

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. TAFANI

## **Sulle corrispondenze ( $1n$ ) tra varietà a 3 dimensioni**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1<sup>re</sup> série*, tome 13 (1919), exp. n° 2, p. 1-44

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1919\\_1\\_13\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1919_1_13__A2_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**G. TAFANI**

---

SULLE

**CORRISPONDENZE ( $1n$ )**

**TRA VARIETÀ A 3 DIMENSIONI**

---



---

1. — Se tra due curve  $CC^*$  di generi  $pp'$  passa una corrispondenza  $(nn')$ , sono da considerarsi i gruppi dei punti di diramazione su ciascuna curva, ossia i gruppi dei punti a ciascuno dei quali corrisponde un gruppo con due punti coincidenti. Detti  $yy'$  gli ordini dei due gruppi, si ha la formula (di ZEUTHEN) <sup>1)</sup>.

$$(1) \quad y - y' = 2n(p' - 1) - 2n'(p - 1).$$

L'interpretazione geometrica di questa formula nel caso  $(1n)$  fu data dal CASTELNUOVO e poi estesa dal SEVERI al caso generale. Se  $K, K^*$  si dicono due gruppi canonici nelle due curve,  $K'$  il trasformato di  $K, D$  il gruppo di diramazione su  $C^*, D'$  il gruppo di coincidenza pure su  $C^*$  (ossia il gruppo dei punti ciascuno dei quali corrisponde *due* volte a un punto di  $C$ ), il SEVERI dimostrò l'equivalenza <sup>2)</sup>

$$(2) \quad nK^* + D \equiv K' + D'$$

che nel caso  $(1n)$  si riduce all'altra:

$$(3) \quad K^* \equiv K' + D'.$$

Alla (3) il SEVERI giunge colla considerazione di due serie lineari  $\infty^1$ , trasformate l'una dell'altra, e dei loro gruppi jacobiani. Considerazioni affatto analoghe servono per una corrispondenza  $(1n)$  tra due varietà algebriche  $VV^*$  (ad uno stesso numero di dimensioni).

Solo sono da considerarsi allora gli elementi fondamentali per la corrispondenza; ma se questa è  $(1n)$  *senza eccezioni*, si giunge ancora alla (3) intendendo che  $KK^*$  rappresentino due enti canonici

---

<sup>1)</sup> Vedi ad es. SEVERI. *Lezioni di Geometria algebrica*, pag. 211.

<sup>2)</sup> SEVERI. L. c., pag. 210-211.

(eventualmente virtuali) su  $VV^*$ ,  $K'$  il trasformato di  $K$ ,  $D'$  la varietà di coincidenza in  $V^*$ .

*E qui avvertiamo una volta per sempre che per sistema canonico di  $V$  intendiamo la differenza costante tra l'aggiunto di un sistema lineare di  $V$  e il sistema stesso.*

L'interpretazione numerica della (3) presenta invece ben altre difficoltà, in modo che la generalizzazione della (1) non è nota in generale. Per estenderla al caso di due superficie  $FF^*$  il SEVERI trovò prima la relazione numerica tra gl'invarianti  $\omega, \omega'$  di EURIQUEZ-CASTELNUOVO di  $FF^*$ , poi quello tra gl'invarianti  $II'$  di ZEUTHEN-SEGRE, infine servendosi della formula

$$\omega + I = 12p_a + 9,$$

dove  $p_a$  è il genere aritmetico, trovò la relazione che lega  $p_a p_a'$  <sup>1)</sup>.

2. — Nel presente lavoro sono prima esposte alcune ricerche sempre relative al caso di due superficie (n.º 3-8) compresi due teoremi sulle reti di curve.

Nel secondo capitolo è studiata la relazione che lega i generi aritmetici di due varietà a 3 dimensioni  $VV^*$  in corrispondenza algebrica, al quale studio è premessa la ricerca del grado e del genere curvilineo della superficie di coincidenza (n. 11). Inoltre si cercano le relazioni di appartenenza tra i vari enti di diramazione di  $V$  (superficie di diramazione, curva e gruppo dei punti a ciascuno dei quali corrispondono rispettivamente 3 e 4 punti coincidenti), relazioni che sono applicate a trovare il legame tra i caratteri di ZEUTHEN-SEGRE di  $V, V^*$ .

Nel terzo capitolo si applicano infine gli studi precedenti alla ricerca di alcuni caratteri numerativi di un sistema  $\infty^3$  di superficie, su una varietà a 3 dimensioni caratteri che si ottengono coll'aiuto dell'immagine del sistema in  $S_3$ , con la quale si viene a porre una corrispondenza (in generale multipla) fra  $S_3$  e  $V$ .

---

<sup>1)</sup> SEVERI. Nota nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2) tomo 36, 1903 pag. 495.

---

---

CAPITOLO I.

**Preliminari**

---

3. — Le formole trovate dal SEVERI per due superficie  $FF^*$  in corrispondenza algebrica, si riferiscono all'ipotesi che la corrispondenza sia data nel modo più generale, ossia che ad un punto generico della curva di diramazione corrisponda un gruppo con *due soli* punti coincidenti. Si può pensare invece che su  $F$  esistano più curve  $D_i$ , a ciascun punto delle quali corrisponda un gruppo con un punto  $s_{i1}^{uplo}$ , con uno  $s_{i3}^{uplo}$  ... con uno  $s_{ik}^{uplo}$ , ... ( $s_{ij} > 1$ ). Appunto di questa ipotesi più generale mi ero proposto dapprima lo studio.

Senonchè le formole a cui ero arrivato, pur riferendosi ad un caso più generale di quello studiato dal SEVERI non avevano tutta la generalità che era da desiderarsi: per cui ho deciso di omettere senz'altro quelle dimostrazioni, e di limitarmi in questo primo capitolo a esporre quelle ricerche preliminari che mi sono necessarie per proceder oltre, e a riportare due teoremi sulle reti di curve, i quali mi erano occorsi nelle dimostrazioni omesse.

4. — Il primo di questi teoremi è il seguente:

*Il luogo di un punto  $s^{uplo}$  ( $s > 2$ ) della curva di una rete senza parti fisse e senza curve fondamentali è composto di parti  $s^{uplo}$  di curve della rete.*

Si renda la rete  $|C^r|$  di  $F^r$  proiettiva alla rete delle rette di un piano  $F$ . Si verrà così a porre una corrispondenza  $(1n)$  tra  $FF^*$ , ai punti base di un fascio di  $|C^r|$  venendo a corrispondere il centro del

fascio omologo di rette <sup>1)</sup>. Sia  $L'$  una parte irriducibile del luogo in discorso,  $L$  la sua immagine su  $F$  (che non si ridurrà ad un punto,  $|C^*|$  non avendo curve fondamentali). Siccome tra le  $C^*$  che passano per un punto  $P'$  di  $L'$  ve n'è una che ha ivi una molteplicità  $s$ , il fascio di  $|C^*|$  determinato da  $P'$  avrà  $\sigma \geq s$  punti base coincidenti nel punto stesso. Se  $P$  è quindi il punto omologo di  $P'$  (su  $L$ ) a  $P$  verrà a corrispondere  $P'$  contato  $\sigma > 2$  volte: ossia  $L$  sarà una curva di diramazione e  $L'$  l'omologa curva di coincidenza  $\sigma^{upla}$ .

Se  $P'$  è generico la  $\bar{C}^*$  che ha ivi un punto  $s^{uplo}$ , avendo almeno  $s$  intersezioni ( $s > 2$ ) con  $L'$ , è la corrispondente della retta tangente in  $P$  ad  $L$ . Ora siccome la curva  $L$  ha incontro più che bipunto con una tangente generica,  $L$  dev'essere una retta, che coincidendo in ogni punto con la sua tangente, è anche l'immagine di una  $\bar{C}^*$  con punto  $s^{uplo}$  in ogni punto di  $L'$  c. d. d.

5. — Ecco il secondo teorema che serve a completare il primo: *Una curva  $K'$   $s^{upla}$  per la jacobiana di una rete  $|C^*|$  senza parti fisse e senza curve fondamentali, che non sia componente multipla di qualche  $C^*$ , se  $s$  è dispari è luogo di un nodo di specie  $\frac{s+1}{2}$ , se  $s$  è pari è luogo di una cuspidi di specie  $\frac{s}{2}$ .*

Sia  $D'$  la jacobiana della rete: essa incontra una  $C^*$  generica nel gruppo jacobiano della serie caratteristica <sup>2)</sup>: quindi ogni punto comune a  $K'$  e a  $C^*$  conterà precisamente  $s$  volte nel gruppo suddetto. Siccome poi un punto  $\sigma^{uplo}$  per un gruppo di una serie lineare  $\infty^1$ , che non sia fisso per la serie conta per  $\sigma - 1$  punti doppi, ne segue che preso un punto  $P'$  generico in  $K'$  (distinto dagli eventuali punti base di  $|C^*|$  che si trovino su  $K'$ ), esso sarà  $(s+1)^{uplo}$  per il gruppo della serie che vi passa, ossia le  $C^*$  per  $P'$  avranno  $s+1$  punti comuni.

Facciamo ora come sopra l'immagine di  $|C^*|$  in un piano  $F$ . Se

<sup>1)</sup> Veramente il ragionamento qui esposto esclude che la rete sia composta con un fascio: ma in questo caso il teorema è evidente.

<sup>2)</sup> La serie caratteristica è la serie  $\infty'$  (lineare) segnata su  $C^*$  dalle curve della rete.

si considerano una  $C^*$  e la sua immagine  $C$ , esse sono in corrispondenza (1n), ai punti della retta  $C$  corrispondendo proiettivamente i gruppi della serie caratteristica di  $C^*$ . Ne segue che i punti di diramazione su  $C$  sono i punti comuni alla retta e all'immagine  $D$  della jacobiana di  $|C^*|$ . Anzi se  $P$  è un punto comune a  $C$  e all'immagine  $K$  di  $K'$ , ad esso corrisponde per l'osservazione precedente un gruppo con un punto  $(s+1)^{\text{mo}}$   $P'$  su  $K'$ . Ne segue che le intersezioni di  $K$  con una  $C$  generica contano  $s$  volte nel gruppo di diramazione (su  $C$ ). Supponiamo di far tendere la retta  $C$  verso una tangente generica  $\bar{C}$  a  $K$ : la  $C$  avrà due sole intersezioni con  $K$  nel punto di contatto <sup>1)</sup>  $Q$  e sarà quindi l'immagine di una  $\bar{C}^*$  con punto doppio in un punto  $Q'$  di  $K'$ .

Distinguiamo ora due casi. Se  $Q$  è un nodo gli  $s+1$  punti che corrispondono a  $Q$  si debbono suddividere nei due rami di  $\bar{C}^*$  e perciò vanno contati per sole  $s-1$  coincidenze. D'altra parte quando  $C$  tende a  $\bar{C}$ ,  $2s$  punti di coincidenza debbono tendere verso  $Q'$ ; si ha quindi una diminuzione di  $s+1$  coincidenze. Per la formula (1) di ZEUTHEN (n.º 1), il genere  $C^*$  si abbasserà di  $\frac{s+1}{2}$  unità <sup>2)</sup>. Quindi  $s$  sarà dispari e  $Q'$  dovrà essere un nodo di specie  $\frac{s+1}{2}$  <sup>3)</sup>. Se invece  $Q'$  è una cuspidale gli  $s+1$  punti trovandosi in un sol ramo conterranno in totale per  $s$  coincidenze: l'abbassamento del genere sarà di  $\frac{s}{2}$  unità: ossia  $s$  sarà pari e  $Q$  dovrà essere una cuspidale di specie  $\frac{s}{2}$  il che dimostra pienamente quanto volevamo.

<sup>1)</sup> Se  $K$  fosse una retta,  $K'$  dovrebbe far parte di una  $C^*$ . Se ne fosse una componente semplice, siccome essa fa parte della jacobiana di  $|C^*|$ , una  $C^*$  per un suo punto generico dovrebbe aver con essa due intersezioni, ossia  $K'$  sarebbe involuppo di un fascio generico, in  $|C^*|$  cioè ch'è assurdo. Se fosse una componente multipla si andrebbe contro le ipotesi del teorema.

<sup>2)</sup> Qui per non entrare in molti particolari si suppone che una  $\bar{C}^*$  con punto doppio su  $K'$  non abbia necessariamente altri punti multipli.

<sup>3)</sup> L'abbassamento prodotto nel genere da punti multipli infinitamente vicini è lo stesso che se essi fossero distinti.



6. — Chiusa questa parentesi, per poterci più oltre meglio servire delle formule numeriche di ZEUTHEN e di SEVERI <sup>1)</sup>, è necessario che c' intendiamo sul significato ch'esse assumono nel caso di due curve o due superficie (anche virtuali) omologhe in una corrispondenza  $(1n)$  tra due varietà a 2 o più dimensioni. Così ad es., supposta tra due superficie  $FF^*$  una corrispondenza  $(1n)$  ed essendo  $CC^*$  due curve omologhe nella corrispondenza, la formula di ZEUTHEN per  $CC^*$  diviene

$$p' - 1 = n(p - 1) + \frac{y}{2}.$$

Si può dare a  $pp'$  il significato di generi virtuali? E qual significato si deve dare ad  $y$ ? Supponiamo che  $|C|$  sia data come differenza  $|L - M|$  tra due sistemi irriducibili, infiniti e senza punti base, (ciò che sempre può farsi) e siano  $|L^*|$   $|M^*|$  i sistemi trasformati,  $p_1 p_2 p'_1 p'_2$  i generi virtuali di  $LML^*M^*$  (che coincidono cogli effettivi). Il gruppo di diramazioni in una  $L, M$  generica è dato dalle  $y_1, y_2$  intersezioni di  $L, M$  con la curva di diramazione  $D$ , si avrà quindi per la formula di ZEUTHEN

$$p'_1 - 1 = n(p_1 - 1) + \frac{y_1}{2} \quad p'_2 - 1 = n(p_2 - 1) + \frac{y_2}{2}.$$

Ma detti  $pp'$  i generi virtuali di  $CC^*$ , siccome si ha  $|L| = |M + C|$ , si ha

$$p = p_1 - p_2 - n_{12} + 1$$

dove  $n_{12}$  è il numero delle intersezioni virtuali di  $M$  con  $C$ . Parimente, e dando a  $n'_{12}$  un significato analogo si ha

$$p' = p'_1 - p'_2 - n'_{12} + 1.$$

Ma si ha <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} n'_{12} &= [M^* C^*] = [M^* L^*] - [M^{*2}] = n \{ [ML] - [M^2] \} \\ &= n [M(L - M)] = n [MC] = n n_{12}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Qui e più innanzi s' indicherà sempre con  $[A]$  il genere della curva, della superficie, o l'ordine del gruppo di punti  $A$ , con  $[AB]$  il numero delle intersezioni di due curve, o il genere dell'intersezione di 2 superficie  $A, B$ , con  $[ABC]$  il numero delle intersezioni di 3 superficie, ecc. S' indicherà poi con  $(AB)$  la curva e il gruppo di punti intersezioni delle superficie o curve  $A, B$ ; ecc.

Fatte le sostituzioni si trova

$$p' - 1 = n(p - 1) + \frac{y_1 - y_2}{2} = n(p - 1) + \frac{y}{2}$$

dove  $y$  rappresenta il numero delle intersezioni virtuali di  $|C|$  con  $D$ .

Dunque la formula di ZEUTHEN per le curve, e, come si potrebbe vedere, quella di SEVERI per le superficie possono intendersi anche come legame tra numeri virtuali. E in questo senso le applicheremo d'ora innanzi senza restrizioni.

7. — Passiamo ad occuparci di alcune proprietà complementari per le corrispondenze (1n) tra due superficie  $FF^*$  senza elementi fondamentali. SEVERI trovò che gl'invarianti di ZEUTHEN-SEGRE II' delle due superficie sono legati dalla relazione:

$$(4) \quad I' = n(I + 4) + 2\rho - \tau - 6 \quad 1)$$

dove  $\rho$  è il genere della curva di diramazione  $D$ ,  $\tau$  il numero dei punti di  $F$  cui corrispondono 3 punti coincidenti, o ch'è lo stesso, come il SEVERI dimostra, delle cuspidi di  $D$  <sup>2)</sup>). Per gli studi che faremo sulle varietà a 3 dimensioni ci è necessario riferirci ad un caso un po' più generale: ossia che esista un certo numero di punti  $P_i$ , a ciascuno dei quali corrisponda un punto  $P'_i$  colla molteplicità  $\sigma_i > 2$  (punti di diramazione  $\sigma_i^{n'}$ ). Quanto al resto continueremo a supporre che ad un punto generico di  $D$  corrisponda un gruppo con un sol punto doppio, e che la curva di coincidenza  $D'$  sia priva di punti multipli <sup>3)</sup>, come del resto suppone implicitamente anche il SEVERI nella sua trattazione: infine che non avvenga mai che le curve di  $F^*$  trasformate di quelle di  $F$  per un punto  $P$  abbiano necessariamente un punto doppio <sup>4)</sup>.

1) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, tomo 36, anno 1903. *Sulle relazioni che legano ecc.* formula 10.

2) SEVERI. Mem. citata, n. 9.

3) Volendo togliere questa condizione, bisognerebbe metterne altre meno semplici di questa, relative alla curva  $D$ . Del resto a giustificarla basti osservare ch'essa vale in generale per le corrispondenze (1n) più comuni, ad es. quelle che si ottengono proiettando da un punto generico di  $S_3$  una superficie d'ordine  $n$  sopra un piano.

4) Questa condizione non è sempre verificata, come potrebbe credersi.

Fissiamo una rete  $|C|$  generica in  $F$ , e la sua omologa  $|C^*|$  e prese due curve omologhe (generiche)  $CC^*$  per  $P_i, P'_i$ , rispettivamente, esse sono in corrispondenza  $(1n)$  a  $P_i$ , corrispondendo  $P'_i$  contato  $\sigma_i$  volte: dunque poichè  $C^*$  passa  $P'_i$  semplicemente, questo conta  $\sigma_i - 1$  volte nel gruppo di coincidenza, ossia  $C^*$  deve avere incontro  $(\sigma_i - 1)^{n/l_i}$  in  $P'_i$  con  $D'$ , che per ipotesi vi passa semplicemente: e la  $D$  avere un ramo per  $P_i$  incontrato  $\sigma_i - 1$  volte da una  $C$  generica, ossia un ramo d'ordine  $\sigma_i - 1$ . Il ragionamento può invertirsi, quindi possiamo dire senz'altro:

A) *I punti di diramazione  $\sigma_i^{n/l_i}$  sono tutti e soli i punti origini di rami di  $D$  d'ordine  $\sigma_i - 1$ .*

Basta ora riprendere il procedimento usato dal SEVERI dei due fasci corrispondenti  $|\bar{C}| |\bar{C}^*|$  nelle due reti  $|C| |C^*|$  1). Solo bisogna osservare che invece di avere su  $D$  un certo numero di cuspidi, si ha un certo numero di rami d'ordine  $\sigma_i - 1 > 1$ . Ora siccome nella dimostrazione ricordata le cuspidi comparivano come punti doppi della serie segnata su  $D$  dal fascio  $|\bar{C}|$ , basterà notare che nel caso presente ogni ramo d'ordine  $\sigma_i - 1$  corrisponde ad un punto  $(\sigma_i - 1)^{n/l_i}$  della serie, che va contato per  $\sigma_i - 2$  punti doppi: quindi basterà nella (4) sostituire al numero  $\tau$  delle cuspidi la somma  $\Sigma_1(\sigma_i - 2)$  ossia avremo

$$(5) \quad I' = n(I + 4) + 2\rho - \Sigma_1(\sigma_i - 2) - 6$$

formula che dà l'altro risultato

B) *Ogni punto di diramazione  $\sigma_i^{n/l_i}$  di  $F$  va contato per  $\sigma_i - 2$  punti di diramazione tripli.*

8. — Termineremo questa prima parte col dare due formule che esprimono il grado  $n'$  e il carattere d'immersione  $\theta'$  di  $D'$  per mezzo dei caratteri di  $D$ : formule che verranno applicate nel 2.º Capitolo.

Basta infatti considerare in un piano la rete determinata da 3 curve di cui 2 con punto doppio in un punto  $P'$ , l'altra non passante per  $P'$ . Fatta l'immagine della rete in un altro piano, detta  $P$  l'immagine di  $P'$ , ad una retta generica per  $P$  corrisponde una curva con punto doppio in  $P$ . Lo stesso accade per un'altra curva qualsiasi passante per  $P$ .

1) SEVERI. Mem. citata, n. 9.

Beninteso supponiamo sempre che la corrispondenza non abbia punti fondamentali. Indicando al solito con  $KK^*$  i sistemi canonici di  $FF^*$ , con  $K'$  il trasformato di  $K$ , abbiamo già detto al n. 1 che la formula (3)

$$K^* \equiv K' + D'$$

vale anche per le superficie. Ne segue (mantenendo le solite notazioni):

$$[K^* D'] = [K' D'] + [D'^2].$$

Ma  $[K^* D']$  non è altro che  $\theta'$ ,  $[K' D'] = [KD] = \theta$  dove  $\theta$  è il carattere d'immersione di  $D$  in  $F$ , siccome  $DD'$  si corrispondono punto per punto: quindi:

$$(A) \quad \theta' = n' + \theta.$$

D'altra parte il genere virtuale  $\rho'$  di  $D'$  è uguale al genere effettivo  $\rho$  di  $D$  ( $D'$  essendo per ipotesi priva di punti multipli). Se rammentiamo che  $L^*$  è differenza di  $|D'_a|$  e di  $|D|$  (dove  $|D'_a|$  è l'aggiunto di  $D'$ ): che  $D'_a$  incontra  $D'$  in  $2\rho - 2$  punti, avremo

$$(B) \quad \theta' = [K^* D'] = [D'_a - D, D'] = 2\rho - 2 - n'.$$

Confrontando questa relazione colla precedente si ottiene

$$(6) \quad n' = \rho - 1 - \frac{\theta}{2}$$

e anche

$$(7) \quad \theta' = \rho - 1 + \frac{\theta}{2}$$

formule che risolvono il problema.

---



---

## CAPITOLO II.

### Sulle corrispondenze $(1n)$ tra varietà a 3 dimensioni $VV^*$ .

9. — La corrispondenza  $(1n)$  tra  $VV^*$  si ritenga tale senza eccezione <sup>1)</sup>.

In  $V$  esisterà (almeno in generale) una *superficie di diramazione*  $D$ , luogo del punto cui corrisponde una coppia di punti coincidenti variabile in una superficie  $D'$  di *coincidenza*.

Convorrà supporre inoltre che esista in  $V$  una curva  $H$  (*di diramazione tripla*) ad un punto mobile sulla quale corrisponde un gruppo con un punto triplo, infine un gruppo  $G$  (*di diramazione quadruplo*) formato dai punti a ciascuno dei quali corrisponde un gruppo con un punto quadruplo: il luogo del punto triplo, e l'insieme dei punti quadrupli si diranno rispettivamente, curva di *coincidenza tripla*  $H'$  e gruppo dei *punti quadrupli*  $G'$ .

10. — Per le varietà  $VV^*$  sono da considerarsi i caratteri  $\Omega_0 \Omega_1 \Omega_2 \Omega'_0 \Omega'_1 \Omega'_2$  <sup>2)</sup>, che sono il grado, il genere curvilineo ed il genere aritmetico dei rispettivi sistemi canonici  $KK^*$ , legati a  $P_a P'_a$  (generi aritmetici delle due varietà) dalle relazioni <sup>3)</sup>

$$(8) \quad \begin{aligned} 2P_a &= \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 \\ 2P'_a &= \Omega'_0 - \Omega'_1 + \Omega'_2 + 4. \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Cioè non vi siano punti a cui corrispondano curve o superficie.

<sup>2)</sup> Vedi ad es. SEVERI. *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXVIII (2.º semestre 1909) n. 12.

<sup>3)</sup> SEVERI. Mem. citata, n. 16, formula (33).

Una volta calcolati  $\Omega'_0, \Omega'_1, \Omega'_2$  in funzione di  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ , le (8) ci daranno il modo di trovare la relazione tra  $P'_a, P''_a$ .

Per questo ricordiamo che vale per  $VV'$  la formula (3) del n. 1.

$$K^* = K + D'$$

dove  $K'$  è il trasformato di  $K$ . Conservando le notazioni già usate al n. 6, applichiamo al sistema  $|K^*|$  la formula che dà il grado della somma di due superficie <sup>1)</sup>.

$$(9) \quad [K^{*3}] = [K^3] + 3[K^2D'] + 3[K'D'^2] + [D'^3].$$

Ma  $[K^{*3}]$  non è altro che  $\Omega'_0$ ;  $[K^3]$  è il grado del trasformato di  $|K|$  ossia  $n[K^3]$  <sup>2)</sup>  $= n\Omega_0$ ;  $[K^2D'] = [K^2D]$  siccome  $DD'$  si corrispondono punto per punto. Posto dunque  $[K^2D] = \theta$ , il numero  $\theta$  darà il grado del sistema segnato da  $K$  su  $D$  e costituirà perciò un carattere d'immersione di  $D$  in  $V$ . Si avrà per quanto abbiamo detto:

$$(9_a) \quad [K^2D'] = \theta$$

Infine  $[K'D'^2]$  è il grado su  $K'$  della curva  $(K'D')$  che è la curva di coincidenza della corrispondenza  $(1n)$  che passa tra  $K, K'$ . Questo numero è dato dalla formula (6) del n. 8

$$[K'D'^2] = \rho - 1 - \frac{\theta_1}{2}$$

dove  $\rho$  è il genere e  $\theta_1$  è il carattere d'immersione della curva di diramazione su  $K$ , ossia è il numero dei punti in cui  $(KD)$  incontra una curva canonica su  $K$ . Ma il sistema canonico è segnato su  $K$  dal sistema aggiunto  $|2K|$ . Ne segue

$$\theta_1 = [2K \cdot KD] = 2[K^2D] = 2\theta.$$

<sup>1)</sup> SEVERI. Mem. citata, pag. 48, nota (18).

<sup>2)</sup> La cosa apparirebbe evidente se  $KK'$  fossero sistemi *effettivi*: e sarebbe facile a dimostrarsi per  $KK'$  *virtuali*. Qui e nel seguito facendo uso di questa e di analoghe relazioni le applicheremo anche ad enti virtuali, in armonia a quanto dicemmo al n. 6. Sarebbe facile del resto il dimostrarle e lo stesso n. 6 ce ne dà un esempio.

La precedente relazione diviene quindi

$$(9_b) \quad [K'D'^2] = \rho - 1 - \theta$$

dove  $\rho$  (genere dell'intersezione di  $K$  con  $D$ ) può riguardarsi come un altro carattere d'immersione di  $D$  in  $V$ .

Fatte le sostituzioni indicate, la (9) divienè

$$(10) \quad \Omega'_0 = n\Omega_0 + 3\rho - 3 + [D'^3].$$

Analogamente dalla formula che dà il genere curvilineo della somma di due superficie <sup>1)</sup>, applicata al sistema  $K' + D'$  si ha:

$$(11) \quad [K'^*2] = [K'^2] + [D'^2] + 2[K'D'] + 2[K'D'^2] - 3.$$

Ma  $[K'^*2]$  (genere curvilineo di  $K^*$ ) è uguale a  $\Omega'_1$ ; per trovare  $[K'^2]$  non avremo da fare altro che applicare alle curve  $(K^2)$  ( $K'^2$ ) (eventualmente virtuali) in corrispondenza (1n) la formula di ZEPH-THEN (1):  $[K^2][K'^2]$  sono i generi, il numero dei punti di diramazione essendo dato dalle intersezioni di  $(K^2)$  con  $D$ , ossia da  $[K^2D] = \theta$ . Posto inoltre  $[K^2] = \Omega_1$  si ha:

$$(11_b) \quad [K'^2] - 1 = n(\Omega_1 - 1) + \frac{\theta}{2}.$$

Il genere  $[K'D']$  dell'intersezione di  $K'$  con  $D'$  è anche il genere dell'intersezione di  $K$  con  $D$  ossia  $\rho$  <sup>2)</sup>: sostituendo nella (11) i valori trovati e quelli dati per  $[K'^2D']$ ,  $[K'D'^2]$  dalle (9<sub>a</sub>)(9<sub>b</sub>) si trova

$$(12) \quad \Omega'_1 = n(\Omega_1 - 1) + [D'^2] + 4\rho - 4 + \frac{\theta}{2}.$$

Finalmente per ottenere  $\Omega'_2$  basta calcolare il genere aritmetico di  $K' = K' + D'$ : si ha <sup>3)</sup>:

$$(13) \quad \Omega'_2 = [K'^*] = [K' + D'] = [K'] + [D'] + [K'D'].$$

<sup>1)</sup> SEVERI. Mem. citata, pag. 48, n. 18.

<sup>2)</sup> SEVERI. Mem. citata, pag. 48 nota (18).

<sup>3)</sup> Qui si suppone, per generalità  $D'$  priva di punti multipli. Quest'ipotesi si trova soddisfatta nei casi più comuni, come ad es. proiettando una ipersuperficie generale di  $S_3$  da un punto generico in  $S_1$ .



Ma  $D$  e  $D'$  essendo in corrispondenza birazionale, i loro generi aritmetici sono uguali: noi porremo  $[D'] = [D] = p_a$ .

Quando a  $[K']$  esso è il genere aritmetico del sistema trasformato di  $K$ ;  $KK'$  essendo in corrispondenza  $(1n)$  i loro generi saranno legati dalla relazione <sup>1)</sup>

$$(13_a) \quad 24 \{[K'] + 1\} = 24 n([K] + 1) + 6\rho_1 + 3\theta_1 - 2\tau - 6$$

dove  $\rho_1$  e  $\theta_1$  sono genere e carattere d'immersione della curva di diramazione  $K$ , che non è altro che  $(KD)$ : ossia

$$\rho_1 = \rho, \quad \theta_1 = 2[K^2D] = 2\theta$$

secondo quanto abbiamo già veduto. Il numero  $\tau$  non è altro che il numero dei punti di diramazione tripli su  $K$ , ossia quello delle intersezioni di  $K$  con la curva tripla di diramazione  $H$ , e può quindi riguardarsi come un carattere d'immersione di  $H$ . La formula precedente si trasforma nell'altra

$$(13_b) \quad 24 \{[K'] + 1\} = 24 n \{[K] + 1\} + 6\rho + 6\theta - 2\tau - 6 \\ = 24 n(\Omega_2 + 1) + 6\rho + 6\theta - 2\tau - 6$$

essendo  $[K] = \Omega_2$ .

Ricordiamo in ultimo che  $[K'D'] = [KD] = \rho$ ; dopo aver moltiplicata la (13) per 24 e sostituiti in essa per  $[D']$  il numero  $p_a$  per  $[K']$  il valore (13<sub>b</sub>), infine per  $[K'D']$  il numero  $\rho$  troveremo:

$$(14) \quad 24(\Omega'_2 + 1) = 24 n(\Omega_2 = 1) + 24 p_a + 30\rho + 6\theta - 2\tau - 6.$$

<sup>1)</sup> SEVERI. Nota nei Rendiconti del R. Istituto, (2) tomo 36, 1903, pag. 495. Se  $p_a p'_a$  sono i generi di due superficie in corrispondenza  $(1n)$ ,  $\rho$  e  $\theta$  sono il genere ed il carattere d'immersione della curva di diramazione,  $\tau$  è il numero dei punti di diramazione tripli, si ha la relazione

$$24(p'_a + 1) = 24 n(p_a + 1) + 6\rho + 3\theta - 2\tau - 6.$$

La relazione viene qui applicata anche a superficie virtuali, in relazione a quanto dicemmo al n. 6.

11. — Le (10) (12) (14) non risolvono ancora del tutto il problema, perchè le espressioni di  $\Omega'_0\Omega'_1$  contengono sempre i numeri  $[D'^2][D'^3]$  (genere curvilineo e grado della superficie di coincidenza) che sono propri di  $V^*$ . Noi vogliamo invece poter esprimere i caratteri di  $V^*$  in funzione soltanto di quelli di  $V$  e di quelli delle varietà di diramazione in  $V$ . La questione si riduce quindi al calcolo di  $[D'^2]$  e  $[D'^3]$ .

Cominciamo dal calcolare il grado del sistema segnato su  $D'$  dal sistema  $|K^* + D'| \equiv |K' + 2D'|$ . Esso è dato da

$$[(K' + 2D')^2 D'] = [K'^2 D'] + 4[K'D'^2] + 4[D'^3].$$

Sostituendo per  $[K'^2 D']$  e  $[K'D'^2]$  i valori (9<sub>a</sub>) e (9<sub>b</sub>) rispettivamente l'espressione precedente diviene

$$4\rho - 4 - 3\theta + 4[D'^3].$$

D'altra parte  $|K^* + D'|$  è l'aggiunto di  $D'$  e il sistema da esso segnato su  $D'$  è il sistema canonico: ora il grado del sistema canonico è  $\omega - 1$ , essendo  $\omega$  l'invariante di ENRIQUEZ-CASTELNUOVO di  $D'$  <sup>1)</sup> (o di  $D$  che corrisponde punto per punto a  $D'$  senza eccezione) Ne segue:

$$\omega - 1 = 4\rho - 4 - 3\theta + 4[D'^3]$$

ossia:

$$(15) \quad 4[D'^3] = \omega - 4\rho + 3\theta + 3.$$

Volendo conoscere anche  $[D'^2]$  calcoliamo il genere del sistema canonico su  $D'$ , che è uguale ad  $\omega$ , ed è segnato su  $D'$  da  $|K^* + D'|$ . Si ha

$$\omega = [K^* + D', D'] = [K' + 2D', D'] = [K'D'] + 2[D'^2] + [D'^3] + 2[K'D'^2] - 2$$

Si moltiplichi questa uguaglianza per 4 si sostituisca a  $[K'D']$

<sup>1)</sup> Se si chiamano  $\omega_0, \omega_1$  il grado e il genere del sistema canonico di una superficie, essi sono legati dalla relazione  $\omega_0 = \omega_1 - 1$ . Vedi ad es. CASTELNUOVO ed ENRIQUEZ. *Sur quelques récents résultats ecc.* Mathem. Annalen, tomo 48, pag. 283, dove è posto  $\omega_0 = p_n^{(2)}$   $\omega_1 = p_n^{(1)}$ . Qui s'intende  $\omega = \omega_1$ .

il valore  $\rho$ , a  $[K'D^2]$  quello dato dalla (9<sub>b</sub>) infine per  $[D^3]$  quello dato dalla (15). Si trova allora

$$3\omega = 8\rho + 8[D^2] - 5\theta - 13$$

ossia

$$(16) \quad 8[D^2] = 3\omega - 8\rho + 5\theta + 13.$$

Eliminando  $\omega$  dalle (15) (16) si trova anche la relazione

$$(17) \quad 2[D^2] + \theta = 3[D^3] + \rho + 1$$

che lega genere curvilineo e grado di  $D'$ , e che del resto si sarebbe potuta ottenere anche eliminando  $\Omega_0\Omega_1\Omega'_0\Omega'_1$  dalle (10) (12) per mezzo delle relazioni <sup>1)</sup>

$$3\Omega_0 = 2\Omega_1 - 2 \quad 3\Omega'_0 = 2\Omega'_1 - 2.$$

12. — Eliminati così gli elementi incogniti dalle (10) (12) per mezzo delle (15) (16), si arriva alle espressioni definitive di  $\Omega'_0\Omega'_1$ :

$$4\Omega'_0 = 4n\Omega_0 + \omega + 8\rho + 3\theta - 9$$

$$(18) \quad 8(\Omega'_1 - 1) = 8n(\Omega_1 - 1) + 24\rho + 9\theta - 27.$$

Si osservi che le (18) danno identicamente  $3\Omega'_0 = 2\Omega'_1 - 2$  come era prevedibile.

Le (18) moltiplicate per 6, — 3 rispettivamente e sommate membro a membro con la (14) danno quindi

$$24(\Omega'_0 - \Omega'_1 + \Omega'_2 + 2) = 24n(\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 2) + 24p_a - 3\omega + 6\rho - 3\theta + 21$$

ossia per le (8):

$$48(P'_a - 1) = 48n(P_a - 1) + 24p_a - 3\omega + 6\rho - 3\theta - 2\tau + 21.$$

Quest'ultima formula si può leggermente semplificare. I numeri  $\rho$  e  $\theta$  rappresentano infatti genere e grado del sistema segnato da

---

<sup>1)</sup> SEVERI. *Fondamenti ecc.* Rendic. del Circolo Matem. di Palermo, tomo XXVIII, n. 12.

K su D: ora indicando con  $\varphi$  il carattere d'immersione in D del sistema stesso, i tre numeri  $\rho, \theta, \varphi$  sono legati dalla relazione <sup>1)</sup>.

$$2\rho - 2 - \theta = \varphi.$$

Per mezzo di questa formula si può sostituire nell'espressione di  $P'_a$  ai numeri  $\rho, \theta$ , il solo numero  $\varphi$ . Si ottiene quindi infine il risultato:

*Due varietà  $VV^*$  a 3 dimensioni in corrispondenza (1n) senza eccezioni hanno i generi  $P_a P'_a$  legati dalla relazione*

$$(19) \quad 48(P'_a - 1) = 48n(P_a - 1) + 24p_a - 3\omega + 3\varphi - 2\tau + 27$$

dove  $p_a$  e  $\omega$  sono genere aritmetico e carattere di EURIQUEZ-CASTELNUOVO della superficie di diramazione D,  $\varphi$  il carattere d'immersione in D dell'intersezione di D con una superficie canonica,  $\tau$  il numero delle intersezioni della curva tripla H col sistema canonico.

13. — Alcune osservazioni possono farsi sulla formula (19). Anzitutto è da notarsi ch'essa non dipende dal numero dei punti di diramazione quadrupli, ciò che poteva suppersi in base a quanto accade per le superficie. La ragione sta nel fatto che vi è una differenza essenziale tra le varietà di dimensione pari e quelle di dimensione dispari. In queste ultime, come nel caso presente, il genere aritmetico non è indipendente dai caratteri del sistema canonico, come avviene invece nelle prime.

Il procedimento da noi tenuto non potrebbe quindi applicarsi alle superficie o a varietà a 4 dimensioni.

Se nella corrispondenza manca la curva tripla H, ciò che avviene sempre per  $n=2$  basta manifestamente fare  $\tau=0$ . Se manca D allora la formula (3) del n. 1 diviene:

$$K^* \equiv K'$$

e il ragionamento fatto si semplifica grandemente, e conduce alle formule

$$\Omega'_0 = n\Omega_0 \quad \Omega'_1 - 1 = n(\Omega_1 - 1) \quad \Omega'_2 + 1 = n(\Omega_2 + 1)$$

---

<sup>1)</sup> Vedi n. 8 formula (B). Si faccia  $n'=\theta$ ,  $\theta'=\varphi$ .

da cui segue

$$P'_a - 1 = n(P_a - 1)$$

formula che può dedursi dalla (19) facendovi  $\varphi = 0$ , cioè ch'è ben naturale, e ponendo inoltre  $\omega = 1$   $p_a = -1$ .

14. — Finora noi non ci siamo occupati della particolar natura degli enti di diramazione D, G, H e di quelli di coincidenza D'G'H-Si può ad es. domandare se H appartiene a D, e con quale molteplicità.

Per rispondere a questa prima questione, fissiamo in V un sistema lineare  $\infty^3$  generico |F|. Detto |F\*| il sistema corrispondente, tra due FF\* omologhe generiche passa una corrispondenza (1n) senza eccezione la curva comune ad F e a D ne rappresenta la curva di diramazione, e i punti comuni ad F e ad H sono i punti di diramazione tripli. Ricordiamo che questi ultimi, almeno in generale, sono i punti cuspidali per la curva di diramazione <sup>1)</sup>.

Preso quindi un punto generico P di H, le  $\infty^2$  superficie del sistema che vi passano segano D in una curva che ha ivi una cuspidale, per cui siccome |F| è generico, P dev'essere un punto cuspidale di D.

Inversamente se questo accade si vede subito che P deve appartenere ad H. Si può concludere che H è la curva cuspidale di D.

Facciamo ora tendere una F in modo generico verso un'altra  $\bar{F}$  passante per un punto P del gruppo G; F\* tenderà verso una  $\bar{F}^*$  passante per un punto P' di G'. È evidente intanto che a P corrispondendo P' più di 3 volte, PP' apparterranno il primo ad H, il secondo ad H'. Di più se richiamiamo il risultato B) del n. 7, il quale ci dà in particolare che P (punto di diramazione quadruplo di  $\bar{F}$ ) va contato per 2 punti tripli, ne dobbiamo concludere che  $\bar{F}^*$  ha incontro bipunto con H' in P'. Se quindi supponiamo per generalità che anche H', come D', non abbia punti multipli, tutte le  $\bar{F}^*$  per P' dovranno ivi toccare H'. Retrocedendo tutte le

---

<sup>1)</sup> SEVERI. Nota dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, tomo 36, anno 1903. *Sulle relazioni che legano ecc.* n. 9.

$\bar{F}$  per P avranno ivi incontro bipunto col ramo (o con uno dei rami) di H uscente da P: e poichè  $|F|$  è generico, il detto ramo è del 2.º ordine. Il ragionamento si può invertire: ne risulta che i *punti di G sono tutti e soli i punti cuspidali di H*.

15. — Cerchiamo di vedere come si comportano le  $F^*$  in prossimità dei punti della superficie di coincidenza  $D'$ . Sia  $PP'$  una coppia di punti omologhi di  $DD'$ .

Se per P si fanno passare tre superficie di  $|F|$  genericamente (aventi ivi un sol punto comune): le tre  $F^*$  omologhe avranno in  $P'$  due punti comuni almeno (perchè  $P'$  corrisponde a P due volte o più). Ne segue che tutte le  $F^*$  per  $P'$  avranno una tangente comune  $S'$ . La  $S'$  però in generale non sarà tangente anche a  $D'$ . Infatti se P non è sulla curva cuspidale due superficie  $F_1F_2$  generiche hanno ivi una sola intersezione con D in  $P^1$ ; ciò sarà quindi anche per  $F_1^*F_2^*D'$  (poichè tra  $DD'$  vi è una corrispondenza punto a punto). Ciò non sarebbe se  $S'$  fosse tangente anche a  $D'$ .

Se invece P è su H,  $F_1F_2$  hanno ivi due intersezioni con D, e perciò la  $S'$  è tangente anchè a  $D'$ . Si può quindi concludere:

I. — *Le superficie trasformate delle superficie per un punto P di D hanno una tangente comune  $S'$ ; quando P è su H e solo allora la retta  $S'$  è tangente a  $D'$ .*

La  $S'$  nei punti di H è dunque tangente anche a  $D'$ : quando avverrà ch'essa coincida colla tangente ad H? Bisognerà per questo che tutte le  $F^*$  per  $P'$  tocchino ivi H: ma questo, come abbiamo visto al n. precedente, avviene per i soli punti di  $G'$ . Dunque:

II. — *Se P è un punto di G, e solo allora la  $S'$  coincide colla tangente ad H.*

16. — Siano  $FF^*$  due superficie corrispondenti, e la F tocchi D in un punto P generico. La  $F^*$  dovrà segare  $D'$  in una curva avente come doppio il punto  $P'$  corrispondente a P. Ma inoltre  $F^*$  deve esser tangente alla retta  $S'$ , che in generale (v. n. precedente) non

---

<sup>1)</sup> La D avrà bensì in generale una curva doppia non cuspidale, come vedremo in seguito: ma per i punti di una tal linea basta ripetere il ragionamento per ciascuna delle falde di D passanti per P.

tocca la superficie  $D'$ . Ne segue che  $F^*$  essendo tangente a due direzioni non complanari uscenti da  $P'$  avrà essa stessa un punto doppio. Possiamo enunciare il risultato:

III. — *Le superficie di  $|F|$  tangenti a  $D$  hanno per corrispondenti le superficie di  $|F^*|$  con punto doppio su  $D'$ .*

Tra gli  $\infty^2$  fasci di  $|F|$  la cui curva base passa per  $P$  (punto di  $D$ ) ve ne sono  $\infty^1$  con curva base tangente alla superficie di diramazione. La curva base dei fasci corrispondenti avrà pure incontro bipunto con  $D'$  in  $P'$ , ma d'altra parte dovendo pure esser tangente alla  $S'$ , avrà ivi un punto doppio. Ciò vuol dire che il fascio considerato si trasforma in un fascio di superficie tangenti fra loro. Questo fatto si può esprimere nel seguente modo.

IV. — *Agli  $\infty^1$  fasci di  $|F|$  determinato dalle tangenti in  $P$  a  $D$  corrispondono gli  $\infty^1$  fasci di  $|F^*|$  determinati dai piani passanti per la retta  $S'$ .*

Tutti questi ultimi fasci hanno a comune la superficie  $\bar{F}^*$  con punto doppio in  $P'$ , il cui cono tangente sia  $\Phi$ . Allora evidentemente le due tangenti alla curva base di ciascun fascio si ottengono segnando  $\Phi$  con un piano variabile attorno ad  $S'$ .

Supponiamo ora che la curva base  $m$  del fascio di  $|F|$  divenga osculatrice a  $D$ .

Se si considera una superficie  $F_1$  di  $|F|$  che passi per  $m$ , e la sua trasformata  $F_1^*$ , la rete caratteristica <sup>1)</sup> di  $F_1$  si trasforma nella rete caratteristica di  $F_1^*$ ; e la curva  $m$  che fa parte della prima rete oscula la curva di diramazione in  $F_1$ , cioè la  $(F_1 D)$ . Ora è noto che le curve della rete osculatrici della curva di diramazione si trasformano in curve cuspidate <sup>2)</sup>: quindi la curva base del fascio trasformato viene ad avere una cuspidate, e il fascio è di superficie con contatto stazionario. Ora i fasci di  $|F^*|$  con contatto stazionario in

<sup>1)</sup> Si dice rete caratteristica la rete segnata in  $F_1$  dalle superficie del sistema  $\infty^3$

<sup>2)</sup> V. ad es. SEVERI, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XXXVII Disp. 15.ª 1902-903. *Sul genere aritmetico e il genere lineare ecc. n. 3.* Veramente nel testo in discorso si suppone che la superficie multipla sia un piano, ma il ragionamento vale in generale.

$P'$  sono dati dai piani tangenti al cono  $\Phi$ , che passano per  $S'$ : infatti allora le tangenti alla curva con punto doppio vengono a coincidere, e il punto doppio diviene, almeno in generale una cuspidale. Il ragionamento può essere invertito, quindi:

V. — *Ai due fasci di  $|F|$  con curva base osculatrice a  $D$  in  $P$  corrispondono i due fasci con contatto stazionario in  $P'$ .*

Finora abbiamo supposto  $P$  affatto generico su  $D$ : facciamolo cadere ora in  $H$ .

La retta  $S'$ , come abbiamo veduto al numero precedente diviene allora tangente a  $D'$ , ma non in generale ad  $H'$ . Ad una superficie tangente ad  $H$  in  $P$  corrisponderà quindi una superficie che risultando tangente a due rette distinte ( $S'$  e la tangente ad  $H'$ ) che toccano ambedue  $D'$ , sarà essa stessa tangente a  $D'$ . Dunque:

VI. — *Al fascio di  $|F|$  determinato dalla tangente in  $P$  ad  $H$  corrisponde il fascio di superficie tangenti a  $D'$  in  $P'$ .*

17. — Fin qui non abbiamo parlato di altre singolarità della superficie  $D$ , all'infuori della curva  $H$  cuspidale: ma conviene pure ammettere l'esistenza di una semplice infinità di punti a ciascuno dei quali corrispondono due coppie (distinte) di punti coincidenti, e questi costituiranno una curva di punti doppi biplanari (curva nodale). Ciò si vede ad es. riportandoci al caso di due superficie segando  $D$  con una superficie  $F$  generica. Chiamiamo  $K$  la curva dei punti nodali.

Oltre ai punti di  $H$  e  $K$  vi saranno altri tre gruppi di punti, caratterizzati dal coincidere in vario modo degli elementi corrispondenti e che si presenteranno, almeno in generale, in numero finito: punti cui corrispondono 3 coppie di punti coincidenti, ovvero una coppia ed una terna di tali punti, o infine 4 punti coincidenti. L'ultimo gruppo lo abbiamo già indicato con  $G$ : il primo ed il secondo li designeremo con  $E$  e  $F$  rispettivamente.

Per i punti del gruppo  $E$ , corrispondendo ciascuno di essi a 3 punti di  $D'$  è intuitivo che saranno tripli per  $D$ . Ma inoltre saranno tripli anche per  $K$  potendosi le 3 coppie di punti coincidenti riunire a due a due in 3 modi distinti. Dunque:



VII. — *I punti del gruppo E sono i punti tripli triplanari per D, tripli anche per la linea nodale K.*

Un più attento esame richiederebbe il gruppo F. Ma noi nel seguito non dovremo occuparcene che di passaggio: ci basti osservare intuitivamente che se a Q corrisponde  $Q_1$  come punto doppio e  $Q_2$  come punto triplo, siccome con essi si possono formare in due modi diversi due coppie (distinte) di punti successivi, la curva K passerà doppiamente per Q. E siccome dall'un modo si passa all'altro con una variazione infinitamente piccola, Q non potrà essere altro che un regresso di K.

Quanto ad H siccome a Q corrisponde una (ed una sola) terna di punti coincidenti, essa vi passerà semplicemente.

I punti del gruppo G abbiamo visto al n. 14 (verso la fine) che sono i punti cuspidali di H. Se Q appartiene a G e Q' è il corrispondente punto quadruplo, esso può pensarsi ottenuto facendo avvicinare indefinitamente due coppie di punti coincidenti, e quindi Q sarà di K. Ora se si prende una  $\bar{F}$  generica per Q, e la sua trasformata  $\bar{F}^*$ , Q è un punto di diramazione quadruplo anche nella corrispondenza  $(1n)$  che passa tra  $\bar{F}\bar{F}^*$ : sarà quindi origine di un ramo del 3.° ordine della curva di diramazione (V. n. 7 A).

La  $\bar{F}$  segnerà dunque D in una curva con un ramo del 3.° ordine in Q, è che in generale non avrà altre singolarità, nè in Q nè in punti infinitamente vicini. Ora in un punto triplo possono cadere al massimo tre punti doppi di una curva variabile; una F che tenda verso  $\bar{F}$  incontra D in una curva che ha due cuspidi vicine a Q (sulla H che ha in Q un regresso) e non potrà avere al massimo che un ulteriore punto doppio vicino a Q sulla curva K; questa passerà perciò semplicemente per Q. Siccome questi risultati si possono invertire, potremo dire che:

VIII. — *I punti dei gruppi F e G sono, i primi i punti stazionari di K e semplici per H, i secondi stazionari per H, e semplici per K.*

18. — È noto che se si ha un fascio generico di superficie in V, e con  $\Delta$  s'indica il numero delle superficie del fascio con punto doppio, con  $\pi$  il genere della curva base, con I il carattere di

ZEUTHEN-SEGRE di una superficie generica, il numero:

$$(20) \quad Y = \Delta - 2\pi - 2I$$

è un carattere di  $V$  (carattere di ZEUTHEN-SEGRE <sup>1)</sup>).

Detto  $Y'$  il carattere analogo di  $V^+$ , cerchiamo di calcolare  $Y'$  in funzione di  $Y$  e dei caratteri della corrispondenza.

Scegliamo per questo un fascio generico  $|\bar{F}|$  nel sistema  $\infty^3|F|$ , e ne sia  $|\bar{F}^*|$  il trasformato: tra i caratteri  $\Delta I \pi$  del primo si ha la (20): similmente tra i caratteri analoghi del 2° fascio si avrà la

$$(21) \quad Y' = \Delta' - 2\pi' - 2I'.$$

Alle  $\Delta$  superficie  $\bar{F}$  con punto doppio corrispondono  $\Delta$  superficie ciascuna con  $n$  punti doppi: che tutte insieme danno già  $n\Delta$  punti doppi. Se nel fascio  $|\bar{F}^*|$  vi è un'altra superficie con punto doppio, questo dovrà trovarsi sopra  $D'$ : se  $L$  è il numero di tali superficie si avrà anzitutto

$$(21_a) \quad \Delta' = n\Delta + L.$$

Ciascuno degli  $L$  punti considerati è anche doppio per una curva del fascio  $|\bar{F}^*D'|$  segnato da  $|\bar{F}^*|$  su  $D'$ . Viceversa sia  $P'$  un punto doppio di una curva del fascio, fuori di  $H'$ : questa curva è data da una superficie  $\bar{F}^*$  che tocca ivi  $D'$ . D'altra parte la retta  $S'$  che è toccata da tutte le  $F^*$  per  $P'$ , non è tangente a  $D'$  (n. 15 I): quindi anche la  $\bar{F}^*$  ha in  $P'$  un punto doppio. Invece se  $P'$  viene su  $H'$  la cosa non si può più affermare, anzi le  $\bar{F}^*$  con punto doppio su  $H'$  essendo solo  $\infty^1$ , è certo che nessuna di esse apparterrà al fascio generico  $|\bar{F}^*|$ . Dunque per formare il numero  $L$  bisogna sottrarre dalle  $\delta$  curve di  $|\bar{F}^*D'|$  con punto doppio, le  $L_1$  curve eventualmente abbiano un punto doppio su  $H'$ :

$$(21_b) \quad L = \delta - L_1.$$

---

<sup>1)</sup> Questa invarianza si stabilisce dalla considerazione della curva dei contatti di due fasci, in modo affatto analogo a ciò che si fa per le superficie.

La questione si riduce a cercare il numero  $L_1$ . Se  $P'$  è un punto di  $H'$  doppio per una curva di  $|\bar{F}^*D'|$ , esso è anche doppio per la serie lineare segnata da  $|\bar{F}^*|$  su  $H'$ . Viceversa se  $P'$  è un punto doppio di detta serie, che non appartenga a  $G'$ , la  $\bar{F}^*$  che passa per  $P'$  risulta tangente ad  $H'$  e ad  $S'$ , cioè a due rette distinte che toccano  $D'$  (n. 15 I II): ossia  $P'$  è di contatto per  $\bar{F}^*$  e  $D'$ , e quindi doppio per la loro intersezione. Il ragionamento non vale nel caso che  $P'$  venga su  $G'$ , ed infatti allora le  $F^*$  tangenti a  $D'$  in  $P'$  formano un fascio che non ha alcuna superficie a comune col fascio generico  $|\bar{F}^*|$ . Il numero  $L_1$  si otterrà quindi sottraendo dai  $\delta_1$  punti doppi della serie lineare  $|\bar{F}^*H'|$  il numero di quelli che eventualmente cadano in punti di  $G'$ . Ma ciascuno degli  $z$  punti di  $G'$  è effettivamente doppio per questa serie, siccome tutte le  $\bar{F}^*$  che passano per esso toccano ivi  $H'$  (n. 15 II). Si può dunque scrivere:

$$(21_c) \quad L_1 = \delta_1 - z.$$

Combinando le (21<sub>a</sub>) (21<sub>b</sub>) (21<sub>c</sub>) si ottiene

$$(22) \quad \Delta' = n\Delta + \delta - \delta_1 + z.$$

Restano da calcolarsi  $\pi' I'$ . I generi  $\pi'$  delle curve basi dei due fasci sono legate dalla formula di ZEUTHEN.

$$(23) \quad \pi' = 1 + n(\pi - 1) + \frac{\nu}{2}$$

i punti di coincidenza sulla curva trasformata essendo dati dalle  $\nu$  intersezioni con  $D'$ , o ch'è lo stesso dai punti base del fascio  $|\bar{F}^*D'|$ . Quanto ai caratteri  $I I'$  di ZEUTHEN-SEGRE di  $\bar{F}\bar{F}^*$ , essi sono legati dalla (4) del n. 7, essendo  $\rho$  il genere della curva  $(\bar{F}^*D')$  (curva di coincidenza su  $\bar{F}^*$ )  $\tau$  il numero delle intersezioni di  $\bar{F}^*$  con  $H'$  (numero dei punti di coincidenza tripli)

$$(24) \quad I' = n(I + 4) + 2\rho - \tau - 6.$$

Le (22) (23) (24) combinate danno:

$$\Delta' - 2\pi' - 2I' = n(\Delta - 2\pi - 2I - 6) + (\delta - \nu - 4\rho) - (\delta_1 - 2\tau) + z + 10.$$

Introduciamo ora  $YY'$  per mezzo delle (20) (21); osserviamo che l'espressione  $(\delta - \nu - 4\rho)$  rappresenta il carattere  $J$  di ZEUTHEN-SEGRE di  $D'$  (o di  $D$ ), calcolato per mezzo del fascio  $|\bar{F}^*D'|$ ; la differenza  $\delta_1 - 2\tau$  tra il numero dei punti doppi della serie segnata da  $|\bar{F}^*|$  su  $H'$  e il doppio dell'ordine della serie è uguale a  $2p - 2$ , essendo  $p$  il genere di  $H'$  (o di  $H$ ). La formula precedente si trasforma allora nella relazione cercata tra  $YY'$ :

$$(25) \quad Y' = n(Y - 6) + J - (2p - 2) + z + 10$$

dove  $YY'$  sono i caratteri di ZEUTHEN-SEGRE delle due varietà,  $J$  quello della superficie di diramazione,  $p$  il genere della curva di diramazione tripla, e  $z$  il numero dei punti di diramazione quadrupli.

19. — Se manca il gruppo  $G$  va fatto naturalmente  $z = 0$ ; se manca la curva  $H$  nel calcolo eseguito s'introducono notevoli semplificazioni, e la formula si riduce a:

$$Y' = n(Y - 6) + J + 10$$

che, avendo già fatto  $z = 0$  si deduce dalla precedente ponendo

$$p = 1.$$

Infine se manca  $D'$  la formula diviene  $Y' - 6 = n(Y - 6)$ , che si deduce dalla precedente ponendo

$$J = -4.$$

La (25) può presentarsi sotto forma più simmetrica. È noto che l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE si può definire per una varietà  $V_r$  ad un numero qualunque  $r$  di dimensioni. Anzi se si ha nella varietà un fascio generico, ed è  $\delta_{r-1}$  il numero delle varietà del fascio con punto doppio,  $I_{r-1}$  l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE di una varietà del fascio,  $I_{r-2}$  quello della varietà base, l'invariante  $I_r$  della varietà  $V_r$  è dato da:

$$I_r = \delta_{r-1} - I_{r-2} - 2I_{r-1}.$$

Per una curva di genere  $p$  deve intendersi  $I_1 = 2p$ , per un gruppo di  $z$  punti  $I_0 = z$ , colla qual convenzione la relazione precedente vale anche per  $r = 2$  o  $r = 3$ .

Nel nostro caso chiamiamo  $I_3 I_3$  gl'invarianti di ZEUTHEN-SEGRE di  $VV^*$ , che finora abbiamo designato con  $YY'$ ;  $I_2 I_1 I_0$  gl'invarianti rispettivi delle 3 varietà di diramazione DHG, ossia

$$I_2 = J, \quad I_1 = 2p, \quad I_0 = z;$$

la (26) prende la forma:

$$I_3 = n(I_3 - 6) + I_2 - I_1 + I_0 + 12.$$

Per semplificarla ancora introduciamo le quantità  $Y_r$  legate alle  $I_r$  dalla relazione

$$Y_r = I_r + (-1)^r 2r$$

ossia in particolare  $Y_0 = I_0$ ,  $Y_1 = I_1 - 2$ ,  $Y_2 = I_2 + 4$ ,  $Y_3 = I_3 - 6$ . Allora la (25) prende la forma semplice

$$(26) \quad Y'_3 = n Y_3 + Y_2 - Y_1 + Y_0$$

la quale dice che l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE di  $V^*$  si può esprimere per l'invariante di  $V$  e per quelli delle tre varietà di diramazione in  $V$ , cioè DHG.

---

---

CAPITOLO III.

**Alcuni problemi numerativi sui sistemi lineari  $\infty^3$   
di superficie.**

20. — Gli studi che abbiamo fatti sulle corrispondenze  $(1n)$  tra varietà a 3 dimensioni ci aiuteranno nella risoluzione di altri problemi.

Sia  $V^r$  una varietà a 3 dimensioni, e in essa un sistema lineare  $\infty^3$  di superficie  $|F^r|$ , privo di punti base e di curve o superficie fondamentali, non composto con curve, e che del resto supponiamo dato in modo generico. Di  $|F^r|$  noi dovremo considerare la jacobiana  $D'$ , ossia la superficie luogo dei punti doppi di superficie del sistema.

Riuniamo in un primo quadro i caratteri di  $V^*|F^*|$  e  $D'$ .

PROSPETTO I.

$P_a$ genere aritmetico di $V^*$ .	$p_a$ genere aritmetico di $ F^* $ .
$Y$ suo carattere di ZEUTHEN-SEGRE	$p$ genere curvilineo di $ F^r $ .
$\Omega_0$ grado del suo sistema canonico <sup>1)</sup> .	$n$ grado di $ F^r $
$\Omega_1$ genere curvilineo del suo sistema canonico.	$\omega$ suo carattere di ENRIQUEZ-CASTEL- NUOVO.
$\Omega_2$ genere aritmetico del suo sistema canonico.	$I$ suo carattere di ZEUTHEN-SEGRE.

---

<sup>1)</sup> V. l'avvertenza al n. 1.

$p'_a$  genere aritmetico di  $D'$   
 $\omega'$  suo carattere di ENRIQUFZ-CASTELNUOVO.  
 $I'$  » » di ZEUTHEN-SEGRE.  
 $\pi$  genere dell'intersezione di una  $F^*$  con  $D'$ .  
 $\nu$  numero delle intersezioni di due  $F^*$  con  $D'$ .

I caratteri  $p'_a$   $\omega'$   $I'$  si possono anche calcolare dalle formule:

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} p'_a = \Omega_2 + 4p_a + 4\omega + 6p - 6 \quad = 2P_a + \frac{\Omega_0}{2} + 52p_a - 4I + 6p + 27. \\ \omega' = 4\Omega_0 + 32\omega + 32p - 63 \quad = \Omega_0 + 384p_a - 32I + 32p + 225. \\ I' = 12\Omega_2 - 4\Omega_0 + 48p_a + 16\omega + 40p = 24P_a + 2\Omega_0 + 240p_a - 16I + 40p + 108. \end{array} \right.$$

che si vedranno dimostrate nell'Appendice. Quanto a  $\pi$  esso è il genere dell'intersezione di una  $F^*$  con  $D'$ , che è anche la jacobiana della corrispondente rete di curve caratteristiche: quindi si ha:

$$(27_a) \quad \pi = \omega + 9p - 9^1).$$

Il numero  $\nu$  è anche il numero dei punti doppi di una serie lineare caratteristica <sup>2)</sup>: ossia:

$$(27_b) \quad \nu = 2n + 2p - 2.$$

21. — Se prendiamo un punto generico  $P$  di  $V^*$ , le  $\infty^2$   $F^*$  che vi passano formano una rete, avente,  $P$  incluso, un numero finito di punti base: si ha cioè un'involuzione di punti in  $V^*$ . Il numero di questi punti base è il grado  $n$  di  $|F^*|$ .

Se  $P$  viene su  $D'$ , due dei punti base coincidono in  $P$ , ossia le  $F^*$  per  $P$  hanno una tangente comune. Dunque la jacobiana è anche il luogo del punto  $P$  tale che le  $F^*$  che vi passano hanno ivi due intersezioni.

<sup>1)</sup> Per questa formula vedi ad es. SEVERI. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXXVII, disp. 15.<sup>a</sup> 1902-1903. *Sul genere aritmetico ecc.* n. 8.

<sup>2)</sup> Intendiamo la serie segnata sull'intersezione di due  $F^*$  dalle superficie del sistema.

Oltre a  $D'$  è da considerare il luogo dei punti tali che le  $F^*$  che vi passano hanno ivi 3 intersezioni, e questo, almeno in generale, sarà una curva  $H'$ , tutta situata in  $D'$ . Infine vi sarà in generale un numero finito di punti, in ciascuno dei quali cadono 4 intersezioni delle  $F^*$  che vi passano: il gruppo di questi punti indichiamolo con  $G'$ . Si renda ora il sistema  $|F^*|$  proiettivo al sistema dei piani di un  $S_3$ . Si viene così a determinare tra  $S_3$  e  $V^*$  una corrispondenza (1n), facendo corrispondere al centro di una stella di piani i punti base della rete omologa di superficie, ossia un gruppo dell'involuzione già considerata. Siccome  $|F^*|$  non ha punti base, nè curve fondamentali, la corrispondenza è priva di elementi eccezionali, sia in  $V^*$  che in  $S_3$ .

Rappresentiamo con  $DHG$  la superficie, la curva ed il gruppo di punti rispettivamente immagini di  $D'H'G'$ : se un punto  $P$  muovendosi in  $S_3$  viene a cadere in  $DHG$  successivamente, due, tre, quattro dei punti corrispondenti a  $P$  vengono a coincidere in un sol punto di  $D'H'G'$ : ciò vuol dire che  $DHG$   $D'H'G'$  sono gli enti di diramazione e di coincidenza già considerati nel capitolo precedente. La superficie  $D$  sarà quindi dotata di una curva cuspidale  $H$ , e questa di un gruppo  $G$  di punti cuspidali: Ma  $D$  avrà pure una linea  $K$  di punti doppi biplanari (*linea nodale*), e le stelle che hanno il centro in un punto di questa si trasformano in reti di  $|F^*|$  con due coppie di punti base coincidenti. La  $K$  passerà semplicemente per  $G$  (n. 17 VIII). Infine  $K$  dovrà possedere un numero finito di punti cuspidali, semplici per  $H$ , e un numero finito di punti tripli, tripli anche per  $D$  (n. 17 VII VIII); le stelle che hanno il centro negli uni rappresentano le reti di  $|F^*|$  con una coppia ed una terna di punti base coincidenti, quelle che hanno il centro negli altri le reti con 3 coppie di tali punti.

22. — Segue dal n. 16 III che un piano tangente una o più volte a  $D$  è l'immagine di una  $F^*$  con altrettanti punti doppi.

La  $D$  avrà quindi una sviluppabile di piani bitangenti, ed un numero finito di piani tritangenti.

Esistono anche dei piani tangenti stazionari? Se  $P$  è generico su  $D$ ,  $P'$  l'omologo punto di  $D'$ , gli  $\infty^1$  fasci di piani che hanno per



assi le tangenti a  $D$  in  $P$  si trasformano in fasci di  $F^*$  tutte tangenti fra loro (n. 16 IV); in particolare le due rette osculatrici danno i fasci (immagini di fasci con contatto stazionario (n. 16 V)). Se  $P$  appartiene alla linea parabolica di  $D$ , ossia se è punto di contatto di un piano tangente stazionario, le due rette osculatrici coincidono in una sola, e quindi coincidono pure i fasci di  $F^*$  con contatto stazionario. Ora quando può aver luogo una tal coincidenza?

Vedemmo al n. 16 che se  $\Phi$  è il cono tangente alla superficie  $\bar{F}^*$  con punto doppio in  $P'$ , i piani di contatto dei due fasci in discorso sono i piani tangenti a  $\Phi$  condotti per  $S'$ . Se i due piani coincidono due sole ipotesi sono possibili: e  $S'$  è una generatrice di  $\Phi$ , o il cono si spezza in due piani. Nel primo caso l'intersezione di due  $F^*$  passanti semplicemente per  $P'$  è tangente  $\Phi$ , ossia ha almeno 3 intersezioni con  $\bar{F}^*$ ; quindi  $P'$  appartiene ad  $H'$ . Nel secondo caso la  $\bar{F}^*$  possiede un punto doppio biplanare. Se ne conclude che: la linea dei contatti dei piani tangenti stazionari di  $D$  (linea parabolica) è l'immagine della curva dei punti doppi biplanari di superficie  $F^*$ : e i piani stazionari rappresentano le superficie stesse.

La teoria delle superficie in  $S_3$  considera infine i piani comuni alla sviluppabile dei piani bitangenti ed a quella dei piani stazionari, e che sono inoltre stazionari per la prima, e sono i piani con un contatto semplice ed uno stazionario: e quelli comuni alle due sviluppabili ma che sono stazionari per la seconda, e sono i piani la cui sezione con  $D$  ha un tacnodo nel punto di contatto. I primi è chiaro che rappresentano superficie con un punto doppio ordinario ed uno biplanare. Sia  $F_1$  uno dei secondi,  $P$  il suo punto di contatto, che è un tacnodo per la sezione di  $F_1$  con  $D$ . Esso rappresenta ancora una  $F_1^*$  con punto biplanare in un punto  $P'$  di  $D'$ , la quale sega  $D'$  in una curva che ha pure un tacnodo in  $P'$ . Tali punti biplanari, come si vede applicando a  $P'$  una scomposizione della singolarità, sono di quelli studiati dal SEGRE al n.º 8 della sua memoria sulle singolarità delle superficie <sup>1)</sup>, ossia rappresentano due punti doppi infinitamente vicini.

---

<sup>1)</sup> *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche.* Annali di Matematica. Serie II, Tomo XXV, 1896.

23. — Essendo P generico in  $S_3$ , diciamo per brevità *contorno apparente* da P su D la curva dei contatti del cono circoscritto da P a D. *Questa curva insieme alla curva cuspidale H forma la jacobiana della rete segnata su D dai piani per P.*

Ciò può vedersi ad es. osservando che la serie caratteristica di una curva della rete comprende i punti cuspidali della curva, oltre ai contatti propri da P.

Si consideri il sistema lineare  $\infty^3$  dei contorni apparenti dai punti di  $S_3$  su D; la proposizione duale di quella precedente può porsi sotto questa forma: *La rete dei contorni apparenti su D dai punti di un piano ha per jacobiana la sezione di D col piano, più la curva parabolica.*

24. — Riassumiamo in un secondo quadro i principali risultati dei n.<sup>i</sup> 21, 22.

PROSPETTO II.

Alle $\infty^2$ stelle di piani col centro su D corrispondono.	Le $\infty^2$ rete di $ F^* $ con due punti base coincidenti.
Alle $\infty^1$ stelle col centro in H (curva cuspidale di D).	Le $\infty^1$ reti di $ F^* $ con 3 punti base coincidenti.
Alle $\infty^1$ stelle col centro su K (curva nodale).	Le $\infty^1$ reti con due coppie di punti base coincidenti.
Alle stelle col centro in un punto di G (gruppo dei punti cuspidali di H e semplici per K).	Le reti con 4 punti base coincidenti.
Alle stelle col centro in un punto di F (gruppo dei punti cuspidali per K e semplici per H).	Le reti con una terna ed una coppia di punti base coincidenti.
Alle stelle col centro in un punto di E (gruppo dei punti tripli triplanari di D, tripli anche per K).	Le superficie con 3 coppie di punti base coincidenti.
Agli $\infty^2$ piani tangenti di D.	Le superficie $F^*$ con un punto doppio.
Agli $\infty^1$ piani bitangenti di D.	Le superficie $F^*$ con due punti doppi.
Agli $\infty^1$ piani tangenti stazionari di D.	Le superficie $F^*$ con punto doppio biplanare.

- |  |  |
|--|--|
| <p>Ai piani comuni alla sviluppabile bitangente e a quella dei piani stazionari, ma che sono stazionari per la seconda.</p> <p>Ai piani comuni alle due sviluppabili ma stazionari per la prima.</p> <p>Ai piani tritangenti (tripli anche per la sviluppabile dei piani bitangenti).</p> <p>In un terzo quadro scriviamo i caratteri proiettivi dalla superficie D.</p> | <p>Le superficie con due punti doppi infinitamente vicini.</p> <p>Le superficie con un punto biplanare ed un punto doppio ordinario.</p> <p>Le superficie con 3 punti doppi.</p> |
|--|--|

## PROSPETTO III.

<p><math>\nu</math> ordine della superficie.</p> <p><math>b</math> ordine della linea nodale.</p> <p><math>c</math> ordine della linea cuspidale.</p> <p><math>r</math> rango della linea cuspidale.</p> <p><math>\beta</math> numero dei punti comuni alle due curve e stazionari per la seconda.</p> <p><math>\gamma</math> numero dei punti comuni alle due curve e stazionari per la prima.</p> <p><math>t</math> numero dei punti tripli triplanari per D, tripli anche per la linea nodale.</p> <p><math>\pi</math> genere di una sezione prima.</p> <p><math>\alpha</math> numero delle rette osculatrici che passano per un punto (o delle generatrici cuspidali di un cono circoscritto).</p>	<p><math>\nu'</math> classe della superficie.</p> <p><math>a = a'</math> rango della superficie</p> <p><math>b'</math> classe della sviluppabile bitangente.</p> <p><math>c'</math> classe della sviluppabile dei piani stazionari.</p> <p><math>r'</math> rango della sviluppabile dei piani stazionari.</p> <p><math>\beta'</math> numero dei piani comuni alle due sviluppabili e stazionari per la seconda.</p> <p><math>\gamma'</math> numero dei piani comuni alle due sviluppabili e stazionari per la prima.</p> <p><math>t'</math> numero dei piani tritangenti per D, tripli anche per la sviluppabile bitangente.</p> <p><math>\pi'</math> genere del cono circoscritto da un punto.</p> <p><math>\alpha'</math> numero delle rette osculatrici che giacciono in un piano (o dei flessi di una sezione piana).</p>
--	---

<p><math>\sigma</math> numero dei punti comuni alla linea cuspidale e al contorno apparente su D da un punto (classe della sviluppabile dei piani tangenti nei punti della linea cuspidale).</p>	<p><math>\sigma'</math> numero dei piani comuni alla sviluppabile dei piani stazionari e alla sviluppabile circoscritta ad una sezione piana (ordine della linea parabolica).</p>
<p><math>\rho</math> numero dei punti comuni alla linea nodale e al contorno apparente su D da un punto (classe alla sviluppabile dei piani tangenti nei punti della linea nodale).</p>	<p><math>\rho'</math> numero dei piani comuni alla sviluppabile bitangente e alla sviluppabile circoscritta ad una sezione piana (ordine della linea dei doppi contatti).</p>

Ricordiamo poi le 6 relazioni duali (V. SALMON-FIEDLER *Analytische Geometrie des Raumes*, vol. II pag. 671).

$$(28) \begin{cases} a(\nu-2) = \rho + \kappa + 2\sigma \\ b(\nu-2) = \rho + 2\beta + 3\gamma + 3t \\ c(\nu-2) = 2\sigma + 4\beta + \gamma \end{cases} \quad (28)' \begin{cases} a'(\nu'-2) = \rho' + \kappa' + 2\sigma' \\ b'(\nu'-2) = \rho' + 2\beta' + 3\gamma' + 3t' \\ c'(\nu'-2) = 2\sigma' + 4\beta' + \gamma' \end{cases}$$

25. — Nel seguito ci limiteremo alla ricerca di questi 3 caratteri di  $|F^n|$ : 1.º del numero delle superficie del sistema con due punti doppi infinitamente vicini 2.º del numero delle superficie con un punto doppio biplanare ed uno ordinario 3.º del numero delle superficie con 3 punti doppi.

Per questo cominciamo dal considerare una sezione piana di D, la quale ha il genere  $\pi$ , l'ordine  $\nu$ , la classe  $a$ , possiede  $c$  regressi e  $\kappa'$  flessi. Cerchiamo di esprimere per questi elementi l'ordine  $\sigma'$  della linea parabolica, che indichiamo con L. Detta C una sezione piana, si ha in primo luogo

$$(a) \quad [C + L, C] = [C^2] + [LC] = \nu + \sigma'.$$

Ma per il teorema del n.º 23 in fine,  $C + L$  è la jacobiana  $\Gamma^{(\nu)}$  del contorno apparente  $\Gamma$  su D da un punto. Si ha quindi:

$$[C + L, C] = [\Gamma^{(\nu)}c] = [\Gamma^{(\nu)} - 3\Gamma, C] + 3[\Gamma C].$$

Ma  $[\Gamma^{(v)} - 3\Gamma, C]$  è il carattere d'immersione di  $C$  in  $D^1$ ), carattere che essendo  $\pi$  e  $\nu$  genere e grado di  $C$  è uguale a  $2\pi - 2 - \nu$ : da cui:

$$(b) \quad [C + L, C] = 2\pi - 2 - \nu + 3[\Gamma C] = 2\pi - 2 - \nu + 3a$$

Infatti  $[\Gamma C] = a$  perchè il numero delle intersezioni del piano di  $C$  col contorno apparente su  $D$  da un punto del piano è eguale al numero delle tangenti che passano per il punto, e giacciono in quel piano, ossia al rango  $a$  della superficie.

Confrontando le (a) (b) si ottiene

$$\sigma' = 2\pi - 2 - 2\nu + 3a.$$

Si esprima il genere  $\pi$  per la classe  $a$  l'ordine  $\nu$  e il numero dei flessi  $\kappa'$  di  $C$ :

$$(c) \quad \pi = \frac{1}{2}(\nu + \kappa') - a + 1 \quad ^2).$$

Fatta questa sostituzione si ottiene

$$(29) \quad \sigma' = a - \nu + \kappa'.$$

Ora i numeri  $a, c, \kappa'$  cioè classe, numero delle cuspidi e dei flessi di una sezione piana generica si traducono in semplici caratteri di una rete di curve caratteristiche di  $|F^*|^3$ ) (V. SEVERI *Il genere aritmetico e il genere lineare ecc.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino Vol. XXXVII Disp. 15.<sup>a</sup> 1902-1903 n.° 3), e rappresentano cioè il numero delle curve di un fascio con punto doppio,

<sup>1)</sup> V. SEVERI. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino Volume XXXVII. Disp.<sup>a</sup> 15.<sup>a</sup> 1902-1903. *Sul genere aritmetico ecc.* n.° 1-2.

<sup>2)</sup> Questa formula risulta anche dalla definizione del genere mediante serie lineari. Basta considerare la serie formata dai gruppi di tangenti a  $C$  che escono dai punti di una retta.

<sup>3)</sup> Si osservi per questo che la curva  $C$  si può anche ottenere facendo l'immagine nel suo piano della rete di curve in questione, come fu appunto il SEVERI al n. 3 della sua memoria.

dei fasci che si osculano, e delle curve dotate di cuspidi. Si avranno quindi le formole <sup>1)</sup>

$$(29_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = n + 4p + 1 \\ c = 3(n + 6p - 1 + 8p_a - 2) \\ \kappa' = 24(p + p_a) \end{array} \right.$$

da cui segue immediatamente per la (29), sostituendo per  $\nu$  il valore (27<sub>b</sub>):

$$(29_b) \quad \sigma' = 1 + 24p_a + 26p - n + 2.$$

Cerchiamo in secondo luogo di calcolare il rango  $\nu'$  della linea parabolica L. Si consideri il fascio ( $\Gamma$ ) dei contorni apparenti su D dai punti di una retta R, fascio che può pensarsi segnato fuori delle linee multiple di D dal fascio delle polari dei punti di R. Questo fascio ha il genere  $\pi'$ ,  $\nu'$  punti base (quanti sono i piani tangenti che escono da R), dunque possiede in tutto

$$\nu' + 4\pi' + 1'$$

curve con punto doppio, essendo  $1'$ , il carattere di ZEUTHEN-SEGRE di D (v. Prospetto I). Tra i punti doppi di curve  $\Gamma$  vi sono i  $\nu$  punti comuni ad R e a D, che sono infatti di contatto per D e per le prime polari dei punti stessi.

Sia P un altro punto doppio di una  $\Gamma$ . Q il vertice del cono circoscritto a D lungo  $\Gamma$ . La prima polare di Q deve toccare per ipotesi D in O: quindi il piano  $\pi$  tangente a D in P (che passa per Q) è anche tangente in P alla prima polare di Q, ossia per il teorema delle polari miste è anche il piano tangente in Q alla quadrica polare di P. Siccome P e Q hanno lo stesso piano tangente rispetto alla detta quadrica, questa dev'essere un cono, e PQ una generatrice di questo cono. Perciò P appartiene alla linea parabo-

---

<sup>1)</sup> Mem. citata n. 10. Si noti che essendo la rete priva di punti base va fatto  $\sigma=0$ .

lica  $L$ , e la retta  $PQ$  è la retta osculatrice in  $P$  a  $D$  <sup>1)</sup>. Il ragionamento s'inverte subito, quindi i punti  $Q$  sono tanti quante sono le intersezioni di  $R$  con la sviluppabile delle rette osculatrici nei punti di  $L$ : ora questo numero è uguale al rango  $r'$  di questa sviluppabile (v. Prospetto II). <sup>2)</sup> Si hanno quindi in tutto  $\nu + r'$  punti doppi di curve  $\Gamma$ .

Ne segue  $\nu + r' = \nu' + 4\pi' + I$ , ossia:

$$r' = \nu' - \nu + 4\pi' + I.$$

Ora  $\pi'$  si può esprimere per  $\nu' \kappa a$  con la formula correlativa della (c):

$$\pi' = \frac{1}{2}(\nu' + \kappa) - a + 1$$

da cui

$$r' = 3\nu' - \nu + 2\kappa - 4a + I + 4.$$

Per  $\nu a$  sostituiamo i valori (27<sub>b</sub>)(29<sub>a</sub>).

Quanto  $a\nu'$  esso è il numero dei piani tangenti a  $D$  che passano per una retta, ossia (n.º 16 III) delle  $F^n$  di un fascio con punto doppio: quindi (n.º 18 formula (20)):

$$(30_a) \quad \nu' = 2p + 2I + Y.$$

Inoltre  $\kappa$  e  $c'$  sono il numero delle rette osculatrici e dei piani tangenti stazionari a  $D$  che escono da un punto generico di  $S_3$ , ossia dei fasci di una rete di  $|F^n|$  con contatto stazionario e delle superficie della rete con punto doppio biplanare <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> V. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*. Cap. 8.º n.º 12.

<sup>2)</sup> Veramente abbiamo chiamato  $r'$  il rango della sviluppabile dei piani tangenti stazionari. Ma queste due sviluppabili coincidono, e ciò vale anche per superficie non algebriche.

<sup>3)</sup> Abbiamo già visto che le rette osculatrici a  $D$  danno i fasci che sono immagini di fasci con contatto stazionario (n. 22) e che i piani tangenti stazionari rappresentano superficie con punto doppio biplanare (v. Prospetto II).

Questi numeri sono stati dati dal PANNELLI <sup>1)</sup>.

$$(30_b) \quad \begin{cases} \chi = 24(2P_a + 3p_a + p) \\ c' = 3(Y + 16P_a + I + 24p_a + 6p - n) \end{cases}$$

Infine per  $I'$  poniamo il suo valore (27) nella sua seconda forma. Fatte tutte queste sostituzioni nella (30) troviamo:

$$(30_c) \quad r' = 3Y + 120P_a + 2\Omega_0 + 384p_a - 14I + 76p - 6n + 114.$$

26. — Facciamo ora uso di una formola che è riportata in una memoria del PANNELLI <sup>2)</sup>.

$$(31) \quad 24(p'_a - 1) = c - 12a + 24v' + \beta' + 3r' - 15c' + 2\sigma'.$$

Di tutti gli elementi che compariscono in questa formola il solo  $\beta'$  è incognito. Degli altri  $p'_a$  è dato dalla (27) che prenderemo sempre nella sua seconda forma,  $c, a$  dalle (29<sub>a</sub>),  $v'$  dalla (30<sub>a</sub>),  $c'$  dalla (30<sub>b</sub>),  $\sigma'$  ed  $r'$  rispettivamente dalle (29<sub>b</sub>), (30<sub>c</sub>).

Non resta che da sostituire questi valori nella (31) per ottenere il valore di  $\beta'$ .

$$(31_a) \quad \beta' = 2[6Y + 204P_a + 3\Omega_0 + 552p_a - 22I + 58p - 8n + 166]$$

formola che dà (v. Prospetti II, III) *il numero delle superficie  $F^*$  con due punti doppî infinitamente vicini.*

27. — Si potrebbe di qui proceder direttamente al calcolo di  $\gamma', \ell'$ .

<sup>1)</sup> Queste formule sono state date per la prima volta dal PANNELLI in una nota (Sulle reti di superficie algebriche Rend. del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XX 1905 verso la fine della nota). Il PANNELLI dimostra poi queste formule in un'altra nota degli stessi Rendiconti (Su un carattere delle Varietà a 3 dimensioni . . . Tomo XXXII 2.º semestre 1911), limitatamente alle varietà intersezione completa di ipersuperficie. Con questa riserva ne facciamo qui uso. Si noti che nelle formule citate va posto  $\Pi_a = P_a$ ,  $P_a = p_a$ ,  $\Pi = Y$ ,  $P = I$ ,  $N = n$ . Inoltre siccome la rete in questione non ha curve basi deve intendersi  $\pi = 1$ .

<sup>2)</sup> Sulle reti di superficie algebriche Rend. del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XX 1905 formola (17). Si faccia  $n' = v'$ .



Ma noi vogliamo dare dei tre numeri  $\beta' \gamma' t'$  un'espressione più semplice e più significativa. Per questo si ponga:

$$(32) \quad \Theta = 2Y + 68P_a + \Omega_0 + 184p_a - 7I + 20p - 3n + 56.$$

Risulta allora confrontando la (31<sub>a</sub>) con la (32)

$$\beta' = 6\Theta + 2[2n + 2p - 2] - 2[n + 4p + 1]$$

ossia per la (27<sub>b</sub>) e per la prima delle (29<sub>a</sub>):

$$(33) \quad \beta' = 2[\nu - a + 3\Theta].$$

Per ottenere  $\gamma'$  basta valersi della ultima delle (28'), sostituendo a  $\sigma'$  il valore (29) e a  $\beta'$  il valore (33)

$$(34) \quad \gamma' = c'(\nu' - 2) - 2\pi' - 6[\nu - a + 4\Theta].$$

Infine per ottenere  $t'$  possiamo servirci della 2.<sup>a</sup> delle (28'), che ci dà

$$(34_a) \quad 3t' = b'(\nu' - 2) - \rho' - 2\beta' - 3\gamma'.$$

Ora  $b'$  è anche il numero dei piani bitangenti ad un cono circoscritto a D <sup>1)</sup> (V. Prospetto III). Questo cono ha l'ordine  $a$  (rango di D), la classe  $\nu'$  (classe di D),  $c'$  piani tangenti stazionari (V. Prospetto III): per questi 3 numeri si può esprimere mediante le formule di PLÜCKER il numero  $b'$

$$(34_b) \quad b' = \binom{\nu'}{2} - \frac{1}{2}(a + 3c')^2.$$

<sup>1)</sup> Infatti un piano tangente una e più volte a D uscente da un punto P è anche tangente altrettante volte al cono circoscritto da P a D. Analogamente un piano tangente stazionario a D uscente da P è anche tangente stazionario al cono stesso.

<sup>2)</sup> Infatti il genere del cono è dato da

$$\pi' = \frac{(\nu' - 1)(\nu' - 2)}{2} - b' - c'$$

ma anche dalla formula

$$\pi' = \frac{1}{2}(a + c') - \nu' - 1.$$

Confrontando le due relazioni segue appunto la (34<sub>b</sub>).

Quanto a  $\rho'$  esso può intendersi dato dalla prima delle (28')<sup>1)</sup>, e ponendo in questa per  $\sigma'$  il valore (29).

$$(34_e) \quad \rho' = a(\nu' - 2) + 2(\nu - a) - 3\kappa'.$$

Infine per  $\beta' \gamma'$  sostituiamc i valori (33) (34): troviamo allora, fatte le opportune riduzioni e dividendo per 3:

$$(35) \quad t' = \binom{\nu'}{3} - \frac{1}{2}(a + 3c')(\nu' - 2) + 3\kappa' + 4[\nu - a + 5\Theta].$$

RIASSUNTO.

Il sistema  $|F^*|$  possiede

$$2[\nu - a + 3\Theta]$$

*superficie con 2 punti doppî infinitamente vicini*

$$c'(\nu' - 2) - 2\kappa' - 6[\nu - a + 4\Theta]$$

*superficie con un punto biplanare ed un punto doppio ordinario*

$$\binom{\nu'}{3} - \frac{1}{2}(a + 3c')(\nu' - 2) + 3\kappa' + 4[\nu - a + 5\Theta]$$

*superficie con 3 punti doppî.*

*In queste tre formule  $\nu, a, \nu'$ , rappresentano il numero dei punti doppî appartenenti ad una serie lineare caratteristica ad un fascio di curve caratteristiche, ad un fascio di superficie del sistema, e sono date dalla (27<sub>b</sub>), dalla prima delle (29<sub>a</sub>) e dalla (30<sub>a</sub>).*

*Quanto a  $\kappa' c'$  essi sono rispettivamente il numero delle curve di una rete caratteristica dotate di cuspidi, e il numero delle superficie di una rete in  $|F^*|$ , dotate di un punto biplanare: essi hanno i valori dati dalla 3.<sup>a</sup> delle (29<sub>a</sub>) e dalla seconda delle (30<sub>b</sub>).*

*Infine  $\Theta$  ha il valore (32) [V. Appendice III].*

---

<sup>1)</sup> Ricordiamo che  $a' = a$  (v. Prospetto III).

**Appendice I.**

Le formule (19) (25) si possono estendere subito al caso di due varietà a 3 dimensioni  $VV^*$  in corrispondenza  $(n'n')$  senza eccezioni. Basta per questa, come già fece il SEVERI per le superficie, considerare l'ente  $\omega^3$  costituito dalle coppie di punti omologhi di  $VV^*$ . Si trova perciò subito

$$48[nP'_a - n'P_a] = 24(p_a - p'_a) - 3(\omega - \omega') + 3(\varphi - \varphi') - 2(\tau - \tau')$$

$$nY' - n'Y = (J - J') - 2(p - p') + (\chi - \chi')$$

dove  $p'_a \omega' \varphi' \tau' p' \chi'$  hanno i significati che si hanno da  $p_a \omega \varphi \tau p \chi$  scambiando  $V$  con  $V^*$ .

**Appendice II.**

Nelle formule (27) sono dati i caratteri  $p'_a \omega' I'$  del sistema jacobiano di  $|F|$  in funzione dei caratteri della varietà a 3 dimensioni, e di quelli del sistema  $|F|$ . Queste formule si calcolano immediatamente. Infatti detta  $K$  una superficie canonica, il sistema jacobiano di  $|F|$  è il sistema  $|K + 4F|$ . Ne segue:

$$p'_a = [K + 4F] = [K] + 4[K] + 4[KF] + 6[F^2] + 6[KF^2] + 4[F^3] - 6.$$

Ma  $[K] = \Omega_2$ ,  $[F] = p_a [F^2] = p [F^3] = n$ . Inoltre  $|K + F|$  (aggiunto di  $|F|$ ) segna su  $F$  il sistema canonico, il cui genere è  $\omega$ , quindi

$$(A) \quad \omega = [KF] + [F^2] + [KF^2] - 1 = [KF] + p + [KF^2] - 1.$$

Inoltre  $(K + 2F, F)$ , sistema aggiunto di  $(F^2)$  incontra la curva  $(F^2)$  in  $2p - 2$  punti ne segue

$$(B) \quad 2p - 2 = [KF^2] + 2[F^3] = 2[KF^2] + 2n.$$

Le due ultime relazioni danno successivamente

$$(C) \quad [KF^2] = 2p - 2 - 2n \quad [KF] = \omega - 3p + 2n + 3.$$

Sostituiti questi valori nella prima relazione si ottiene appunto

$$(I) \quad p'_a = \Omega_2 + 4p_a + 4\omega + 6p - 6.$$

Per calcolare  $\omega'$  procediamo ad es. in questa maniera:  $\omega' - 1$  è il grado del sistema canonico di  $|K + 4F|$ , che è segnato su esso dal sistema  $|2K + 4F|$ , aggiunta del precedente. Ne segue

$$\omega' - 1 = [(K + 4F)(2K + 4F)^2] = 4[K^3] + 32[K^2F] + 80[KF^2] + 64[F^3].$$

Ma  $[K^1] = \Omega_0, [F^3] = n, [KF^2]$  per la (C) è uguale a  $2p - 2 - 2n$ . Quanto a  $[K^2F]$  notiamo al solito che  $|K + F|$ , aggiunta di  $|F|$ , sega il nostro sistema in una curva il cui grado è  $\omega - 1$ . Ne segue

$$(D) \quad \omega - 1 = [(K + F)^2F] = [K^2F] + 2[KF^2] + [F^3]$$

ossia essendo  $[F^3] = n$ , ed osservando la (C):

$$(E) \quad [K^2F] = \omega - 4p + 3n + 3.$$

Fatte queste sostituzioni risulta infine

$$(II) \quad \omega' = 4\Omega_0 + 32\omega + 32p - 63.$$

Dalle (I) (II), osservando la  $\omega' + I' = 12p'_a + 9$  si ricava

$$(III) \quad I' = 12\Omega_2 - 4\Omega_0 + 48p_a + 16\omega + 40p.$$

Nelle (I) (II) (III) sostituiamo ora ad  $\omega$  il suo valore per  $p_a I$

$$\omega = 12p_a - I + 9$$

e inoltre dalle due relazioni

$$\Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 = 2P_a \quad 3\Omega_0 = 2\Omega_1 - 2$$

ricaviamo il valore di  $\Omega_2$  espresso per  $P_a, \Omega_0$

$$2\Omega_2 = 4P_a + \Omega_0 - 6$$

otteniamo le (27) scritte nella seconda forma.

**Appendice III.**

Le formule numeriche esplicite si ricavano da quelle del riassunto finale facendo le sostituzioni indicate. Si trova che il sistema possiede

$$\beta' = 2[6Y + 204P_a + 3\Omega_0 + 552p_a - 22I + 58p - 8n + 166]$$

superficie con due punti doppî infinitamente vicini

$$\begin{aligned} \gamma' = & 3[Y + 16P_a + I + 24p_a + 6p - n][2p + 2I + Y - 2] - \\ & - 6[8Y + 272P_a + 4\Omega_0 + 744p_a - 29I + 86p - 11n + 222] \end{aligned}$$

superficie con un punto biplanare ed un punto doppio ordinario

$$\begin{aligned} t = & \left( \frac{2p + 2I + Y}{3} \right) - \frac{1}{2} [n + 4p + I + 9(Y + 16P_a + I + 24p_a + 6p - n)] \\ & [2p + 2I + Y - 2] \\ & + 4[10Y + 340P_a + 5\Omega_0 + 938p_a - 36I + 116p - 14n + 278] \end{aligned}$$

superficie con tre punti doppî.

Si noti che queste formule applicate al sistema dei piani di un  $S_3$ , cioè facendovi  $Y=2$ ,  $P_a=0$ ,  $\Omega_0=-64$ ,  $p_a=0$ ,  $I=-1$ ,  $p=0$ ,  $n=1$  danno successivamente  $\beta'=\gamma'=\ell'=0$  come appunto doveva essere, mancando piani aventi una delle singolarità indicate.

Volendo fare una verifica più generale, ad es. sui sistemi lineari di superficie di un  $S_3$ , s'incontrano non poche difficoltà. Infatti per quel che io sappia le formule in discorso non erano state finora date, nemmeno nel caso indicato di un  $S_3$  o di una varietà razionale. D'altra parte è chiaro, che se si cercasse di verificare le formule stesse in  $S_3$ , specializzando il processo generale fin qui seguito, quelle verifiche non avrebbero che un valore illusorio.

Tuttavia avendo più volte ripetuto il procedimento in discorso, anche mutandolo talvolta nei particolari, credo di potere affermare l'esattezza dei risultati.