

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CLOTILDE SADOWSKI

Un criterio d'equivalenza per le varietà ∞^{r-1} di una varietà ∞^r algebrica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 13
(1919), exp. n° 3, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1919_1_13__A3_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DOTT. CLOTILDE SADOWSKI

UN CRITERIO D' EQUIVALENZA

PER LE

Varietà ∞^{r-1} di una Varietà ∞^r Algebrica

TESI D'ABILITAZIONE

§ 1. Generalità.

1. Il Sig. SEVERI ha dato, come è noto, i tre criteri seguenti per l'equivalenza (lineare) di curve tracciate sopra una superficie algebrica:

(I). — *Se le curve di un sistema continuo segnano gruppi equivalenti su di una curva appartenente ad un sistema continuo che non sia un fascio irrazionale, esse sono equivalenti.*

(II). — *Se due curve A, B, segnano gruppi equivalenti sulle curve d'un fascio, esse sono equivalenti o differiscono per curve fondamentali del fascio.*

(III). — *Se due curve A, B, segnano gruppi equivalenti sulle curve di un sistema ∞^1 , irriducibile, Σ , di indice ν , le curve νA , νB , sono equivalenti o differiscono per curve fondamentali di Σ^1 .*

Il Sig. TORELLI ha pure stabilito quest'altro criterio per l'equivalenza delle curve su di una superficie ²⁾:

(IV). — *Se due curve A, B, segnano gruppi equivalenti sulle curve d'un sistema ∞^1 , irriducibile, Σ , privo di punti multipli variabili, esse sono equivalenti, ovvero differiscono per curve fondamentali di Σ .*

Scopo del presente lavoro è di estendere il criterio dato dal sig. Torelli, vogliamo cioè dimostrare che:

(IV*). — *Se due varietà ∞^{r-1} , A_{r-1} , B_{r-1} ³⁾ appartenenti ad una*

¹⁾ SEVERI. *Alcune relazioni d'equivalenza ...* (Atti del R. Ist. Veneto, t. LXX, 1910,11).

²⁾ TORELLI. *Un criterio d'equivalenza* (Atti della R. Acc. delle Scienze - Torino, vol. XLIX, 1913-14).

³⁾ Indicheremo d'ora in poi la dimensione delle varietà considerate con un indice posto a piedi della lettera che indica la varietà stessa.

varietà ad r dimensioni V_r , segano varietà ∞^{h-1} equivalenti sulle varietà C_h d'una congruenza ∞^{r-h} , irriducibile, Σ_{r-h} , priva di varietà ∞^{h-1} singolari variabili, esse sono equivalenti, ovvero differiscono per varietà ∞^{r-1} fondamentali di Σ_{r-h} , dicendo che una varietà di V_r è fondamentale per la congruenza Σ_{r-h} , quando una C_h generica non la incontra in punti variabili.

2. Sarà utile premettere una estensione del criterio (II). Dimostriamo dunque che:

(II *). — *Se due varietà ∞^{r-1} appartenenti ad una varietà ad r dimensioni, segnano varietà equivalenti sulle varietà di una congruenza ∞^{r-h} , irriducibile, dell'indice uno, di varietà ad h dimensioni, esse sono equivalenti o differiscono per varietà fondamentali della congruenza.*

Il teorema è noto e dimostrato (SEVERI) quando $h = r - 1$; noi faremo vedere allora che, sotto l'ipotesi che il teorema valga per congruenze dell'indice uno, di varietà ∞^{h+1} , esso vale anche per congruenze dell'indice uno, di varietà ∞^h .

Si abbia dunque sopra una varietà V_r una congruenza ∞^{r-h} , Σ_{r-h} , irriducibile, di indice uno, di varietà C_h , e supponiamo che siano equivalenti le varietà ∞^{h-1} (AC), (BC), che due varietà A_{r-1} , B_{r-1} , segnano sulla varietà generica della congruenza. Sulla varietà ad $r - h$ dimensioni, i cui punti sono le immagini delle C_h della congruenza data prendiamo una congruenza generica di curve Δ ; a ciascuna di queste, su V_r , corrisponderà una varietà D_{h+1} , contenente un fascio φ di varietà C_h , e tutte le D_{h+1} si disporranno in una congruenza S_{r-h-1} dell'indice uno. Poichè le varietà (AD), (BD) d'intersezione delle A_{r-1} , B_{r-1} con ciascuna D segnano le C del fascio appartenente a quella D in varietà equivalenti, potremo scrivere $(AD) + \Delta_1 \equiv (BD) + \Delta_2$; essendo Δ_1 e Δ_2 due varietà (appartenenti ad una D) fondamentali per il fascio φ . Ma, come vedremo al n. seguente, le varietà Δ_1 e Δ_2 si possono determinare razionalmente per ogni varietà D : onde al variare di D nella congruenza, esse descriveranno due varietà Φ_1 e Φ_2 ad $r - 1$ dimensioni. Allora, poichè $A_{r-1} + \Phi_1$; $B_{r-1} + \Phi_2$, segnano le varietà D in varietà equivalenti, in virtù della ipotesi fatta, potremo affermare l'equivalenza delle varietà $A_{r-1} + \Phi_1 + \Psi_1$; $B_{r-1} + \Phi_2 + \Psi_2$, dove $\Phi_1 + \Psi_1$; $\Phi_2 + \Psi_2$ sono

due varietà ∞^{r-1} fondamentali per la congruenza Σ , il che è quanto volevamo dimostrare.

3. Ci resta da far vedere che per ogni varietà D per la quale si ha

$$(1) \quad (AD) + \Delta_1 \equiv (BD) + \Delta_2$$

si può determinare la varietà Δ_2 , sotto certe condizioni prestabilite per la Δ_1 . Escludiamo il caso, che sarebbe inutile di considerare, in cui fosse $(AD) \equiv (BD)$, e supponiamo che l'ordine di (AD) sia minore od eguale dell'ord. di (BD) . Osserviamo intanto che si può sempre ridurre Δ_1 ad essere costituita da varietà intere C_i del fascio φ appartenente alla varietà D considerata, aggiungendo nel caso contrario ai due membri della (1) le parti di varietà che occorrono per completare le varietà spezzate. Prendiamo n varietà del fascio φ , non spezzate: siano $C_1, C_2 \dots C_n$, con n tanto grande che la varietà (AD) più le n varietà scelte appartengano ad un sistema lineare (W) contenente parzialmente la varietà (BD) ¹⁾. Consideriamo il sistema residuo di (W) rispetto a (BD) : o esso consta di una sola varietà fondamentale del fascio φ , quindi pertettamente determinata, o, se consta di infinite varietà (tutte fondamentali per φ) deve contenere parzialmente le $C_1, C_2 \dots C_n$. In quest'ultimo caso consideriamo ancora il sistema residuo del sistema ottenuto rispetto a C_1 , e se questo è infinito, consideriamo il suo sistema residuo rispetto a $C_2 \dots$ giungeremo ad un sistema costituito da una sola varietà Δ_2 , quando si saranno considerati i vari sistemi residui rispetto a k delle varietà $C_1, C_2 \dots C_n$ con $k < n$. perchè per le supposizioni fatte l'ordine di (AD) ; è minore dell'ordine di (BD) e se fosse $k = n$ sarebbe

$$(AD) + C_1 + C_2 + \dots + C_n \equiv (BD) + C_1 + C_2 + \dots + C_n \text{ cioè}$$

$$(AD) \equiv (BD), \text{ caso escluso.}$$

¹⁾ Ciò si può fare, per es. così: se Δ_1 è formata da un numero sufficientemente grande di varietà C — e questo si può far sempre pensare che accada, aggiungendo, se occorre, ai due membri della (1) gruppi equivalenti di varietà intere di φ — il gruppo di n varietà onde è costituita Δ_1 può formare una serie lineare almeno semplicemente infinita e poichè il fascio φ è irriducibile, potremo prendere un gruppo di quella serie costituito da n varietà del fascio che non siano spezzate.

Sarà dunque $(AD) + C_1 + C_2 + \dots + C_k + C_{k+1} + \dots + C_n \equiv (BD) + C_1 + C_2 + \dots + C_n + \Delta_2$, dove Δ_2 rappresenta il sistema residuo di (W) rispetto alla varietà $(BD) + C_1 + C_2 + \dots + C_k$, ed è perciò indipendente dall'ordine in cui si sono scelte le $C_1, C_2 \dots C_k$ stesse, e le varietà C_i ($i = 1.2. \dots n$) devono soddisfare alla sola condizione di non essere spezzate.

Ora per ogni D_{h+1} si può determinare il gruppo delle C considerando per es. su ogni D il gruppo di n varietà C corrispondenti agli n punti d'intersezione di una varietà ∞^{r-h-1} con le curve Δ , sulla varietà immagine della congruenza data; in tal modo il teorema (II *) è completamente dimostrato.

4. Prima di occuparci della dimostrazione del criterio (IV *) premettiamo alcune considerazioni relative alle involuzioni ed alle congruenze sulle varietà superiori algebriche. Notiamo che le prime proprietà che esporremo non sono che facili estensioni di teoremi analoghi dimostrati dal sig. TORELLI nella mem. cit. e che in virtù di queste proprietà e collo stesso metodo si dimostrerebbe subito il teorema (IV *) nel caso di $h = r - 1$ ¹⁾.

§ 2. — Sulle involuzioni nelle varietà algebriche.

5. Si abbia tra due varietà V_r, W_r una corrispondenza $\theta(1, \nu)$, priva di elementi fondamentali su entrambe le varietà, il che si può ottenere sostituendo, al caso, alle due varietà date altre due loro trasformate birazionali opportunamente costruite. I gruppi di punti di W_r omologhi dei punti di V_r formano una involuzione I dell'ord. ν ; i punti di coincidenza della I su W_r (di diramazione per la θ su V_r) si distribuiscono in un numero finito (≥ 0) di varietà ∞^{r-1} e non di varietà a dimensione minore ²⁾.

¹⁾ Ometto la deduzione di questo caso particolare del teorema (IV) perchè, posteriormente alla presentazione di questa tesi, esso è apparso (con dimostrazione induttiva) in una nota del sig. Severi a sue *Osservazioni* poste in fine del lavoro di Annibale Comessatti «Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di Jacobi (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 50, 1914-15).

²⁾ In una nota a pag. 848 (n. 5) della mem. cit. del sig. TORELLI,

6. Cominciamo col dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 1.° — *Se sopra una varietà ∞^r , W_r , si ha una involuzione I semplice, la involuzione subordinata sopra una varietà ∞^h generica di una congruenza ∞^{r-h+1} dell'indice uno, di varietà composte con la involuzione, è ancora semplice.*

Sia infatti, da principio, $h = r - 1$, cioè si abbia su W_r una rete di W_{r-1} composte con la involuzione I. Il teorema è evidente nel caso che la involuzione i subordinata sulla W_{r-1} generica sia composta con una sola involuzione j , oppure con più involuzioni d'ordine diverso, bastando in tal caso fissare sulla W_{r-1} generica una delle involuzioni e far variare la W_{r-1} in un fascio della rete considerata: quando poi la i della generica W_{r-1} fosse composta con più involuzioni dello stesso ordine ε , basterebbe far vedere come se ne possa fissare una razionalmente sopra ogni W_{r-1} di un fascio della rete considerata. Prendiamo su una varietà W_{r-1}^* della rete data un gruppo della involuzione i e consideriamo il fascio di W_{r-1} passante per questo gruppo. Se fissiamo sopra la varietà W_{r-1}^* una delle involuzioni componenti, il gruppo scelto verrà suddiviso in $\frac{\nu}{\varepsilon}$ gruppi di quella involuzione e la suddivisione determina perfettamente sulla W_{r-1}^* (che è generica nel fascio costruito) e quindi su ogni altra varietà del fascio, la involuzione considerata. La stessa dimostrazione vale per il caso in cui sia $h = 1$. Dopo di ciò, si può dimostrare per induzione il teorema per un valore qualunque di h .

si dimostra che non possono esistere punti doppi isolati per una involuzione di punti sopra una superficie, purchè quest'ultima sia priva di elementi fondamentali: la proprietà è vera anche quando l'involuzione appartiene ad una varietà ad r dimensioni priva di elementi fondamentali. Poichè il teorema vale per le varietà a due dimensioni, supponiamo che valga per tutte le varietà a dimensione minore di r . Si abbia dunque su W_r (priva di elementi fondamentali) una involuzione I, e sia V_r la varietà i cui punti corrispondono biunivocamente ai gruppi dell'involuzione I. Prendiamo su V_r una varietà V_{r-1} : a questa corrisponde in W_r una varietà W_{r-1} contenente una involuzione i . Se sopra la varietà W_r esistesse, fuori di una varietà ∞^{r-1} di coincidenza per la involuzione I, una varietà ∞^{r-s} ($s > 1$) ancora di punti di coincidenza, la W_{r-1} possederebbe, fuori di una varietà ∞^{r-2} di coincidenza per la i , una varietà ∞^{r-s-1} di coincidenza, il che è contrario alle ipotesi fatte.

Prendiamo su W , una rete di varietà W_{-1} composte con la involuzione: le intersezioni di ogni varietà W_i della congruenza data colle W_{-1} formano una congruenza ∞^{r-h+2} , dell'indice uno, di W_{h-1} composte con la involuzione I . Se ammettiamo che sulla W_{h-1} generica non possa venire subordinata una involuzione composta, nemmeno sulla W_h generica, che contiene una rete di quelle W_{h-1} , può venire subordinata una involuzione composta.

7. Mediante il teorema del n. precedente, possiamo pure far vedere che:

TEOREMA II. — *Se sopra la varietà W , esistono due varietà A'_{r-1} , B'_{r-1} non identicamente equivalenti ¹⁾ (rispetto ad I) e la I non è composta, essa è ciclica e priva di coincidenze.*

In una memoria del sig. TORELLI ²⁾ si trova dimostrato questo teorema, quando $r = 1$ e le varietà A' , B' , si riducono a due gruppi di punti composti con la involuzione. Possiamo dunque applicare il solito metodo d'induzione ed ammettere che il t. valga per varietà ad s dimensioni, con $s < r$. Sulla varietà V_s , imagine de' gruppi di I , le varietà A_{r-1} , B_{-1} corrispondenti alle varietà A'_{r-1} , B'_{r-1} non sono equivalenti, dunque non sono neppure equivalenti le varietà ∞^{r-2} (AV), (BV) d'intersezione di A , B , con una varietà V_{r-1} che sia generica in una rete di varietà ∞^{r-1} non contenente infinite varietà spezzate ³⁾. Alla varietà V_{r-1} corrisponde in W_r una varietà W_{r-1} composta con I e contenente due varietà ∞^{r-2} non identicamente equivalente, (le due varietà d'intersezione di W_{-1} con A' , B') e poichè la involuzione subordinata su W_{-1} è semplice, sarà ciclica e priva di coincidenze. Questo porta intanto che debba essere priva di coincidenze l'involuzione su W_r , perchè se P fosse punto di V_s , di diramazione

¹⁾ Sulla varietà V_s , imagine dei gruppi di I si hanno due varietà A_{r-1} , B_{r-1} , corrispondenti alle varietà date A' , B' . Diremo che A'_{-1} , B'_{-1} sono *identicamente equivalenti* rispetto ad I , quando le loro corrispondenti A_{r-1} , B_{r-1} su V_s sono equivalenti.

²⁾ TORELLI *Sulle serie algebriche...* (Rend. Palermo, t. XXXVII, 1914).

³⁾ Il teorema che qui viene applicato non è che una estensione del criterio del sig. SEVERI: *Se due curve A , B , di una superficie segnano sulle curve d'un fascio lineare, non contenente curve spezzate, gruppi equivalenti, le curve A , B , sono equivalenti.*

per la corrispondenza θ intercedente fra V_r e W_r , si potrebbe sempre prendere la rete di varietà V_{r-1} in modo che il fascio passante per P sia privo di varietà spezzate: la varietà generica di questo fascio avrebbe allora per corrispondente su W_r una varietà su cui l'involuzione subordinata avrebbe un gruppo con un punto doppio, mentre su di essa esisterebbero delle varietà non identicamente equivalenti. È poi evidente che la I è ciclica.

8. Se la I_r fosse composta con una involuzione J di ordine ε , si potrà considerare la corrispondenza θ fra la varietà V_r , immagine dei gruppi di I , e la W_r , come il prodotto d'un certo numero m di corrispondenze $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ fra varietà $V_r, V_{1,r}; V_{1,r}, V_{2,r}; \dots, V_{m-1,r}, W (= V_{m,r})$ sulle quali, in virtù delle corrispondenze stesse, vengono indotte delle involuzioni J_1, J_2, \dots, J_m semplici, che chiameremo le componenti della involuzione I . Se su V_r si prende una varietà V_h variabile in una congruenza Σ, ∞^{r-h+1} dell'indice uno, a questa su $V_{1,r}, V_{2,r}, \dots, W_r$ in virtù delle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ corrispondono rispettivamente delle varietà $V_{1,h}; V_{2,h}, \dots, V_{m-1,h}; W_h (= V_{m,h})$ variabili in congruenze $\infty^{r-h+1}, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{m-1}, \Sigma' (= \Sigma_m)$. Si vede poi subito che: *Se su W_r esistono due varietà A'_{r-1}, B'_{r-1} equivalenti non identicamente rispetto ad I , una delle involuzioni J sopra una delle $V_{i,r}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) deve essere ciclica e priva di coincidenze.*

9. Per quanto riguarda le involuzioni sulle varietà W_r dimostriamo ancora quest'ultima proprietà:

TEOREMA III. — *Se, rispetto alla involuzione i subordinata dalla I su di una generica W_h di una congruenza ∞^{r-h+1} , di indice uno, di varietà composte con la involuzione, esistono varietà ∞^{h-1} non identicamente equivalenti, qualcuna delle involuzioni J_1, J_2, \dots, J_m componenti di J (sia ad es. J_s) deve essere ciclica, ed ammettere come varietà di coincidenza una varietà fondamentale per la congruenza data.*

Infatti, per il teorema del numero 6, le involuzioni j_1, j_2, \dots, j_m subordinate dalle J_1, J_2, \dots, J_m rispettivamente sulle varietà $V_{1,h}; V_{2,h}, \dots, V_{m-1,h}; W_h$ non sono composte, e poichè su W_h esistono per ipotesi delle varietà W_{h-1} non identicamente equivalenti rispetto ad i , qualcuna delle involuzioni j_1, j_2, \dots, j_m (per es. j_s) deve essere ciclica e priva di coincidenze. Facendo variare la $V_{s,h}$ nella congruenza Σ_s ,

si vede che J_s è ciclica e che la sua eventuale varietà di coincidenza non può incontrare V_h in punti variabili perchè questi sarebbero coincidenze dell'involuzione i_s , c. v. d.

§ 3. Le varietà di diramazione delle congruenze di indice ν sulle varietà algebriche.

10. Sopra una varietà ad r dimensioni, V , si abbia una congruenza ∞^{r-h} , Σ , irriducibile, di indice ν , di varietà C_h e si rappresentino le C_h coi punti di una varietà $\bar{\Sigma}$: allora fra V , e $\bar{\Sigma}$ resta stabilita una corrispondenza tale che ad ogni punto di $\bar{\Sigma}$ corrisponde su V_r una varietà C_h , mentre al generico punto di V_r corrisponde in $\bar{\Sigma}$ un gruppo di ν punti. Se consideriamo la varietà W , i cui punti sono le immagini delle coppie di punti corrispondenti di V , e di $\bar{\Sigma}$, verremo a stabilire fra V_r e W_r una corrispondenza θ (1, ν) che induce su W , una involuzione I di ordine ν .

Si ha: a) Mentre un punto di V_r descrive una C_h , uno dei suoi omologhi in θ descrive una C'_h birazionalmente identica alla C_h e le C'_h così ottenute formano su W_r una congruenza Σ' birazionalmente identica a Σ .

b) I coniugati in I di un punto variabile sulla generica C'_h descrivono una varietà che non contiene altre C'_h , altrimenti la θ farebbe corrispondere a Σ' una congruenza dell'indice minore di ν . Supporremo poi che la corrispondenza θ sia priva di elementi fondamentali su entrambe le varietà: se ciò non fosse, sostituiremo V_r ed a W_r due loro trasformate birazionali. Consideriamo in ciò che segue il caso in cui sia $h = r - 1$.

11. Decomponiamo, come al n. 8, la corrispondenza θ fra V , e W_r nel prodotto delle corrispondenze $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ intercedenti rispettivamente fra le varietà $V_r, V_{1,r}; V_{1,r}, V_{2,r}; \dots, V_{m-1,r}, W_r$, (Se I non è composta, sarà $m = 1$, $V_{1,r} = W_r$): alle varietà C_{r-1} di V_r corrisponderanno in $V_{1,r}; V_{2,r}; \dots, W_r$, in virtù delle $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ rispettivamente delle varietà $C_{1,r-1}; C_{2,r-1}, \dots, C_{m,r-1} = C'_{r-1}$. Allora si vede facilmente che:

TEOREMA IV. — *Se le C_{r-1} sono prive di varietà ∞^{r-2} singolari variabili, la W_r non può contenere varietà non identicamente equivalenti rispetto ad I.*

Se infatti la V_r contiene varietà non identicamente equivalenti, una delle involuzioni $J_1, J_2 \dots J_m$ componenti di I sia ad es. la J_s è ciclica e priva di coincidenze. Allora sopra $V_{r,s}$ consideriamo l'intersezione di una varietà $C_{s,r-1}$ con la sua coniugata nella involuzione J_s . Poichè questa varietà non può essere costituita da punti di coincidenza di J_s , sarà luogo di coppie di punti coniugati in J_s appartenenti a $C_{s,r-1}$, onde la C_{r-1} corrispondente ha una varietà ∞^{r-2} doppia, c. v. d.

12. Osservazioni. — a) Nel caso che l'involuzione I sia semplice, e la varietà W_r ammetta varietà non identicamente equivalenti, la varietà di diramazione di Σ è costituita soltanto dal luogo delle varietà singolari delle C_{r-1} , dunque il teorema precedente può estendersi: *Se esiste una varietà di diramazione per il sistema Σ , che non sia il luogo delle singolarità eventuali delle C_{r-1} , la W_r non può contenere varietà non identicamente equivalenti rispetto ad I.*

b) Nel caso che la involuzione I sia composta, consideriamo le sue componenti $J_1, J_2 \dots J_m$ sulle varietà $V_1, V_2 \dots W$ costruite al n. 8. Sappiamo che la corrispondenza θ stabilita fra V e W è il prodotto di m corrispondenze $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_m$ stabilite fra le coppie di varietà $V V_1; V_1 V_2; \dots V_{m-1} W$. In virtù della corrispondenza (prodotto delle $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_m$) fra V e W, ad un punto di V corrisponde su W un gruppo G dell'involuzione I; in virtù della corrispondenza (prodotto delle $\theta_2, \theta_3 \dots \theta_m$) fra V_1 e W, ad un punto di V_1 corrisponde in W un gruppo G_1 di punti, ed ogni gruppo G risulta costituito da un certo numero di gruppi G_1, \dots in virtù delle θ_m fra V_{m-1} e W, a un punto di V_{m-1} corrisponde in W un gruppo G_{m-1} ed ogni gruppo G_{m-2} risulta costituito da un certo numero di gruppi G_{m-1} .

I punti doppi della involuzione I si hanno o quando coincidono due punti di uno stesso gruppo G_{m-1} , o quando coincidono due gruppi G_{m-1} appartenenti ad uno stesso gruppo $G_{m-2} \dots$, o quando coincidono due gruppi G_1 appartenenti ad uno stesso gruppo G. Lo stesso accade, evidentemente, pei gruppi di ν varietà C_{r-1} uscenti da un punto

di V_r , e noi chiameremo ancora G, G_1, \dots, G_{m-1} i gruppi delle varietà C_{r-1} corrispondenti ai gruppi di punti che abbiamo considerato. Analogamente, la varietà di diramazione del sistema Σ è costituita dal luogo H_{m-1} dei punti per cui coincidono due varietà di uno stesso gruppo G_{m-1} : dal luogo H_{m-2} per cui coincidono due gruppi G_{m-1} di varietà appartenenti ad uno stesso gruppo G_{m-2} ecc. Sulla varietà V_{r-1} contenente l'involuzione J , semplice, consideriamo l'intersezione di una varietà $C_{s, r-1}$ colla sua coniugata in J ; o questa è luogo di punti di coincidenza di J_s , od è luogo di coppie di punti distinti coniugati in J_s , ed appartenenti ad una stessa C_s . Nel primo caso, per ogni punto doppio di J_s si hanno su W_r due gruppi G_s coincidenti, e corrispondentemente su V_r due gruppi G_s coincidenti di varietà uscenti da uno stesso punto di V (chiameremo K_s il luogo di tali punti di V_r); nel secondo caso a quella varietà intersezione corrisponde su V_r una varietà singolare per la C corrispondente alla C_s considerata.

Basterà dunque accertare, per ogni valore di s , l'esistenza delle varietà K_s , per poter dire che la W_r non ammette varietà non identicamente equivalenti rispetto ad I .

13. Le proprietà finora esposte non sono che le estensioni delle proprietà analoghe enunciate dal TORELLI nella sua memoria citata col mezzo di queste (V. Torelli, mem. citata, n. 12) si può dimostrare il criterio IV* quando $h = r - 1$. Le osservazioni del n. precedente ci permettono poi di estendere il criterio anche al caso in cui le C_{r-1} posseggano varietà ∞^{r-2} singolari variabili, purchè allora il sistema Σ ammetta le varietà K_s di diramazione di cui al n. precedente. Per potere dimostrare il teorema nel caso generale, ci occorrono ancora altre proprietà relative alla totalità di gruppi di punti con indice maggiore di uno ed alle congruenze, che enunceremo nei numeri seguenti.

14. Si abbia sopra una varietà V_r non contenente varietà eccezionali, una totalità J di gruppi di ν punti, avente l'indice n , cioè tale che per un punto di V_r passano n gruppi della totalità e si consideri la varietà V'_r i cui punti corrispondono binuovocamente ai gruppi di J . Per la corrispondenza che si può stabilire fra V_r e W_r , su V'_r verrà definita una totalità J' , ∞^r , di gruppi di n punti, avente

l'indice ν . Per queste totalità di punti si possono stabilire le seguenti proprietà:

15. TEOREMA V. — *Una totalità di gruppi di punti, dell'ind. > 1 su di una varietà priva di varietà eccezionali, non può ammettere varietà ∞^{r-s} ($s > 1$), luogo di punti di coincidenza, staccata dal luogo eventuale ∞^{r-1} di tali punti.*

Prendiamo su V_r , in modo affatto generale, una congruenza ∞^{r-1} dell'indice uno di curve X' : la curva generica X' non possederà infinite coppie di punti appartenenti ad un stesso gruppo di J' . A questa congruenza corrisponde in V_r una congruenza S_{r-1} dell'indice n , di curve X , contenendo ciascuna curva X una involuzione i di gruppi di ν punti, subordinata su di essa dalla totalità J data, birazionalmente identica alla curva X corrispondente. Supponiamo che su V_r esista una varietà H , ∞^{r-s} ($s > 1$), luogo dei punti doppi dei gruppi della J , staccata dall'eventuale luogo D (∞^{r-1}) di altri tali punti, e siano H' D' , le varietà corrispondenti in V' : la X' generica non incontrerà H' , nè la X corrispondente incontrerà H , e le coincidenze dell'involuzione i di X saranno nei punti in cui essa incontra D . Se u è il numero di questi punti d'intersezione; Π e p sono rispettivamente i generi di X' e di X , avremo per la formola di Zeuthen

$$u = 2(p - 1) - 2\nu(\Pi - 1).$$

Quando una curva X' viene ad incontrare genericamente la varietà H' , la involuzione i esistente sulla corrispondente X non può acquistare nuove coincidenze, perchè il genere di X' resta uguale a Π e non può crescere quello di X ; quest'ultima deve dunque avere due o più rami coniugati in i nei punti in cui incontra la varietà H , e ciò è assurdo, perchè allora diminuirebbe il suo genere, mentre resterebbe invariato il numero delle coincidenze di i .

Poichè i punti doppi di J si cangiano in V' , in punti di diramazione per J' , potremo anche dire: *Una totalità di gruppi di punti dell'indice > 1 sopra una varietà priva di varietà eccezionali, non può ammettere varietà ∞^{r-s} ($s > 1$) di diramazione, staccate dal luogo eventuale ∞^{r-1} di punti di diramazione.*

16. TEOREMA VI. — *Una totalità J , ∞^r , di gruppi di ν punti,*

dell'indice n , sopra una varietà V , ammette sempre una varietà ∞^{r-1} di diramazione.

Prendiamo genericamente sulla varietà V' , r fasci di varietà $\infty^{r-1} f_1, f_2, \dots f_r$, a cui corrispondono in V r sistemi di varietà $F_1, F_2 \dots F_r$, aventi l'indice n e composte con i gruppi di J . r tali varietà scelte ciascuna in ogni sistema, si tagliano in un gruppo di punti, il quale contiene (parzialmente) un gruppo G costituito dagli m gruppi di J corrispondenti agli m punti d'intersezione delle r varietà f che corrispondono alle F considerate. L'insieme dei gruppi G forma una nuova totalità di gruppi, Y , di $m \nu$ punti, ancora dell'indice n . Evidentemente ogni punto di diramazione per i gruppi di J lo è anche per i gruppi di Y , ed un punto di V di diramazione per Y lo è pure per J , a meno che a questo punto corrisponda su V' , un gruppo di punti, per due distinti dei quali passi una f_1 , una f_2, \dots una f_r . Ma si possono scegliere i fasci $f_1 f_2 \dots f_r$, in modo che un numero finito maggiore di zero ed al più ∞^{r-2} coppie di punti distinti coniugati in J' contengano una f_1 , una f_2, \dots una f_r :¹⁾ la congruenza Y ha allora certamente tali punti di diramazione, ed al più ne ha ∞^{r-2} , quindi ha una varietà ∞^{r-1} di diramazione il cui punto generico non ha certo per corrispondente in V' , una coppia di punti distinti coniugati in J' per cui passino contemporaneamente una f_1 , una $f_2 \dots$ una f_r . Il punto generico di quella varietà di diramazione per Y è quindi punto di diramazione anche per J ; sicchè in virtù del teorema enunciato alla fine del n. precedente potremo ora affermare che la totalità J ammette varietà di diramazione.

Poichè i punti di diramazione su V , per J si cangiano in punti

¹⁾ Fissiamo una varietà f_1^* di f_1 ; essa contiene ∞^{r-2} coppie di punti coniugati in J' : d'altra parte tutte le varietà dei fasci $f_2 f_3 \dots f_r$ determinano su f_1^* una involuzione ∞^{r-1} di gruppi di m punti, generica: tale cioè che uno dei suoi gruppi passante per un punto il quale appartenga ad una di quelle ∞^{r-2} coppie non passerà certamente per l'altro punto della coppia, se questo è distinto dal primo. Dunque su ogni f_1^* si hanno al massimo ∞^{r-3} coppie di punti distinti coniugati in J' per cui passa la f_1^* una $f_2 \dots$ una f_r , e quindi su V' tali coppie sono al massimo ∞^{r-2} . E poichè si può far passare la f_1^* almeno per una tale coppia, resta dimostrato quanto abbiamo detto.

Un criterio d'equivalenza per le varietà ∞^{r-1} di una varietà ecc. 15

doppi su V_r , per J , potremo anche concludere che: *Una totalità ∞^r di gruppi di punti, avente l'indice maggiore di uno, ammette sempre ∞^{r-1} punti di coincidenza i quali si distribuiscono in un numero finito di varietà ad r dimensioni e non di varietà a dimensione minore.*

17. Costruiamo la varietà W_r i cui punti sono le immagini delle coppie di punti corrispondenti di V e di V' ed immaginiamo che l'involuzione I_n indotta su W_r dalla corrispondenza θ che si può stabilire fra V_r e W_r , sia composta: noi potremo, come al n. 12 considerare gli n gruppi della totalità J uscenti da un punto di V riuniti in gruppi $G, G_1, G_2, \dots G_{m-1}$; e la varietà di diramazione di J come l'insieme di varietà H_s ($s = 0, 1, 2, \dots m - 1$) luogo dei punti di V , per cui coincidono due gruppi di G , appartenenti ad uno stesso gruppo G_{s-1} . Così pure, ogni gruppo G' della totalità J' di V_r , si può immaginare costituito da un certo numero di gruppi G'_1 , questi da un certo numero di gruppi $G'_2 \dots$ ecc. e la varietà di coincidenza di J' composta di varietà $H'_{m-1}, H'_{m-2} \dots H'$ luoghi risp. di punti doppi di G'_{m-1} di gruppi doppi G'_{m-1} appartenenti ad uno stesso $G'_{m-2} \dots$ ecc. ed a ogni punto di H , in V_r corrisponde in V' , un gruppo G_s appartenente ad H'_s . I due teoremi precedenti valgono per ciascuna varietà H_s di V , ed H'_s di V' , adottando lo stesso metodo per estenderli a questo caso.

18. **TEOREMA VII.** — *Una congruenza di varietà ∞^h , su di una varietà ad r dimensioni, avente l'indice $\nu > 1$, ammette sempre una varietà ∞^{r-1} di diramazione.*

Prendiamo infatti sulla varietà V , contenente la congruenza di varietà C_h , una varietà ∞^{r-h} , sia V_{r-h} , che incontra le C_h in un certo numero n di punti e consideriamo poi tutti gli ∞^{r-h} gruppi di ν varietà C_h uscenti dai punti di V_{r-h} . Staccheremo così della totalità Y , che viene indotta sulla varietà $\bar{\Sigma}_{r-h}$, immagine della congruenza, una totalità J , ∞^{r-h} , di gruppi di punti, dell'indice n , che ammette certamente una varietà ∞^{r-h-1} di punti di coincidenza. A questi corrispondono in V_r dei punti per cui passano due C_h della congruenza infinitamente vicine; dunque la varietà V_{r-h} , scelta ad arbitrio, contiene ∞^{r-h-1} punti di diramazione della congruenza data, e quindi questa possiede una varietà ∞^{r-1} di diramazione.

Se l'involuzione I che nasce sulla varietà W , considerata al n. 10

fosse composta, si potrebbe considerare le varietà di diramazione della congruenza Σ come l'insieme di varietà H, H_1, \dots, H_{m-1} analoghe a quelle costruite al n. 12, e come abbiamo fatto pel caso semplice in cui si tratti della sola varietà di diramazione di Σ , servendoci delle cose dette al n. 17, si può dimostrare che in una congruenza Σ esistono sempre le varietà di diramazione H_s per qualunque valore di s da zero ad $m - 1$.

§ 4. Dimostrazione del criterio (IV*).

19. Passiamo finalmente alla dimostrazione del criterio (IV*), ammettendo che esso valga per varietà a dimensione maggiore di h (esso è vero per $h = r - 1$), anche sotto l'ipotesi meno restrittiva di quella racchiusa nel criterio enunciato, che esistano per tali congruenze le varietà $K, K_1, K_2, \dots, K_{m-1}$ considerate al n. 12. Si abbia dunque su V_r la congruenza di varietà C_h dell'indice ν e si costruisca la varietà $\bar{\Sigma}_{r-h}$ immagine delle varietà della congruenza data, la quale contiene una totalità Y, ∞^r , di gruppi di ν punti, ciascuno corrispondente alle varietà C uscenti da un punto di V_r .

Prendiamo in $\bar{\Sigma}$ una congruenza ∞^{r-h-1} di curve Δ , priva di punti base: a ciascuna di queste, su V_r , corrisponderà una varietà D_{h+1} contenente un fascio φ di varietà C_h , e tutte le varietà D_{h+1} si disporranno in una congruenza S_{r-h-1} dell'ind. ν . Può darsi che ogni curva Δ contenga delle coppie di punti appartenenti ad uno stesso gruppo di Y : allora ad una tale coppia corrisponde un punto doppio della D ottenuta da quella Δ : per es. se $h = r - 2$ ogni Δ contiene ∞^{r-2} coppie di punti distinti coniugati in Y e quindi ogni D_{r-1} contiene una varietà ∞^{r-2} doppia. Supponiamo, per considerare il caso generale, che la involuzione I che si ottiene sulla varietà W_r luogo delle coppie di punti corrispondenti di V_r e di $\bar{\Sigma}_{r-h}$ sia composta: tanto le C che le D uscenti da un punto di V_r si possono distribuire in gruppi ciascuno contenuto nel precedente: siano $G, G_1, G_2, \dots, G_{m-1}$ tali gruppi per le C ; $G', G'_1, G'_2, \dots, G'_{m-1}$ tali gruppi per le D ; $H, H_1, H_2, \dots, H_{m-1}$ le parti che compongono le varietà di diramazione di Σ ; $H', H'_1, \dots, H'_{m-1}$ le parti che compongono la varietà di diramazione di S ; K, K_1, \dots, K_{m-1}

$K', K'_1, \dots, K'_{m-1}$ le parti delle H e delle H' spogliate dai luoghi eventuali delle singolarità variabili delle C e delle D . Noi ora vogliamo dimostrare che $K', K'_1, \dots, K'_{m-1}$ esistono quando esistono le K, K_1, \dots, K_{m-1} : anzi noi diciamo allora che in questo caso la varietà K' coincide con la varietà K_s . Infatti per ogni punto di K_s esistono due varietà C di due gruppi G_s appartenenti ad uno stesso gruppo G_{s-1} : se non coincidessero due delle ν varietà D passanti per quel punto di K_s , e precisamente quelle due che contengano le due C considerate (e che quindi appartengono a due gruppi G' di uno stesso G'_{s-1}), esse si dovrebbero tagliare lungo quella C che conta due volte: cioè due curve Δ su $\bar{\Sigma}_{r-h}$ dovrebbero avere un punto in comune, ciò che non è. Viceversa: per ogni punto di V_r pel quale passano due D infinitamente vicine, o passano due C pure infinitamente vicine (e quel punto appartiene allora ad una K) o passano due C distinte entrambe situate su quella D che conta due volte: ma allora quel punto per quella D è doppio e non appartiene a K'_s . Resta dunque dimostrato che *la varietà di diramazione di una congruenza Σ_{r-h} di C_h , dell'indice ν , che non sia luogo di singolarità variabili delle C_h stesse, è pure varietà di diramazione della stessa specie di qualunque congruenza S_{r-h-1} dell'indice ν , di varietà D_{h+1} formate con le C_h .*

Notiamo che, come abbiamo dimostrato, le H, H_1, \dots, H_{m-1} esistono sempre e le K, K_1, \dots, K_{m-1} mancano di conseguenza solo quando le C_h abbiano tutte delle varietà ∞^{h-1} singolari variabili, essendo allora le varietà ∞^{r-1} H il luogo di tali singolarità.

20. Si abbiano ora due varietà $\infty^{r-1} A, B$ che tagliano le C_h di una congruenza Σ_{r-h} priva di varietà ad $h-1$ di dimensioni singolari variabili, oppure contenente tutte le parti K, K_1, \dots, K_{m-1} della sua varietà di diramazione, in varietà ∞^{h-1} equivalenti. Le A, B segnano allora sulla D_{h+1} generica di una congruenza S_{r-h-1} costruita come al n. preced. due varietà $(AD), (BD)$ le quali determinano sulle C_h del fascio φ di quella D_{h+1} varietà equivalenti. Potremo dunque scrivere $(AD) + \Delta_1 \equiv (BD) + \Delta_2$ essendo Δ_1 e Δ_2 due varietà ∞^h di D_{h+1} fondamentali del fascio φ . Ma (n.3) Δ_1 e Δ_2 si possono determinare razionalmente per ogni varietà D , onde al variare di D nella congruenza S , Δ_1 e Δ_2 descriveranno due varietà ∞^{r-1} , Φ_1 e Φ_2 evidentemente

fondamentali per Σ e tali che le varietà $A + \Phi_1$; $B + \Phi_2$ segnano varietà equivalenti sulle varietà della congruenza S . Poichè, per quanto s'è detto al n. precedente, l'ipotesi fatta per Σ conduce ad affermare l'esistenza in S delle varietà di diramazione $K' K'_1 \dots K'_{m-1}$, potremo scrivere, in virtù di ciò che si è ammesso.

$$A + \Phi_1 + \Psi_1 \equiv B + \Phi_2 + \Psi_2$$

essendo $\Phi_1 + \Psi_1$; $\Phi_2 + \Psi_2$ varietà fondamentali per Σ .

21. Da quanto è stato svolto precedentemente, si deduce che all'ipotesi racchiusa nell'enunciato del teorema (IV*) per la quale le C_h non debbono possedere varietà ∞^{h-1} singolari variabili, se ne può sostituire una meno restrittiva, ma anche meno maneggevole, sia nel caso che l'involuzione I sulla varietà W_r sia semplice, come nel caso che essa sia composta. E precisamente:

1.° *Nel caso che l'involuzione I sia semplice, il criterio (IV*) si può anche applicare a quelle congruenze di varietà C_h per cui esiste una varietà di diramazione diversa dal luogo delle eventuali singolarità variabili delle C_h stesse.*

2.° *Nel caso che l'involuzione I sia composta, il criterio (IV*) si può applicare a quelle congruenze di varietà C_h per cui esistono le parti $K K_1 \dots K_{m-1}$ della loro varietà di diramazione.*

Pisa, novembre 1915.

CLOTILDE SADOWSKI.
