz_{11}) \\ v_1 = y_{11} + i \int (X_1 dz_{11} - Z_1 dx_{11}) \\ w_1 = z_{11} + i \int (Y_1 dx_{11} - X_1 dy_{11}) \end{cases} \quad (16) \begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{x}_{11} + i \int (\bar{Z}_1 d\bar{y}_{11} - \bar{Y}_1 d\bar{z}_{11}) \\ \bar{v}_1 = \bar{y}_{11} + i \int (\bar{X}_1 d\bar{z}_{11} - \bar{Z}_1 d\bar{x}_{11}) \\ \bar{w}_1 = \bar{z}_{11} + i \int (\bar{Y}_1 d\bar{x}_{11} - \bar{X}_1 d\bar{y}_{11}) \end{cases}$$

$$(17) \text{ Sup. } S_1 \left. \begin{matrix} x_1 = R(u_1) = x_1(a, b) \\ y_1 = R(v_1) = y_1(a, b) \\ z_1 = R(w_1) = z_1(a, b) \end{matrix} \right\} \quad (17) \text{ Sup. } \bar{S}_1 \left. \begin{matrix} \bar{x}_1 = R(\bar{u}_1) = \bar{x}_1(a, b) \\ \bar{y}_1 = R(\bar{v}_1) = \bar{y}_1(a, b) \\ \bar{z}_1 = R(\bar{w}_1) = \bar{z}_1(a, b) \end{matrix} \right\}$$

$$ds_1^2 = \lambda_1(da^2 + db^2); \quad d\bar{s}_1^2 = \bar{\lambda}_1(da^2 + db^2)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial a} \frac{\partial z_1}{\partial b} - \frac{\partial z_1}{\partial a} \frac{\partial y_1}{\partial b} \right) & \bar{X}_1 &= \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \left(\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial a} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial b} - \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial a} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial b} \right) \\ Y_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{\partial z_1}{\partial a} \frac{\partial x_1}{\partial b} - \frac{\partial x_1}{\partial a} \frac{\partial z_1}{\partial b} \right) & \bar{Y}_1 &= \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \left(\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial a} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial b} - \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial a} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial b} \right) \\ Z_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial a} \frac{\partial y_1}{\partial b} - \frac{\partial y_1}{\partial a} \frac{\partial x_1}{\partial b} \right) & \bar{Z}_1 &= \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \left(\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial a} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial b} - \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial a} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial b} \right) \end{aligned}$$

$$(20) \quad \text{Sup. } \Sigma_1 \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\bar{x}_1 X_1 - x_1 \bar{X}_1}{X_1 - \bar{X}_1} \\ \eta_1 &= \frac{\bar{y}_1 Y_1 - y_1 \bar{Y}_1}{Y_1 - \bar{Y}_1} \\ \zeta_1 &= \frac{\bar{z}_1 Z_1 - z_1 \bar{Z}_1}{Z_1 - \bar{Z}_1} \end{aligned} \right.$$

Elementi relativi al secondo valore.

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} X_2 &= \cos \theta \cos \alpha - \cos \xi (\cos \sigma \cos \varepsilon + \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \lambda (\cos \sigma \sin \varepsilon - \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ Y_2 &= \cos \theta \cos \beta - \cos \eta (\cos \sigma \cos \varepsilon + \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \mu (\cos \sigma \sin \varepsilon - \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ Z_2 &= \cos \theta \cos \gamma - \cos \zeta (\cos \sigma \cos \varepsilon + \cos \varphi \sin \varepsilon) - \cos \nu (\cos \sigma \sin \varepsilon - \cos \varphi \cos \varepsilon) \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{X}_2 &= \cos \theta \cos \alpha + \cos \xi (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) + \cos \lambda (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ \bar{Y}_2 &= \cos \theta \cos \beta + \cos \eta (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) + \cos \mu (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \\ \bar{Z}_2 &= \cos \theta \cos \gamma + \cos \zeta (\cos \sigma \cos \varepsilon - \cos \varphi \sin \varepsilon) + \cos \nu (\cos \sigma \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon) \end{aligned} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} x_{12} &= x' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) X_2 \\ y_{12} &= y' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) Y_2 \\ z_{12} &= z' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) Z_2 \end{aligned} \right. \quad (15) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{x}_{12} &= x' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) \bar{X}_2 \\ \bar{y}_{12} &= y' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) \bar{Y}_2 \\ \bar{z}_{12} &= z' + (T_0 - \int_0^s \cos \theta ds) \bar{Z}_2 \end{aligned} \right.$$

$$i) \left\{ \begin{array}{l} u_2 = x_{12} + i \int (Z_2 dy_{12} - Y_2 dz_{12}) \\ v_2 = y_{12} + i \int (X_2 dz_{12} - Z_2 dx_{12}) \\ w_2 = z_{12} + i \int (Y_2 dx_{12} - X_2 dy_{12}) \end{array} \right. \quad (16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_2 = \bar{x}_{12} + i \int \bar{Z}_2 d\bar{y}_{12} - \bar{Y}_2 d\bar{z}_{12} \\ \bar{v}_2 = \bar{y}_{12} + i \int \bar{X}_2 d\bar{x}_{12} - \bar{Z}_2 d\bar{z}_{12} \\ \bar{w}_2 = \bar{z}_{12} + i \int \bar{Y}_2 d\bar{x}_{12} - \bar{X}_2 d\bar{y}_{12} \end{array} \right.$$

$$i) \text{ Sup. } S_2 \left\{ \begin{array}{l} x_2 = R(u_2) = x_2(a, b) \\ y_2 = R(v_2) = y_2(a, b) \\ z_2 = R(w_2) = z_2(a, b) \end{array} \right. \quad (17) \quad \text{Sup. } \bar{S}_2 \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_2 = R(\bar{u}_2) = \bar{x}_2(a, b) \\ \bar{y}_2 = R(\bar{v}_2) = \bar{y}_2(a, b) \\ \bar{z}_2 = R(\bar{w}_2) = \bar{z}_2(a, b) \end{array} \right.$$

$$ds_2^2 = \lambda_2(da^2 + db^2) \quad d\bar{s}_2^2 = \bar{\lambda}_2(da^2 + db^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial a} \frac{\partial z_2}{\partial b} - \frac{\partial z_2}{\partial a} \frac{\partial y_2}{\partial b} \right) \\ Y_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{\partial z_2}{\partial a} \frac{\partial x_2}{\partial b} - \frac{\partial x_2}{\partial a} \frac{\partial z_2}{\partial b} \right) \\ Z_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{\partial z_2}{\partial a} \frac{\partial y_2}{\partial b} - \frac{\partial y_2}{\partial a} \frac{\partial x_2}{\partial b} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_2 = \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \left(\frac{\partial \bar{y}_2}{\partial a} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial b} - \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial a} \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial b} \right) \\ \bar{Y}_2 = \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \left(\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial a} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial b} - \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial a} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial b} \right) \\ \bar{Z}_2 = \frac{1}{\bar{\lambda}_2} \left(\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial a} \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial b} - \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial a} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial b} \right) \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \text{Sup. } \Sigma_2 \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = \frac{\bar{x}_2 X_2 - x_2 \bar{X}_2}{X_2 - \bar{X}_2} \\ \eta_2 = \frac{\bar{y}_2 Y_2 - y_2 \bar{Y}_2}{Y_2 - \bar{Y}_2} \\ \zeta_2 = \frac{\bar{z}_2 Z_2 - z_2 \bar{Z}_2}{Z_2 - \bar{Z}_2} \end{array} \right.$$

§ 7.

Le formole generali stabilite nei paragrafi precedenti, subiscono delle semplificazioni in casi particolari. Supponiamo ad esempio che la curva C sia una geodetica del paraboloido, e quindi la Γ geodetica per la deformata: sarà intanto

$$\frac{1}{\rho_g} = 0$$

e perciò:

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = \pi.$$

Se ricorriamo poi al teorema di Clairaut sulle geodetiche delle superficie di rotazione, ed indichiamo con r il raggio dei paralleli e con τ l'angolo d'inclinazione della geodetica C sui meridiani, abbiamo:

$$\text{sen } \tau = \frac{c}{r} \text{ con } c \text{ costante}$$

Con facili calcoli ne ricaviamo poi:

$$\cos \theta = - \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \quad \cos \varphi = - \frac{c}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \quad \cos \sigma = - \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}},$$

$T = \frac{r}{2p} + \frac{p}{2}$ dove r è data in funzione di s dalla:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{p\sqrt{r^2 - c^2}}{r\sqrt{r^2 + p^2}}.$$

Si ottiene poi:

$$X_1 = - \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \alpha - \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \xi + \frac{c}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \lambda,$$

$$\bar{X}_1 = - \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \alpha + \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \xi + \frac{c}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \lambda,$$

$$X_2 = - \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \alpha + \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \xi - \frac{c}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \lambda,$$

$$\bar{X}_2 = - \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{r^2 + p^2} \cos \alpha - \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \xi - \frac{c}{\sqrt{r^2 + p^2}} \cos \lambda,$$

$$x_{11} = x' - \frac{\sqrt{r^2 - c^2} \cdot \sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \alpha - \frac{\sqrt{r^2 + p^2}}{2} \cos \xi + \frac{c\sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \lambda$$

$$\bar{x}_{11} = x' - \frac{\sqrt{r^2 - c^2} \cdot \sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \alpha + \frac{\sqrt{r^2 + p^2}}{2} \cos \xi + \frac{c\sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \lambda$$

$$x_{12} = x' - \frac{\sqrt{r^2 - c^2} \cdot \sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \alpha + \frac{\sqrt{r^2 + p^2}}{2} \cos \xi - \frac{c\sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \lambda$$

$$\bar{x}_{12} = x' - \frac{\sqrt{r^2 - c^2} \cdot \sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \alpha - \frac{\sqrt{r^2 + p^2}}{2} \cos \xi - \frac{c\sqrt{r^2 + p^2}}{2p} \cos \lambda.$$

Si procede poi nel solito modo colle formole (16) (16̄) etc.

Se la geodetica fosse un meridiano si ha $c=0$ e perciò:

$$\cos \theta = -\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}, \quad \cos \varphi = 0, \quad \cos \sigma = -\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}.$$

Le due deformate si riducono ad una sola, e si ha:

$$\zeta_1 = -\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}} \cos \alpha - \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}} \cos \xi \quad \bar{X}_1 = -\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}} \cos \alpha + \frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}} \cos \xi$$

$$s = \frac{r}{2p} \sqrt{r^2+p^2} + \frac{p}{2} \text{sett} \sinh \left(\frac{r}{p} \right) + \text{cost. etc. etc.}$$

I casi particolari si possono naturalmente moltiplicare a piacere facendo anche particolari ipotesi sulla curva Γ , ma non offrono evidentemente nessuna difficoltà.

Quando la curva Γ debba acquistare particolari proprietà rispetto alla superficie, essa non potrà essere assunta ad arbitrio. Se ad es. volessimo che riuscisse linea di curvatura per la deformata dovremmo poter determinare due valori di λ, μ tali da soddisfare alle

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \lambda d X' &= \mu X' \\ \cos \beta + \lambda d Y' &= \mu Y' \\ \cos \gamma + \lambda d Z' &= \mu Z' \end{aligned}$$

se $X' Y' Z'$ sono i coseni di direzione delle normali alla deformata lungo Γ , giacchè dovrebbe aversi con un conveniente t :

$$\frac{d(x'+tX')}{X'} = \frac{d(y'+tY')}{Y'} = \frac{d(z'+tZ')}{Z'}.$$

Si dovrebbe avere dunque:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \frac{d X'}{ds} & X' \\ \cos \beta & \frac{d Y'}{ds} & Y' \\ \cos \gamma & \frac{d Z'}{ds} & Z' \end{vmatrix} = 0$$

che si riduce a :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\rho}{\rho_g} \right) = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_g} \right)^2}$$

dalla quale possiamo ad es. trarre T in funzione di s, quando ρ sia data arbitrariamente in funzione della stessa s, formola del resto che vale per la quistione analoga per una qualunque superficie.
